



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Ivan PAN, Felice RONGA & Thierry VUST

Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions

Tome 51, n° 5 (2001), p. 1153-1187.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_5_1153_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES DE L'ESPACE PROJECTIF COMPLEXE À TROIS DIMENSIONS

par I. PAN, F. RONGA et T. VUST

1. Introduction.

1.1. — Considérons $m + 1$ fonctions polynomiales $\varphi_i(x_0, \dots, x_m)$ de $m + 1$ variables à coefficients complexes, homogènes de même degré et non toutes identiquement nulles; on leur associe l'application rationnelle

$$\varphi : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^m, \quad [x_0, \dots, x_m] \mapsto [\varphi_0(x_0, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_0, \dots, x_m)].$$

On dit alors que φ est une *transformation birationnelle* de \mathbb{P}^m s'il existe une application rationnelle $\psi : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ telle que $\psi \circ \varphi$ est l'identité; on parle aussi de transformation de Cremona de \mathbb{P}^m .

L'exemple le plus connu et utilisé est :

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1] = [1/x_0, 1/x_1, 1/x_2];$$

il apparaît dans tous les traités de géométrie algébrique (par exemple [10], chap. III, [7], chap. V, exemple 4.2.3).

Il existe une littérature abondante sur les transformations birationnelles de \mathbb{P}^2 et \mathbb{P}^3 jusque dans les années 1920; on pourra consulter [1], [8] et [11] pour l'état de la question à cette époque. Puis le sujet s'est démodé.

Les auteurs ont bénéficié d'un soutien du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. Le premier auteur remercie la Section de mathématiques de l'Université de Genève pour son accueil chaleureux.

Mots-clés : Quadriques – Transformations birationnelles.

Classification math. : 11E07.

Ici, on reprend ce sujet classique et on s'intéresse aux transformations birationnelles *quadratiques* de \mathbb{P}^3 :

$$\varphi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

où les φ_i sont de degré 2, à *changements linéaires à la source et au but près*.

Notons A_2 l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré 2 en x_0, x_1, x_2, x_3 , et, pour $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in A_2$ linéairement indépendants, $M(\varphi)$ le sous-espace de A_2 qu'ils engendrent. On règle la question des changements de bases au but en considérant

$$\mathcal{H} := \{M(\varphi) \mid \varphi \text{ birationnelle quadratique}\}.$$

On démontre au §2 que \mathcal{H} est une sous-variété localement fermée de la grassmannienne des 4-plans de A_2 avec trois composantes irréductibles de dimension 11, 13 et 14 respectivement. Le groupe $GL(4, \mathbb{C})$ opère dans \mathcal{H} par changements de coordonnées à la source et on dira que deux transformations birationnelles quadratiques φ' et φ'' ont le même *type* si $M(\varphi')$ et $M(\varphi'')$ appartiennent à la même orbite de $GL(4, \mathbb{C})$.

Le résultat principal de ce travail est une liste complète des représentants pour les types de transformations birationnelles quadratiques de \mathbb{P}^3 (théorèmes 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1; dans les tableaux ci-dessous on donne une description géométrique de chaque type).

Dans son article [3], L. Cremona étudie trois types génériques de transformations birationnelles quadratiques avec représentants :

- I) $[x_0, \dots, x_3] \mapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2]$;
- II) $[x_0, \dots, x_3] \mapsto [-x_0x_1 + x_0x_2, x_0x_3, -x_0x_1 + x_1x_2, x_1x_3]$;
- III) $[x_0, \dots, x_3] \mapsto [x_1^2 - x_1x_3, x_2^2 - x_2x_3, x_1x_2, x_0x_3]$.

Le sous-espace M correspondant (identifié à un système linéaire de quadriques) est constitué des quadriques contenant

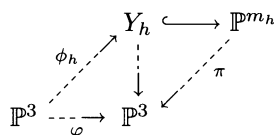
- I) une conique lisse et un point en position générale;
- II) une droite et trois points en position générale;
- III) quatre points en position générale avec plan tangent fixé en l'un d'eux.

Il ajoute ensuite prudemment «... *sono poi da notarsi i seguenti casi particolari* ... »⁽¹⁾ et finalement explicite 23 types; nous en trouvons 30.

⁽¹⁾ «... il faut ensuite remarquer les cas particuliers suivants ... »

À ce sujet, Conforto [2] dit « *Ma non ci indulgeremo su questa discussione, che potrà essere un utile esercizio per il lettore.* »⁽²⁾

Au §4 nous rappelons brièvement comment Cremona procède en général pour construire des transformations birationnelles de \mathbb{P}^3 . Notre approche est différente et ne s'adresse qu'à la situation particulière : nous montrons qu'il existe trois sous-variétés Y_h , $h = \text{I, II ou III}$, de dimension 3 *de degré minimal* dans un espace projectif convenable \mathbb{P}^{m_h} , avec paramétrisation $\phi_h : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow Y_h$, telle que toute transformation birationnelle quadratique φ de \mathbb{P}^3 se factorise à travers l'une d'entre elles :



en une projection linéaire π ; les trois cas correspondent aux trois composantes de \mathcal{H} . La minimalité du degré de Y_h implique alors que le centre de π est un sous-espace «sécant» de Y_h et il ne s'agit ensuite plus que d'établir un tri parmi ces projections linéaires.

1.2. — Les sous-espaces de dimension 4 de la forme $\langle \ell_0 \ell, \ell_1 \ell, \ell_2 \ell, \ell_3 \ell \rangle$ où $\ell_0, \dots, \ell_3, \ell$ sont des formes linéaires, constituent une orbite de $\text{GL}(4, \mathbb{C})$ dans \mathcal{H} notée *lin* : elle correspond aux automorphismes de \mathbb{P}^3 . Les autres orbites de $\text{GL}(4, \mathbb{C})$ dans \mathcal{H} sont décrites dans les tableaux 1, 2 et 3, où on a mis ensemble les transformations de même bidegré (§2.2). La première colonne contient un nom pour désigner chaque type et la seconde un pictogramme : ils tentent de décrire la géométrie du système linéaire correspondant à la transformation.

Dans le nom on met en exposant le degré de la transformation inverse. On utilise les abréviations *gen*, *tan* et *osc* pour *général*, *tangent* et *osculateur*; *tan* se réfère à une condition de contact à un plan ou une droite pour les éléments du système linéaire, et *osc* à une condition d'osculature le long d'une courbe. Dans certains cas, où l'ensemble des points-base est connexe, on rajoute *exc* pour *exceptionnel*. Les dénominations sont aussi un peu inspirées par la position du sous-espace sécant à Y_h correspondant à la transformation.

Dans les pictogrammes un point noir «●» désigne un point de \mathbb{P}^3 et un petit cercle «○» un point infiniment voisin; de plus dans le troisième

⁽²⁾ « Mais nous ne nous attarderons pas sur cette discussion, qui pourra être un exercice utile pour le lecteur. »

Transformations de bidegré (2, 2)


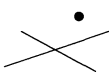

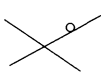

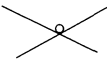

Nom	Points-base	Déf. du système linéaire	Image réc. d'une droite : conique ...
$\text{gen}^{[2]}(\bullet)$		Contenir une conique lisse C et passer par un point A	coupant C en deux points et passant par A
$\text{gen}^{[2]}(\times)$		Contenir une conique C dégénérée en deux droites distinctes et passer par un point A	passant par A et coupant chacune des droites constituant C
$\text{tan}^{[2]}(\circ)$		Contenir une conique lisse C , et être tangente à un plan α en un point donné R de C	tangente à α en R et recoupant C en un autre point
$\text{tan}^{[2]}(\times)$		Contenir une conique C dégénérée en deux droites distinctes et être tangentes à un plan α en un point R de C	tangente à α en R et recoupant l'autre droite
$\text{gen}^{[2]}(//)$		Cônes contenant une droite d , tangents à un même plan α le long de d et passant par un point A	passant par A , tangente à α en un point de d
$\text{osc}^{[2]}(\times)$		Contenir deux droites d'un plan α se coupant en A et s'osculer le long d'une courbe passant par A , tangente à α	tangente à α en A ; deux telles coniques dans un même plan s'osculent en A
$\text{tan}^{[2]}(//)$		Cônes contenant une droite d , tangents à un même plan α le long de d , s'osculant en un point A de d le long d'une courbe tangente à α en A	tangente à α en A ; deux telles coniques dans un même plan s'osculent en A

Tableau 1. Les « \bullet » représentent des points et les « \circ » des points infiniment voisins.

tableau le carreau « \diamond » représente la condition d'être tangente à un plan donné en un point donné.

Transformations de bidegré (2, 3)

Nom	Points-base	Déf. du système linéaire contenir une droite d et	Image réc. d'une droite : cubique gauche ayant d comme sécante et
gen ^[3]		passer par trois points A, B, C	passant par A, B, C
tan ^[3] (/)		être tangent à un plan α en un point R de d et passer par deux points A, B	tangente à α en R et passant par A, B
tan ^[3] (●)		passer par un point A et être tangent à une même droite d' en un point B	passant par A , tangente à d' en B
bitan ^[3] (/)		être tangent à un plan α (resp. β) en un point R (resp. S) de d et passer par un point A	passant par A , tangente à α (resp. β) en R (resp. S)
bitan ^[3] (/,●)		être tangent à un plan α en un point R de d et être tangent à une droite d' en un point A	tangente à α en R et tangente à d' en A
osc ^[3] (/)		passer par un point A et s'osculer le long d'une courbe en un point R de d	passant par A ; tangentes entre elles en R
osc ^[3] (●)		s'osculer le long d'une courbe en un point A	passant par A ; deux telles cubiques s'osculent en A
osc ^[3] (/)'		s'hyperosculer avec contact d'ordre 3 en un point R de d le long d'une courbe tangente à d et passer par un point A	passant par A , tangente à d en R
exc ^[3] tanosc		s'osculer le long d'une courbe en un point R de d , être tangent à un plan α en un point S de d	tangente à α en S ; deux telles cubiques sont tangentes en R
exc ^[3] osc'		s'hyperosculer avec contact 3 le long d'une courbe en un point R de d	passant par R ; deux telles cubiques s'osculent en R
exc ^[3] osc''		s'hyperosculer avec contact 4 en un point R de d le long d'une courbe tangente à d	tangente à d en R ; deux telles cubiques s'osculent en R

Tableau 2. Les «●» représentent des points et les «○» des points infiniment voisins.

Transformations de bidegré (2, 4)

Nom	Points-base	Déf. du système linéaire : avoir même plan tangent α en un point p et	Image réc. d'une droite : quartique gauche ayant un point double en p , tangente à α en p et
gen ^[4]		passer par trois points A, B, C	passant par A, B, C
tan ^[4] (\diamond)		passer par deux points A, B et s'osculer en p le long d'une courbe tangente à α	passant par A, B et ayant une branche par p tangente à une droite fixe
tan ^[4] (\bullet)		être tangent à une droite d en un point A , passer par un point B	tangente à d en A et passant par B
bitan ^[4] (\diamond)		s'osculer en p le long de deux courbes tangentes à α et passer par un point A	passant par A et ayant les deux branches par p tangentes chacune à une droite fixe de α
bitan ^[4] (\diamond, \bullet)		s'osculer en p le long d'une courbe et être tangent en un point A à une droite d	ayant une branche par p tangente à une droite fixe de α et tangente à d en A
osc ^[4] (\diamond)		s'hyperosculer en p le long d'une courbe et passer par un point A	ayant une branche par p tangente à une droite fixe de α (ces branches ont un contact d'ordre 2 entre elles) et passant par A

Tableau 3 (première partie). Les « \bullet » représentent des points, les « \circ » des points infiniment voisins et les « \diamond » la condition d'être tangent à un plan donné en un point donné.

