ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Michel HICKEL

Solution d'une conjecture de C. Berenstein - A. Yger et invariants de contact à l'infini

Tome 51, nº 3 (2001), p. 707-744.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_3_707_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 3 (2001), 707–744

SOLUTION D'UNE CONJECTURE DE C. BERENSTEIN - A. YGER ET INVARIANTS DE CONTACT À L'INFINI

par Michel HICKEL

1. Introduction, motivation du travail.

Soit k un corps commutatif et $I = (p_1, \ldots, p_m)$ un idéal de l'anneau des polynômes $k_n[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$ (éventuellement $I = k_n[X]$). Notons $d_i = \deg p_i$ et $d = \operatorname{Max} d_i$. Étant donné un polynôme $p \in I$, la théorie de l'élimination nous assure par un résultat classique de G. Hermann [H] que l'on a une représentation

$$p = q_1 p_1 + \ldots + q_m p_m \tag{1.1}$$

avec $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant \deg p + 2(2d)^{2^{n-1}}$.

Une famille d'exemples due à E. Mayr et A. Meyer [MM] montre qu'on ne peut espérer avoir «beaucoup mieux» en général et qu'en tout cas, la complexité en degré du problème de la représentation est doublement exponentielle en le nombre de variables (cf. [Te3] pour une présentation plus complète de la problématique).

Si $I = k[X_1, \ldots, X_n]$, contrastant avec la situation précédente, on sait depuis les travaux de W. D. Brownawell [B1] et J. Kollár [K1]

Mots clés : Nullstellensatz effectif – Clôture intégrale des idéaux – Inégalités de Łojasiewicz globales.
Classification math : 14A05 – 13A15 – 32C99.

que le problème du théorème des zéros effectifs a lui une complexité simplement exponentielle en le nombre de variables, i.e. on peut trouver une représentation

$$(1.2) \qquad 1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant c_n d^n.$$

En fait, on peut prendre $c_n = 1$ dès que $d_i \neq 2$, $1 \leqslant i \leqslant m$, grâce à [K1] (cf. [K1] pour le résultat précis).

Du point de vue du problème de la représentation, ceci signifie que si $p \in \sqrt{I}$, on peut trouver une identité

$$(1.3) \qquad p^{d^n} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant d^n + d^n \deg p.$$

On peut naturellement s'interroger sur la différence de complexité entre les deux problèmes (cf. [K1] remark 1.8 p. 965). Dans cet article, nous voudrions envisager ce type de question avec un point de vue issu de la théorie des singularités.

Par ailleurs et pour des raisons inhérentes à leurs approches des problèmes considérés, C. A. Berenstein et A. Yger ont fait la conjecture suivante [BY2].

Il existe deux constantes $\kappa_1(n), \kappa_2(n)$ ne dépendant que de n, $\kappa_1(n) \simeq \kappa_2(n) \simeq n$, possédant la propriété suivante :

Soit I un idéal quelconque de $k_n[X]$, $\bar{I}$ la clôture intégrale de I, $p_1, \dots, p_m$ un système de générateurs de I, $d_i = \deg p_i, d = \operatorname{Max} \deg p_i$. Alors pour tout $p \in \bar{I}$ on a une représentation :

$$(1.4) \qquad p^{\kappa_1(n)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i$$

avec $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant \kappa_1(n) \deg p + \kappa_2(n) d^n$.

La complexité simplement exponentielle du théorème des zéros effectifs résulterait de ce phénomène puisque c'est en fait $1^{\kappa_1(n)}$ que l'on représente dans le cas où $(p_1, \dots, p_m) = I = k_n[X]$.

En utilisant les résultats et la méthode de J. Kollár, F. Amoroso [A1] [A2] [A3] a obtenu une réponse partiellement positive dans le cas où I est au plus 1-dimensionnel (dans [A3] le cas général est abordé mais les bornes obtenues ne sont pas ce que l'on peut espérer).

Il résultera du travail présenté ici que l'on peut apporter une réponse entièrement positive à cette conjecture. Nous obtenons en effet :

THÉORÈME 1.1. — *Soit I un idéal de $k_n[X]$ (éventuellement $I = k_n[X]$), $\bar{I}$ sa clôture intégrale dans $k_n[X]$. Fixons un système de générateurs de I, $p_1, \ldots p_m$ et posons $d_i = \deg p_i$ que l'on supposera rangé par $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_m = d$.*

1) *Si $m \leqslant n$. Pour tout $p \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$p^m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i$$

avec $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant m \deg p + m d_1 \ldots d_m$.

2) *Si $m > n$. Pour tout $p \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$p^{n+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i$$

avec $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant (n+1) \deg p + (n+1) \operatorname{Min}(d^n, \frac{d_1 \ldots d_m}{d_1^{m-n}})$.

Nous déduirons ce résultat d'un énoncé beaucoup plus précis qui majore $\operatorname{Max}(\deg q_i p_i)$, dans une représentation comme ci-dessus, en fonction d'invariants canoniquement associés au sous-schéma Z de $\mathbb{P}_k^n$ défini par les homogénéisés des p_i (cf. §2, Th. 2.1 et 2.1′). Les énoncés obtenus (cf. §5, Th. 5.1 et 5.2) montrent aussi par leurs parties minorantes que ces invariants mesurent presque exactement la complexité des problèmes considérés, pour un idéal I donné et un système de générateurs $p_1, \ldots, p_m$ par rapport auquel on souhaite représenter. En particulier pour $I \neq k_n[X]$, on a toujours strictement mieux que l'estimation du théorème 1.1. Il se dégage, nous semble-t-il, le principe suivant (qui peut surprendre au premier abord) :

Plus I et Z sont grands ou singuliers (en un sens que nous préciserons), meilleure est la réponse que l'on peut apporter au problème de la représentation de $p^{\operatorname{Min}(m,n+1)}$.

Après avoir défini ces invariants et énoncé précisément notre résultat (§2), nous rappelons quelques éléments sur la clôture intégrale des idéaux et son étude par éclatement normalisé (cf. §3). Puis nous démontrons l'énoncé en question au paragraphe 4. Le paragraphe 5 tire quelques conséquences de la méthode utilisée. Le théorème 5.1 donne une version du théorème des zéros effectifs avec «partie majorante» mais aussi «partie minorante». Le théorème 5.2 s'occupe des inégalités de Łojasiewicz globales. On précise et améliore le résultat principal de [JKS] ainsi que des résultats récents sur la séparation à l'infini de [CKT]. Nous abordons enfin, suite à [K2] et [EL], le problème de l'existence de décomposition canonique pour la version, «Prime Product», de W.D. Brownawell [B2], du théorème des zéros effectifs. L'énoncé que nous obtenons est le théorème 5.3.

Les démonstrations que nous présentons reposent sur la combinaison de trois ingrédients. Premièrement, on sait, depuis les travaux de M. Lejeune et B. Teissier [LT], puis B. Teissier [Te1], [T2], que les problèmes de clôture intégrale des idéaux peuvent s'étudier par éclatement normalisé et que ceci permet de prédire quels sont les meilleurs exposants intervenant dans des «inégalités» de type Łojasiewicz (locales ou globales). Le passage «d'inégalités» à des égalités se fait par le théorème de J. Briançon - H. Skoda sous sa forme locale démontrée par J. Lipman - A. Sathaye [LS]. Enfin la majoration de ces exposants est conséquence assez directe du théorème nommé «théorème de Bezout raffiné» dans le livre de W. Fulton [F] (th. 12.3 p. 233 dans [F]).

Bien que nos préocupations principales soient différentes, une partie de nos résultats est à rapprocher de ceux de L. Ein - R. Lazarsfeld [EL], et ce notamment par la nature des majorants obtenus ainsi que par le rôle des arguments issus de la théorie de l'intersection.

Dans cet article, les auteurs démontrent un «Nullstellensatz géométrique effectif», dans le cadre d'une variété projective complexe lisse X. Le cas du Nullstellensatz effectif «classique» qui correspond au cas $X = \mathbb{P}^n$ est traité par application des points i) et iii) de leur théorème principal (cf. [EL] Ex.1 p. 432). Leur preuve utilise de manière fondamentale l'existence de désingularisation et une extension du théorème d'annulation de Kodaira (cf. [EL] §1, en particulier $(***)$ p. 438). Cette argumentation, qui montre le rôle joué par les théorèmes d'annulation, est cependant limitée au contexte des corps de caractéristique zéro. En effet en caractéristique positive, la possiblité de désingulariser n'est pour le moment pas établie mais surtout le théorème d'annulation de Kodaira est en général faux ([Ray]). Nos résultats sont par contre valables pour des corps quelconques. Concernant le problème du Nullstellensatz effectif classique, notre résultat (Th. 5.1) généralise celui de [EL] (k arbitraire), mais le précise aussi puisque notre invariant principal est plus petit que ce que l'on obtient par application de [EL]. (Ex. 1 de [EL]). Cependant, nous ne sommes pas en mesure de traiter pour un corps quelconque le cadre géométrique du Nullstellensatz effectif tel qu'il serait naturel de l'envisager suite à [EL].

Ce texte est la rédaction précisée d'un exposé, donné en juin 1998 lors d'une conférence à l'université de Cosenza [Hi1]. Nous sommes heureux de remercier A. Yger de nous avoir incité à réaliser ce travail.

2. Remarques préliminaires, définition des invariants considérés, énoncé des théorèmes 2.1 et 2.1′.

Soient k un corps commutatif et K un sur-corps de k. Pour $p_1, \dots, p_m, q \in k_n[X]$, on peut trouver une identité

$$q = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i \,,\ q_i \in k_n[X] \text{et} \operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant N$$

si et seulement si on peut trouver une telle identité avec des $q_i \in K_n[X]$ et $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \leqslant N$.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que notre corps k est algébriquement clos. Autrement dit si on part avec un idéal $I = (p_1, \dots, p_m).k_n[X]$, les invariants associés sont définis comme ceux étant associés à $I = (p_1, \dots, p_m).\bar{k}_n[X]$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. Les idéaux premiers qui en résultent (cf. §5) sont obtenus par trace sur $k_n[X]$.

D'autre part, soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in GL_m(k)$ et $p'_i(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{i,j} p_j(X)$. Pour $q \in k_n[X]$, il existe une identité

$$q = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i \,,\ q_i \in k_n[X] \text{et} \operatorname{Max} \deg(q_i) \leqslant N$$

si et seulement si il existe une identité

$$q = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q'_i p'_i \,,\ q'_i \in k_n[X] \text{et} \operatorname{Max} \deg(q'_i) \leqslant N.$$

Nous appliquerons donc ce qui suit soit à nos polynômes d'origine $p_1, \dots, p_m$ soit à m combinaisons linéaires générales des p_i.

