ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

François LESCURE & Laurent MEERSSEMAN

Compactifications équivariantes non kählériennes d'un groupe algébrique multiplicatif

Tome 52, n^{o} 1 (2002), p. 255-273.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_1_255_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 1 (2002), 255–273

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES NON KÄHLÉRIENNES D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE MULTIPLICATIF

par F. LESCURE et L. MEERSSEMAN

---

0. Introduction.

Soit G un groupe de Lie complexe connexe agissant holomorphiquement à gauche sur une variété compacte complexe connexe X. On dit que X est compactification équivariante (lisse) de G si et seulement si G est isomorphe à l'orbite, ouverte dans X, $\Omega = G\boldsymbol{x}_0$, d'un point $\boldsymbol{x}_0$ dont le stabilisateur est trivial dans G. L'orbite Ω est alors forcément dense dans X, et $D \overset{\text{def}}{=} X - \Omega$ est un diviseur (*cf.* [3] et [4]) *i.e.* un sous-ensemble analytique complexe de X dont chaque composante irréductible est de codimension 1.

Lorsque X est kählérienne, toute 1-forme holomorphe globale sur X est fermée et les identités de Hodge (cf [13]) impliquent

$$(*) \qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Alb}(X) = h^{1,0}(X) = \frac{b_1(X)}{2} = h^{0,1}(X)$$

où $h^{1,0}(X)$ est la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes globales sur X, et $h^{0,1}(X)$ la dimension du premier groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau structurel $\mathcal{O}_X$; par ailleurs $b_1(X)$ est le premier nombre de Betti de X et enfin $\mathrm{Alb}(X)$ désigne le tore d'Albanese de X.

Mots-clés : Actions de groupe – Variétés holomorphes compactes – Groupes algébriques.
Classification math. : 32J05 – 32M12 – 14M17.

Dans la situation d'une compactification équivariante générale, i.e. non nécessairement kählérienne, d'un groupe *commutatif*, toute 1-forme holomorphe globale est encore fermée, mais les égalités $(*)$ deviennent des inégalités (cf [4])

$$(**) \qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Alb}(X) \leqslant h^{1,0}(X) \leqslant \frac{b_1(X)}{2} \leqslant h^{0,1}(X)$$

et la non-kählérianité de X peut alors «être mesurée» par l'écart entre $h^{0,1}(X)$ et $h^{1,0}(X)$ d'une part, et par la dimension du tore d'Albanèse d'autre part, comme l'indiquent les deux résultats suivants :

THÉORÈME (voir [4]). — *Sous les hypothèses précédentes, X admet une modification kählérienne si et seulement si $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$.*

THÉORÈME (voir [11]). — *Sous les hypothèses précédentes, X est un fibré holomorphe localement trivial au-dessus de son tore d'Albanèse.*

Arrivé ici, on pouvait se poser la question de ce qu'il pouvait véritablement advenir lorsque ces hypothèses n'étaient pas vérifiées. Les méthodes de [4] permettent de voir que les compactifications équivariantes d'un groupe additif $\mathbb{C}^n$ sont toujours Moishezon et même rationnelles. En fait le cas d'un groupe multiplicatif [1] était crucial. En particulier on recherchait de telles compactifications avec des 1-formes holomorphes mais sans variétés d'Albanèse et que l'on trouvera dans [5]. Entretemps, indépendamment et par un procédé de construction entièrement différent (structure holomorphe transverse), on découvrait la classe infiniment plus générale des variétés LV-M (*cf.* [8]) que nous utilisons ici pour montrer que, dans l'ordre de la non kählérianité, «tout peut arriver» et plus précisément que pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < q$, il existe (en quantité infinie) des compactifications lisses X de $(\mathbb{C}^*)^n$ vérifiant

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Alb}(X) = \{0\} \qquad h^{1,0}(X) = p \qquad h^{0,1}(X) = q.$$

Nous rappelons, au paragraphe 1, la construction des variétés LV-M. Nous calculons au paragraphe 2 les premiers nombres de Dolbeault et la dimension de la variété d'Albanèse d'une variété LV-M générique. Hormis le cas du $h^{1,0}$, ces calculs ne sont faits ni dans [7] ni dans [8]. Au paragraphe 3,

[1] Les variétés toriques lisses compactes, qui sont exactement (cf [10] p. 10) les compactifications lisses *algébriques* de $(\mathbb{C}^*)^n$ pour lesquelles l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$ est également algébrique (auquel cas les membres de l'identité $(*)$ sont nuls, les dites variétés étant même rationnelles.) sont évidemment bien connues.

étant donnés $p < q$ deux entiers naturels, nous construisons une variété LV-M générique vérifiant les identités (†) puis un fibré en espaces projectifs au-dessus de cette variété, qui vérifie lui aussi les identités (†). Utilisant alors le fait que les variétés LV-M sont compactifications équivariantes d'un groupe de Lie commutatif, on en déduit que le fibré est quant à lui compactification de $(\mathbb{C}^*)^n$, ce qui achève la construction. Il est bon aussi de noter que l'utilisation des propriétés de généricité devraient permettre de rajouter aux variétés construites ici une hypothèse «d'indécomposabilité» comme par exemple la propriété de ne point avoir de revêtement fini qui serait aussi produit cartésien de deux variétés complexes.

1. Variétés LV-M.

a) Configurations admissibles.

Pour tout ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur à [6] [7] et [8]. *Dans la suite de l'article, nous utiliserons constamment, à quelques modifications mineures près* [2], *les notations introduites dans cette partie.*

Soit, fixé pour la suite, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$. Alors :

DÉFINITION 1.1. — *On appelle n-configuration, ou même plus brièvement si le contexte est dépourvu d'ambiguïtés, «configuration» la donnée :* $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n)$ *de n formes linéaires complexes $\Lambda^i \in [\mathbb{C}^m]^*$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$.*

On représentera souvent une configuration par une colonne de n termes dont chacun est une forme $\Lambda^i \in [\mathbb{C}^m]^*$ représentée par une ligne de m scalaires. Cette écriture représente donc une configuration par une matrice complexe à n lignes et m colonnes.

Pour la suite on identifiera $\mathbb{C}^m$ au facteur $0 \oplus \mathbb{C}^m$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m$; le contexte amènera alors à identifier les formes sur $\mathbb{C}^m$ aux formes sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m$ qui s'annulent sur le facteur $\mathbb{C} \oplus 0$, et on considérera aussi la forme linéaire $\varepsilon_*^0 \in [\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m]^*$ qui vaut 1 sur le vecteur $(1; 0, \ldots, 0)$ et qui s'annule sur $0 \oplus \mathbb{C}^m$. Enfin on introduira les formes $\widetilde{\Lambda}^i$ sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m$ par $\widetilde{\Lambda}^i = \varepsilon_*^0 + \Lambda^i$ de telle manière que $\widetilde{\Lambda}^i(\alpha, T) = \alpha + \Lambda^i(T)$. Si on prend d formes choisies parmi les Λ^i, dire que ces d formes engendrent $\mathbb{C}$-*affinement*

[2] Ainsi les $\mathbf{\Lambda}^i$ (*cf* immédiatement plus bas) que nous comprenons comme des formes linéaires, sont-elles, contrairement aux notations de [8], indexées en haut.

l'espace $[\mathbb{C}^m]^*$ (resp $\mathbb{R}$-*affinement* l'espace réel sous-jacent à $[\mathbb{C}^m]^*$) est équivalent à dire que les d formes $\widetilde{\Lambda}^i$ correspondantes engendrent sur $\mathbb{C}$ l'espace $\left[\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m\right]^*$ (*resp.* ont un rang *réel* supérieur ou égal à $2m+1$) ; auquel cas $d \geqslant m+1$ (*resp.* $d \geqslant 2m+1$).