Les pictogrammes essaient aussi de montrer les dégénérescences. Par exemple



désignent respectivement une transformation dont le système linéaire est constitué des quadriques contenant une droite d , un point A et :

- deux autres points : c'est gen^[3] ;
- avec un plan tangent fixé en deux points de d : c'est bitan^[3](/);
- avec hyperosculation en un point de d , le long d'une courbe

Transformations de bidegré (2, 4)

Nom	Points-base	Déf. du système linéaire : avoir même plan tangent α en un point p et	Image réc. d'une droite : quartique gauche ayant un point double en p , tangente à α en p et
$\text{osc}^{[4]}(\bullet)$	$\bullet \infty$ \diamond	passer par A et s'osculer en ce point le long d'une courbe	passant par A ; ont un contact d'ordre 2 entre elles
$\text{cusp}^{[4]}(\diamond)$	\bullet \diamond \diamond	s'hyperosculer en p le long d'une courbe avec un ordre de contact 5 et passer par un point A	ayant un point cuspidal à tangente fixe en p et passant par A ; ont un contact d'ordre 2 entre elles
$\text{exc}^{[4]}\text{tanosc}$	$\circ \circ$	s'osculer en p le long d'une courbe et s'hyperosculer en p avec un ordre de contact 3 le long d'une autre courbe	ayant une branche tangente à une droite fixe et l'autre branche tangente à une autre droite fixe; ces dernières ont un contact 2 entre elles
$\text{exc}^{[4]}\text{osc}$	$\circ \circ \circ$	s'hyperosculer en p le long d'une courbe avec contact d'ordre 4	ayant une branche par p tangente à une droite fixe; ces branches ont un contact d'ordre 3 entre elles
$\text{exc}^{[4]}\text{cusp}$	$\circ \circ$ \diamond	s'hyperosculer en p avec ordre de contact d'ordre 6 le long d'une courbe admettant en p un point cuspidal	ayant un point cuspidal en p avec tangente fixe; ces quartiques ont un ordre de contact 3 entre elles

Tableau 3 (deuxième partie). Les « \bullet » représentent des points, les « \circ » des points infiniment voisins et les « \diamond » la condition d'être tangent à un plan donné en un point donné.

tangente à d : c'est $\text{osc}^{[3]}(/)'$;

— avec hyperosculation en un point de d , le long d'une courbe transverse à d : c'est $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$.

Comme le suggèrent ces dessins,

— le type $\text{gen}^{[3]}$ dégénère en $\text{bitan}^{[3]}(/)$, qui dégénère en $\text{osc}^{[3]}(/)'$;

— le type $\text{gen}^{[3]}$ dégénère en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$;

— mais ni $\text{bitan}^{[3]}(/)$, ni $\text{osc}^{[3]}(/)'$ ne dégèrent en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$.

(On dit que le type t' dégénère en le type t'' si l'adhérence de t' contient t'' .)

La troisième colonne donne une définition géométrique du système linéaire. Enfin, la quatrième colonne donne des indications sur l'image réciproque stricte d'une droite générique au but.

Précisons ce que l'on entend par *osculat*ion des quadriques d'un système linéaire en un point p le long d'un germe de courbe C : cela signifie qu'elles ont un contact au point p d'ordre 2 avec C (*i.e.* que la multiplicité d'intersection de ces surfaces avec C en p est 3). Seul le jet d'ordre 2 de C en p est déterminé ; si le système linéaire définit une transformation birationnelle, alors on peut prendre pour représentant de C l'intersection résiduelle de deux surfaces, ce qui revient à prendre l'image réciproque stricte d'une droite au but. L'*hyperosculat*ion se définit de manière analogue, avec ordre de contact ≥ 3 .

Pour deux (germes de) courbes lisses, *osculat*ion (resp. *hyperosculat*ion) signifie qu'elles admettent des paramétrisations locales ayant même jet d'ordre 2 (resp. ≥ 3), en ce point ; dans le cas où les deux courbes auront un point singulier en commun, on ne parlera pas d'osculation mais simplement d'ordre de contact en ce point : c'est le nombre d'éclatements nécessaires à les séparer, moins 1. Sauf mention expresse, les points, courbes et surfaces qui interviennent sont supposés être en position générale.

1.3. — Signalons aussi le travail [5] où sont classés à conjugaisons affines près, les automorphismes polynomiaux de degré 2 de \mathbb{C}^3 . Ils apparaissent dans notre classification comme ceux dont le jacobien est la puissance quatrième d'une forme linéaire : ce sont

$$\text{osc}^{[2]}(\times), \quad \text{tan}^{[2]}(//), \quad \text{exc}^{[3]}\text{osc}'', \quad \text{exc}^{[4]}\text{cusp}.$$

2. Classes de transformations birationnelles quadratiques de \mathbb{P}^3 .

On note A_2 l'espace des formes quadratiques sur \mathbb{C}^4 et \mathcal{H} l'ensemble des sous-espaces M de dimension 4 de A_2 tels que

$$\phi_M : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}(M^\vee), \quad x \dashrightarrow \{f \in M : f(x) = 0\}$$

est birationnelle (M^\vee désigne le dual de M). Soit $M \in \mathcal{H}$; les transformations quadratiques de \mathbb{P}^3 associées à M sont les applications $x \mapsto [\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)]$ où $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est une base de M^\vee .

Dans ce paragraphe, nous donnons une première description de \mathcal{H} , notamment sa décomposition en composantes irréductibles, dont nous calculons la dimension.

2.1. — Voici d’abord quelques notations. Soient C, D, H respectivement une conique, une droite, un plan de \mathbb{P}^3 et soit p un point de H . On pose :

$$\begin{aligned} A_2[C] &:= \{f \in A_2 : Z(f) \text{ contient } C\}, \\ A_2[D] &:= \{f \in A_2 : Z(f) \text{ contient } D\}, \\ A_2[p^H] &:= \{f \in A_2 : Z(f) \text{ contient } p \text{ et est tangente à } H \text{ en } p\}; \end{aligned}$$

ici $Z(f)$ désigne la surface d’équation ($f = 0$).

Plus précisément, si la conique C est définie comme l’intersection de la quadrique d’équation ($q = 0$) et du plan d’équation ($\ell = 0$), alors $f \in A_2[C]$ signifie que f appartient à l’idéal engendré par q et ℓ . La signification de $A_2[D]$ est claire. Enfin, si par exemple $p = [1, 0, 0, 0]$ et $H = (x_3 = 0)$, dire que $f \in A_2[p^H]$ signifie que

$$f = \alpha x_0 x_3 + h(x_1, x_2, x_3),$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et h homogène de degré 2.

Soit $V \subset A_2$ un sous-espace vectoriel; notons $\mathcal{H}(V)$ l’ensemble des sous-espaces M de V qui appartiennent à \mathcal{H} . On pose alors :

$$\mathcal{H}^I := \bigcup_C \mathcal{H}(A_2[C]), \quad \mathcal{H}^{II} := \bigcup_D \mathcal{H}(A_2[D]), \quad \mathcal{H}^{III} := \bigcup_{p \in H} \mathcal{H}(A_2[p^H]).$$

Si A_1 désigne l’espace des formes linéaires sur \mathbb{C}^4 , on introduit enfin

$$\mathcal{H}^0 := \{\ell A_1 : \ell \in A_1\},$$

qui est l’ensemble des $M \in \mathcal{H}$ tels que ϕ_M est linéaire.

PROPOSITION 2.1.1. — On a $\mathcal{H} = \mathcal{H}^I \cup \mathcal{H}^{II} \cup \mathcal{H}^{III}$.

Preuve. — Il est clair que $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^I \cap \mathcal{H}^{II} \cap \mathcal{H}^{III}$. Soit donc $M \in \mathcal{H} - \mathcal{H}^0$ et q, q' deux éléments génériques de M . Alors l’intersection des deux quadriques ($q = 0$) et ($q' = 0$) est constituée de la transformée stricte B par ϕ_M^{-1} d’une droite générale et d’un 1-cycle effectif B_0 qui ne dépend

que de M et dont le support est contenu dans l'ensemble $\text{Base}(M)$ des points-base de M . La courbe B est rationnelle irréductible de degré 2, 3 ou 4.

Si $\deg B = 2$ (i.e. B est une conique lisse), alors B_0 est l'intersection d'une quadrique et d'un plan : en effet, sans perte de généralité, on peut supposer B définie par $(q = x_3 = 0)$ et par conséquent il existe $\ell \in A_1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $q' = \alpha q + x_3 \ell$; ainsi $B_0 = (q = \ell = 0)$. Dans ce cas $M \in \mathcal{H}^I$.

Si $\deg B = 3$ (i.e. B est une cubique gauche), alors B_0 est une droite et $M \in \mathcal{H}^{II}$.

Si $\deg B = 4$, alors $B_0 = 0$ et $\text{Base}(M)$ est un ensemble fini non vide. On observe dans ce cas que la quadrique $(q = 0)$ est lisse : sinon, d'après le théorème de Bertini, tout élément de M définit un cône avec sommet fixé et ϕ_M n'est pas dominante. On considère maintenant le système linéaire découpé par M sur la quadrique lisse $(q = 0)$ dont un élément général est une quartique irréductible rationnelle qui possède donc un point double; d'après le théorème de Bertini, de nouveau, ce point est fixe d'où aussitôt $M \in \mathcal{H}^{III}$. \square

2.2. Remarque. — Soit $\phi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ une application rationnelle; on dit que ϕ est de degré d si

$$\phi = [\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3]$$

où les ϕ_i sont de degré d sans diviseurs non-triviaux en commun. Dans ce sens, les transformations quadratiques sont de degré ≤ 2 .

Si ϕ est birationnelle, le couple $(\deg \phi, \deg \phi^{-1})$ s'appelle le *bidegré* de ϕ . Le degré de ϕ^{-1} est aussi le degré de l'image réciproque par ϕ d'une droite générale (voir [10], chap. III, §4 et [9], §1), et donc $\deg \phi^{-1} \leq (\deg \phi)^2$.

On note $\mathcal{H}^{2,e}$ l'ensemble des $M \in \mathcal{H}$ tels que ϕ_M est de bidegré $(2, e)$. De la preuve de la proposition 2.1.1 suit que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^0 \cup \mathcal{H}^{2,2} \cup \mathcal{H}^{2,3} \cup \mathcal{H}^{2,4} \quad (\text{réunion disjointe}) \quad \text{et} \\ \mathcal{H}^{2,2} &\subset \mathcal{H}^I, \quad \mathcal{H}^{2,3} \subset \mathcal{H}^{II}, \quad \mathcal{H}^{2,4} \subset \mathcal{H}^{III}. \end{aligned}$$

2.3. — À un sous-espace V de A_2 , on associe plus généralement l'application rationnelle

$$\phi_V : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}(V^\vee), \quad x \mapsto \{f \in V : f(x) = 0\};$$

on note Y_V l'image de ϕ_V , i.e. l'adhérence de l'image par ϕ_V d'un ouvert non vide où celle-ci est définie.