Nous fixons maintenant quelques notations que nous utiliserons de manière constante par la suite. Soit X un schéma algébrique [1] sur un corps k algébriquement clos. Si V est une sous-variété de X, i.e. un sous-schéma fermé réduit et irréductible de X, nous noterons $\mathcal{O}_{X,V}$ la fibre de $\mathcal{O}_X$ au point générique de V. $\mathcal{O}_{X,V}$ est le localisé, en l'idéal premier correspondant à V, de $\mathcal{O}_X(U)$, pour un ouvert affine U rencontrant V.

En dehors de la situation précédente, lorsque nous parlerons de points de X, il s'agira de points fermés de X. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme

---

[1] Nous emploierons, (comme dans [F]), ce terme pour dire de type fini sur Spec (k).

de schéma et $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_Y$. On notera $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ image inverse de $\mathcal{J}$. D'autre part, si V est une sous-variété de X (resp. x un point fermé de X), nous noterons $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X,V}$ (resp. $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X,x}$) la fibre de $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X$ au point générique de V (resp. au point x).

Désignons par $\mathbb{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension n. Soient $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ un sous-faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ et $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ le sous-schéma de $\mathbb{P}^n_k$ défini par $\mathcal{J}$. Soit enfin $H_\infty \subset \mathbb{P}^n_k$ un hyperplan. On notera U_0 l'ouvert affine $\mathbb{P}^n_k - H_\infty$ et $\mathcal{H}_0$ le sous-faisceau d'idéaux inversibles de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ qui définit H_∞.

Considérons alors $\Pi' : X' \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ l'éclatement normalisé de $\mathbb{P}^n$ de centre $\mathcal{J}$, i.e. $\Pi' = N \circ \Pi : X' \xrightarrow{N} X \xrightarrow{\Pi} \mathbb{P}^n$ où Π est l'éclatement de centre $\mathcal{J}$ et N est le morphisme de normalisation de X.

Nous définissons maintenant un certain nombre d'invariants associés à $\mathcal{J}$ et H_∞.

Considérons la décomposition en composantes irréductibles de $Y' = \Pi'^{-1}(Z)$ (défini par $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X'}$) i.e.,

$$Y'_{\text{red}} = \bigcup_{i' \in \Lambda'} Y'_{i'}. \tag{2.1}$$

Pour chaque $i' \in \Lambda'$, posons $Z'_{i'} = \Pi'(Y'_{i'})_{\text{red}} \hookrightarrow Z$. Ainsi chaque $Z'_{i'}$ est irréductible et $Z_{\text{red}} = \cup_{i' \in \Lambda'} Z'_{i'}$. Par conséquent la collection des $Z'_{i'}$ contient toutes les composantes irréductibles de Z (éventuellement répétées plusieurs fois) ainsi qu'éventuellement certaines composantes immergées. Notons

$$\begin{aligned} \Lambda'_{H_\infty} &= \{i' \in \Lambda' \mid Z'_{i'} \subset H_\infty\} \\ \Lambda'_{\text{aff}} &= \Lambda' - \Lambda'_{H_\infty}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'autre part, pour $i' \in \Lambda'$ soit

$$m'_{i'} = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{Y',Y'_{i'}}) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}/\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}) \tag{2.3}$$

(où long désigne la longueur de l'anneau en question).

Ainsi $\sum_{i' \in \Lambda'} m'_{i'}[Y'_{i'}]$ est le diviseur de Weil associé à $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X'}$, diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé.

Si maintenant $i' \in \Lambda'_{H_\infty}$, on pose

$$e'_{i'} = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}/\mathcal{H}_0.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}). \tag{2.4}$$

Bien entendu $e'_{i'} \geqslant 1$, car $i' \in \Lambda'_{H_\infty}$, et donc $\mathcal{H}_0.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}} \subset \mathcal{M}_{X',Y'_{i'}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}$. Remarquons aussi que X' étant normal, il est régulier en codimension 1, donc $\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}$ est un anneau de valuation discrète.

DÉFINITION 2.1. — *On pose*

1) $\nu_{H_\infty}(\mathcal{J}) = \mathrm{Max}_{i' \in \Lambda'_{H_\infty}} \left(\dfrac{m'_{i'}}{e'_{i'}}\right) \in \mathbb{Q}^+$

2) $\bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}) = \sum_{i' \in \Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'})$

3) $\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) = \sum_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} m'_{i'} \deg(Z'_{i'})$.

Bien entendu si $\Lambda'_{H_\infty} = \varnothing$ (resp. $\Lambda'_{\mathrm{aff}} = \varnothing$) on a posé $\nu_{H_\infty} = 0$ (resp. $\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) = 0$). Notre invariant principal est $\nu_{H_\infty}(\mathcal{J})$.

La notation 3) se justifie par les faits suivants. D'une part $U_0 = \mathbb{P}^n_k - H_\infty \simeq \mathbb{A}^n_k$ et

$$\Pi'_{|X'_0} : X'_0 = \Pi'^{-1}(U_0) \to U_0 = \mathbb{A}^n_k$$

est l'éclatement normalisé de centre $\mathcal{J}_{|U_0}$. Or $\mathcal{J}_{|U_0}$ sous-faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}$ est défini par un unique idéal $I \subset k_n[X]$. L'invariant 3) ne dépend que de I. En effet pour $i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}$ on a

(2.7) $m'_{i'} = \mathrm{long}(\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}/\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}) = \mathrm{long}(\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{i'} \cap X'_0}/\mathcal{J}_{|U_0}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'} \cap X'_0})$

(2.8) $\deg(Z'_{i'}) = \deg(Z'_{i'} \cap U_0)$.

En effet, si $P'_{i'} \subset k_n[x]$ désigne l'idéal premier de $k_n[X]$ correspondant à $Z'_{i'} \cap U_0$, on a

$$\deg(Z'_{i'}) = \deg(Z'_{i'} \cap U_0) = \deg(P'_{i'}) = \left[\mathrm{Frac}\,\frac{k_n[X]}{P'_{i'}} \;:\; k(l_1, \ldots, l_{n-p})\right]$$

pour $l_1, \ldots, l_{n-p}$, n − haut$(P'_{i'})$ formes linéaires assez générales. Par conséquent $\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)$ ne dépend que de I.

Maintenant si on part d'un idéal $I \subset k_n[X]$ et qu'on fixe un système de générateurs de I disons $p_1, \ldots, p_m$. On notera $\tilde{p}_1(X_0, \ldots X_n), \ldots, \tilde{p}_m(X_0, \ldots X_n) \in k[X_0, \ldots X_n]$ les homogénéisés des p_i, puis $\mathcal{J}_p$ le sous-faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m$ ainsi que Z_p le sous-schéma de $\mathbb{P}^n$ défini par $\mathcal{J}_p$. On peut donc considérer les invariants

$$\nu_{H_\infty}(\mathcal{J}_p)\,,\; \bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p)\,,\; \bar{d}_{\mathrm{aff}}(I).$$

Le dernier est donc déterminé uniquement par I (et pas par les générateurs choisis) pour peu qu'on prenne $H_\infty = \{[X] \in \mathbb{P}^n \mid X_0 = 0\}$. Pour ne pas trop alourdir les notations nous noterons dorénavant ν_{H_∞} par ν_∞.

Enfin on notera $\tilde{I}_p$ l'idéal engendré par $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m$ dans l'anneau des séries formelles $k[[X_0, \dots, X_n]]$ et on posera

$$s(\tilde{I}_p) = \operatorname{Dim}\left(\oplus_{l\geqslant 0} \frac{\tilde{I}_p^l}{\mathfrak{m}.\tilde{I}_p^l}\right) \tag{2.9}$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $k[[X_0, \dots, X_n]]$. On a $s(\tilde{I}_p) = 1+\operatorname{Dim}\Xi^{-1}(0)$ où Ξ est l'éclatement de $\mathbb{A}_k^{n+1}$ de centre $\tilde{I}_p.k_{n+1}[X]$. D'où il résulte (cf. [HIO]) que

$$s(\tilde{I}_p) \leqslant \operatorname{Min}\left(n+1, \dim_k \frac{\tilde{I}}{\mathfrak{m}.\tilde{I}}\right) \leqslant \operatorname{Min}(n+1, m). \tag{2.10}$$

Nous démontrerons au §4, les résultats suivants :

THÉORÈME 2.1. — *Soient k un corps algébriquement clos, $I \subset k_n[X]$ un idéal, $\bar{I}$ sa clôture intégrale (éventuellement $I = k_n[X]$). Soit $(p_1, \dots, p_m) = (p)$ un système de générateurs de I avec* $\deg p_i = d$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

i) *Pour tout $q \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$q^{s(\tilde{I}_p)} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} q_i p_i \text{ avec } q_i \in k_n[X]$$

et $\operatorname{Max}\deg(p_i q_i) \leqslant s(\tilde{I}_p)\operatorname{Max}(d, \deg q + \nu_\infty(\mathcal{J}_p))$.

ii) $\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}_p) = \sum_{i'\in\Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \leqslant d^{\operatorname{Min}(s(\tilde{I}_p),n)} \leqslant d^{\operatorname{Min}(n,m)}$. *En particulier* $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant d^{\operatorname{Min}(n,m)} - \bar{d}_{\text{aff}}(I)$.

iii) *Soit $V = \{x \in k^n \mid p_i(x) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\} = V(I)$. Si k est munie d'une valeur absolue $|\ | : k \to [0, +\infty[$. Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in k^n, \sum_{1\leqslant i\leqslant m} |p_i(x)| \geqslant \frac{c.d(x,V)^{\bar{d}_{\text{aff}}(I)}}{(1+||x||)^{\bar{d}_{\text{aff}}(I)+\nu_\infty(\mathcal{J}_p)-d}}$$

où pour $x = (x_1, \dots x_n)$ on a posé :
$||x|| = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|2\right)^{1/2}$ *et $d(x,V) = \inf_{z\in V} ||x-z||$ si $V \neq \varnothing$ et 1 sinon.*

Nous verrons (théorème 5.1) que lorsque $I = k_n[X]$, pour toute identité

$$1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i(X) p_i(X),$$

on a $\operatorname{Max} \deg(q_i p_i) \geqslant \operatorname{Max}(d, \nu_\infty(\mathcal{J}_p)$.

On peut donc dire par comparaison avec le point i) du théorème ci-dessus que c'est $\operatorname{Max}(d, \nu_\infty(\mathcal{J}_p)$ qui mesure au facteur $s(\tilde{I}_p) \leqslant \operatorname{Min}(n+1, m)$ près la complexité du problème considéré.

L'inégalité iii) jointe à ii) améliore et précise le résultat principal de S. Ji, J. Kollár, B. Shiffman dans [JKS]. Nous verrons que le facteur à l'infini est optimal pour tout $(p) = (p_1, \ldots, p_m)$.