Toujours avec $n > 2m$, désignons par $\mathcal{H}(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n)$ l'enveloppe convexe (réelle) de ces vecteurs dans $[\mathbb{C}^m]^*$. Alors

DÉFINITION 1.2. — *Soit, comme dans la définition 1,* $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n)$ *une* n*-configuration. On dira que* $\mathbf{\Lambda}$ *est une configuration* admissible, *si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) *la condition de Siegel :* $0 \in \mathcal{H}(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n)$.

(ii) *la condition d'hyperbolicité faible : pour tout* $2m$*-uplet* $(i_1, \ldots, i_{2m})$ *d'entiers compris entre* 1 *et* n*, on a* $0 \notin \mathcal{H}(\Lambda^{i_1}, \ldots, \Lambda^{i_{2m}})$.

Géométriquement, cela signifie que 0 est à l'intérieur du polytope convexe que forme l'enveloppe convexe de $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n)$, mais que 0 n'appartient à aucun $(2m-1)$-simplexe affine dégénéré ou non, engendré par $2m$ de ces vecteurs. Une application directe du théorème de Carathéodory (*cf.* [2] page 15) montre que $0 \in [\mathbb{C}^m]^*$ appartient à l'intérieur (dans $[\mathbb{C}^m]^*$) d'au moins un $2m$-simplexe engendré par $2m+1$ formes $\Lambda^{k_1}, \ldots, \Lambda^{k_{2m+1}}$ de la configuration. En particulier les $\widetilde{\Lambda}^i$ (*cf.* plus haut) sont de rang complexe (*resp.* réel) $\geqslant m+1$. (*resp.* $\geqslant 2m+1$).

À vrai dire une configuration admissible devrait plutôt être comprise comme un point de l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbf{diag}(n, \mathbb{C}))$, où $\mathbf{diag}(n, \mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices complexes $n \times n$-complexes diagonales, et les hypothèses permettent aisément de voir que les configurations admissibles sont en fait un ouvert $\mathcal{A} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbf{diag}(n, \mathbb{C}))$ de cet espace. On dira d'une propriété (P) des configurations admissibles qu'elle est *ouverte* si elle est vérifiée sur un ouvert de $\mathcal{A}$ *i.e.* inchangée par perturbation assez petite. On dira d'une telle propriété (P) comme ci-dessus qu'elle est *générique* si elle est vraie sur un ouvert dense dont le complémentaire [3] est de mesure nulle. Enfin, on dira qu'une propriété (P) est vraie *presque partout* (ou aussi quelquefois «*génériques en mesure*») si l'ensemble des configurations où elle n'est point vraie est une partie de $\mathcal{A}$ de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbf{diag}(n, \mathbb{C})) \approx \mathbb{C}^{mn}$).

Soit maintenant $\mathbf{\Lambda}$ une configuration admissible. On dira que $\mathbf{\Lambda}$ est $\mathbb{R}$-*bonne* si et seulement si toute sous-famille $\Lambda^{i_1}, \ldots, \Lambda^{i_{2m+1}}$ de $2m+1$

[3] Évidemment en général défini par des équations réelles analytiques.

des formes qui définissent la configuration, engendre *affinement* l'espace réel sous-jacent à $\left[\mathbb{C}^m\right]^*$. Cette condition est évidemment équivalente à dire que pour toute sous-famille à $2m+1$ éléments comme plus haut, le système d'équations à $2m+1$ inconnues *réelles* s_i donné par : $s_1\Lambda^{i_1}+\ldots+s_{2m+1}\Lambda^{i_{2m+1}}=0$ et $s_1+\ldots+s_{2m+1}=0$ n'admet aucune solution non triviale.

De la même manière, on dira que la configuration admissible $\mathbf{\Lambda}$ est $\mathbb{C}$-*bonne* si et seulement si le plus petit sous-espace *affine* complexe qui contient toute sous-famille $\Lambda^{i_1},\ldots,\Lambda^{i_{m+1}}$ de $m+1$ des formes qui définissent la configuration est précisément $[\mathbb{C}^m]^*$ tout entier. Cette condition est évidemment équivalente à dire que pour toute sous-famille à $m+1$ éléments comme plus haut, le système d'équations à $m+1$ inconnues *complexes* $s_1,\ldots,s_{m+1}$ donné par : $s_1\Lambda^{i_1}+\ldots+s_{m+1}\Lambda^{i_{m+1}}=0$ et $s_1+\ldots+s_{m+1}=0$ n'admet aucune solution non triviale.

Enfin, on dira qu'une configuration $\mathbf{\Lambda}\in\mathcal{A}$ est *bonne* si et seulement si elle est à la fois $\mathbb{R}$-bonne et $\mathbb{C}$-bonne. Il est immédiat que les bonnes configurations forment un ouvert dense $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ dont le complémentaire est un sous-espace analytique réel rare. D'être bonne est donc une propriété générique au sens donné plus haut.

b) Variétés définies par la structure holomorphe transverse.

Considérons maintenant l'action de $\mathbb{C}^m$ sur $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ donnée par

$$(\Phi)\qquad \begin{cases} \mathbb{C}^m\times(\mathbb{C}^*)^{n-1}\longrightarrow(\mathbb{C}^*)^{n-1}\\ (T,v^2,\ldots,v^n)\longmapsto(v^2.e^{<\Lambda^2-\Lambda^1,T>},\ldots,v^n.e^{<\Lambda^n-\Lambda^1,T>})\end{cases}$$

où $<-,->$ désigne le produit *scalaire* et non le produit hermitien. Remarquons que, si nous injectons $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ comme ouvert dense de $\mathbb{CP}^{n-1}$ par

$$(v^2,\ldots,v^n)\in(\mathbb{C}^*)^{n-1}\mapsto[1,v^2,\ldots,v^n]\in\mathbb{CP}^{n-1},$$

où les crochets représentent la classe d'un élément de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{CP}^{n-1}$, alors nous pouvons prolonger l'action (Φ) en une action $\tilde{\Phi}$ de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{CP}^{n-1}$ par

$$(\tilde{\Phi})\qquad \begin{cases} \mathbb{C}^m\times\mathbb{CP}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{CP}^{n-1}\\ \qquad (T,[w])\longmapsto[w^1,w^2.e^{<\Lambda^2-\Lambda^1,T>},\ldots,w^n.e^{<\Lambda^n-\Lambda^1,T>}]\end{cases}$$

qui s'écrit encore

$$\tilde{\Phi}(T,[w])=[w^1.e^{<\Lambda^1,T>},\ldots,w^n.e^{<\Lambda^n,T>}].$$

Si maintenant $w \in \mathbb{CP}^{n-1}$, posons : $I_w = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } w^i \neq 0\}$, de telle sorte que $\mathbb{C}^{I_w} \subset \mathbb{C}^n$ soit le plus petit sous-espace engendré par des vecteurs de la base canonique qui contienne $w \in \mathbb{C}^n$. On définit alors l'ouvert $V \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ par

$$V = \{[w] \in \mathbb{CP}^{n-1} \mid 0 \in (\mathcal{H}(\Lambda^i))_{i \in I_w}\}$$

qui est le projectivisé de l'ouvert $S = \{w \in \mathbb{C}^n \mid 0 \in (\mathcal{H}(\Lambda^i))_{i \in I_w}\}$ de $\mathbb{C}^n$.