En particulier, soit $M \in \mathcal{H}(A_2[*])$; alors ϕ_M se factorise en

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccc} & Y_{A_2[*]} & \hookrightarrow \mathbb{P}(A_2[*]^\vee) \\ \phi_{A_2[*]} \nearrow & \downarrow & \nwarrow \pi_L \\ \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\phi_M} & \mathbb{P}(M^\vee) \end{array}$$

où π_L est la projection naturelle de centre $L = \text{Ker}(A_2[*]^\vee \rightarrow M^\vee)$, c'est-à-dire que L est l'annulateur de M dans $A_2[*]^\vee$.

Dans cet alinéa, nous étudions les applications $\phi_{A_2[*]}$. Rappelons qu'une sous-variété irréductible Y de \mathbb{P}^m est de *degré minimal* si Y n'est pas contenue dans un hyperplan et si $\text{deg } Y = m - \dim Y + 1$ (voir [4]).

PROPOSITION 2.3.1. — *Pour $* = C, D, p^H$, l'application $\phi_{A_2[*]}$ est birationnelle et son image $Y_{A_2[*]}$ est de degré minimal dans $\mathbb{P}(A_2[*]^\vee)$.*

Cette proposition suit des trois lemmes plus précis suivants où, pour simplifier, on écrit ϕ_C et Y_C au lieu de $\phi_{A_2[C]}$ et $Y_{A_2[C]}$, et de même pour ϕ_D, ϕ_{p^H} , etc.

LEMME C. — *On a :*

- 1) $\dim A_2[C] = 5$;
- 2) Y_C est de degré 2 dans \mathbb{P}^4 ;
- 3) ϕ_C est birationnelle.

Preuve. — Sans perte de généralité on peut supposer que C a pour équations $(x_3 = q_C(x_0, x_1, x_2) = 0)$, où q_C est de degré 2; quitte à choisir une base convenable de $A_2[C]$, on peut écrire

$$\phi_C : [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2, q_C(x_0, x_1, x_2)],$$

d'où aussitôt les assertions. □

LEMME D. — *On a :*

- 1) $\dim A_2[D] = 7$;
- 2) Y_D est de degré 4 dans \mathbb{P}^6 ; en fait, Y_D est isomorphe à l'éclatement de D dans \mathbb{P}^3 ;
- 3) ϕ_D est birationnelle.

Preuve. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que D a pour équations $(x_0 = x_1 = 0)$. En coordonnées, on a donc

$$\phi_D : [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3].$$

La composition de ϕ_D avec l'inclusion $\mathbb{P}^6 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$, donnée par

$$[y_0, \dots, y_6] \longmapsto [y_0, y_1, y_2, y_3, y_1, y_4, y_5, y_6],$$

se factorise en

$$\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi_D \times \text{id}} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^7$$

où $\pi_D : [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0, x_1]$ et σ est l'immersion de Segre

$$\sigma([y_0, y_1], [x_0, x_1, x_2, x_3]) = [y_i \cdot x_j]_{i=0,1; j=0,\dots,3}.$$

Par conséquent, Y_D est isomorphe à la section hyperplane $(z_1 = z_4)$ de l'image de σ ou, ce qui revient au même, à l'hypersurface $(x_0z_1 - x_1z_0 = 0)$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$: c'est l'éclatement de D dans \mathbb{P}^3 . Les autres assertions se vérifient aisément. \square

LEMME p^H . — On a :

- 1) $\dim A_2[p^H] = 7$;
- 2) Y_{p^H} est de degré 4 dans \mathbb{P}^6 ; en fait, Y_{p^H} est un cône sur l'image de l'immersion de Veronese $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$;
- 3) ϕ_{p^H} est birationnelle.

Preuve. — Rappelons que l'immersion de Veronese de \mathbb{P}^2 dans \mathbb{P}^5 est par définition le morphisme

$$[x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2].$$

On peut supposer $p = [1, 0, 0, 0]$, $H = (x_3 = 0)$ sans perte de généralité ; en coordonnées on a donc

$$\phi_{p^H} : [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2],$$

d'où aussitôt les assertions. \square

2.4. — Considérons le diagramme (2.3.1). Puisque $\phi_{A_2[*]}$ est birationnelle, la description des sous-espaces M appartenant à $\mathcal{H}(A_2[*])$ revient à celle des sous-espaces L de $A_2[*]^\vee$ tels que $\pi_L : Y_{A_2[*]} \dashrightarrow \mathbb{P}(M^\vee)$ est birationnelle; notons $\mathcal{H}(A_2[*])^0$ l'ensemble de ces sous-espaces. Dans l'annexe A nous montrons que si $Y_{A_2[*]}$ est de degré minimal, alors $\mathcal{H}(A_2[*])^0$ est un ouvert non vide de la variété $\mathcal{S}(Y_{A_2[*]})$ des sécantes de codimension 4 de la sous-variété $Y_{A_2[*]} \subset \mathbb{P}(A_2[*]^\vee)$.

Si V est un sous-espace vectoriel, on note $\mathbb{G}(a, V)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension a de V ; on pose

$$\mathbb{G}(a, \mathbb{C}^b) = \mathbb{G}(a, b).$$

PROPOSITION 2.4.1. — \mathcal{H} est une sous-variété localement fermée de $\mathbb{G}(4, A_2)$; ses composantes irréductibles sont les ensembles $\mathcal{H}^I, \mathcal{H}^{II}, \mathcal{H}^{III}$ et on a

$$\dim \mathcal{H}^* = \begin{cases} 11 & \text{si } * = I, \\ 13 & \text{si } * = II, \\ 14 & \text{si } * = III. \end{cases}$$

Preuve. — (a) La première assertion suit d'un résultat général démontré dans l'annexe B.

On note \mathcal{Q} l'espace des coniques de \mathbb{P}^3 , qui est de dimension 8. On considère

$$X_C := \{(M, C) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q} : M \subset A_2[C]\}.$$

Par définition, les fibres de la seconde projection $X_C \rightarrow \mathcal{Q}$ sont les $\mathcal{H}(A_2[C])$; par dualité celles-ci sont isomorphes à $\mathcal{H}(A_2[C])^0$. Il suit alors de la description ci-dessus que ces fibres sont des ouverts non vides de la variété $\mathcal{S}(Y_C)$ qui est ici de dimension 3 : par conséquent, X_C est irréductible de dimension 11. Puisque la fibre générale de la première projection $X_C \rightarrow \mathcal{H}$ est finie et l'image de cette projection est \mathcal{H}^I , on a aussitôt que \mathcal{H}^I est irréductible de dimension 11.

On démontre de manière analogue que \mathcal{H}^{II} et \mathcal{H}^{III} sont irréductibles de dimension 13 et 14 respectivement.

(b) Maintenant, on introduit

$$F_2 := \bigcup_{D \in \mathbb{G}(2,4)} \mathbb{G}(4, A_2[D]) \subset \mathbb{G}(4, A_2),$$

$$F_{1,3} := \bigcup_{p \in H, H \in \mathbb{P}^\vee} \mathbb{G}(4, A_2[p^H]) \subset \mathbb{G}(4, A_2).$$

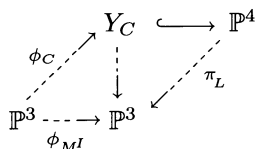
Les sous-ensembles F_2 et $F_{1,3}$ sont fermés dans $\mathbb{G}(4, A_2)$. En effet, la projection naturelle

$$\widehat{F}_{1,3} := \{(M, p, H) \in \mathbb{G}(4, A_2) \times \mathbb{P}^3 \times (\mathbb{P}^3)^\vee : p \in H, M \subset A_2[p^H]\} \longrightarrow \mathbb{G}(4, A_2)$$

a pour image $F_{1,3}$ et $\widehat{F}_{1,3}$ est fermé dans $\mathbb{G}(4, A_2) \times \mathbb{P}^3 \times (\mathbb{P}^3)^\vee$; pour F_2 , on considère de même la projection naturelle

$$\widehat{F}_2 := \{(D, M) \in \mathbb{G}(2, 4) \times \mathbb{G}(4, A_2) : M \subset A_2[D]\} \longrightarrow \mathbb{G}(4, A_2).$$

Par définition, F_2 et $F_{1,3}$ contiennent $\overline{\mathcal{H}^{\text{II}}}$ et $\overline{\mathcal{H}^{\text{III}}}$ respectivement. Soit alors M^{I} un élément général de \mathcal{H}^{I} : il existe une conique lisse C telle que



est commutatif où Y_C est une hypersurface de degré 2 (lemme C); comme Y_C est égale à sa variété des sécantes de codimension 4, le centre de la projection π_L est un point $\phi_C(p_1) \in Y_C$, ce qui s'interprète en disant que

$$M^{\text{I}} = A_2[C, p_1] := \{f \in A_2 : Z(f) \text{ contient } C \text{ et } p_1\};$$

on vérifie directement que $M^{\text{I}} \notin F_2 \cup F_{1,3}$, d'où $M^{\text{I}} \notin \overline{\mathcal{H}^{\text{II}}} \cup \overline{\mathcal{H}^{\text{III}}}$ en particulier, et finalement $\overline{\mathcal{H}^{\text{I}}} \not\subset \overline{\mathcal{H}^{\text{II}}} \cup \overline{\mathcal{H}^{\text{III}}}$.

De même pour un élément général M^{II} de \mathcal{H}^{II} , il existe une droite D et trois points p_1, p_2, p_3 en position générale tels que

$$M^{\text{II}} = A_2[D, p_1, p_2, p_3] := \{f \in A_2 : Z(f) \text{ contient } D \text{ et } p_1, p_2, p_3\};$$

on vérifie que $M^{\text{II}} \notin F_{1,3}$ d'où $\overline{\mathcal{H}^{\text{II}}} \not\subset \overline{\mathcal{H}^{\text{III}}}$.

Vu que $\dim \mathcal{H}^{\text{III}} > \dim \mathcal{H}^{\text{I}}, \dim \mathcal{H}^{\text{II}}$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{I}} \cup \mathcal{H}^{\text{II}} \cup \mathcal{H}^{\text{III}}$ est la décomposition en composantes irréductibles de \mathcal{H} . □

2.5. Annexe A. — Soit Y une sous-variété irréductible de dimension ℓ de \mathbb{P}^m . On suppose dans cette annexe que Y est non-dégénérée, c'est-à-dire que Y n'est pas contenue dans un hyperplan.

On note $\mathcal{S}(Y)$ la variété des sous-espaces sécants de Y de codimension $\ell + 1$: il s'agit de l'adhérence de l'image de l'application rationnelle

$$Y^{m-\ell} \dashrightarrow \mathbb{G}(m - \ell, m + 1)$$

qui à $(y_1, \dots, y_{m-\ell})$ associe le sous-espace de \mathbb{C}^{m+1} engendré par $y_1, \dots, y_{m-\ell}$.

On note $\mathcal{H}(Y)$ l'ensemble des $L \in \mathbb{G}(m-\ell, m+1)$ tels que la restriction à Y de la projection $\pi_L : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^\ell$ est birationnelle.

Puisque $Y \subset \mathbb{P}^m$ est non-dégénérée, on sait que $\deg Y \geq m - \ell + 1$ (voir [6], cor. 18.12 et [4]).

PROPOSITION A. — On a $\mathcal{H}(Y) \subset \mathcal{S}(Y)$. Si de plus Y est de degré minimal, alors $\mathcal{H}(Y)$ est un ouvert non vide de $\mathcal{S}(Y)$.