Enfin dans ii) d'autres types de majoration sont possibles; nous aborderons le problème à la fin du présent article.

Nous voudrions maintenant expliciter le principe dont nous parlions dans l'introduction. Pour cela considérons un indice $i'_\infty \in \Lambda'_\infty$ tel que

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_p) = \frac{m'_{i'_\infty}}{e_{i'_\infty}}.$$

L'inégalité ii) nous dit que

$$(2.11)\quad \nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \frac{d^{\operatorname{Min}(n,m)} - \bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) - \sum_{\substack{i'_\infty \in \Lambda'_\infty \\ i' \neq i'_\infty}} m'_i \deg(Z'_i)}{e'_{i'_\infty} \deg(Z'_{i'_\infty})} \leqslant d^{\operatorname{Min}(n,m)}.$$

Ainsi si $I \neq k_n[X]$, $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant d^{\operatorname{Min}(n,m)} - \bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) < d^{\operatorname{Min}(n,m)}$, puisque $\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)$ contient dans la somme qui le définit le degré de toutes les composantes irréductibles de I (éventuellement répétées plusieurs fois) ainsi que celui de certaines composantes immergées de I. On notera que dans (2.11) le degré de chacune des $Z'_{i'}$, $i' \in \Lambda'$, contribue à améliorer l'estimation. Le degré d'une variété projective V qui s'interprète aussi comme la multiplicité à l'origine du cône $c(V) \subset k^{n+1}$ construit sur V, est une mesure de la singularité à l'origine de ce cône. On peut donc dire que la singularité éventuelle à l'origine de chacun des cônes $c(Z'_{i'})$, $i' \in \Lambda'$, diminue la complexité du problème de la représentation $q^{\operatorname{Min}(m,n+1)}$.

Pour avoir égalité entre les deux termes extrêmes de (2.11) il faut avoir $I = k_n[X]$ et $\Lambda'_\infty - \{i'_\infty\} = \varnothing$, $\deg(Z'_{i'_\infty}) = 1$ et $e'_{i'_\infty} = 1$. Ce qui signifie que $Z'_{i'_\infty} = Z_{\mathrm{red}}$ est lisse et irréductible et même un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n$, la condition $e'_{i'_\infty} = 1$ s'interprétant comme une condition de transversalité avec l'hyperplan à l'infini.

Si l'on part avec des polynômes de degrés distincts $\deg p_i = d_i$, $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_m = d$, le résultat s'applique néanmoins aux p_i avec les invariants $s(\tilde{I}_{p'})$, $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'})$, associés à m combinaisons linéaires

$$p'_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j}p_j$$

pourvu que la matrice $(a_{i,j}) \in Gl_m(k)$ soit telle que $\forall i, \deg p'_i = d$. Les invariants $s(\tilde{I}_{p'})$, $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'})$ ne dépendent pas des combinaisons linéaires choisies pour peu que l'on respecte la condition précédente.

Si l'on travaille directement avec les invariants associés à $\mathcal{J}_p$ et $\tilde{I}_p$ le théorème 2.1 devient :

Théorème 2.1$'$. — *Soient k un corps algébriquement clos, $I \subset k_n[X]$ un idéal et $p_1, \ldots, p_m$ un système de générateurs, $d_i = \deg p_i$, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m = d$ (éventuellement $I = k_n[X]$).*

i) *Pour tout $q \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$q^{s(\tilde{I}_p)} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} q_i p_i \ , \ q_i \in k_n[X]$$

et $\operatorname{Max}\deg(p_iq_i) \leqslant s(\tilde{I}_p)\operatorname{Max}(d, \deg q + \nu_\infty(\mathcal{J}_p))$.

ii) $\bar{d}_{\text{aff}}(I) + \nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}_p) = \sum_{i'\in\Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'})$ *et :*

a) *si* $m \leqslant n$, $\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant d_1 \ldots d_m$

b) *si* $m > n$, $\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant \frac{d_1\ldots d_m}{d_1^{m-n}}$.

iii) *Soit $V = V(I) = \{x \in k^n \,|\, p_i(x) = 0\, ,\, 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Si k est munie d'une valeur absolue $|\ | : k \to [0, +\infty[$. Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in k^n, \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{(1+\|x\|)^{d_i}} \geqslant \frac{c.d(x,V)^{\bar{d}_{\text{aff}}(I)}}{(1+||x||)^{\bar{d}_{\text{aff}}(I)+\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}}.$$

La seule différence avec le théorème 2.1 réside dans le fait que dans ii) nous ne savons pas comment intervient $s(\tilde{I}_p)$. Cette majoration peut être moins précise que celle fournie par le théorème 2.1 lorsque $s(\tilde{I}_p) < \operatorname{Min}(n,m)$. En tout cas, puisque dans 2.1 ou 2.1$'$ on a toujours $s(\tilde{I}_p) \leqslant \operatorname{Min}(n+1, m)$, nous obtenons bien :

COROLLAIRE 2.2. — *Soient k un corps commutatif quelconque et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Considérons $I \subset k_n[X]$ un idéal et $\bar{I}$ sa clôture intégrale (éventuellement $I = k_n[X]$). Pour tout système de générateurs $p_1, \ldots, p_m$, $d_i = \deg p_i$, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m = d$, on a*

1) *Si $m \leqslant n$. Pour tout $p \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$p^m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i\,, \quad q_i \in k_n[X]$$

avec $\operatorname{Max}\deg(q_i p_i) \leqslant m \deg p + m(d_1 \ldots d_m - \bar{d}_{\text{aff}}(I.\bar{k}_n[x]))$.

2) *Si $m > n$. Pour tout $p \in \bar{I}$, il existe une identité*

$$p^{n+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i p_i\,, \quad q_i \in k_n[X]$$

avec $\operatorname{Max}\deg(q_i p_i) \leqslant (n+1)\deg p + (n+1)\left[\operatorname{Min}(d^n, \frac{d_1 \ldots d_m}{d_1^{m-n}}) - \bar{d}_{\text{aff}}(I.\bar{k}_n[x])\right]$.

En effet 1) est donné par 2.1′ et 2) par 2.1 et 2.1′.

Nous rappelons maintenant quelques éléments nécessaires à la preuve du théorème 2.1. Nos références sont [Re], [NR], [HIO], [LT], [Te2].

3. Clôture intégrale des idéaux et éclatement normalisé.

DÉFINITION 3.1. — *Soient R un anneau commutatif unitaire et nœtherien, I un idéal de R. Un élément $x \in R$ est dit entier sur I si et seulement si il existe une relation*

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \text{ où } a_i \in I^i,\ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

L'ensemble de tous les éléments de R entier sur I est un idéal $\bar{I}$ de R, appelé clôture intégrale de I. Si S est une partie multiplicativement fermée, $\overline{I.R_S} = \bar{I}.R_S$.

Pour $J \subset I$ un autre idéal, on dit que J est une réduction de I, si et seulement si il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$J.I^{l-1} = I^l.$$

Si I n'est pas constitué entièrement de diviseur de zéro, ceci équivaut au fait que $\bar{J} = \bar{I}$. Par ailleurs, pour tout $p \in \mathbb{N}$, J^p est une réduction de I^p.

Une réduction de I qui n'admet pas de réduction stricte est dite minimale (cf. [HIO], chap. I).

Maintenant si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local de corps résiduel k, on appelle «analytic spread» de I l'entier

$$s(I) = \mathrm{Dim}\left(\oplus_{l\geqslant 0} I^l/mI^l\right) = 1 + \mathrm{Dim}\ \Xi^{-1}(0)$$

où Dim désigne la dimension de Krull et Ξ est l'éclatement de centre I de R (voir [HIO]). On a

$$\mathrm{haut}(I) \leqslant s(I) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{Dim}R, \dim_k I/\mathfrak{m}I).$$

$s(I)$ est le nombre minimal de générateurs de n'importe quelle réduction minimale de I (cf. [NR]). Si k est infini et $k \hookrightarrow R$, on sait en outre (cf. [NR] th. 1 p. 153) que pour $I = (u_1, \ldots, u_m)$, s combinaisons linéaires «générales» des u_i engendrent une réduction minimale de I.

L'appartenance d'un élément à $\bar{I}$, se vérifie souvent à l'aide du critère valuatif de dépendance intégrale :

THÉORÈME 3.2 (cf. [HIO] p. 23-25). — *Soient R nœtherien, $I \subset R$. Pour $f \in R$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \bar{I}$.

ii) *Pour toute valuation discrète* [2] $v : R \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *on a*

$$v(f) \geqslant v(I) \ \text{ où } \ v(I) = \inf(v(x), x \in I).$$

De plus, il existe un nombre fini de valuations discrètes $\bar{v}_i$, $i \in \Lambda'$, telles que $f \in \bar{I}$ si et seulement si $\bar{v}_i(f) \geqslant \bar{v}_i(I)$, pour tout $i \in \Lambda'$.

Observons de plus près ce que nous dit le dernier point. Pour cela posons :

$$\begin{aligned} P_i &= \{x \in R \mid \bar{v}_i(x) \geqslant 1\} \\ Q_{i,k} &= \{x \in R \mid \bar{v}_i(x) \geqslant k\} \\ m'_i &= \bar{v}_i(I). \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\bar{v}_i$ étant une valuation discrète, P_i est un idéal premier de R, $Q_{i,k}$ est P_i primaire et évidemment $P_i^k \subset Q_{i,k}$. Par conséquent le dernier point du

[2] Ou «fonction d'ordre».

théorème 3.2 nous donne une décomposition primaire de $\bar{I}$:

$$\bar{I} = \bigcap_{i \in \Lambda'} Q_{i,m'_i} \supset \prod_{i \in \Lambda'} P_i^{m'_i}. \tag{3.2}$$

Cette décomposition primaire peut être redondante i.e. $P_i = P_j$ avec $i \neq j$.

De la même façon pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\bar{I}^k = \bigcap_{i \in \Lambda'} Q_{i,km'_i} \supset \prod_{i \in \Lambda'} P_i^{km'_i}. \tag{3.3}$$

Ce sont en effet les mêmes valuations qui interviennent pour I et I^k (cf. par exemple [HIO] §15 et 16 ou [R]).