Avec cette définition, et au moyen des conditions de Siegel et d'hyperbolicité faible, on montre alors, dans [8], que l'espace quotient de V pour la $\mathbb{C}^m$-action $\tilde{\Phi}$ qui devient *libre* lorsque restreinte à V, est une variété compacte complexe N, que nous dénommerons dorénavant variété LV-M. Notons que N peut être vu comme le quotient de l'ouvert de Siegel S par la composée (commutative) de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^n$ par des homothéties et de l'action $\tilde{\Phi}$.

Par ailleurs, V admet une action quasi-homogène (torique) fidèle du groupe commutatif $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ qui prolonge celle donnée par les translations à gauche sur $(\mathbb{C}^*)^{n-1} \subset V$. Par l'action $\tilde{\Phi}$, le groupe de Lie additif $\mathbb{C}^m$ s'interprète comme un sous-groupe de Lie *fermé* L de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ (comme feuille *fermée* passant par le point-base $(1, \dots, 1)$) et, par passage au quotient, la variété N est une compactification équivariante holomorphe du groupe de Lie complexe commutatif $G = (\mathbb{C}^*)^{n-1}/L$.

Rappelons alors (voir [9]) qu'un groupe de Lie complexe abélien connexe est isomorphe à $\mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^s \times C$, où r et s sont des entiers naturels donnés et où C est un groupe de Cousin, *i.e.* un groupe de Lie complexe connexe dont les seules fonctions holomorphes globales sont les constantes. Dans notre contexte, l'écriture de G comme $(\mathbb{C}^*)^{n-1}/L$ entraîne une décomposition $G \simeq (\mathbb{C}^*)^a \times C$ donc sans facteur additif $\approx \mathbb{C}^r$.

Considérons le système de $m+1$ équations à n inconnues réelles $(s_1, \dots, s_n)$:

$$\text{(S)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} s_i \Lambda^i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} s_i = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}$ comme plus haut ; on montre alors dans [8] :

PROPOSITION 1.3 [7, proposition IV.1]. — *Sous les hypothèses précédentes ($\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}$), on a*

(i) *G est isomorphe à $\mathbb{C}^{n-m-1}$ quotienté par le réseau engendré par la base canonique de $\mathbb{C}^{n-m-1}$ et les m vecteurs précisément représentés dans cette base canonique par les m colonnes :* $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = BA^{-1}$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda^2 - \Lambda^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \Lambda^{m+1} - \Lambda^1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} \Lambda^{m+2} - \Lambda^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \Lambda^n - \Lambda^1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *G est un groupe de Cousin si et seulement si le système* (S) *ne possède aucune solution rationnelle non trivale. Cette dernière propriété étant vérifiée presque partout.*

Remarque 1.4. — C'est évidemment le fait que la configuration $\mathbf{\Lambda}$ soit *bonne* qui permet d'assurer que la matrice A est inversible, propriété utilisée sans plus de précisions dans l'énoncé.

Remarque 1.5. — Le calcul direct du réseau de G donne en fait non pas le réseau décrit précédemment mais son homothétique par $2i\pi$. Nous avons préféré supprimer ce facteur $2i\pi$, ce qui laisse inchangé la structure de groupe de Lie complexe de G.

2. Tore d'Albanèse et premiers nombres de Dolbeault d'une variété LV-M générique.

a) Premier nombre de Betti d'une variété LV-M.

Soient $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^n) \in \mathcal{B}$ une bonne configuration admissible de $\mathbb{C}^m$ et N sa variété LV-M associée. Nous gardons les notations de la première partie.

LEMME 2.1. — *En permutant, si nécessaire, l'ordre des coordonnées $z^1, \dots, z^n$, ce qui n'altère ni l'hyperbolicité faible, ni la propriété d'être bonne, on peut supposer que*

(i) *Il existe $k \geqslant 0$ tel que V soit le projectivisé d'un cône épointé $(\mathbb{C}^*)^k \times S_0 \subset \mathbb{C}^n - \{0\}$, où S_0 désigne le complémentaire, dans $\mathbb{C}^{n-k}$, d'une réunion finie de sous-espaces vectoriels* de codimension complexe supérieure ou égale à deux.

(ii) *Le groupe fondamental de N vaut*

$$\begin{aligned}\pi_1(N) &= \mathbb{Z}^{k-1} \quad \text{si} \quad k > 0\\ &\quad 0 \quad \textit{sinon.}\end{aligned}$$

Preuve.— (i) Rappelons (voir le paragraphe 1) qu'on définit V comme le projectivisé de l'ouvert $S = \{w \in \mathbb{C}^n \mid 0 \in (\mathcal{H}(\Lambda^i))_{i \in I_w}\}$ avec $i \in I_w \iff w^i \neq 0$. Cet ouvert S est, d'après cette définition, le complémentaire d'un arrangement de sous-espaces coordonnées (i.e. chacun du type $\{z^{i_1} = \ldots = z^{i_p} = 0\}$) dans $\mathbb{C}^n$. Soit k le nombre d'hyperplans contenus dans cet arrangement. En permutant l'ordre des coordonnées on peut supposer qu'ils sont respectivement d'équation $z^1 = 0, \ldots, z^k = 0$, si bien que $S = (\mathbb{C}^*)^k \times S_0$ où S_0 est le complémentaire, dans $\mathbb{C}^{n-k}$, d'un arrangement de sous-espaces de codimension supérieure ou égale à deux. Par « transversalité de Thom » le premier groupe d'homotopie de V est celui du complémentaire de k hyperplans en position générale dans $\mathbb{CP}^{n-1}$.

(ii) La projection holomorphe naturelle de V sur N, compacte, est, par le lemme d'Ehresmann, une fibration holomorphe $\mathbb{C}^m$-principale. La suite exacte en homotopie de cette fibration associée à la décomposition du (i) donne alors le résultat.

Les entiers n, m et k étant fixés, disons maintenant qu'une configuration admissible vérifie la propriété (P_k) si et seulement si elle vérifie la conjonction des propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) Si $1 \leqslant j \leqslant k$ alors : $0 \notin \mathcal{H}\big(\Lambda^1, \ldots, \widehat{\Lambda^j}, \ldots, \Lambda^{k+1}, \ldots, \Lambda^n\big)$.

(ii) Si $k < j \leqslant n$, alors : $0 \in \mathcal{H}\big(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^k, \ldots, \widehat{\Lambda^j}, \ldots, \Lambda^n\big)$.