Preuve. — (a) On montre par récurrence sur $\text{codim } Y$ que $\mathcal{H}(Y)$ est contenu dans $\mathcal{S}(Y)$. Si $\text{codim } Y = 1$, une projection de centre un point n'appartenant pas à Y n'est pas birationnelle et par suite $\mathcal{H}(Y) \subset Y = \mathcal{S}(Y)$.

On suppose maintenant $\text{codim } Y > 1$. Soit $L \in \mathcal{H}(Y)$. Puisque $\pi_L : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^\ell$ est birationnelle, la sous-variété linéaire $\mathbb{P}(L)$ de \mathbb{P}^m rencontre Y ; on choisit un point $p \in \mathbb{P}(L) \cap Y$ et on note Y' l'adhérence de l'image de la projection $\pi_p : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ de centre p . Alors Y' est aussi non-dégénérée et π_L se factorise en

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\pi_p} & \mathbb{P}^{m-1} & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow \pi' & \\ Y & \xrightarrow{\pi_p} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{P}^\ell \end{array}$$

Comme π_L est birationnelle, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à π' : le centre L' de π' appartient donc à $\mathcal{S}(Y')$. Enfin, puisque π_p induit un isomorphisme entre l'ensemble des sous-variétés linéaires de \mathbb{P}^{m-1} et l'ensemble des sous-variétés linéaires de \mathbb{P}^m contenant p , il s'ensuit aussitôt que L appartient à $\mathcal{S}(Y)$.

(b) On suppose maintenant que Y est de degré minimal. Soit $L \in \mathcal{S}(Y)$ et $p \in \mathbb{P}(L) \cap Y$. On considère comme avant la projection $\pi_p : Y \rightarrow Y'$: alors Y' est aussi de degré minimal et de deux choses l'une (voir [4], §3)

- (i) p est un point lisse de Y et $\pi_p : Y \dashrightarrow Y'$ est birationnelle;
- (ii) Y est un cône de sommet p et $\dim Y' < \dim Y$.

Une récurrence montre alors que $\mathcal{H}(Y)$ est non vide et que $\pi_L : Y \rightarrow \mathbb{P}^\ell$ est ou bien birationnelle ou bien non dominante. Donc d'après (a) on a

$$\mathcal{H}(Y) = \mathcal{S}(Y) \cap \mathcal{D}(Y),$$

où $\mathcal{D}(Y)$ désigne l'ensemble des sous-espaces L tels que $\pi_L : Y \rightarrow \mathbb{P}^\ell$ est dominante. Il s'ensuit que $\mathcal{H}(Y)$ est un ouvert non vide de $\mathcal{S}(Y)$ puisque $\mathcal{D}(Y)$ est un ouvert de $\mathbb{G}(m - \ell, m + 1)$. □

On note $\mathcal{H}(A_d) \subset \mathbb{G}(\ell + 1, A_d)$ l'ensemble des sous-espaces M de dimension $\ell + 1$ de l'espace A_d des formes linéaires de degré d en x_0, \dots, x_ℓ telles que

$$\phi_M : \mathbb{P}^\ell \dashrightarrow \mathbb{P}(M^\vee), \quad x \longmapsto \{f \in M : f(x) = 0\}$$

est birationnelle.

Soit V un sous-espace vectoriel de A_d de dimension $m + 1$: il lui correspond l'application rationnelle $\phi_V : \mathbb{P}^\ell \dashrightarrow Y_V \subset \mathbb{P}(V^\vee) \cong \mathbb{P}^m$

$$x \longmapsto \{f \in V : f(x) = 0\}.$$

Pour $p_1, \dots, p_{m-\ell}$ en position générale dans \mathbb{P}^ℓ , on définit

$$V_0 = V[p_1, \dots, p_{m-\ell}] := \{f \in V : f(p_1) = \dots = f(p_{m-\ell}) = 0\},$$

dont l'annulateur dans V^\vee est le sous-espace L engendré par $\phi_V(p_1), \dots, \phi_V(p_{m-\ell})$. Par construction on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \phi_V \rightarrow & \mathbb{P}(V) \\ \mathbb{P}^\ell & \dashrightarrow & \downarrow \pi_L \\ & \phi_{V_0} \rightarrow & \mathbb{P}(V_0) \end{array}$$

COROLLAIRE. — On suppose que Y_V est de degré minimal et que ϕ_V est birationnelle. Pour $p_1, \dots, p_{m-\ell}$ en position générale dans \mathbb{P}^ℓ , l'application

$$\phi_{V[p_1, \dots, p_{m-\ell}]} : \mathbb{P}^\ell \dashrightarrow \mathbb{P}^\ell$$

est birationnelle; réciproquement, si pour $M \subset V$, $\phi_M : \mathbb{P}^\ell \dashrightarrow \mathbb{P}^\ell$ est birationnelle, alors M est une dégénérescence de sous-espaces de la forme $V[p_1, \dots, p_{m-\ell}]$. □

2.6. *Annexe B.* — Nous conservons les notations de l'annexe A.

PROPOSITION B. — $\mathcal{H}(A_d)$ est localement fermé dans $\mathbb{G}(\ell + 1, A_d)$.

Preuve. — On note $\text{Mor}_d(\mathbb{C}^{\ell+1}, \mathbb{C}^{\ell+1})$ l'espace des morphismes homogènes $f : \mathbb{C}^{\ell+1} \rightarrow \mathbb{C}^{\ell+1}$ de degré d , i.e. l'ensemble des $(\ell + 1)$ -uples (f_0, \dots, f_ℓ) , $f_i \in A_d$; de plus on désigne par \mathcal{E} l'ouvert de $\text{Mor}_d(\mathbb{C}^{\ell+1}, \mathbb{C}^{\ell+1})$ constitué des $(\ell + 1)$ -uples linéairement indépendants. Alors

$$\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{G}(\ell + 1, A_d)$$

qui associe à f le sous-espace engendré par (f_0, \dots, f_ℓ) est le fibré des $(\ell + 1)$ -repères sur $\mathbb{G}(\ell + 1, A_d)$. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $\pi^{-1}(\mathcal{H}(A_d))$ est localement fermé dans \mathcal{E} .

Remarquons que dire que f est birationnelle revient à dire que f est dominante et qu'il existe $g = (g_0, \dots, g_\ell)$ tel que $g(f(x))$ est proportionnel à x , ou encore : $g(f(x)) \wedge x = 0$, pour tout x . On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \Psi_e : \text{Mor}_d(\mathbb{C}^{\ell+1}, \mathbb{C}^{\ell+1}) &\longrightarrow \text{Hom}(\text{Mor}_e(\mathbb{C}^{\ell+1}, \mathbb{C}^{\ell+1}), \\ &\quad \text{Mor}_{de+1}(\mathbb{C}^{\ell+1}, \Lambda^2 \mathbb{C}^{\ell+1})), \\ f &\longmapsto [g \mapsto (x \mapsto g(f(x)) \wedge x)] \end{aligned}$$

ainsi que, à la source, l'ouvert \mathcal{U} constitué des morphismes qui sont dominants (ou encore dont le déterminant jacobien n'est pas identiquement nul), et au but le fermé Σ^1 constitué des applications linéaires non injectives. Alors

$$\mathcal{U} \cap \Psi_e^{-1}(\Sigma^1)$$

est constitué des f tels que l'application

$$\mathbb{P}^\ell \dashrightarrow \mathbb{P}^\ell, \quad x \dashrightarrow [f_0, \dots, f_\ell]$$

est birationnelle de degré $\leq d$ avec inverse de degré $\leq e$. Comme en général l'inverse d'une transformation birationnelle de \mathbb{P}^ℓ de degré $\leq d$ est de degré $\leq d^{\ell-1}$ (voir [9], §1), on a

$$\pi^{-1}(\mathcal{H}(A_d)) = \mathcal{U} \cap \Psi_{d^{\ell-1}}^{-1}(\Sigma^1)$$

et par conséquent $\pi^{-1}(\mathcal{H}(A_d))$ est localement fermé dans \mathcal{E} . □

3. Classification des transformations de Cremona quadratiques de \mathbb{P}^3 .

Le groupe $GL(4)$ opère naturellement dans $\mathbb{G}(4, A_2)$ et laisse invariant $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A_2)$ ainsi que chacune de ses composantes irréductibles $\mathcal{H}^I, \mathcal{H}^{II}$ et \mathcal{H}^{III} ; dans ce paragraphe, on classe les orbites de $GL(4)$ dans \mathcal{H} . En particulier, on verra que celles-ci sont en nombre fini.

3.1. La classe I. — Puisque $\mathcal{H}^I = \bigcup_C \mathcal{H}(A_2[C])$, on est aussitôt ramené à étudier les orbites du sous-groupe d'isotropie G_C de C dans $GL(4)$ opérant dans $\mathcal{H}(A_2[C])$. Par dualité, cela revient à décrire les orbites de G_C dans $\mathcal{H}(A_2[C])^0 \subset \mathcal{S}(Y_C)$ (voir l'annexe A en 2.5). Finalement, puisque Y_C est une quadrique dans \mathbb{P}^4 (lemme C du §2.3), on a $\mathcal{S}(Y_C) = Y_C$ et il s'agit ici d'étudier l'opération de G_C dans la sous-variété $(Y_C)_{\text{reg}}$ constituée des points réguliers de Y_C : en effet, la projection de Y_C à partir d'un point de Y_C est birationnelle si et seulement si ce point appartient à $(Y_C)_{\text{reg}}$.

Pour fixer les idées, on choisit $C := \{x_3 = q(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ de sorte que

$$Y_C = \{q(y_0, y_1, y_2) - y_3y_4 = 0\}$$

où q est ou bien générale ou bien $q = x_1x_2$ ou bien $q = x_2^2$.

LEMME 3.1.1. — *Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de G_C dans Y_C . La sous-variété $E_C := Y_C \cap \{y_3 = 0\}$ est l'adhérence d'une orbite de dimension 2 et son complémentaire $Y_C - E_C$ est l'orbite ouverte; il y a aussi le point fixe $p := [0, 0, 0, 0, 1]$: ces trois orbites sont dites générales. De plus,*

1) *lorsque C est lisse, alors Y_C est aussi lisse et les seules orbites sont les trois orbites générales;*

2) *lorsque C possède un unique point singulier, alors Y_C est un cône de sommet $s := [1, 0, 0, 0, 0]$ et en plus des orbites générales, il y a le point fixe s et une orbite spéciale de dimension 1 dont l'adhérence est la droite passant par p et s ;*

3) *lorsque C est une droite double, alors Y_C est un cône de sommet la droite $D := \{[* , * , 0, 0, 0]\}$ et en plus des orbites générales, il y a la droite D .*

Preuve. — Précédée de l'éclatement $\sigma : \text{Bl}_C(\mathbb{P}^3) \rightarrow \mathbb{P}^3$ de C dans \mathbb{P}^3 ,

l'application rationnelle

$$\phi_C : [x_0, x_1, x_2, x_3] \dashrightarrow [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2, q(x_0, x_1, x_2)]$$

devient un morphisme qui contracte sur $p = [0, 0, 0, 0, 1]$ le transformé strict \tilde{H} du plan $H = (x_3 = 0)$ de C et applique le diviseur exceptionnel sur E_C . Notons \tilde{E} le diviseur exceptionnel de σ . Alors G_C possède quatre orbites dans $\text{Bl}_C(\mathbb{P}^3)$:

$$\tilde{E} \cap \tilde{H}, \quad \tilde{E} - \tilde{H}, \quad \tilde{H} - \tilde{E}, \quad \text{Bl}_C(\mathbb{P}^3) - (\tilde{E} \cup \tilde{H}).$$

Puisque \tilde{H} collapse sur p , on a trouvé les trois orbites générales de G_C dans Y_C .