Le théorème de J. Briançon - H. Skoda [BS] sous la forme démontrée en 81 par J. Lipman -A. Sathaye [LS] dit que si R est nœthérien régulier de dimension n :

$$\overline{I^{n+k-1}} \subset I^k \tag{3.4}$$

avec pour «versant» local régulier

$$\overline{I^{s(I)+k-1}} \subset I^k. \tag{3.5}$$

La connaissance de ces valuations est donc déterminante, car elle fournit un critère d'appartenance à $\bar{I}$. Il se trouve qu'on sait depuis le travail de M. Lejeune - B. Teissier ([LT]) comment s'incarnent géométriquement ces valuations. Dans [LT], les auteurs précités ont étudié la notion de clôture intégrale des idéaux en relation avec les inégalités de Łojasiewicz, dans le contexte des espaces analytiques complexes. Leurs résultats sont en fait valables mutatis-mutandis pour les schémas de type fini sur un corps algébriquement clos quelconque. [3]

Nous utiliserons les deux résultats suivants de [LT] ou [Te2]. Le second détermine exactement ce que sont les $\bar{v}_i$.

THÉORÈME 3.3 (cf. [LT] th. 2.1 p.10 ou [Te2] chap I prop. 1 et coroll. 2, cf. aussi [H] §7). — *Pour k algébriquement clos, soient $R = k[X_1, \dots, X_n]$ (resp. $R = k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1,\dots,X_n)}$ ou $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$) et $I =$*

---

[3] À proprement dit dans [LT] est utilisé un argument de désingularisation à un point précis de la preuve du critère valuatif p. 12. Cet argument est inutile et est repris dans [Te2] simplement par mise en position de Nœther et ceci peut évidemment se faire pour tout corps algébriquement clos.

$(p_1,\dots,p_m)$ un idéal de R. Pour $p \in R$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $p \in \bar{I}$

ii) *(critère valuatif de dépendance intégrale)* $\forall \rho(t) = (\rho_1(t)\dots,\rho_n(t)) \in k[[t]]^n$ (resp. $\rho(t) \in (t)k[[t]]^n$), $\mathrm{ord}_t\, p(\rho(t)) \geqslant \mathrm{Min}_{1\leqslant i\leqslant m} \mathrm{ord}_t\, p_i(\rho(t))$

iii) *(critère métrique de dépendance intégrale) Si k est muni d'une valeur absolue $|\;| : k \to [0,+\infty[$ non triviale*

$$\forall M > 0,\ \exists c > 0 \,/\, \forall x \in k^n\,,\ \|x\| \leqslant M \Rightarrow |p(x)| \leqslant c\,\mathrm{Max}_{1\leqslant i\leqslant m}|p_i(x)|$$

Resp. si $R = k[X]_{(X)}$, $\exists \epsilon > 0, \exists c > 0 /\ \|x\| \leqslant \epsilon \Rightarrow |p(x)| \leqslant c\,\mathrm{Max}_{1\leqslant i\leqslant m}|p_i(x)|$.

Considérons maintenant S un schéma algébrique sur k, S normal. Si $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_S$, on peut définir un faisceau cohérent d'idéaux $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{O}_S$ tel que

$$\forall y \in S,\ (\overline{\mathcal{J}})_y = \overline{\mathcal{J}_y}\,,$$

ceci grâce à la commutativité des opérations de clôture intégrale et de localisation.

Soit maintenant $\Pi' : X' \xrightarrow{N} X \xrightarrow{\Pi} S$ l'éclatement normalisé de centre $\mathcal{J}$, i.e. Π est l'éclatement de centre $\mathcal{J}$ et N est la normalisation de X. On a (cf. [LT] prop. 3.3 p. 23) Π' est S-isomorphe au morphisme canonique

$$\mathrm{Proj}_S\,(\oplus_{l\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{J}^l}) \to S.$$

Soient Z le sous-schéma de S défini par $\mathcal{J}$ et $Y' = \Pi'^{-1}(Z)$. Considérons comme au §2 la décomposition de Y' en composantes irréductibles i.e.,

$$Y'_{\mathrm{red}} = \cup_{i'\in\Lambda'} Y'_{i'}$$

et soit

$$m'_{i'} = \mathrm{long}\,(\mathcal{O}_{Y',Y'_{i'}}) = \mathrm{long}\,(\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}/\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}). \tag{3.6}$$

Remarquons aussi que X' étant normal donc régulier en codimension 1, $\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}$ est un anneau de valuation discrète et qu'il définit donc une valuation que nous noterons $\bar{v}_{i',X'}$. Ainsi

$$m'_{i'} = \bar{v}_{i',X'}(\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}) = \mathrm{Max}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}} \subset \mathcal{M}^k_{X',Y'_{i'}}\}$$

où $\mathcal{M}_{X',Y'_{i'}}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}$.

Maintenant si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau d'idéaux inversibles de $\mathcal{O}_S$, posons pour $i' \in \Lambda'$:

$$v_{i'} = \bar{v}_{i',X'}(\mathcal{F}) = \text{long}\,(\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}}/\mathcal{F}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}})$$
$$= \text{Max}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{F}.\mathcal{O}_{X',Y'_{i'}} \subset \mathcal{M}^k_{X',Y'_{i'}}\}.$$

Notons $\mathcal{P}_{i'}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{X'}$ définissant $Y'_{i'}$. En utilisant le théorème de structure des anneaux locaux complets réguliers d'égale caractéristique [M], et des propriétés élémentaires de la longueur, on peut voir que pour $y'_{i'}$ point suffisamment général de $Y'_{i'}$ on a :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'}} \simeq k[[t, U_2, \ldots, U_m]] = k[[t, U]]$$
$$\mathcal{P}_i.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'}} \simeq (t)k[[t, U]]$$
$$\mathcal{J}.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'}} \simeq (t^{m'_{i'}})k[[t, U]]$$
$$\mathcal{F}.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'}} \simeq (t^{v_{i'}}.\alpha(t, U)k[[t, U]], \qquad \alpha(t, U) \notin (t) \tag{3.7}$$

où $\hat{}$ désigne la complétion adique pour l'idéal maximal.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4 (cf. [LT] 2.1 p.10, 4.1.6 p. 28, 7.2 p. 55). — *Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour un faisceau d'idéaux inversibles $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_S$:*

1) $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{J}}$.

2) *Pour tout morphisme* $\Pi' : X' \to S$ *tel que* Π' *soit propre birationnel et surjectif,* X' *normal et* $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X'}$ *inversible, on a* $\mathcal{F}.\mathcal{O}_{X'} \subset \mathcal{J}.\mathcal{O}_{X'}$.

3) *La propriété 2) est vraie pour l'éclatement normalisé de centre* $\mathcal{J}$, $\Pi' : X' \to S$.

4) *Pour tout* $i' \in \Lambda'$, $\bar{v}_{i',X'}(\mathcal{F}) \geqslant m'_{i'}$.

De plus pour $a, b \in \mathbb{N}$, *on a* $\mathcal{F}^a \subset \overline{\mathcal{J}^b}$ *si et seulement si* $a\bar{v}_{i',X'}(\mathcal{F}) \geqslant m'_{i'}b$.

On notera que le dernier point nous dit que les $\bar{v}_{i',X'}$ incarnent exactement les valuations dont nous avons parlé plus haut. Nous avons énoncé le théorème 3.4 en termes de faisceaux mais une rédaction «algèbre commutative» est bien évidemment possible. En termes analytiques, $\bar{v}_{i,X'}(\mathcal{F})$ est simplement l'ordre auquel s'annule $f \circ \Pi'$ en un point général $y'_{i'}$ de $Y'_{i'}$, pour f un générateur quelconque de $\mathcal{F}.\mathcal{O}_{S,\Pi'(y'_{i'})}$.

4. Preuve des théorèmes 2.1 et 2.1′.

Nous prouvons maintenant le théorème 2.1. Nous indiquerons successivement en remarque les modifications à apporter pour obtenir le théorème 2.1′.

Soit $I \subset k_n[X]$ un idéal quelconque, éventuellement $I = k_n[X]$. Soit $p_1, \ldots, p_m$ un système de générateurs de I et supposons $d = \deg p_i$. Pour simplifier les notations du paragraphe 2, nous noterons $\mathcal{J}$, s, $\bar{d}_{\text{aff}}$, ν_∞ ce que nous avions noté $\mathcal{J}_p$, $s(\tilde{I}_p)$, $\bar{d}_{\text{aff}}(I)$, $\nu_\infty(\mathcal{J}_p)$. Le lemme suivant n'a pleinement d'intérêt que si $s \leqslant \operatorname{Min}(m, n)$ (on a toujours $s \leqslant \operatorname{Min}(m, n+1)$).

Lemme 4.1. — *Il existe s combinaisons linéaires des p_i,*

$$r_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_{i,j} p_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant m\,,\ \lambda_{i,j} \in k$$

telles que si $\tilde{r}_i(X_0, \ldots X_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_{i,j} \tilde{p}_j(X_0, \ldots X_n)$ désigne l'homogénéisé de $r_i(X_1, \ldots X_n)$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ le sous-faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par les $\tilde{r}_i$, on ait :

i) $\forall x \in \mathbb{P}^n_k$, $\overline{\mathcal{I}_x} = \overline{\mathcal{J}_x}$.

ii) *L'éclatement normalisé de $\mathbb{P}^n$ de centre $\mathcal{J}$ est $\mathbb{P}^n$-isomorphe à celui de centre $\mathcal{I}$.*

Preuve.

ii) résultera de i). En effet les éclatements normalisés en question sont respectivement isomorphes à $\operatorname{Proj}(\oplus_{l \geqslant 0} \overline{\mathcal{J}^l})$ et $\operatorname{Proj}(\oplus_{l \geqslant 0} \overline{\mathcal{I}^l})$. Or i) nous assurera que $\forall l \geqslant 0\ \overline{\mathcal{I}^l} = \overline{\mathcal{J}^l}$. Pour obtenir i), il suffit de voir qu'on peut choisir des $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{P}^n_k$, $\mathcal{I}_x$ soit une réduction de $\mathcal{J}_x$. Soient des $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ tels que si $r_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_{i,j} p_j$, on ait $\deg r_i = d$.

Si $\tilde{J} = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_s) k[[X_0, \ldots, X_n]]$, les résultats de [NR] (§5 th. 5.1) nous assurent que si les $\lambda_{i,j}$ sont suffisamment généraux alors $\tilde{J}$ est une réduction de $\tilde{I}$. Par conséquent, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant m$, on peut trouver une relation de dépendance intégrale

$$\tilde{p}_j^k(X) + \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{\substack{|\alpha| = l \\ \alpha \in \mathbb{N}^s}} a_{\alpha,l}(X) . \tilde{r}^\alpha(X) \right) . \tilde{p}_j^{(k-l)}(X) = 0 \tag{4.1}$$

où $\tilde{r}^\alpha(X) = \tilde{r}_1(X)^{\alpha_1} \ldots \tilde{r}_s^{\alpha_s}(X)$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

Les $\tilde{p}_j$, $\tilde{r}_j$ étant homogènes de degré d on a

$$\tilde{p}_j^k(X) + \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha\in\mathbb{N}^s}} a_{\alpha,l}(0).\tilde{r}^\alpha(X) \right) .\tilde{p}_j^{(k-l)}(X) = 0. \tag{4.2}$$

Maintenant si $x \in \mathbb{P}_k^n$, écrivant la relation induite par (4.2), on obtient que $\overline{\mathcal{J}_x} \subset \overline{\mathcal{I}_x}$. Donc $\mathcal{I}_x$ est bien une réduction de $\mathcal{J}_x$.