Cette condition signifie aussi que l'hyperplan d'équation $z^j = 0$ est contenu dans S quand $j > k$ et ne l'est pas quand $j \leqslant k$. En particulier, dans l'hypothèse où $k < n$ la définition même de l'hyperbolicité faible montre, si $k < j \leqslant n$, que : $\boldsymbol{\Lambda}^{\widehat{j}} \overset{\text{def}}{=} \big(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^k, \ldots, \widehat{\Lambda^j}, \ldots, \Lambda^n\big)$ est une configuration admissible dans $\big([\mathbb{C}^m]^*\big)^{n-1}$ qui est de surcroît bonne dès que $\boldsymbol{\Lambda}$ l'est. En particulier $k < n$ montre aussi que $n - 1 \geqslant 2m + 1$. Le lemme 2.1 signifie exactement que l'on peut toujours permuter les n coordonnées de manière à ce que la configuration admissible vérifie, pour un entier k évidemment univoquement déterminé, la propriété (P_k) au sujet de laquelle nous faisons l' :

Observation 2.1bis. L'entier k compris entre 1 et n étant fixé la propriété (P_k) est une propriété ouverte de la configuration, et on désigne par $\mathcal{A}_{P_k}$ l'ouvert correspondant.

En effet, si $j \leqslant k$, 0 qui est situé à une distance strictement positive du compact $\mathcal{H}(\Lambda^1, \ldots, \widehat{\Lambda^j}, \ldots, \Lambda^{k+1}, \ldots, \Lambda^n)$, continue à l'être par perturbation assez petite de la configuration admissible. Enfin par annexe, si $j > k$, 0 est en fait dans *l'intérieur* du convexe compact $\mathcal{H}(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^k, \ldots, \widehat{\Lambda^j}, \ldots, \Lambda^n)$, et le reste donc aussi par pertubation assez petite. Cette observation n'est évidemment point si étonnante si l'on songe que par déformation de la structure analytique le premier nombre de Betti de N reste inchangé...

b) Calcul de $h^{1,0}(N)$ lorsque $\mathbf{\Lambda}$ est une bonne configuration.

Nous supposerons dorénavant que N est une compactification G-équivariante (*cf* paragraphe 1) d'un groupe de Cousin G, ce qui revient, d'après le (ii) de la proposition 1.3, à faire sur $\mathbf{\Lambda}$, définissant N, une hypothèse qui est vérifiée presque partout ; auquel cas on dira que N «*possède la propriété de Cousin*». Par le (i) de cette même proposition, nous identifierons G au quotient de $\mathbb{C}^{n-m-1}$ par le réseau engendré par la base canonique de $\mathbb{C}^{n-m-1}$ et m vecteurs définis en fonction des Λ^i. Remarquons que nous avons un diagramme commutatif de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$-fibrés principaux

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow[\exp]{} & (\mathbb{C}^*)^n \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi_{|(\mathbb{C}^*)^n} \\ G & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^{n-1}/L \end{array}$$

où ψ représente la projection naturelle de S sur N, c'est-à-dire la projection de S sur l'espace quotient de S par l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ décrite au paragraphe 1. Par exp, nous désignons l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $(\mathbb{C}^*)^n$ consistant à prendre l'exponentielle de chaque coordonnée. Enfin $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ agit au moyen de translations sur $\mathbb{C}^n$ par

$$(\alpha, T, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \xmapsto{\mathbf{A}} (z_1 + \alpha + < \Lambda^1, T >, \ldots, z_n + \alpha + < \Lambda^n, T >) \in \mathbb{C}^n$$

qui induit, par exp, l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur $(\mathbb{C}^*)^n \subset S$. L'espace quotient de $\mathbb{C}^n$ par l'action $\mathbf{A}$ est G et nous notons par ϕ la projection naturelle de $\mathbb{C}^n$ sur G.

Le résultat suivant figure dans [8]. Pour la commodité du lecteur, nous en redonnons toutefois la démonstration en faisant une hypothèse supplémentaire et générique en mesure sur la configuration. Évidemment l'énoncé 2.2 suffira pour nos besoins puisque cette hypothèse supplémentaire, à savoir $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}_{P_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{P_k}$, sera toujours vérifiée dans les cas que nous aurons à considérer.

LEMME 2.2 [8, Theorem 5]. — *Soit N une variété LV-M définie par une configuration $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}_{P_k}$. Alors, avec les notations précédentes, on a*

$$h^{1,0}(N) = \max(0, k - m - 1).$$

Preuve. — Soit ω une 1-forme holomorphe globale sur N. Elle donne, par restriction, une 1-forme $\tilde{\omega}$ sur G. Reprenons le diagramme commutatif précédent. Comme G ne possède pas de fonctions holomorphes non constantes, $\tilde{\omega}$ est le projeté par ϕ d'une forme

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} a_i d\zeta^i \qquad\qquad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

sur $\mathbb{C}^n$, basique pour l'action $\mathbf{A}$ ci-dessus. Cette forme $\tilde{\Omega}$ est le pull-back par exp d'une forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dz^i}{z^i} \qquad\qquad a_i \in \mathbb{C}$$

basique pour l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ *i.e.* dont les coefficients a_i sont solutions du système (S) du paragraphe 1.

Remarquons que, toujours de par le diagramme commutatif précédent, Ω n'est rien d'autre que la restriction à $(\mathbb{C}^*)^n \subset S$ du pull-back de ω par ψ. Par le lemme 2.1, on peut supposer $S = (\mathbb{C}^*)^k \times S_0$. Dès lors, le fait que Ω se prolonge à S entraîne la nullité des coefficients a_i pour $i > k$. Ceci nous permet de conclure que les 1-formes holomorphes globales de N sont les projetés par ψ des formes $\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{dz^i}{z^i}$, $a_i \in \mathbb{C}$ avec

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \Lambda^i = 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$$

que nous considérons comme un système linéaire complexe de $m + 1$ équations à k inconnues. Si $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}$, ce système est de rang maximal, donc le nombre de solutions linéairement indépendantes vaut $\max(0, k - m - 1)$.

Ceci dit toutes les valeurs éventuelles possibles de $h^{1,0}(N)$ peuvent s'obtenir avec l'hypothèse $k \geqslant m+1$; hypothèse que nous ferons désormais.

c) Hypothèses vraies presque partout qui assurent l'annulation de la variété d'Albanèse.

On voit donc que l'espace $\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} H^0(N, d\mathcal{O}_M)$ s'interprète comme le sous-espace des formes invariantes sur le groupe de Lie $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ qui s'annulent lorsque restreintes à une orbite de $\mathbb{C}^m$ pour l'action Φ, comme aussi à une orbite de $1 \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$. Identifié naturellement à un sous-espace du dual de l'algèbre de Lie du groupe on l'identifie aux formes linéaires sur $\mathbb{C}^{n-1}$ qui s'annulent sur les sous-espaces $0 \oplus \mathbb{C}^{n-k}$ et $\mathrm{Im}\Psi$ où Ψ : $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{n-1}$ est l'homomorphisme défini par la juxtaposition $\Psi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ des matrices données dans le (i) de la proposition 1.3. Considérons maintenant la matrice $B_{|k}$ qui consiste à prendre les $k-m-1$ premières lignes de la matrice B donnée en ibidem. Par juxtaposition de A et de $B_{|k}$ on obtient la matrice $\Psi_{|k} = \begin{pmatrix} A \\ B_{|k} \end{pmatrix}$ explicitée par : $\Psi_{|k} = \begin{pmatrix} \Lambda^2 - \Lambda^1 \\ \cdots \\ \Lambda^k - \Lambda^1 \end{pmatrix}$.