En adaptant ces arguments on démontre les autres assertions du lemme. □

Si $f_0, \dots, f_l \in A_2$, on désigne par

$$\langle f_0, \dots, f_l \rangle$$

le sous-espace vectoriel de A_2 engendré par $f_0, \dots, f_l \in A_2$.

THÉORÈME 3.1.1. — *Il y a huit orbites de l'opération de $\text{GL}(4)$ dans \mathcal{H}^1 avec comme représentants*

$$\begin{aligned} \text{gen}^{[2]}(\alpha) &:= \langle x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, q_\alpha \rangle, \\ \text{tan}^{[2]}(\alpha) &:= \langle x_0x_3, x_2x_3, x_3^2, x_1x_3 - q_\alpha \rangle, \\ \text{osc}^{[2]}(\times) &:= \langle x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2 \rangle, \\ \text{lin} &:= \langle x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2 \rangle, \end{aligned}$$

où $\alpha = O, \times$ ou $//$, avec

$$q_O = x_0^2 - x_1x_2, \quad q_\times = x_1x_2, \quad q_{//} = x_2^2.$$

Preuve. — Les orbites $\text{gen}^{[2]}(\alpha)$, $\text{tan}^{[2]}(\alpha)$ et lin correspondent aux orbites générales du lemme pour chaque type α de conique en projetant à partir de $[0, 0, 0, 1, 0]$, $[0, 1, 0, 0, 1]$ et $[0, 0, 0, 0, 1]$ respectivement ; l'orbite $\text{osc}^{[2]}(\times)$ provient de l'orbite spéciale dans le cas où la conique est d'équation $(x_1x_2 = 0)$, en projetant à partir du point $[1, 0, 0, 0, 1]$. Les autres orbites donnent lieu à des transformations qui ne sont pas dominantes. □

3.2. La classe II. — Puisque

$$\mathcal{H}^{\text{II}} = \bigcup_D \mathcal{H}(A_2[D]),$$

l'examen de la classe II est immédiatement ramené à l'étude des orbites du sous-groupe d'isotropie G_D de la droite D dans $GL(4)$ opérant dans $\mathcal{H}(A_2[D])$. Par dualité, cela revient à décrire les orbites de G_D dans $\mathcal{H}(A_2[D])^0 \subset \mathcal{S}(Y_D)$, mais comme Y_D est de degré 4 dans \mathbb{P}^6 (lemme D du §2.3) et $\mathcal{S}(Y_D)$ est constituée de plans dans \mathbb{P}^6 , la situation est un peu compliquée.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $D = \{x_0 = x_1 = 0\}$ et que

$$\phi_D : [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3].$$

Faisant précéder ϕ_D de l'éclatement $\text{Bl}_D(\mathbb{P}^3) \rightarrow \mathbb{P}^3$ de D dans \mathbb{P}^3 , on obtient un isomorphisme $\text{Bl}_D(\mathbb{P}^3) \rightarrow Y_D$. Il s'ensuit que G_D possède deux orbites dans Y_D :

$$(\text{gen}) : Y_D - E_D, \quad (\text{exc}) : E_D$$

où E_D est l'image de l'immersion $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^6$

$$([u_0, u_1], [v_0, v_1]) \longmapsto [0, 0, u_0v_0, u_0v_1, 0, u_1v_0, u_1v_1]$$

et correspond au diviseur exceptionnel de $\text{Bl}_D(\mathbb{P}^3)$.

Soit $L \in \mathcal{S}(Y_D)$; dans notre classification, il y a donc une première distinction à effectuer : cas général $L \cap (Y_D - E_D) \neq \emptyset$, cas exceptionnel $L \cap Y_D \subset E_D$.

• *Cas général.* — Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi_D(r) \in L \cap Y_D$ où $r = [1, 0, 0, 0]$, et que $\phi_{D,r} := \phi_{A_2[D,r]} = \pi_{\phi_D(r)} \circ \phi_D$ est

$$\phi_{D,r} : x \longmapsto [x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3].$$

L'adhérence $Y_{D,r}$ de l'image de $\phi_{D,r}$ est donc l'image du plongement de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$,

$$(y, z) \longmapsto [y_0z_0, y_0z_1, y_0z_2, y_1z_0, y_1z_1, y_1z_2].$$

LEMME 3.2.1. — *Le groupe d'isotropie $G_{D,r}$ de r dans G_D possède quatre orbites dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4/D) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^4/r) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$:*

$$\begin{aligned} (Dr\text{-exc}) &: [1, 0] \times [0, *, *], \\ (r\text{-exc}) &: [1, 0] \times [a, *, *], \quad a \neq 0, \\ (D\text{-exc}) &: [*, b] \times [0, *, *], \quad b \neq 0, \\ (\text{gen}) &: [*, c] \times [d, *, *], \quad c, d \neq 0. \end{aligned} \quad \square$$

Passant à $Y_{D,r}$ via le plongement de Segre et en gardant les mêmes notations, il y a donc quatre cas à considérer pour la sécante L' de $Y_{D,r}$ image de L :

- cas général : L' intersecte (gen),
- cas D -exceptionnel : L' rencontre (D -exc) et $L' \cap Y_{D,r}$ est contenu dans l'adhérence de ($D - exc$),
- cas r -exceptionnel : L' rencontre (r -exc) et $L' \cap Y_{D,r}$ est contenu dans l'adhérence de (r -exc),
- cas Dr -exceptionnel : $L' \cap Y_{D,r}$ est contenu dans (Dr -exc).

Pour chacune des quatre possibilités, on choisit, respectivement, un point $p'_i \in L' \cap Y_{D,r}$ avec $i = 1, 2, 3, 4$. Sans perte de généralité, on peut supposer

$$\begin{aligned}
 (\text{gen}) : L' \cap Y_{D,r} \ni p'_1 &:= [0, 0, 0, 1, 0, 0] \leftarrow [0, 1] \times [1, 0, 0], \\
 (D\text{-exc}) : L' \cap Y_{D,r} \ni p'_2 &:= [0, 0, 0, 0, 1, 0] \leftarrow [0, 1] \times [0, 1, 0], \\
 (r\text{-exc}) : L' \cap Y_{D,r} \ni p'_3 &:= [1, 0, 0, 0, 0, 0] \leftarrow [1, 0] \times [1, 0, 0], \\
 (Dr\text{-exc}) : L' \cap Y_{D,r} \ni p'_4 &:= [0, 1, 0, 0, 0, 0] \leftarrow [1, 0] \times [0, 1, 0].
 \end{aligned}$$

En effectuant la projection de centre p'_i , on est conduit à

$$\phi_{D,r,p'_i} : x \mapsto \begin{cases} [x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3], & i = 1, \\ [x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_3], & i = 2, \\ [x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3], & i = 3, \\ [x_0x_1, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3], & i = 4. \end{cases}$$

Géométriquement, ces applications rationnelles correspondent respectivement aux systèmes linéaires de quadriques qui

- (gen) : contiennent D, r et $p = [0, 1, 0, 0]$;
- (D -exc) contiennent D, r et sont tangentes au plan $H = (x_0 = 0)$ en $o = [0, 0, 1, 0] \in D$;
- (r -exc) contiennent D et sont tangentes à la droite $T = (x_2 = x_3 = 0)$ en r ;
- (Dr -exc) contiennent la conique $C = (x_1 = x_0x_3 = 0)$.

Le cas (Dr -exc) fournit des transformations de la classe I qui ont déjà été étudiées.

Concernant les trois autres cas, les variétés Y_{D,r,p'_i} , adhérence de l'image de ϕ_{D,r,p'_i} , $i = 1, 2, 3$, sont des quadriques dans \mathbb{P}^4 ; l'examen des orbites des sous-groupes d'isotropie correspondants n'offre pas de difficulté. Les résultats sont résumés dans le théorème ci-dessous qui décrit les orbites de $\mathrm{GL}(4)$ dans le sous-ensemble $\mathcal{H}_{\mathrm{gen}}^{\mathrm{II}}$ de $\mathcal{H}^{\mathrm{II}}$ constitué des systèmes linéaires dont l'ensemble des points-base contient une droite et un point en dehors de celle-ci.

THÉORÈME 3.2.1. — *Le groupe $\mathrm{GL}(4)$ a douze orbites dans $\mathcal{H}_{\mathrm{gen}}^{\mathrm{II}}$ dont voici une liste de représentants :*

$$\begin{aligned} \mathrm{gen}^{[3]} &:= \langle -x_0x_1 + x_0x_2, x_0x_3, -x_0x_1 + x_1x_2, x_1x_3 \rangle, \\ \mathrm{tan}^{[3]}(/) &:= \langle x_0x_1, x_0x_2 - x_1x_2, x_0x_3, x_1x_3 \rangle, \\ \mathrm{tan}^{[3]}(\bullet) &:= \langle x_0x_1 - x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 \rangle, \\ \mathrm{bitan}^{[3]}(/) &:= \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3 - x_1x_3, x_1^2 \rangle, \\ \mathrm{bitan}^{[3]}(/, \bullet) &:= \langle x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_3 \rangle, \\ \mathrm{osc}^{[3]}(/) &:= \langle x_0x_1, x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3, x_1x_3 \rangle, \\ \mathrm{osc}^{[3]}(/)' &:= \langle x_0x_1, x_0x_2 - x_1x_3, x_0x_3, x_1^2 \rangle, \\ \mathrm{osc}^{[3]}(\bullet) &:= \langle x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 \rangle, \end{aligned}$$

et $\mathrm{gen}^{[2]}(\times)$, $\mathrm{tan}^{[2]}(\times)$, $\mathrm{osc}^{[2]}(\times)$, $\mathrm{gen}^{[2]}(//)$ qui appartiennent aussi à \mathcal{H}^{I} .

Cas exceptionnel. — Soit $L \in \mathcal{S}(Y_D)$. On s'intéresse maintenant au cas $L \cap Y_D \subset E_D$ où $E_D \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est l'intersection de Y_D avec $\{[0, 0, *, *, 0, *, *]\}$: cela signifie que l'ensemble des points-base de $\pi_L \circ \phi_D$ est D . Sans perte de généralité, on peut supposer que L contient $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1] =: p'$ et que $\phi_{D,p'} = \pi_{p'} \circ \phi_D$ est de la forme

$$\phi_{D,p'} : x \longmapsto [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2];$$

l'adhérence $Y_{D,p'}$ de son image est le cône de sommet $p_0 := [0, 0, 0, 1, 0, 0]$ sur l'adhérence Z de l'image de l'application

$$[x_0, x_1, x_2] \longmapsto [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2];$$

en fait Z est isomorphe à l'éclatement de $[0, 0, 1]$ dans \mathbb{P}^2 .

Le système linéaire

$$A_2[D, o^H] := \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2 \rangle,$$

associé à $\phi_{D,p'}$ est constitué des quadriques contenant D qui sont tangentes à $H = (x_0 = 0)$ en $o = [0, 0, 0, 1]$; son sous-groupe d'isotropie B est le stabilisateur du drapeau $o \in D \subset H$. Maintenant on peut, comme tout-à-l'heure, étudier les orbites de B dans $Y_{D,p'}$, puis projeter $Y_{D,p'}$ à partir d'un point de chacune de celles qui sont compatibles avec la condition $L \cap Y_D \subset E_D$.