Notons maintenant $\nu_\infty = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$. Soit alors $p \in \overline{I}$, désignons par $\tilde{p}(x_0, \dots, x_n)$ son homogénéisé puis posons

$$\begin{aligned} a' &= a && \text{si } \deg p + \nu_\infty \geqslant d \\ a' &= b(d - \deg p) && \text{si } \deg p + \nu_\infty < d. \end{aligned}$$

Ainsi $\deg p + \frac{a'}{b} = \mathrm{Max}(d, \deg p + \nu_\infty)$.

Désignons enfin par $\tilde{J}_b$ l'idéal de $k[[x_0, \dots, x_n]]$ engendré par $\tilde{r}_1(X_0^b, X_1^b, \dots, X_n^b), \dots, \tilde{r}_n(X_0^b, \dots, X_n^b)$. On a alors le lemme suivant :

LEMME 4.2. — *$\tilde{p}(X_0^b, \dots, X_n^b)X_0^{a'}$ est dans la clôture intégrale de $\tilde{J}_b\, k[[X_0, \dots, X_n]]$.*

Preuve. — Le critère valuatif de dépendance intégrale nous dit qu'il suffit de vérifier que pour tout $\phi(t) = (\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)) \in k[[t]]^{n+1}$, $\phi(0) = 0$ on a

(4.3)
$$\mathrm{ord}_t\,(\tilde{p}(\phi_0^b(t), \dots, \phi_n^b(t)) + a' \,\mathrm{ord}_t\, \phi_0(t) \geqslant \mathrm{Min}\,\mathrm{ord}_t\, \tilde{r}_j(\phi_0^b(t), \dots, \phi_n^b(t)).$$

Ceci se réécrit, en posant $\rho_i(t) = \phi_i^b(t)$,

$$\mathrm{ord}_t\,(\tilde{p}(\rho(t)) + \frac{a'}{b}\,\mathrm{ord}_t\, \rho_0(t) \geqslant \mathrm{Min}\,\mathrm{ord}_t\, \tilde{r}_j(\rho(t)) \tag{4.4}$$

ou encore

$$\mathrm{ord}_t\,(\tilde{p}^b(\rho(t)) + a' \,\mathrm{ord}_t\, \rho_0(t) \geqslant \mathrm{Min}\,\mathrm{ord}_t\, \tilde{r}_j^b(\rho(t)). \tag{4.5}$$

Maintenant, soit i, $0 \leqslant i \leqslant n$, tel que $\mathrm{ord}_t\, \rho_i = \mathrm{Min}_{0\leqslant j\leqslant n}\mathrm{ord}_t\, \rho_j$. Posons $\theta(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_i(t)}$ et $x = [\theta(0) : \theta_1(0) : \dots : \theta_n(0)]$ le point de $\mathbb{P}^n$ correspondant. Par homogénéité des polynômes, (4.5) est équivalente à

$$\begin{aligned} &(b \deg p + a')\mathrm{ord}_t\, \rho_i(t) + \mathrm{ord}_t\, \tilde{p}^b(\theta(t)) + a'\mathrm{ord}_t\, \theta_0(t) \\ &\qquad \geqslant bd\,\mathrm{ord}_t\, \rho_i(t) + \mathrm{Min}\,\mathrm{ord}_t\, \tilde{r}_j^b(\theta(t)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comme par construction $b \deg p + a' \geqslant db$, ceci sera garanti par

$$\text{(4.7)} \qquad \operatorname{ord}_t \tilde{p}^b(\theta(t)) + a' \operatorname{ord}_t \theta_0(t) \geqslant \operatorname{Min} \operatorname{ord}_t \tilde{r}_j^b(\theta(t)).$$

Désignant par $\left(\tilde{p}^b X_0^{a'}\right)_x$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$ induit par $\tilde{p}^b X_0^{a'}$. Il nous suffit donc pour conclure d'avoir

$$\text{(4.8)} \qquad \left(\tilde{p}^b X_0^{a'}\right)_x \in \overline{\mathcal{I}^b} = \overline{\mathcal{J}_x^b}\,.$$

Or (4.8) est vraie par construction. En effet désignons par $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{H}_0$) le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par $\tilde{p}$ (resp. par X_0), il s'agit de voir que

$$\text{(4.9)} \qquad \mathcal{P}^b \mathcal{H}_0^{a'} \subset \overline{\mathcal{J}^b}\,.$$

Pour cela le théorème de [LT] rappelé en (3.3) nous dit qu'il suffit de vérifier que

$$\forall i' \in \Lambda' \qquad v_{i',X'}\left(\mathcal{P}^b \mathcal{H}_0^{a'}\right) \geqslant b\, m'_{i'}\,.$$

Or pour $i' \in \Lambda'_\infty$,

$$v_{i',X'}\left(\mathcal{P}^b \mathcal{H}_0^{a'}\right) \geqslant v_{i',X'}\left(\mathcal{H}_0^{a'}\right) = a'\, e'_{i'} \geqslant a\, e'_{i'} \geqslant b\, m'_{i'}$$

car $\frac{a'}{b} \geqslant \nu_\infty = \operatorname{Max}_{i' \in \Lambda'_\infty} \frac{m'_{i'}}{e'_{i'}}$.

Si maintenant $i' \in \Lambda'_{\text{aff}}$, posons toujours $\mathbb{A}^n = U_0 = \{[x] \in \mathbb{P}^n / x_0 \neq 0\}$. Alors

$$\Pi'_0 \;:\; X'_0 = \Pi'^{-1}(U_0) \to U_0 = \mathbb{A}^n$$

est l'éclatement normalisé de U_0 de centre $\mathcal{J}_{/U_0}$ (i.e. I). Par conséquent, puisque $p \in \bar{I}$:

$$v_{i',X'_0}\left(\mathcal{P}_{/U_0}\right) \geqslant v_{i',X'_0}\left(\mathcal{J}_{/U_0}\right) = m'_{i'}\,.$$

Mais puisque $v_{i',X'}(\mathcal{P})$ et $v_{i',X'}(\mathcal{J})$ se calculent en un point assez général de $Y'_{i'}$ (donc de $Y'_{i'} \cap X'_0$), on a pour $i' \in \Lambda'_{\text{aff}}$:

$$\begin{aligned} &v_{i',X'}(\mathcal{P}) = v_{i',X'_0}\left(\mathcal{P}_{/U_0}\right) \\ &v_{i',X'}\left(\mathcal{P}^b \mathcal{H}_0^{a'}\right) = v_{i',X'}\left(\mathcal{P}^b\right) = b\, v_{i',X'_0}(\mathcal{P}) \geqslant b\, m'_{i'}\,. \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent prouver le point i) du théorème 2.1.

Le théorème de J. Briançon - H. Skoda, sous la forme démontrée par J. Lipman et A. Sathaye [LS], nous dit qu'il existe des $a_j(X_0,\dots,X_n) \in k[[X_0,\dots,X_n]]$ tels que

$$\tilde{p}^s(X_0^b,\dots,X_n^b)X_0^{s\,a'} = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} a_j(X_0,\dots,X_n)\tilde{r}_j(X_0^b,\dots,X_n^b)$$

et par suite des $b_j(X_0,\dots,X_n) \in k[[X_0,\dots,X_n]]$ tels que

$$\tilde{p}^s(X_0^b,\dots,X_n^b)X_0^{s\,a'} = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} b_j(X_0,\dots,X_n)\tilde{p}_j(X_0^b,\dots,X_n^b).$$

Mais $k[[X_0,\dots,X_n]]$ étant fidèlement plat sur $k[[X_0,X_1^b,\dots,X_n^b]]$ (par application évidente du critère local de platitude), on peut prendre les b_j dans $k[[X_0,X_1^b,\dots,X_n^b]]$ i.e. $b_j(X_0,X_1,\dots,X_n) = h_j(X_0,X_1^b,\dots,X_n^b)$.

Par homogénéité, on peut ne retenir des h_j que leurs composantes homogènes de degré en $\underline{X}$:

$$b\,(s\deg p - d) + s\,a'\,.$$

On a donc une identité dans $k[X_0,\dots,X_n]$:

$$\tilde{p}^s(X_0^b,\dots,X_n^b)X_0^{s\,a'} = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} h_j(X_0,X_1^b,\dots,X_n^b)\tilde{p}_j(X_0^b,\dots,X_n^b)$$

avec $\operatorname{Max}\deg_X\, h_j(X_0,X_1^b,\dots,X_n^b)\tilde{p}_j(X_0^b,\dots,X_n^b) = b\,s\deg p + s\,a'$.

Faisant $X_0 = 1$ et $Y_i = X_i^b$ dans cette identité, on a donc

$$p^s(Y) = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} h_j(Y)p_j(Y) \tag{4.10}$$

avec $\operatorname{Max}\deg h_j(Y)p_j(Y) \leqslant s\deg p + s\,\frac{a'}{b}$.

Or $s\deg p + a'/b = s\operatorname{Max}(d,\deg p + \nu_\infty)$, le point i) est donc prouvé.

Remarque 4.1. — Dans le cas du théorème 2.1′, le lemme 4.1 est inutile. On prouve ensuite le lemme 4.2 avec $\tilde{I}_b$ l'idéal de $k[[X_0,\dots X_n]]$ engendré par les $\tilde{p}_i(X_0^b,X_1^b,\dots,X_n^b)$, la preuve est identique ainsi que la fin du point i).

Nous prouvons à présent le point iii) du théorème 2.1. Pour cela, étant donné $i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}$, notons $V_{i'} = Z'_{i'} \cap U_0 \subset k^n$, $P'_{i'} \subset k_n[X]$ l'idéal premier correspondant, $d_{i'} = \deg P'_{i'} = \deg(Z'_{i'}) = [\operatorname{Frac}(\frac{k_n[X]}{P'_{i'}}) : k(w_1,\dots,w_{s_{i'}})]$

où $s_{i'} = \mathrm{Dim}\,\frac{k_n[X]}{P'_{i'}}$ et $w_1, \dots, w_{s_{i'}}$ sont des combinaisons linéaires générales des X_j.