Via l'image réciproque par exp : $\mathbb{C}^{k-1} \to (\mathbb{C}^*)^{k-1}$, on obtient donc l'identification naturelle : $\mathbf{H} \approx \left[\mathbb{C}^{k-1}/\mathrm{Im}\Psi_{|k}\right]^*$ et donc aussi : $\mathbf{H}^* \approx \mathbb{C}^{k-1}/\mathrm{Im}\Psi_{|k}$. À un facteur $2\pi i$ près, on voit donc que la flèche $H_1(N,\mathbb{Z}) \to \mathbf{H}^*$ n'est rien d'autre que la flèche composée : $\mathbb{Z}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{k-1} \xrightarrow{s} \mathbb{C}^{k-1}/\mathrm{Im}\Psi_{|k}$. Si bien que, par la composition : $\mathbb{C}^{k-m-1} \to 0 \oplus \mathbb{C}^{k-m-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{k-1} \xrightarrow{s} \mathbf{H}^*$ on obtient un isomorphisme, par l'image réciproque duquel $H_1(N,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbf{H}^*$ est, à homothétie de rapport $2\pi i$-près, engendré par les $h = k-m-1 = h^{1,0}$ vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ de la base canonique et par les vecteurs qui, précisément dans cette base canonique, sont représentés par les m colonnes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ de la matrice [4] $B_{|k}A^{-1}$ qui est à $k-m-1 = h$ lignes. Par [1], on sait alors que $b_1(N) = m+h = k-1 \geqslant 2h$ c'est-à-dire aussi $2m+1 \geqslant k$. La partie $\mathcal{B}'_{P_k}$ de $\mathcal{B}_{P_k}$ pour laquelle les $2h$ vecteurs $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_h)$ constituent une base réelle de $\mathbf{H}^* \approx \mathbb{C}^{k-m-1}$ est évidemment un ouvert dense $\mathcal{B}'_{P_k} \subset \mathcal{B}_{P_k}$, dont le complémentaire dans $\mathcal{A}_{P_k}$ est de mesure nulle.

Toujours avec $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}'_{P_k}$, considérons maintenant la $(h+1)$-ème-colonne $\mathbf{b}_{h+1}$ de la matrice $B_{|k}A^{-1}$. On définit $2h$ nombres réels $\lambda^1, \ldots, \lambda^{2h}$ par

$$\mathbf{b}_{h+1} = \lambda^1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda^h\varepsilon_h + \lambda^{h+1}\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda^{2h}\mathbf{b}_h.$$

[4] $\mathbf{\Lambda}$ bonne configuration implique évidemment que la matrice A est une $m \times m$-matrice inversible.

Les quantités λ^k sont des fonctions réelles analytiques de la configuration $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}'_{P_k}$.

Soit maintenant $(a_1, \ldots, a_{2h}; q) \in \mathbb{Z}^{2h} \times \mathbb{Q}$, où on suppose les a_i non simultanément nuls. La fonction $\mathcal{B}'_{P_k} \ni \mathbf{\Lambda} \mapsto a_1\lambda^1 + \ldots + a_{2h}\lambda^{2h} - q \in \mathbb{R}$ est réelle analytique, nulle part localement constante, et s'annule donc en un lieu $Z(a_1, \ldots, a_{2h}; q) \subset \mathcal{B}'_{P_k}$ fermé, rare, et de mesure nulle. On définit donc une partie $Z \subset \mathcal{B}'_{P_k}$ de mesure nulle en posant

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(a,q)\in\mathbb{Z}^{2h}\times\mathbb{Q}} Z(a,q).$$

Lemme 2.3. — *Soit N une variété LV-M définie par une configuration $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}'_{P_k} - Z$. Alors le tore d'Albanèse de N est nul.*

Preuve. — La définition même du tore d'Albanèse de N (cf [1]) et tout ce qui précède, montre que $\mathrm{Alb}(N)$ qui est le quotient de l'espace $\mathbf{H}^*$ (dual de l'espace des 1-formes holomorphes globales fermées sur N) par le plus petit sous-groupe de Lie *complexe fermé* contenant l'image du premier groupe d'homologie $H_1(N, \mathbb{Z})$ dans $\mathbf{H}^*$ (par évaluation des 1-formes holomorphes fermées sur les 1-cycles en homologie singulière) est donc isomorphe au quotient de $\mathbb{C}^h$ par le plus petit sous-groupe de Lie complexe fermé qui contient la base canonique $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ et les m vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$. On est immédiatement assuré de la nullité de la variété d'Albanèse si, par exemple, les $2h+1$ vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{h+1}$ engendrent un sous-groupe totalement discontinu mais dense dans $\mathbb{C}^h$. Rappelons un critère classique qui, de manière très générale, assure une telle densité :

Lemme de Kronecker. — *Soit $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d$ et désignons par $\mathbf{u}$ sa classe dans le groupe quotient $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ qui est un tore compact réel. Si $u^1, \ldots, u^d$ sont les coordonnées de $\tilde{\mathbf{u}}$ et que $\overline{\mathbb{Z}\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ désigne l'adhérence du sous-groupe engendré par $\mathbf{u}$, alors $\overline{\mathbb{Z}\mathbf{u}} \neq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ si et seulement si il existe $a_1, \ldots, a_d$ dans $\mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $\sum a_k u^k \in \mathbb{Q}$.*

On voit alors, en identifiant $\mathbf{H}^*$ à $\mathbb{R}^{2h}$ via la base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_h$ que le lemme 2.3 résulte du «lemme de Kronecker» avec $d = 2h$.

d) Calcul de la dimension de $\mathbf{H^1}(N, \mathcal{O}_N)$.

Il nous reste à calculer $h^{0,1}(N)$, ce qui constitue le point délicat de cette partie. Nous supposerons désormais que G est un groupe de Cousin «générique», i.e. un groupe de Cousin dont la cohomologie de Dolbeault est séparée. Ceci revient à imposer une condition générique au réseau, donc une condition générique à $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^n)$. Cette condition est explicitée dans [12]. Lorsque elle est vérifiée nous dirons que $\mathbf{\Lambda}$ *vérifie la condition de Vogt.* L'hypothèse $2m+1 > n$ assure que les configurations admissibles qui ne vérifient pas la condition de Vogt sont de mesure nulle dans $\mathcal{A}$.

Remarque 2.4. — Un groupe de Cousin G avec $\dim_{\mathbb{C}} G = h$ et $b_1(G) = m+h$, peut toujours être compris comme le quotient du groupe de Lie additif $\mathbb{C}^h$ par un sous-groupe discret commutatif engendré par les h vecteurs de la base canonique et m vecteurs $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$. Une petite variation des vecteurs $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ permet d'obtenir toutes les déformations de groupe de Lie complexe assez voisines de G. Ainsi, avec les notations du corps de l'article, l'égalité $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = BA^{-1}$ permet de voir que toutes ces déformations voisines s'obtiennent par petites déformations de la configuration $\mathbf{\Lambda}$ à partir de laquelle on a construit G. À partir de là il est aisé de voir que les configurations «de Vogt» $\mathbf{\Lambda}$ sont «génériques en mesure» dans $\mathcal{A}$.