Mais on peut procéder autrement. On introduit

$$A_2[0, 0, 1] := \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2 \rangle$$

qui correspond aux coniques *planes* passant par le point $[0, 0, 1]$. Alors on a

$$M \in \mathcal{H}(A_2[D, o^H]) \implies M' := M \cap A_2[0, 0, 1] \in \mathcal{H}(A_2[0, 0, 1]).$$

En effet, un tel M possède une base de la forme $(f_0, f_1, f_2, x_0x_3 + f_3)$ avec $f_i = f_i(x_0, x_1, x_2) \in A_2[0, 0, 1]$, $i = 0, 1, 2, 3$ et l'application

$$f : [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [f_0, f_1, f_2, x_0x_3 + f_3]$$

est birationnelle si et seulement si

$$f' : [x_0, x_1, x_2] \longmapsto [f_0, f_1, f_2]$$

est birationnelle.

Maintenant,

- si $\mathcal{H}(A_2[D, o^H])_{\text{exc}}$ désigne l'ensemble des $M \in \mathcal{H}(A_2[D, o^H])$ tels que l'ensemble des points-base de ϕ_M est exactement D et

- $\mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])_{\text{exc}}$ est l'ensemble des $M' = \langle f_0, f_1, f_2 \rangle \in \mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])$ tels que $(f_0 = f_1 = f_2 = 0)$ est contenu dans la droite $(x_0 = 0)$, on a

$$M \in \mathcal{H}(A_2[D, o^H])_{\text{exc}} \implies M' := M \cap A_2[0, 0, 1] \in \mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])_{\text{exc}}.$$

En effet, si $f_i(a, b, c) = 0$, $i = 0, 1, 2$, avec $a \neq 0$, alors $[a, b, c, -a^{-1}f_3(a, b, c)]$ est un point base de f qui n'appartient pas à D .

L'application $M \mapsto M'$ est B -équivariante et B opère dans

$$\mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])_{\text{exc}}$$

comme le stabilisateur B_0 du drapeau $[0, 0, 1] \subset (x_0 = 0) \subset \mathbb{P}^2$. Par conséquent, pour étudier l'opération de B dans $\mathcal{H}(A_2[D, o^H])_{\text{exc}}$, on commence par celle de B_0 dans $\mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])_{\text{exc}}$.

LEMME 3.2.2. — *Le groupe B possède cinq orbites dans $\mathcal{H}(A_2[0, 0, 1])_{\text{exc}}$ dont voici un système de représentants :*

- $\langle a \rangle := \langle x_0^2, x_0x_2, x_1x_2 \rangle$, système linéaire des coniques par $p_0 = [0, 0, 1]$ et tangentes à $(x_2 = 0)$ en $p_1 = [0, 1, 0]$;
- $\langle b \rangle := \langle x_0^2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle$, système linéaire des coniques tangentes à $(x_1 = 0)$ en p_0 et passant par p_1 ;
- $\langle c \rangle := \langle x_0^2 + x_1x_2, x_1^2, x_0x_1 \rangle$, système linéaire des coniques qui osculent $(x_0^2 + x_1x_2 = 0)$ au point p_0 ;
- $\langle d \rangle := \langle x_0x_2 + x_1^2, x_0^2, x_0x_1 \rangle$, système linéaire des coniques qui osculent $(x_1^2 + x_0x_2 = 0)$ au point p_0 ;
- $\langle e \rangle := \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle$, système linéaire des coniques qui contiennent la droite $(x_0 = 0)$. □

On désigne par $\mathcal{H}_{\text{exc}}^{\text{II}}$ le sous-ensemble de \mathcal{H}^{II} constitué des systèmes linéaires dont l'ensemble des points-base est une droite.

THÉORÈME 3.2.2. — *Le groupe $\text{GL}(4)$ a quatre orbites dans $\mathcal{H}_{\text{exc}}^{\text{II}}$ dont voici une liste de représentants :*

$$\begin{aligned} \text{exc}^{[3]}\text{tan osc} &:= \langle x_0^2, x_0x_1, x_1x_2, x_0x_3 - x_1^2 \rangle, \\ \text{exc}^{[3]}\text{osc}' &:= \langle x_0^2, x_0x_2, x_1x_2, x_0x_3 - x_1^2 \rangle, \\ \text{exc}^{[3]}\text{osc}'' &:= \langle x_0x_2 + x_1^2, x_0^2, x_0x_1, x_0x_3 - x_1x_2 \rangle \end{aligned}$$

et $\text{tan}^{[2]}(//)$ qui appartient aussi à \mathcal{H}^I .

Preuve. — Soit $M \in \mathcal{H}(A_2[D, o^H])_{\text{exc}}$; alors

$$M = \langle f_0, f_1, f_2, x_0x_3 + f_3 \rangle$$

où $M' := M \cap A_2[0, 0, 1] = \langle f_0, f_1, f_2 \rangle$ et $f_3 \in A_2[0, 0, 1]$. D'après le lemme, on peut supposer que M' est de l'une des formes $\langle a \rangle, \dots, \langle e \rangle$ et il reste à préciser f_3 . On traite par exemple le cas $\langle a \rangle$. On a

$$M = \langle x_0^2, x_0x_2, x_1x_2, x_0x_3 + \alpha x_0x_1 + \beta x_1^2 \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Si $\beta = 0$, alors l'ensemble des points-base n'est pas une droite. Si $\beta \neq 0$, on considère

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } v + \alpha u = 0 \text{ et } \beta u^2 = -1,$$

et on a

$$s \cdot M = \langle x_0^2, x_0x_2, x_1x_2, x_0x_3 - x_1^2 \rangle.$$

On a trouvé le type $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$. □

Note. — Comme $\mathcal{H}^{\text{II}} = \mathcal{H}_{\text{gen}}^{\text{II}} \cup \mathcal{H}_{\text{exc}}^{\text{II}}$, les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 complètent la classification des types de transformations birationnelles quadratiques de la classe II.

3.3. La classe III. — Puisque

$$\mathcal{H}^{\text{III}} = \bigcup_{o \in H} \mathcal{H}(A_2[o^H]),$$

l'examen de la classe III est immédiatement ramené à l'étude de l'opération dans $\mathcal{H}(A_2[o^H])$ du sous-groupe d'isotropie $B := G_{oH}$ du drapeau $o \in H$ dans $\text{GL}(4)$. Si $o = [1, 0, 0, 0]$ et $H = (x_3 = 0)$, on a

$$A_2[o^H] = \langle x_0x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 \rangle.$$

Ici une circonstance semblable à celle qu'on a rencontrée lors de l'étude de $\mathcal{H}_{\text{exc}}^{\text{II}}$ se produit : la variété Y_{oH} est un cône et on a

$$M \in \mathcal{H}(A_2[o^H]) \iff M \cap A_2(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3)),$$

où $A_2(x_1, x_2, x_3)$ désigne l'espace des formes quadratiques en x_1, x_2, x_3 . Plus précisément, l'application

$$(3.3.1) \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{H}(A_2[o^H]) \longrightarrow \mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3)), \\ M \longmapsto M' := M \cap A_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

est B -équivariante et B opère dans $\mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$ comme le stabilisateur B_0 de $(x_3 = 0)$ dans \mathbb{P}^2 . Par conséquent, pour étudier l'opération de B dans $\mathcal{H}(A_2[o^H])$ on commence par celle de

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

dans $\mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$.

LEMME 3.3.1. — Le groupe B_0 possède 13 orbites dans $\mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$ dont voici un système de représentants :

$\langle a1 \rangle := \langle x_1^2 - x_1x_3, x_2^2 - x_2x_3, x_1x_2 \rangle$, système linéaire des coniques par $p_1 := [0, 0, 1]$, $p_2 := [1, 0, 1]$ et $p_3 := [0, 1, 1]$;

$\langle a2 \rangle := \langle x_1^2 - x_1x_3, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques par p_1 , p_2 et $r_1 := [0, 1, 0]$ qui appartient à $(x_3 = 0)$;

$\langle a3 \rangle := \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques par p_1 , r_1 et $r_2 := [1, 0, 0]$, ces deux derniers appartenant à $(x_3 = 0)$;

$\langle b1 \rangle := \langle x_1^2 - x_1x_3, x_2^2, x_1x_2 \rangle$, système linéaire des coniques par p_2 et tangentes à $(x_1 = 0)$ en p_1 ;

$\langle b2 \rangle := \langle x_1^2, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques par r_1 et tangentes à $(x_2 = 0)$ en p_1 ;

$\langle b3 \rangle := \langle x_1^2, x_1x_3, x_2(x_1 - x_3) \rangle$, système linéaire des coniques par p_1 et tangentes à $(x_1 - x_3 = 0)$ en r_1 ;

$\langle b4 \rangle := \langle x_1^2, x_1x_3, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques par p_1 et tangentes à $(x_3 = 0)$ en r_1 ;

$\langle b5 \rangle := \langle x_3^2, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques par r_1 et tangentes à $(x_2 = 0)$ en r_2 ;

$\langle c1 \rangle := \langle x_2^2, x_1x_2, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques osculant $(x_3^2 - x_1x_2 = 0)$ en p_1 ;

$\langle c2 \rangle := \langle x_1^2, x_1x_3, x_3^2 - x_1x_2 \rangle$, système linéaire des coniques osculant $(x_3^2 - x_1x_2 = 0)$ en r_1 ;

$\langle c3 \rangle := \langle x_3^2, x_1x_3, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques osculant $(x_1^2 - x_2x_3 = 0)$ en r_1 ;

(lin 1) := $\langle x_1x_2, x_2^2, x_2x_3 \rangle$, système linéaire des coniques contenant la droite $(x_2 = 0)$;

(lin 2) := $\langle x_1x_3, x_2x_3, x_3^2 \rangle$, système linéaire des coniques contenant la droite $(x_3 = 0)$. \square

THÉORÈME 3.3.1. — Le groupe $GL(4)$ a 26 orbites dans \mathcal{H}^{III} dont voici une liste de représentants :

$$\begin{aligned} \text{gen}^{[4]} &:= \langle x_1^2 - x_1x_3, x_2^2 - x_2x_3, x_1x_2, x_0x_3 \rangle, \\ \text{tan}^{[4]}(\diamond) &:= \langle x_1^2 - x_1x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_0x_3 - x_2^2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{bitan}^{[4]}(\diamond) &:= \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_0x_3 - x_1^2 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{tan}^{[4]}(\bullet) &:= \langle x_1^2 - x_1x_3, x_1x_2, x_2^2, x_0x_3 \rangle, \\
 \text{bitan}^{[4]}(\diamond, \bullet) &:= \langle x_1x_2, x_2x_3, x_1^2, x_0x_3 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{osc}^{[4]}(\diamond) &:= \langle x_1^2, x_1x_3, x_2(x_1 - x_3), x_0x_3 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{cusp}^{[4]}(\diamond) &:= \langle x_1x_3, x_2x_3, x_1^2, x_0x_3 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{exc}^{[4]}\text{tan osc} &:= \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3^2, x_0x_3 - x_1^2 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{osc}^{[4]}(\bullet) &:= \langle x_2^2, x_1x_2, x_1^2 - x_2x_3, x_0x_3 \rangle, \\
 \text{exc}^{[4]}\text{osc} &:= \langle x_1^2, x_1x_3, x_3^2 - x_1x_2, x_0x_3 - x_2^2 \rangle, \\
 \text{exc}^{[4]}\text{cusp} &:= \langle x_3^2, x_1x_3, x_1^2 - x_2x_3, x_0x_3 - x_2^2 \rangle,
 \end{aligned}$$

et les types

$$\begin{aligned}
 &\text{lin}, \quad \text{tan}^{[2]}(O), \quad \text{gen}^{[2]}(\times), \quad \text{gen}^{[2]}(/), \quad \text{tan}^{[2]}(\times), \\
 &\text{tan}^{[2]}(/), \quad \text{osc}^{[2]}(\times), \quad \text{tan}^{[3]}(/), \quad \text{bitan}^{[3]}(/, \bullet), \quad \text{osc}^{[3]}(/), \\
 &\text{bitan}^{[3]}(/), \quad \text{exc}^{[3]}\text{osc}', \quad \text{exc}^{[3]}\text{osc}'', \quad \text{osc}^{[3]}(/)', \quad \text{exc}^{[3]}\text{tan osc},
 \end{aligned}$$

qui appartiennent aussi à $\mathcal{H}^I \cup \mathcal{H}^{\text{II}}$.