Il est classique (cf. par exemple [JKS] lemme 8 p. 815) que si $A \subset k^n$ est irréductible de degré l, on peut trouver un nombre fini de polynômes g_k, chacun de degré au plus l tels que $g_k \in I(A)$ et

$$\forall x \in k^n\,, \qquad \mathrm{Max}|g_k(x)| \geqslant c\, d(x, A)^d\,.$$

Appliquons cela à chacun des $V_{i'}$, il existe donc des polynômes de degré au plus $d_{i'}$, $g_{i',1}, \dots, g_{i',k_{i'}}$ tels que

$$\forall x \in k^n\,, \qquad \mathrm{Max}_{1 \leqslant j \leqslant k_{i'}} |g_{i',j}(x)| \geqslant c\, d(x, V_{i'})^{d_{i'}}$$

et $g_{i',j} \in P'_{i'}$.

Notons alors $\tilde{g}_{i',j}(X_0, X)$ l'homogénéisé des $g_{i',j}$ et posons pour tout $\underline{j} = (j_1, \dots, j_r)$, $1 \leqslant j_{i'} \leqslant k_{i'}$:

$$\tilde{g}_{\underline{j}} = \prod_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} \tilde{g}_{i',j_{i'}}^{m'_{i'}} \qquad\qquad g_{\underline{j}} = \prod_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} g_{i',j_{i'}}^{m'_{i'}}\,.$$

Soit $l_{\underline{j}} = \deg g_{\underline{j}} = \deg \tilde{g}_{\underline{j}} \leqslant \bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)$.

D'autre part puisque $V = \bigcup_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} V_{i'}$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in k^n\,,\ \ \mathrm{Max}_{\underline{j}} |g_{\underline{j}}(x)| &= \prod_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} \mathrm{Max}_{1 \leqslant j_{i'} \leqslant k_{i'}} |g_{i',j_{i'}}(x)|^{m'_{i'}} \\ &\geqslant c' \prod_{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}} d(x, V_{i'})^{d_{i'} m'_{i'}} \geqslant c'\, d(x, V)^{\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)}\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Notant toujours $\nu_\infty = a/b$, puis désignant par $\mathcal{G}_{\underline{j}}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par $\tilde{g}_{\underline{j}}$, le résultat précité de [LT] nous dit que

$$\mathcal{G}_{\underline{j}}^b . \mathcal{H}_0^a \subset \overline{\mathcal{J}^b}\,. \tag{4.13}$$

En effet, soit $i' \in \Lambda'$. Si $i' \in \Lambda'_\infty$ on a

$$v_{i',X'}(\mathcal{G}_{\underline{j}}^b . \mathcal{H}_0^a) \geqslant v_{i',X'}(\mathcal{H}_0) a = a\, e_{i'} \geqslant m'_{i'} b\,.$$

D'autre part, si $i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}$:

$$v_{i',X'}(\mathcal{G}_{\underline{j}}^b . \mathcal{H}_0^a) \geqslant v_{i',X'}(\mathcal{G}_{\underline{j}}^b) \geqslant b\, m'_{i'}\, v_{i',X'}(\mathcal{G}_{i',j_{i'}}) \geqslant b\, m'_{i'}$$

car par construction $\mathcal{G}_{i',j_{i'}} . \mathcal{O}_{X',Y'_{i'}} \subset \mathcal{M}_{X,Y'_{i'}}$.

Maintenant comme pour $x \in k^{n+1}$, $\|x\| \simeq \mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, on déduit de (4.13) l'existence de constantes $c_{\underline{j}}$ telles que

$$(4.14) \qquad \forall x \in k^{n+1}\,,\ |\tilde{g}_{\underline{j}}(x)|.|x_0|^{\nu_\infty} \leqslant c_{\underline{j}}\|x\|^{l_{\underline{j}}+\nu_\infty-d}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|\tilde{p}_j(x)|\Big)\,.$$

En effet, (4.14) est équivalente à

$$(4.15)\ |\tilde{g}^b_{\underline{j}}(x)|.|x_0|^a\mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{d\,b} \leqslant c_{\underline{j}}\mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{b\,l_{\underline{j}}+a}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|\tilde{p}^b_j(x)|\Big)$$

qu'il suffit par homogénéité d'obtenir pour $\|x\|$ assez petit.

La comparaison des critères valuatifs et métriques de dépendance intégrale nous dit qu'il suffit de comparer, pour tout $\rho(t) \in k[[t]]^{n+1}$, telle que $\rho(0) = 0$ les ordres en t des deux membres de (4.15) composés avec ρ.

Or en posant $\theta(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_i(t)}$, où i est tel que $\mathrm{ord}_t\,\rho_i = \mathrm{Min}_{0\leqslant j\leqslant n}\mathrm{ord}_t\,\rho_i(t)$, on est exactement ramené à (4.13) vue sous forme valuative au point $[\theta_0(0) : \theta_1(0) : \ldots : \theta_n(0)]$.

Maintenant faisant $x_0 = 1$ dans (4.14) on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in k^n\,,\ |\tilde{g}_{\underline{j}}(x)| &\leqslant c'_{\underline{j}}(1+\|x\|)^{l_{\underline{j}}+\nu_\infty-d}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|p_j(x)|\Big)\\ &\leqslant c'_{\underline{j}}(1+\|x\|)^{\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)+\nu_\infty-d}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|p_j(x)|\Big)\end{aligned}$$

car $l_{\underline{j}} \leqslant \bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)$. Puis comparant avec (4.12), on obtient l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$(4.16)\ \ \forall x \in k^n,\ \ d(x,V)^{\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)} \leqslant c\,(1+\|x\|)^{\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I)+\nu_\infty-d}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|\,p_j(x)|\Big).$$

Ce qui est bien le résultat désiré.

Remarque 4.2. — La preuve dans le cas de 2.1′ est identique. On écrit l'inégalité (4.14) sous la forme

$$(4.14') \qquad \forall x \in k^{n+1}\,,\ |\tilde{g}_{\underline{j}}(x)|.|x_0|^{\nu_\infty} \leqslant c_{\underline{j}}\|x\|^{l_{\underline{j}}+\nu_\infty}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{|\tilde{p}_j(x)|}{\|x\|^{d_j}}\right)$$

et (4.15) sous la forme $\forall x \in k^{n+1}$

$$\begin{aligned}&|\tilde{g}^b_{\underline{j}}(x)|.|x_0|^a\mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{d\,b}\\ &\qquad\leqslant c'_{\underline{j}}\mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{b\,l_{\underline{j}}+a}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\mathrm{Max}_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{(d-d_j)b}|\tilde{p}^b_j(x)|\Big)\end{aligned}$$

qui est équivalente à (4.13).

Nous prouvons à présent la majoration du point ii). Pour cela, notons $\Pi : X \to \mathbb{P}^n_k$ l'éclatement de centre $\mathcal{J}$, $Y = \Pi^{-1}(Z)$, (défini par $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X$) et considérons sa décomposition en composantes irréductibles

$$Y_{\text{red}} = \bigcup_{i \in \Lambda} Y_i. \tag{4.17}$$

Puis posons

$$Z_i = \Pi(Y_i)_{\text{red}}\,. \tag{4.18}$$

Notons enfin

$$m_i = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{Y,Y_i}) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X,Y_i}/\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X,Y_i}) \tag{4.19}$$

et $\Lambda_\infty = \{i \in \Lambda \ / \ Z_i \subset H_\infty\}$, puis pour $i \in \Lambda_\infty$,

$$e_i = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X,Y_i}/\mathcal{H}_0.\mathcal{O}_{X,Y_i}).$$

Ainsi $Y = P(C_Z\mathbb{P}^n)$ est le projectivisé du cône normal, $C_Z\mathbb{P}^n$, de Z dans $\mathbb{P}^n$ et $\sum_{i\in\Lambda} m_i\,[Y_i]$ est donc le diviseur de Weil associé à $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X$.

Lemme 4.3. — *On a*

$$\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}) = \sum_{i' \in \Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \leqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i) = d_{\text{tot}}(\mathcal{J}).$$

Preuve. — Soit $N : X' \to X$ la normalisation. Pour tout $i' \in \Lambda'$, $N(Y'_{i'}) = Y_i$ pour un certain i, et donc $Z'_{i'} = Z_i$. Posons pour $i \in \Lambda$:

$$\Lambda'_i = \{i' \in \Lambda' \ / \ N(Y'_{i'}) = Y_i\}, \text{ainsi } N^{-1}(Y_i)_{\text{red}} = \bigcup_{i' \in \Lambda'_i} Y'_{i'}.$$

On a alors

$$m_i = \sum_{i' \in \Lambda_i} m'_{i'}\,[R(Y'_{i'}) : R(Y_i)] \tag{4.20}$$

où $R(Y'_{i'})$ (Resp. $R(Y_i)$) est le corps des fonctions de $Y'_{i'}$ (Resp. Y_i) et $[:]$ le degré de l'extension en question. En effet, ayant remarqué que X est irréductible et réduit (car $\mathbb{P}^n$ l'est) et que $\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X,Y_i}$ est engendré par un élément a sur un ouvert affine par lequel on calcule m_i, (4.20) est la traduction dans nos notations d'une propriété bien connue des fonctions d'ordre (cf. [F] ex. 1.2.3 p.9). Ainsi comme pour $i' \in \Lambda_i$, $Z'_{i'} = Z_i$ on a

$$m_i \deg(Z_i) = \sum_{i' \in \Lambda_i} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \, [R\,(Y'_{i'}) \,:\, R\,(Y_i)]. \tag{4.21}$$

Donc si $l_i = \mathrm{Min}_{i' \in \Lambda_i} [R\,(Y'_{i'}) \,:\, R\,(Y_i)]$, on a

$$\sum_{i' \in \Lambda_i} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \leqslant \frac{m_i \deg(Z_i)}{l_i} \leqslant m_i \deg(Z_i). \tag{4.22}$$

Par conséquent

$$\sum_{i' \in \Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) = \sum_{i \in \Lambda} \sum_{i' \in \Lambda_i} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \leqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i).$$

Ayant fait cette remarque, la majoration de ii) relève de la théorie de l'intersection telle que développée par W. Fulton - R. MacPherson. Puisque $Y = P\,(C_Z\mathbb{P}^n)$ les Z_i, $i \in \Lambda$, sont exactement les sous-variétés distinguées de cette théorie et les m_i les "multiplicités" correspondantes. (À la seule différence que dans [F] on considère plutôt $C_Z\mathbb{P}^n$ que $P\,(C_Z\mathbb{P}^n)$). On dispose en particulier de l'important résultat de positivité suivant :

THÉORÈME 4.4 (Théorème de «Bezout raffiné» [F] th.12.3 p. 223 et [F] ex. 12.3.3 p.224). — *Soient $V_1, \ldots, V_r$ des sous-schémas équidimensionnels de $\mathbb{P}^n$. Supposons*

$$l = \sum_{j=1}^{r} \dim\,(V_j) - (r-1)n \geqslant 0.$$

Soit Z_i, $i \in \Lambda$, les sous-variétés distinguées de l'intersection et

$$V_1 \cdot \cdots \cdot V_r = \sum_{i \in \Lambda} m_i \, \alpha_i$$

la décomposition canonique, $\alpha_i \in A_l(Z_i)$. Alors α_i est représenté par un cycle positif sur Z_i,

$$\deg(\alpha_i) \geqslant \deg(Z_i)$$

et on a

$$\prod_{j=1}^{r} \deg(V_k) = \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(\alpha_i) \geqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i) > 0.$$

Ceci s'applique en particulier pour $r \leqslant n$ hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$. De plus si $H_1, \ldots, H_n$ sont n hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$, $d_i = \deg(H_i)$, $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ on a

$$d_1 \ldots d_n \geqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \, d_1^{\dim(Z_i)} \deg(Z_i).$$

La dernière assertion est l'exemple 12.3.3 p. 224 de [F] dans lequel nous avons fait $r = n$ et pris pour $V = \mathbb{P}^n$.