Rappelons par ailleurs quelques résultats sur les groupes de Cousin, que l'on trouvera dans [12]. Il existe un tore complexe compact T de dimension m sur lequel G fibre en $(\mathbb{C}^*)^{n-2m-1}$ (c'est une application directe de [12, Proposition 3]). Dire que G possède la propriété de Vogt équivaut à l'existence d'un isomorphisme entre les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^1(G, \mathcal{O}_G)$ et $H^1(T, \mathcal{O}_T)$ [12, §4]. Enfin, lorsque $\mathbf{\Lambda}$ est bonne et que G est un groupe de Cousin qui vérifie la propriété de Vogt, nous dirons que $\mathbf{\Lambda}$ est *excellente* ou encore que N, la variété LV-M qu'elle définit, est *excellente.* Ceci précisé, commençons par montrer

LEMME 2.5. — *Soit N une variété LV-M compactification équivariante définie par une configuration excellente $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}_{P_k}$, d'un groupe de Cousin G; alors*

(i) *$N - G$ est une réunion $N_1 \cup \ldots \cup N_p$ de variétés LV-M de dimension $n-1$.*

(ii) *Chaque N_i est compactification d'un sous-groupe G_i de G qui est un groupe de Cousin.*

Preuve. — (i) On a : $S = (\mathbb{C}^*)^k \times S_0$, et la décomposition

$$S = (\mathbb{C}^*)^n \sqcup \{(S \cap \{z^{k+1} = 0\}) \cup \ldots \cup (S \cap \{z^n = 0\})\}$$

où $\sqcup$ désigne une union disjointe. Il est immédiat que chacun des sous-ensembles intervenant dans cette décomposition est invariant par l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$. Par passage au quotient, on obtient une décomposition : $N = G \sqcup (N_1 \cup \ldots \cup N_{n-k})$ où N_j est la variété LV-M de configuration $\widehat{\mathbf{\Lambda}^{j+k}} = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{j+k-1}, \Lambda^{j+k+1}, \ldots, \Lambda^n)$ dans $\left([\mathbb{C}^m]^*\right)^{n-1}$.

(ii) La variété N étant compactification équivariante du groupe G, la sous-variété G-invariante N_i est compactification équivariante d'un sous-groupe G_i de G obtenu comme quotient de G par le sous-groupe d'ineffectivité de G agissant sur N_j. Comme la configuration définissant N_j est $\widehat{\mathbf{\Lambda}^{j+k}}$, obtenue par suppression de Λ^{j+k} dans $\mathbf{\Lambda}$, une application du (ii) de la proposition 1.3 montre que les sous-groupes G_i sont également de Cousin.

Notons que, lorsqu'elle est non vide, l'intersection de deux variétés N_i est encore compactification équivariante d'un groupe de Cousin, et aussi que les N_j qui sont les composantes irréductibles de $D \stackrel{\text{def}}{=} N_1 \cup \cdots \cup N_{n-k}$ sont lisses et à croisements normaux.

Donnons maintenant des précisions sur la cohomologie locale (ou à support) dans D. Considérons tout d'abord, si j est compris entre 1 et $n-k$, la transformation

$$\mathbb{C}^* \ni \zeta \stackrel{\widetilde{\theta_j}}{\mapsto} (1, \ldots, \zeta, \ldots, 1) \in (\mathbb{C}^*)^{n-1}$$

où ζ est placé à la $(j+k-1)$-ème place. Considérons la composée $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\widetilde{\theta_j}} (\mathbb{C}^*)^{n-1} \to G = (\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathrm{Im}\Phi$, on obtient une flèche $\theta_j : \mathbb{C}^* \hookrightarrow G$, et donc une $\mathbb{C}^*$-action sur N au sujet desquelles nous allons énoncer :

LEMME 2.6. — *Si N est défini par une configuration $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{B}_{P_k}$, l'homomorphisme composé θ_j est injectif et la $\mathbb{C}^*$-action effective sur N qui en résulte stabilise ponctuellement précisément N_j.*

Par injectivité de $\widetilde{\theta_j}$, il suffit de montrer que $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\widetilde{\theta_j} \cap \mathrm{Im}\Phi$ implique $\boldsymbol{z} = (1, \ldots, 1) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n-1}$. Rappelons tout d'abord que, dans notre contexte, $\mathbf{\Lambda}$ bonne configuration implique que $\widehat{\mathbf{\Lambda}^{j+k}} = (\Lambda^1, \ldots, \widehat{\Lambda^{j+k}}, , \ldots, \Lambda^n)$ est aussi une bonne configuration admissible. Mais le fait que les Λ^ν avec $\nu \neq j+k$ engendrent *affinement* sur $\mathbb{R}$ l'espace $\left[\mathbb{C}^m\right]^*$ tout entier, implique, a fortiori, que les $n-2$ formes $\Lambda^\nu - \Lambda^1$ avec $\nu \neq \widetilde{j+k}$ engendrent *linéairement sur* $\mathbb{R}$, l'espace $\left[\mathbb{C}^m\right]^*$ tout entier. Or si $z \in \mathrm{Im}\theta_j \cap \mathrm{Im}\Phi$ était non trivial, cela impliquerait l'existence d'un $T \neq 0$ dans $\mathbb{C}^m$ tel que, pour tout $\nu \neq j+k$, on ait

$$\left[\Lambda^\nu - \Lambda^1\right](T) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Mais, pour un tel $T \neq 0$, les $\mathbf{\Lambda} \in \left[\mathbb{C}^m\right]^*$ tels que $\Re\left[\Lambda(T)\right] = 0$ formeraient un sous-espace réel de dimension $2m-1$ dans $\left[\mathbb{C}^m\right]^*$ qui contiendrait les $n-2$ formes évoquées plus haut ce qui serait contradictoire avec le fait que $\mathbf{\Lambda}^{\widehat{j+k}}$ soit admissible.

Le très classique lemme de linéarisation (cf par exemple [3] pour des énoncés précis) permet d'affirmer l'existence d'un entier $n_j \in \mathbb{Z}$ et d'un recouvrement de $N_j - (\mathrm{Sing}D \cap N_j)$ par des domaines U de cartes locales (pour N) $U \overset{\approx}{\to} \phi(U) \subset \mathbb{C}^{n-m-1}$ tels que

(i) si $(z^1, \ldots, z^{n-m-1}) = \phi(u)$ sont les coordonnées locales de $u \in U$, alors $z^{n-m-1} = 0$ est l'équation locale de $N_j \cap U$ dans U.

(ii) Si $(z^1, \ldots, z^{n-m-1})$ sont les coordonnées locales de $u \in U$, et si $\zeta \in \mathbb{C}^*$, est tel que $\theta_j(\zeta)u \in U$, alors $(z^1, \ldots, z^{n-m-2}, \zeta^{n_j} z^{n-m-1})$ sont les coordonnées locales de $\theta_j(\zeta)u$.