Preuve. — On suit la même méthode que celle utilisée au théorème 3.2.2. Pour $M' := \langle f_0, f_1, f_2 \rangle \in \mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$ fixé, on détermine les orbites du groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & G_{M'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

opérant dans l'espace affine $x_0x_3 + A_2(x_1, x_2, x_3)/M'$ (ici, $G_{M'}$ est le stabilisateur de M'). Si $(x_0x_3 + f_3^{(i)})$ est un système de représentants, alors $\langle f_0, f_1, f_2, x_0x_3 + f_3^{(i)} \rangle$ est un système de représentants pour les $M \in \mathcal{H}(A_2[o^H])$ tels que $M \cap A_2(x_1, x_2, x_3) = M'$. Le lemme indique quels sont les sous-espaces M' à considérer.

Explicitons par exemple le cas $\langle b5 \rangle$ où $M' = \langle x_3^2, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$. Ici,

$$G_{M'} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

et il s'agit de décrire les orbites de

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

opérant dans $x_0x_3 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_3 + M'$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$) ; il y en a quatre :

- l'orbite de x_0x_3 qui est de dimension 1 et est égale à

$$\{x_0x_3 + \gamma x_1x_3 + M'\};$$

- l'orbite de $x_0x_3 - x_1^2$ qui est de dimension 2 et est égale à

$$\{x_0x_3 + \alpha x_1^2 + \gamma x_1x_3 + M' \mid \alpha \neq 0\};$$

- l'orbite de $x_0x_3 - x_2^2$ qui est de dimension 2 et est égale à

$$\{x_0x_3 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_3 + M' \mid \beta \neq 0\};$$

- l'orbite de $x_0x_3 - x_1^2 - x_2^2$ qui est de dimension 3 et est égale à

$$\{x_0x_3 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_3 + M' \mid \alpha \text{ et } \beta \neq 0\}.$$

Par conséquent, $\langle b_5 \rangle$ fournit quatre types dans $\mathcal{H}(A_2[o^H])$, à savoir

$$\tan^{[2]}(\times), \quad \text{exc}^{[3]}\text{osc}', \quad \text{exc}^{[3]}\text{tan osc}, \quad \text{exc}^{[4]}\text{tan osc}$$

respectivement. □

Remarque 3.3.1. — Excepté (lin 1) et (lin 2), chaque orbite O' de B_0 dans $\mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$ fournit une *unique* orbite O dans $\mathcal{H}^{\text{III}} - (\mathcal{H}^{\text{I}} \cup \mathcal{H}^{\text{II}})$; de plus O est dense dans $\varphi^{-1}(O')$.

Remarque 3.3.2. — Considérons le système linéaire

$$M := \langle x_0x_3, x_1x_3, x_3^2, x_1x_2 \rangle$$

du type $\tan^{[2]}(\times)$ constitué des quadriques passant pas la conique $x_3 = x_1x_2 = 0$ et tangentes à $(x_1 = 0)$ en $[0, 0, 1, 0]$: on a $M \in \mathcal{H}(A_2[o^H])$ pour $o = [1, 0, 0, 0] \in H = (x_3 = 0)$, mais aussi $M \in \mathcal{H}(A_2[p^K])$ pour $p = [0, 0, 1, 0] \in K = (x_1 = 0)$; de plus $M \cap A_2(x_1, x_2, x_3) = \langle x_1x_3, x_3^2, x_1x_2 \rangle$ est du type $\langle b_5 \rangle$ tandis que $M \cap A_2(x_0, x_1, x_3) = \langle x_0x_3, x_1x_3, x_3^2 \rangle$ est du type lin 1.

On voit ainsi que $\tan^{[2]}(\times)$ apparaît dans deux fibres différentes de φ .

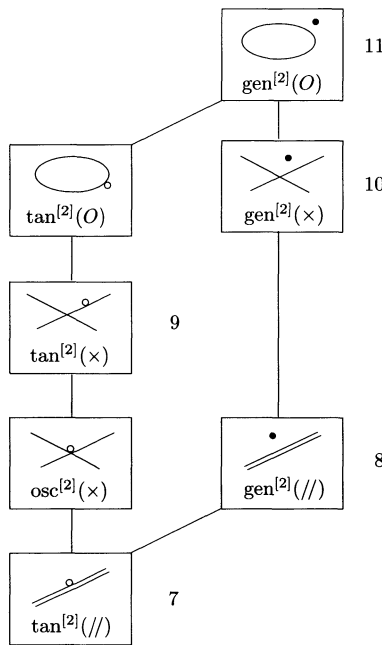
Remarque 3.3.3. — Les tableaux de l'introduction s'obtiennent par un examen soigneux de chaque cas.

4. Dégénérescences.

Ce paragraphe contient quelques indications sur les dégénérescences de transformations birationnelles quadratiques de \mathbb{P}^3 .

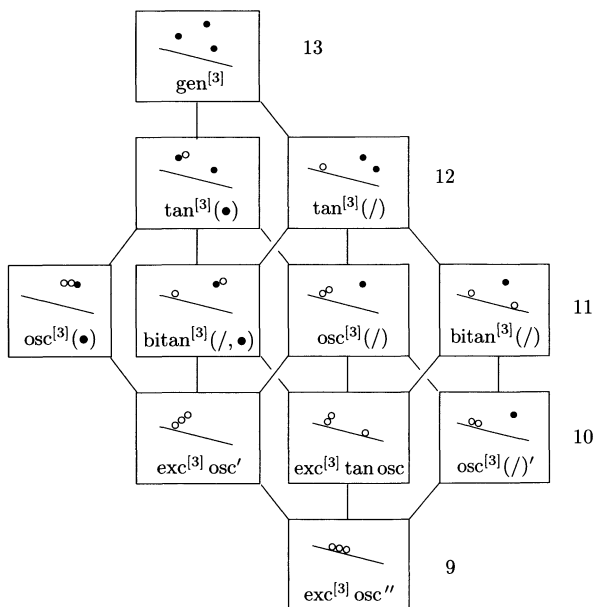
Rappelons qu'on dit que le type t' dégénère en le type t'' si l'adhérence de t' contient t'' .

Ci-dessous on donne les graphes de dégénérescences entre types de même bidegré; les nombres à droite indiquent la dimension. Un type dégénère en ses voisins inférieurs.



Transformations de bidegré (2, 2)

Les cas de bidegré (2, 2) et (2, 3) se traitent directement : la géométrie suggère si un type est ou n'est pas dans l'adhérence d'un autre; le calcul du déterminant jacobien permet quelquefois de décider des situations douteuses. Par exemple, le déterminant jacobien de $\text{bitan}^{[3]}(/)$ est constitué de trois plans contenant la droite des points-base, dont l'un est double, tandis que celui de $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$ est constitué d'un plan triple contenant la droite des points-base et d'un plan transverse à celle-ci. Il s'ensuit que $\text{bitan}^{[3]}(/)$ ne dégénère pas en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$.



Transformations de bidegré (2, 3)

Pour établir les dégénérescences entre types de bidegré (2, 4), on se sert du morphisme (3.3.1) :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{H}(A_2[o^H]) \longrightarrow \mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3)), \\ M \longmapsto M' := M \cap A_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Soit t un type de transformations birationnelles quadratiques de \mathbb{P}^3 , i.e. une orbite de $GL(4)$ dans $\mathcal{H}(A_2)$; on pose

$$t_{[o^H]} = t \cap \mathcal{H}(A_2[o^H]).$$

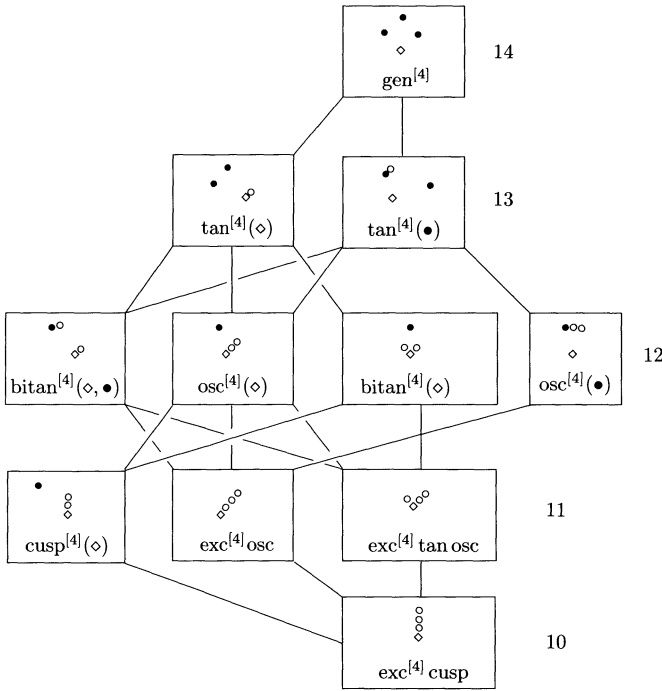
PROPOSITION 4.0.1. — Soient t' et t'' deux types de transformations quadratiques de \mathbb{P}^3 .

(i) Si t' dégénère en t'' et si $t''_{[o^H]}$ est constitué d'une seule orbite de B , alors $\varphi(t'_{[o^H]})$ dégénère en $\varphi(t''_{[o^H]})$.

(ii) Si t' et t'' sont de bidegré (2, 4), alors

$$t' \text{ dégénère en } t'' \iff \varphi(t'_{[o^H]}) \text{ dégénère en } \varphi(t''_{[o^H]}).$$

Preuve. — L'assertion (i) est un cas particulier du lemme suivant, avec $G = GL(4)$ et $B = G_{o^H}$.



Transformations de bidegré (2, 4)

LEMME 4.0.2. — Soit G un groupe linéaire algébrique connexe et B un sous-groupe parabolique de G . Soit X une G -variété algébrique et Y une sous-variété fermée de X qui est laissée stable par B . Soient enfin $y', y'' \in Y$. On suppose que $y'' \in \overline{G \cdot y'}$ et que $(G \cdot y'') \cap Y = B \cdot y''$. Alors $y'' \in \overline{B \cdot y'}$.