On notera que ce théorème ne nécessite pas d'hypothèses d'intersection propre et que la partie $\sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i)$ ne dépend que du cône normal de Z dans $\mathbb{P}^n$.

Ceci achève la preuve du théorème 2.1 (resp. 2.1′) dans le cas où $s \leqslant n$ (resp. $m \leqslant n$ pour 2.1′).

En effet, pour le théorème 2.1, le lemme 3.1 nous dit que l'éclatement normalisé de centre $\mathcal{J}$ est le même que celui de centre $\mathcal{I}$. Par conséquent,

$$\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}) = \bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{I}) \leqslant d_{\text{tot}}(\mathcal{I}).$$

Le théorème de Bezout raffiné appliqué aux s hypersurfaces $H_1, \ldots, H_s$ de $\mathbb{P}^n$ définies par le lemme 3.1 donne le résultat car

$$d_{\text{tot}}(\mathcal{I}) \leqslant d^s .$$

Dans le cas du théorème 2.1′, on applique directement le théorème de Bezout raffiné aux m-hypersurfaces définies par les $\tilde{p}_i$ on a donc

$$\bar{d}_{\text{tot}}(\mathcal{J}) \leqslant d_{\text{tot}}(\mathcal{J}) \leqslant d_1 \ldots d_m.$$

Si $m > n$ ou si $s = n + 1$, on contourne la difficulté de la manière qui suit :

On considère $m - n$ variables supplémentaires $Y_1, \ldots Y_{m-n}$ et on regarde nos polynômes $\tilde{p}_j(X_0, \ldots X_n)$ comme des éléments de $k[X_0, \ldots, X_n, Y_1, \ldots Y_{m-n}]$.

Désignons par $\mathcal{K}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}$ défini par les $\tilde{p}_j$ vus comme éléments de $k[X, Y]$ et par $W \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ le sous-schéma correspondant. L'effet sur le cône normal $C_W \mathbb{P}^n$ est élémentaire. En effet, si Z_i était défini par le premier homogène $I(Z_i) \subset k[X_0, \ldots, X_n]$, la sous-variété correspondante W_i est définie par $I(Z_i) \subset k[X, Y]$ et donc

$$\dim(W_i) = \dim(Z_i) + m - n \text{ et } \deg(W_i) = \deg(Z_i)$$

et les multiplicités m_i restent inchangées.

Le théorème de Bezout raffiné appliqué aux m-hypersurfaces de $\mathbb{P}^m$, $H_1, \ldots, H_m$ définies par les $\tilde{p}_i$ donne

$$d_1 \ldots d_m \geqslant \sum_{i\in\Lambda} d_1^{\dim(W_i)} m_i \deg(W_i) = \sum_{i\in\Lambda} d_1^{\dim(Z_i)+m-n} m_i \deg(Z_i)$$

donc a fortiori

$$\sum_{i\in\Lambda} m_i \deg(Z_i) \leqslant \frac{d_1 \ldots d_m}{d_1^{m-n}}\,.$$

Le cas $s = n+1$ est similaire.

Remarque 4.3. — Pour $V_1, \cdots, V_r$ des sous-schémas de $\mathbb{P}^n$ régulièrement plongés (i.e. localement intersections complètes), en particulier pour des hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$, le produit d'intersection $V_1 \cdot \cdots \cdot V_r$ peut se calculer par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z = \bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant r} V_i & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \simeq \Delta_{\mathbb{P}^n} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{P}^n \end{array}$$

selon la procédure décrite aux chapitres 6 et 8 de [F].

5. Conséquences.

Concernant le Nullstellensatz effectif nous avons en fait obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1. — *Soit k un corps algébriquement clos et $p_1(X), \ldots, p_m(X) \in k_n[X]$ sans zéros communs. Désignons toujours par $\tilde{p}_i(X_0, X)$ les homogénéisés des p_i, $\mathcal{J}_p$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par les $\tilde{p}_i$ et Z_p le sous-schéma associé. Soit enfin $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) = \mathrm{Max}_{i'\in\Lambda'_\infty}\left(\frac{m'_{i'}}{e'_{i'}}\right)$ défini comme au §2 par l'éclatement normalisé de centre $\mathcal{J}_p$ et $s = s(\tilde{I}_p)$ "l'analytic spread" de $\tilde{I}_p = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m)k[[X_0, \ldots, X_n]]$.*

1) *Pour toute identité*

$$1 = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} q_i(X)p_i(X)\,, \qquad q_i \in k_n[X]$$

on a $\mathrm{Max}\deg(q_ip_i) \geqslant \mathrm{Max}\,(\nu_\infty(\mathcal{J}_p), d)$.

2) *Il existe une identité*

$$1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i(X)p_i(X)$$

avecMax $\deg(q_i p_i) \leqslant s.\mathrm{Max}\,(\nu_\infty(\mathcal{J}_p), d) \leqslant \mathrm{Min}(n+1, m).\mathrm{Max}\,(\nu_\infty(\mathcal{J}_p), d)$.

3) *Si* $d_i = \deg p_i,\ d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_m$*, on a :*

– $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant d_1 \ldots d_m$ *pour* $m \leqslant n$

– $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \frac{d_1 \ldots d_m}{d_1^{m-n}}$ *pour* $m > n$.

4) *Soient* $V_1, \ldots, V_r$ *des sous-schémas de* $\mathbb{P}^n$*, localement intersections complètes tels que* $Z_p = \cap_{1 \leqslant i \leqslant r} V_i$*, on a*

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \prod_{i=1}^{r} \deg(V_i)\,.$$

Preuve. — Seuls les points 1) et 4) n'ont pas encore été prouvés. Pour le point 1), considérons une identité

$$1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i(X)p_i(X). \tag{5.1}$$

Désignant par $\tilde{q}_i(X_0, \ldots, X_n) \in k[X_0, \ldots, X_n]$ l'homogénéisé de q_i, on peut réécrire (5.1) en

$$1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{\tilde{q}_i(X_0, X)\tilde{p}_i(X_0, X)}{X_0^{\deg(q_i p_i)}}\,. \tag{5.2}$$

Ainsi en posant $r = \mathrm{Max}\deg(q_i p_i)$, on a

$$X_0^r \in \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \tilde{p}_i(X_0, X)k[X_0, \ldots X_n]. \tag{5.3}$$

Désignant toujours par $\mathcal{H}_0$ le sous-faisceau d'idéaux inversibles de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par X_0 on obtient donc

$$\mathcal{H}_0^r \subset \mathcal{J}_p \subset \bar{\mathcal{J}}_p. \tag{5.4}$$

Par conséquent d'après le théorème de M. Lejeune et B. Teissier précité au §3 on a

$$\forall i' \in \Lambda'_\infty,\ \ v_{i',X'}(\mathcal{H}_0^r) \geqslant m'_{i'}. \tag{5.5}$$

Or

$$v_{i',X'}(\mathcal{H}_0^r) = rv_{i',X'}(\mathcal{H}_0) = r.e'_{i'} \tag{5.6}$$

donc

$$\forall i' \in \Lambda'_\infty,\ re'_{i'} \geqslant m'_{i'},\ \text{ i.e. }\ \nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant r. \tag{5.7}$$

Nous prouvons à présent le point 4) dont la preuve est similaire à celle du ii) des théorèmes 2.1 et 2.1′.

Considérons comme au §4 les m_i, Z_i, $i \in \Lambda$ définis par le cône normal de Z_p dans $\mathbb{P}^n$ (cf. 4.18 et 4.19). On a

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \sum_{i' \in \Lambda'} m'_{i'} \deg(Z'_{i'}) \leqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i). \tag{5.8}$$

La deuxième inégalité étant fournie par le lemme 4.3. Soit alors

$$l = \sum_{k=1}^{r} \dim(V_k) - (r-1)n\,. \tag{5.9}$$

Si $l \geqslant 0$, le théorème de Bezout raffiné donne

$$\sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i) \leqslant \prod_{k=1}^{r} \deg(V_k) \tag{5.10}$$

et donc le résultat désiré.

Si $l < 0$, on se ramène à la situation précédente en rajoutant $-l$ variables. On considère le sous-schéma W_p de $\mathbb{P}^{n-l}$ défini par les $\tilde{p}_i$ vus comme éléments de $k[X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_l]$ ainsi que les sous-schémas U_k de $\mathbb{P}^{n-l}$ correspondant aux V_k après augmentation des variables. On a alors

$$\dim U_k = \dim V_k - l \qquad \deg(U_k) = \deg(V_k).$$

Cette opération n'affecte pas le degré des variétés distinguées W_i qui en résultent ainsi que les m_i comme on le voit en explicitant la définition des cônes normaux respectifs de Z_p dans $\mathbb{P}^n$ et de W_p de $\mathbb{P}^{n-l}$. On applique alors le théorème de Bezout raffiné aux U_k et W_p dans $\mathbb{P}^{n-l}$. On a donc

$$\prod_{k=1}^{r} \deg(V_k) = \prod_{k=1}^{r} \deg(U_k) \geqslant \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(W_i) = \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i) \tag{5.11}$$

ce qui donne bien le résultat désiré grâce à (5.8).

Remarque 5.1

1) On peut dire par comparaison des points 1) et 2) du théorème précédent que c'est $\mathrm{Max}(d, \nu_\infty(\mathcal{J}_p))$ qui mesure la complexité en degré du théorème des zéros effectifs pour un système de polynômes $p_1, \dots p_m$ sans zéros communs.

2) Le facteur $s(\widetilde{I}_p)$ qui empêche l'égalité entre la partie minorante et la partie majorante du théorème est dû au fait que $\widetilde{I}_p$ n'est pas en général intégralement clos. Si $\widetilde{I}_p$ est intégralement clos, ce facteur est inutile car alors il n'est pas nécessaire alors d'appliquer le théorème de Briançon - Skoda de [LS] pour obtenir l'identité de 2). Il est naturel de se demander si lorsque $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) = d_1 \cdots d_m$ alors $\widetilde{I}_p$ n'est pas obligatoirement intégralement clos. Un tel résultat permettrait d'éliminer dans $[K_1]$ le cas résiduel où les d_i sont égaux à 2.