Considérons maintenant l'inclusion $\jmath : G \hookrightarrow N$, ainsi que le premier faisceau de cohomologie locale $\mathcal{H}^1_D(M, \mathcal{O}_M) \overset{\mathrm{def}}{=} \jmath_* \mathcal{O}_G / \mathcal{O}_M$. Restreint à une carte U comme ci-dessus dont l'intersection avec D ne contient que des points *lisses* de N_j, ce faisceau est aussi le faisceau de cohomologie locale $\mathcal{H}^1_{N_j \cap U}(U, \mathcal{O}_U)$ qui s'interprète comme le faisceau des germes de parties de Laurent strictement négatives convergentes :

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{\Phi_k(z^1, \ldots, z^{n-m-2})}{\left(z^{n-m-1}\right)^k}.$$

Le fait qu'une fonction qui est holomorphe sur le complémentaire d'un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}$-codimension$\geqslant 2$ soit en fait holomorphiquement prolongeable montre que la flèche «de restriction»

$$\begin{aligned} H^0(N, \mathcal{H}^1_D(\mathcal{O}_N)) \to H^0(N - \mathrm{Sing}D, \mathcal{H}^1_{D-\mathrm{Sing}_D}(\mathcal{O}_N)) \\ = \bigoplus_j H^0(N - \mathrm{Sing}D, \mathcal{H}^1_{N_j - \mathrm{Sing}_D}(\mathcal{O}_N)) \end{aligned}$$

est injective. Rappelons-nous alors («Steinité» locale de $N-D$ au voisinage de D) que tous les faisceaux de cohomologie locales $\mathcal{H}^i_D(N, \mathcal{O}_N)$ sont nuls dès que $i \neq 1$, si bien qu'en fait, (suite spectrale de Grothendieck pour la cohomologie locale) et d'une manière G-équivariante aisée à définir, on a l'isomorphisme : $H^1_D(N, \mathcal{O}_N) = H^0\big(N, \mathcal{H}^1_D(\mathcal{O}_N)\big)$. Cette observation va nous permettre de montrer :

LEMME 2.7. — *Toute classe de cohomologie locale $\sigma \in H^1_D(N, \mathcal{O}_N)$ qui est G-invariante est nécessairement nulle.*

En effet, en vertu de ce qui précède, on associe de manière univoque à σ une suite σ_j, $(1 \leqslant j \leqslant n - k)$ de classes de cohomologies locales $\sigma_j \in H^0\big(N - \mathrm{Sing}D, \mathcal{H}^1_{N_j - \mathrm{Sing}D}(\mathcal{O}_N)\big)$ chacune G-invariante. Mais alors la $\theta_j(\mathbb{C}^*)(\subset G)$-invariance de σ_j combinée à l'expression locale évidente de l'action $\theta_j(\mathbb{C}^*)$ sur les parties de Laurent strictement négatives, montre que les dites parties de Laurent $\theta_j(\mathbb{C}^*)$-invariantes sont nécessairement nulles et leurs interprétations comme germes du faisceau $\mathcal{H}^1_{N_j - \mathrm{Sing}D}(\mathcal{O}_N)\big)$ achève alors de démontrer le résultat. Nous pouvons alors en déduire :

LEMME 2.8. — *Dans notre contexte et si G est un groupe de Cousin, le morphisme de restriction : $H^1(N, \mathcal{O}_N) \to H^1(G, \mathcal{O}_G)$ est injectif.*

En effet dans le morceau de longue suite exacte G-équivariante :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(N, \mathcal{O}_N) \to H^0(G, \mathcal{O}_N) \to H^1_D(N, \mathcal{O}_N) \\ \to H^1(N, \mathcal{O}_N) \to H^1(G, \mathcal{O}_G) \end{aligned}$$

la première flèche de restriction est évidemment (N compacte) un isomorphisme dès que G est de Cousin. Cette hypothèse montre donc l'injection (naturellement G-équivariante) $H^1_D(N, \mathcal{O}_N) \to H^1(N, \mathcal{O}_N)$. Mais la G-action induite, holomorphe, sur l'espace *de dimension finie* $H^1(N, \mathcal{O}_N)$ est nécessairement triviale dès que G est de Cousin. Mais alors en vertu du résultat qui précède immédiatement plus haut, la trivialité de la G-action sur $H^1_D(N, \mathcal{O}_N)$ qui en résulte montre son annulation et donc l'injectivité recherchée dans l'énoncé.

Nous pouvons maintenant démontrer

LEMME 2.9. — *Soit N une excellente variété LV-M. Alors $h^{0,1}(N) = m$.*

Preuve. — En effet G se fibre, en tores «algébriques» $\approx (\mathbb{C}^*)^{n-2m-1}$ sur un tore complexe compact T avec $\dim_{\mathbb{C}} T = b_1(G) - \dim_{\mathbb{C}} G = m$. Si G a la propriété de Vogt, on sait par Vogt [12] que par «image réciproque» on a $h^{0,1}(G) = h^{0,1}(T) = m$. Mais on déduit aussi de la proposition 2.8

que $h^{0,1}(N) \leqslant h^{0,1}(G) = m$. De plus, le fait que $\mathbf{\Lambda}$ soit bonne implique, par le lemme 2.2 que $h^{1,0}(N) = k - m - 1$. Comme par ailleurs toutes les formes holomorphes sont fermées [3], on déduit de l'inégalité de Fröhlicher : $k - 1 = b_1(N) \leqslant h^{1,0}(N) + h^{0,1}(N) = k - m - 1 + h^{0,1}(N)$, l'inégalité contraire : $h^{0,1}(N) \geqslant m$,

3. Construction de compactifications équivariantes à $h^{1,0}$ et $h^{0,1}$ prescrits et de tore d'Albanèse nul.

Soient p et q deux entiers naturels avec $p < q$. Le but de cette partie est d'exhiber un entier $n \geqslant 3$ et une compactification $\mathbb{C}$-analytique équivariante X d'un groupe de Lie complexe multiplicatif $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ vérifiant

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Alb}(X) = \{0\} \qquad h^{1,0}(X) = p \qquad h^{0,1}(X) = q.$$

Pour cela, nous commencerons par construire des variétés LV-M vérifiant les égalités $(\dagger)$, ce qui exigera tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Pour tout $m \geqslant 1$ et tout entier k pour lequel $m + 1 \leqslant k < 2m + 1$, il existe un entier n et une configuration admissible $\mathbf{\Lambda} \in \left([\mathbb{C}^m]^*\right)^n$ qui vérifie la propriété (P_k).*

Évidemment dans cet énoncé la propriété (P_k) est une affaire de présentation, le fait essentiel est que k soit le nombre «d'hyperplans coordonnées» non inclus dans l'ensemble de Siegel défini par $\mathbf{\Lambda}$. Ceci dit raisonnons par récurrence sur $m > 1$, et pour cela, commençons par admettre l'énoncé dans son exacte formulation et par montrer, si k' vérifie $m + 2 < k' < 2m + 3$, l'existence d'une configuration admissible $\mathbf{\Lambda}' \in \left([\mathbb{C}^{m+1}]^*\right)^{n'}$ qui vérifie la propriété $P_{k'}$.