Preuve du lemme. — Puisque G/B est complète, on a $\overline{G \cdot y'} = G(\overline{B \cdot y'})$. Il existe donc $s \in G$ et $z \in \overline{B \cdot y'}$ tels que $y'' = s \cdot z$. Comme $z = s^{-1} \cdot y'' \in G \cdot y'' \cap Y$, il existe $b \in B$ tel que $z = b \cdot y''$ et par conséquent $y'' = b^{-1} \cdot z \in B(\overline{B \cdot y'}) = \overline{B \cdot y'}$. \square

Soit t de bidegré (2, 4); alors t possède un représentant M qui appartient à $\mathcal{H}(A_2[o^H])$. Supposons que $s^{-1} \cdot M$ appartienne aussi à $\mathcal{H}(A_2[o^H])$, $s \in G$; si $s \cdot o = o$ et $s \cdot H \neq H$, alors M est constitué de quadriques singulières en o , ce qui n'est pas possible; si $s \cdot o \neq o$, le système linéaire M_K induit par M sur un plan K contenant o et $s \cdot o$ est constitué de coniques avec tangentes fixées en o et $s \cdot o$: on a $\dim(M_K) \leq 2$ ou bien la droite passant par $o, s \cdot o$ est contenue dans l'ensemble des points-base de M , ce qui est impossible dans les deux cas. On a donc montré que $s \in B$,

i.e. $t_{[o^H]}$ est une seule orbite de B , ce qui avec (i) démontre l'implication \Rightarrow dans (ii).

Puisque φ est ouverte et, pour tout t de bidegré $(2, 4)$, l'orbite $t_{[o^H]}$ est ouverte dans $\varphi^{-1}\varphi(t_{[o^H]})$ (*cf.* remarque 3.3.1), les dégénérescences au but se relèvent. □

Il suit de la proposition 4.1.1 que le tableau des dégénérescences entre types de bidegré $(2, 4)$ s'obtient à partir de l'étude des dégénérescences entre orbites de B_0 dans $\mathcal{H}(A_2(x_1, x_2, x_3))$ (*cf.* lemme 3.3.1). Cette même proposition est aussi utile pour établir la (non)-dégénérescence entre types de bidegré différents.

Par exemple, cherchons les descendants de $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$.

- Le type $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$ est de dimension 11 et ne dégénère pas en $\text{gen}^{[2]}(\times)$ ou $\text{gen}^{[2]}(//)$ (on peut le vérifier en calculant les déterminants jacobiens). Il ne dégénère pas non plus en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$ ni en $\text{osc}^{[3]}(/)'$: on observe en effet que la trace sur $\mathcal{H}(A_2[o^H])$ de ces derniers est une seule orbite de B dont l'image par φ est constituée de systèmes linéaires de coniques avec deux points base (avec les notations du lemme 3.3.1 il s'agit de $\langle b5 \rangle$ et $\langle b4 \rangle$); comme d'autre part l'image par φ de la trace sur $\mathcal{H}(A_2[o^H])$ de $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$ est constituée de systèmes linéaires de coniques qui s'osculent (il s'agit de $\langle c2 \rangle$), l'assertion suit de la proposition 4.0.1.

- Que $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$ dégénère en $\text{tan}^{[2]}(O)$ et $\text{exc}^{[3]}\text{tan osc}$ est explicite dans les déformations

$$\langle x_1^2, x_1x_3, \varepsilon x_3^2 - x_1x_2, x_0x_3 - x_2^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle x_1^2, x_1x_3, x_3^2 - x_1x_2, x_0x_3 - \varepsilon x_2^2 \rangle$$

respectivement.

De plus, on sait déjà que $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$ dégénère en $\text{exc}^{[4]}\text{cusp}$.

Comme la liste des types de dimension 10 est $\text{tan}^{[2]}(O)$, $\text{gen}^{[2]}(\times)$, $\text{exc}^{[3]}\text{osc}'$, $\text{exc}^{[3]}\text{tan osc}$, $\text{osc}^{[3]}(/)'$ et $\text{exc}^{[4]}\text{cusp}$, on a trouvé tous les liens avec les types de dimension 10.

- Les seuls types de dimension 9 sont $\text{tan}^{[2]}(\times)$ et $\text{exc}^{[3]}\text{osc}''$. Puisque un type de bidegré $(2, 2)$ ne peut dégénérer en un type de bidegré $(2, 3)$, $\text{tan}^{[2]}(O)$ ne dégénère pas en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}''$. Un calcul de déterminant jacobien montre que $\text{exc}^{[4]}\text{cusp}$ ne dégénère pas en $\text{tan}^{[2]}(\times)$. Les dégénérescences de $\text{exc}^{[3]}\text{tan osc}$ en $\text{tan}^{[2]}(\times)$ et de $\text{exc}^{[4]}\text{cusp}$ en $\text{exc}^{[3]}\text{osc}''$ sont explicites dans

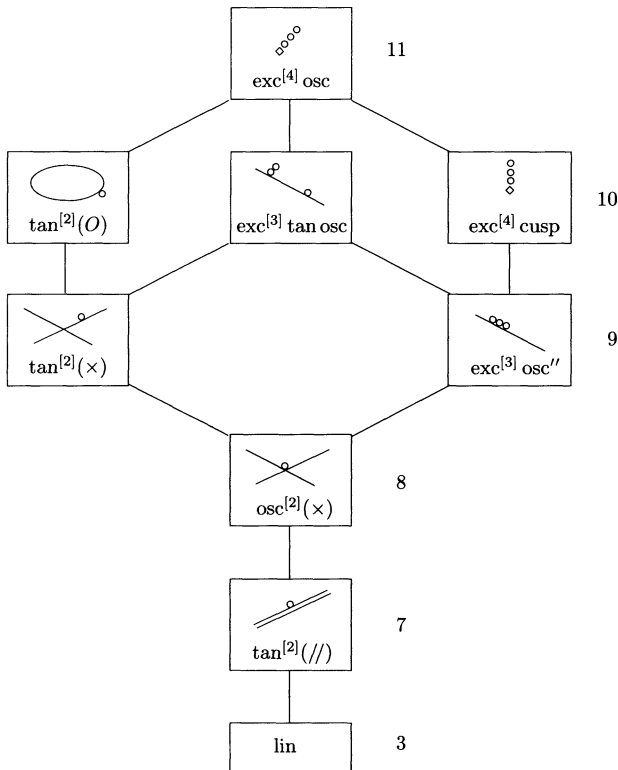
$$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3 - \varepsilon x_1^2, x_1x_2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle x_3^2, x_1x_3, x_1^2 - x_2x_3, x_0x_3 + x_1x_2 + \varepsilon x_2^2 \rangle$$

respectivement. Les autres liens entre dimensions 10 et 9 concernent des types de même bidegré et sont déjà connus. Le fait que $\text{exc}^{[3]}\text{osc}''$ dégénère en $\text{osc}^{[2]}(\times)$ est explicite dans

$$\langle x_3x_2 + \varepsilon x_1^2, x_3^2, x_3x_1, x_0x_3 - x_1x_2 \rangle.$$

• En dimension ≤ 8 , il n'y a plus que des types de bidegré (2, 2) et la situation est claire (remarquer que $\text{gen}^{[2]}(//)$ a déjà été exclu).

En résumé, on a le tableau suivant qui décrit les descendants de $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$:



Les descendants de $\text{exc}^{[4]}\text{osc}$

5. Commentaires historiques.

Soient $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface rationnelle de degré n et $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ une application birationnelle. On considère le système linéaire Λ sur \mathbb{P}^2 , image par π de la trace du système linéaire de toutes les surfaces de degré n dans \mathbb{P}^3 .

Grosso modo, la méthode de Cremona (voir [3], [2]) consiste à remonter les sous-systèmes linéaires de Λ correspondant aux transformations birationnelles de \mathbb{P}^2 en des systèmes linéaires de dimension 4 sur \mathbb{P}^3 contenant S ; ce sont des candidats pour construire des transformations birationnelles de \mathbb{P}^3 . Dans le cas que nous avons traité, *i.e.* celui des transformations quadratiques, la méthode de Cremona peut être précisée, dans un langage un peu plus moderne, de la manière suivante.

Soit $Q \subset \mathbb{P}^3$ une quadrique lisse. Prenons $o \in Q$ et considérons une projection $\pi = \pi_o : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ de centre o ; si $\ell_1, \ell_2 \subset Q$ sont les deux génératrices par o et $p_i := \pi(\ell_i - \{o\})$, $i = 1, 2$, on a un isomorphisme $\pi : Q - \{\ell_1 \cup \ell_2\} \rightarrow \mathbb{P}^2 - \{p_1, p_2\}$. On a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{Q} & \\
 \sigma_o \swarrow & & \searrow \sigma \\
 Q & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

où σ_o et σ désignent, respectivement, l'éclatement de o dans Q et de p_1, p_2 dans \mathbb{P}^2 ; l'image par σ du diviseur exceptionnel de σ_o est la droite $p_1 p_2$. Ici, Λ est le système linéaire des quartiques passant par p_1 et p_2 avec multiplicité ≥ 2 : plus précisément, Λ est l'image par $\sigma_* \circ \sigma_o^*$ de la trace sur Q du système linéaire de toutes les quadriques dans \mathbb{P}^3 (pour les notions d'images directes et inverses, voir par exemple [7], chap. V).

Considérons les sous-systèmes linéaires de Λ constitués par

I) les droites de \mathbb{P}^2 plus, comme composantes fixes, la droite $p_1 p_2$ et une conique passant par p_1 et p_2 ;

II) les coniques de \mathbb{P}^2 passant par p_1 et deux autres points plus, comme composantes fixes, la droite $p_1 p_2$ et une autre droite passant par p_2 ;

III) les coniques de \mathbb{P}^2 passant par trois points, plus la droite $p_1 p_2$ comptée deux fois comme composante fixe.

En remontant ces trois systèmes, on obtient les trois types généraux de classe I, II et III respectivement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BERZOLARI, Algebraische Transformationen und Korrespondenzen, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, dritter Band : Geometrie, 2.2.B, Teubner, 1932.
- [2] F. CONFORTO, Le superficie razionali, Zanichelli, Bologna, 1939.
- [3] L. CREMONA, Sulle trasformazioni razionali nello spazio, Annali di Mat. ser. II, V (1871–1873), 131–162.
- [4] D. EISENBUD, J. HARRIS, On varieties of minimal degree, in Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Pure Math., Amer. Math. Soc, 46–1 (1987), 3–13.
- [5] J.E. FORNÆESS, HE WU, Classification of Degree 2 Polynomial Automorphisms of \mathbb{C}^3 , Publ. Mat., 42 (1998), 195–210.
- [6] J. HARRIS, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1992.
- [7] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1979.
- [8] H.P. HUDSON, Cremona transformation in Plane and Space, Cambridge at the University Press, 1927.
- [9] I. PAN, Sur le multidegré des transformations de Cremona, C.R. Acad. Sci. Paris, 330, Série I (2000), 297–300.
- [10] J.G. SEMPLE, L. ROTH, Introduction to Algebraic Geometry, Oxford at the Clarendon Press, 1949.
- [11] V. SNYDER, A.H. BLACK, A.B. COBLE, L.A. DYE, A. EMCH, S. LEFSCHETZ, F.R. SHARPE, C.H. SISAM, Selected Topics in Algebraic Geometry, Nat. Research Council, Washington, Chelsea Pub. Company, 1970.

Manuscrit reçu le 13 mars 2000,
révisé le 8 janvier 2001,
accepté le 24 janvier 2001.

Ivan PAN,
UFRGS
Instituto de Matemática
av. Bento Gonçalves 9500
91540-000 Porto Alegre, RS (Brasil).
pan@mat.ufrgs.br
&
Felice RONGA & Thierry VUST,
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24 (Suisse).
Felice.Ronga@math.unige.ch
Thierry.Vust@math.unige.ch