1er cas. Supposons k' avec $m + 3 \leqslant k' \leqslant 2m + 3$ et posons $k = k' - 2$. L'énoncé (qui est ici l'hypothèse de récurrence) nous donne l'existence de $\mathbf{\Lambda} \in \left([\mathbb{C}^m]^*\right)^n$ qui vérifie (P_k). Mais alors, en utilisant les notations de §1 a), *i.e.* en identifiant $[\mathbb{C}^m]^*$ aux formes linéaires sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m$ qui s'annulent sur le premier facteur, considérons, les $n + 2$ formes sur $\mathbb{C}^{m+1}$: $\Lambda'^1 = \varepsilon_*^0$, $\Lambda'^2 = i\varepsilon_*^0$, $\Lambda'^{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} -\eta(1 + i)\varepsilon_*^0 + \Lambda^j$ avec $1 \leqslant j \leqslant n$. On vérifie alors aisément que l'on définit ainsi une configuration admissible $\mathbf{\Lambda}' \in \left([\mathbb{C}^{m+1}]^*\right)^{n+2}$ qui vérifie la propriété $(P_{k'})$ dès que $\eta > 0$.

2e cas. Supposons que $k' = m + 2$, et posons $k = k' - 1$, alors considérons, avec les notations qui précèdent, la configuration $\mathbf{\Lambda}'' \in$

$\left([\mathbb{C}^{m+1}]^*\right)^{n+1}$ définie par la suite : $\left((1+i)\varepsilon_*^0, \Lambda'^3, \ldots, \Lambda'^{n+3}\right)$. On peut montrer encore que $\mathbf{\Lambda}''$ est admissible et vérifie la propriété (P_{k+1}).

La démonstration par récurrence sera alors entièrement terminée si on montre le résultat pour $m = 1$ et $k = 2$. Mais il est aisé, si $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^4)$ est (avec $m = 1$ et $n = 4$) une configuration admissible quelconque, de voir élémentairement que, par permutations des coordonnées, elle vérifie toujours la propriété (P_2).

Nous pouvons maintenant énoncer

PROPOSITION 3.2. — *Soient p et q deux entiers naturels avec $p < q$. Alors il existe une variété LV-M générique excellente N vérifiant les égalités* (†) *du* §*0.*

En effet, en posant $m = q$ et $k = m+p+1$, on voit que les conditions du lemme 3.1 sont vérifiées *i.e.* qu'il existe donc pour un certain n un n-uplet de formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$ qui définit une configuration $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{A}_{P_k}$. Mais les configurations excellentes étant «génériques en mesure», et la réunion disjointe $Z \cup (\mathcal{B}_{P_k} - \mathcal{B}'_{P_k})$ (*cf.* lemme 2.3) étant de mesure nulle dans $\mathcal{A}_{P_k}$, on trouve, aussi près que l'on voudra de $\mathbf{\Lambda}$, une configuration à la fois excellente et dans $\mathcal{B}'_{P_k} - Z$. La variété N définie par une telle configuration est alors excellente, de tore d'Albanèse nul et de nombre de Betti $k-1$. Mais alors par le lemme 2.9 on a $h^{0,1}(N) = m$ et par le lemme 2.2 on a $h^{1,0}(N) = p$, ce qui achève la démonstration.

Cette proposition énoncée et démontrée, soient maintenant p et q deux entiers naturels avec $p < q$ et soit N une variété LV-M vérifiant les égalités (†). Considérons V (défini au paragraphe 1) et la fibration $\mathbb{C}^m$-principale [5] holomorphe : $V \to N$. Comme indiqué au paragraphe 1, V est une variété torique et admet une action de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ avec une orbite ouverte et dense. Compactifions le fibré $V \to N$ en un $\mathbb{CP}^m$-fibré au-dessus de N d'espace total X qui s'écrit aussi : $X = V \times^{\mathbb{C}^m} \mathbb{CP}^m \overset{\text{def}}{=} V \times \mathbb{CP}^m / \sim$ avec, si $([w], \boldsymbol{p}) \in V \times \mathbb{CP}^m$ et $T \in \mathbb{C}^m$ l'équivalence $\left([w], \boldsymbol{p}\right) \sim \left(\tilde{\Phi}(-T, [w]), T\cdot\boldsymbol{p}\right)$. (Ici $\mathbb{C}^m$ agit sur l'espace projectif de dimension m par les translations qui fixent ponctuellement l'hyperplan à l'infini.) La variété X est une compactification de V et même une compactification équivariante de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$. Comme cette action de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ commute avec l'action de $\mathbb{C}^m$ définissant N, la variété X vérifie elle aussi les égalités (†). Nous pouvons donc conclure

---

[5] Via la commutativité de $\mathbb{C}^m$ on la comprend *à droite.*

PROPOSITION 3.3. — *Soient p et q deux entiers naturels avec $p < q$. Alors, au-dessus de toute variété LV-M générique vérifiant les égalités (†), il existe un fibré en espaces projectifs dont l'espace total X est une compactification équivariante de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ vérifiant les égalités (†).*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BLANCHARD, Sur les variétés analytiques complexes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 73 (1956), 157–202.

[2] B. GRÜNBAUM, Convex polytopes, London interscience publisher, 1967.

[3] F. LESCURE, Compactifications $\mathbb{C}$-analytiques équivariantes par des courbes, Mémoire de la S.M.F., 115, 26 (1987).

[4] F. LESCURE, Sur les compactifications équivariantes des groupes commutatifs, Ann. Inst. Fourier, 38, 4 (1988), 93–120.

[5] F. LESCURE, Une compactification X de $(\mathbb{C}^*)^5$ de variété d'Albanese nulle et $H^0(X, d\mathcal{O}_X) \neq 0$, Publ. interne Lille (IRMA), 23 (1991).

[6] S. LÓPEZ de MEDRANO, A. VERJOVSKY, A new family of complex, compact, non symplectic manifolds, Bol. Soc. Mat. Bra., 28, 2 (1997), 243–267.

[7] L. MEERSSEMAN, Construction de variétés compactes complexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 325 (1997), 1005–1008.

[8] L. MEERSSEMAN, A new geometric construction of compact, complex manifolds in any dimension, Math. Ann., 317 (2000), 79-115.

[9] A. MORIMOTO, On the classification of non compact complex abelian Lie groups, Trans. AMS, 123 (1966), 200–228.

[10] T. ODA, Convex Bodies and Algebraic Geometry, Springer, Berlin, 1988.

[11] J. POTTERS, On Almost Homogeneous Compact Complex Analytic Surfaces, Inventiones Math., 8 (1969), 244–266.

[12] C. VOGT, Line bundles on toroidal groups, J. reine angew. Math., 335 (1982), 197–215.

[13] R.O. WELLS, Differential Analysis on Complex Manifolds, Prentice Hall, Englewood Cliff, 1973.

Manuscrit reçu le 17 octobre 2000,
accepté le 13 juillet 2001.

François LESCURE,
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
lescure@gat.univ-lille1.fr
&
Laurent MEERSSEMAN,
Université de Rennes I
I.R.M.A.R.
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).
meerssem@maths.univ-rennes1.fr