3) $\nu_\infty(\mathcal{J}_p)$ peut être très petit devant d^n, une classe importante d'exemples est fournie par le théorème 5.2, $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) < d$. Soit $i'_\infty \in \Lambda'_\infty$, qui calcule $\nu_\infty(\mathcal{J}_p)$ on a en fait,

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_p) = \frac{m'_{i'_\infty}}{e'_{i'_\infty}} \leqslant \frac{d^n - \sum_{i' \in \Lambda'_\infty \setminus \{i_\infty\}} m'_{i'} \deg(Z'_{i'})}{e'_{i'_\infty} \deg(Z'_{i'_\infty})} .$$

4) L'application de [EL] donne, dans le cas du Nullstellensatz effectif classique pour $k = \mathbb{C}$, une identité de Bezout avec $\mathrm{Max}(\deg p_i q_i) \leqslant \min(m, n+1)\mathrm{Max}(d, \alpha_\infty)$ où $\alpha_\infty = \mathrm{Max}_{i' \in \Lambda'_\infty} m'_{i'}$. Ceci est moins précis que notre majoration car d'une part $\alpha_\infty \geqslant \nu_\infty = \mathrm{Max}_{i' \in \Lambda'_\infty} m'_{i'}/e'_{i'}$ et d'autre part la partie minorante du théorème 5.1 résulte de la considération des $e'_{i'}$. Il peut sembler au premier abord que α_∞ et ν_∞ sont des invariants de même nature géométrique. Ceci n'est que partiellement exact. En effet $\alpha_\infty \in \mathbb{N}$ est une mesure de la «multiplicité maximale» de $\mathcal{J}_p$ tandis que $\nu_\infty \in \mathbb{Q}^+$ est une mesure du «contact» ou de la «séparation» entre $\mathcal{J}_p$ et l'hyperplan à l'infini. Il n'y a en général pas de raison pour que se soit le même i' ou la même sous-variété distinguée qui calcule les deux maximum.

Nous précisons maintenant quelques points concernant les inégalités de Łojasiewicz globales. Lorsque le corps k est munie d'une valeur absolue, la nature de ν_∞ apparaît peut-être plus clairement grâce aux points 3) et 4).

THÉORÈME 5.2. — *Soit k un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue non triviale $|\ | : k \to [0; +\infty[$. Considérons $I = (p_1, \dots, p_m) \subset k_n[X]$ et $V = V(I) = \{x \in k^n \ / \ p_i(x) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$.*

1) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in k^n, \ \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{(1+\|x\|)^{d_i}} \geqslant c \frac{d(x, V(I))^{\bar{d}_{aff}(I)}}{(1+\|x\|)^{\bar{d}_{aff}(I)+\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}} .$$

2) *$\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) + \nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p)$. On a*

$$\bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant d_1 \dots d_m \text{ si } m \leqslant n \text{ et } \bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant \frac{d_1 \dots d_m}{d_1^{m-n}} \text{ si } m > n.$$

De plus si $Z_p = \cap_{1 \leqslant i \leqslant r} V_i$, où les V_i sont des sous-schémas localement intersections complètes de $\mathbb{P}^n$, on a $\bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \deg V_i$.

3) Si $V(I)$ est au plus 0 dimensionnel, l'inégalité 1) est la meilleure inégalité possible à l'infini. En effet, il existe $K, C > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ tels que

$$\forall x \in k^n, \ \|x\| \geqslant K \Longrightarrow \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{(1+\|x\|)^{d_i}} \geqslant C \frac{1}{(1+\|x\|)^{\alpha}}$$

si et seulement si $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \alpha$.

4) *(Caractérisation de la propreté métrique) L'image réciproque de tout ensemble borné de k^m par $(p) = (p_1, \dots, p_m) : k^n \to k^m$ est encore un ensemble borné de k^n si et seulement si V est au plus 0 dimensionnel et $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'}) < d$, où $(p') = (p'_1, \dots, p'_m)$ sont m-combinaisons linéaires générales des p_i.*

5) *Si $V(I)$ est au plus 0 dimensionnel,*

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'}) \leqslant d^n - \dim_k \frac{k[X]}{J} \leqslant d^n - \dim_k \frac{k[X]}{I}$$

où J est engendré par n combinaisons linéaires générales des p_i.

Avant de prouver le résultat précédent, énonçons un corollaire qui améliore et généralise le théorème 7.3 de [CKT]. Si V est au plus 0 dimensionnel on appelle exposant de séparation à l'infini de $(p) = (p_1, \dots, p_m)$ le plus grand nombre réel s tel que pour $\|x\|$ assez grand on ait une inégalité

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |p_i(x)| \geqslant c\|x\|^s . \tag{5.12}$$

Nous noterons $l_\infty(p')$ ce nombre qui ne dépend en fait que de $(p') = (p'_1, \dots, p'_m)$. (Le membre de gauche de l'inégalité (5.11) ne dépendant qu'à une constante près de la combinaison linéaire générale des p_i choisie.)

Corollaire 5.2.1. — *Si V est au plus 0 dimensionnel on a*

$$l_\infty(p') \geqslant d - d^n + \dim_k \frac{k[X]}{J} \geqslant d - d^n + \dim_k \frac{k[X]}{I}$$

où J est un idéal de $k_n[X]$ engendré par n combinaisons linéaires générales des p_i.

Remarque 5.2. — Le résultat 7.3 de [CKT] est dans le cas $k = \mathbb{C}$,

$$l_\infty(p') \geqslant d - d^{\mathrm{Max}(n,m)} + \dim_k \frac{k[X]}{I}.$$

Ce résultat est donc légèrement amélioré par 5.2.1 (cependant strictement si $m > n$) et est donc valide aussi en caractéristique positive.

Preuve de 5.2.1. — On a pour $\|x\|$ assez grand,

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |p_i(x)| \simeq \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |p_i'(x)| \geqslant c \|x\|^{d - \nu_\infty(\mathcal{J}_{p'})}$$

d'après le point 3) du théorème 5.2. Or d'après le point 5),

$$d - \nu_\infty(\mathcal{J}_{p'}) \geqslant d - d^n + \dim_k \frac{k[X]}{J} \geqslant d - d^n + \dim_k \frac{k[X]}{I}.$$

Preuve de 5.2. — Le point 1) a déjà été prouvé. Dans le point 2) seule la majoration $\bar{d}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{J}_p) \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \deg V_i$ n'a pas été entièrement prouvée. C'est en fait ce que nous avons vu dans 5.1 point 4), puisque la preuve que nous avons donnée n'utilise pas $I = k_n[X]$ (cf. (5.8)). Concernant le point 3) si $V = \varnothing$, $\bar{d}_{\mathrm{aff}}(I) = 0$, et si V est zéro dimensionnel pour $\|x\|$ assez grand

$$d(x, V) \simeq 1 + \|x\| \simeq \|x\|.$$

On a donc dans les deux cas une inégalité

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{(1 + \|x\|)^{d_i}} \geqslant c \frac{1}{(1 + \|x\|)^{\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}}. \tag{5.13}$$

Réciproquement supposons que pour $\|x\|$ assez grand on ait une inégalité

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{(1 + \|x\|)^{d_i}} \geqslant c \frac{1}{(1 + \|x\|)^{\alpha}} \tag{5.14}$$

où α est un nombre réel nécessairement positif. Le fait que $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) \leqslant \alpha$ résulte du lemme suivant :

LEMME 5.2.2. — *Il existe un ensemble non borné de k^n sur lequel*

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{|p_i(x)|}{\|x\|^{d_i}} \simeq c\frac{1}{\|x\|^{\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}}\,.$$

Preuve. — Considérons la décomposition en composantes irréductibles de $\Pi'^{-1}(H_\infty)$ (défini par $\mathcal{H}_0.\mathcal{O}_{X'}$) :

$$\Pi'^{-1}(H_\infty)_{\mathrm{red}} = \left(\cup_{i'\in\Lambda'_\infty} Y'_{i'}\right) \cup \left(\cup_{k\in K} W_k\right)$$

(les $Y'_{i'}$, $i' \in \Lambda'_\infty$ sont par construction des composantes irréductibles de $\Pi'^{-1}(H_\infty)$).

Soient alors i'_∞ un indice de Λ'_∞ qui réalise $\nu_\infty(\mathcal{J}_p)$ i.e $\nu_\infty(\mathcal{J}_p) = \frac{m'_{i'_\infty}}{e'_{i'_\infty}}$.

En un point assez général de

$$\operatorname{Reg}(X') \cap \operatorname{Reg}(Y'_{i'_\infty}) - \Bigg(\bigcup_{\substack{i'\neq i'_\infty\\ i'\in\Lambda'}} Y'_{i'}\Bigg) - \Bigg(\bigcup_{k\in K} W_k\Bigg)$$

on a comme en (3.7) un isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'_\infty}} &\simeq k[[t,U_2,\dots,U_m]]\\
\mathcal{J}.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'_\infty}} &\simeq (t^{m'_{i'_\infty}})k[[t,U_2,\dots,U_m]]\\
\mathcal{H}_0.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'_\infty}} &= (t^{e'_{i'_\infty}})k[[t,U_2,\dots,U_m]]\\
\mathcal{P}_{i'_\infty}.\hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'_\infty}} &\simeq (t)k[[t,U_2,\dots,U_m]] \qquad (5).15)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{i'_\infty}$ est le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{X'}$ définissant $Y'_{i'_\infty}$. Notons aussi qu'en un tel point

$$\sqrt{\mathcal{J}.\mathcal{O}_{X',y'_{i'_\infty}}} = \sqrt{\mathcal{H}_0.\mathcal{O}_{X',y'_{i'_\infty}}} = \mathcal{P}_{i'_\infty}.\mathcal{O}_{X',y'_{i'_\infty}}\,.$$

Soient alors $\Pi'(y'_{i'_\infty}) = a_{i'_\infty}$ et le «germe de courbe formelle»

$$\Theta :\quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,a_{i'_\infty}} \overset{\Pi'^\sharp}{\to} \mathcal{O}_{X',y'_{i'_\infty}} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X',y'_{i'_\infty}} \simeq k[[t,U]] \longrightarrow k[[t]]$$

où la dernière flèche est l'application de $k[[t,U_2,\dots,U_m]]$ dans $k[[t]]$, $t\to t$, $U_i \to 0$ pour $i \geqslant 2$.

En numérotant les coordonnées dans $\mathbb{A}^n$ de telle sorte que $a_{i'_\infty} \in \{[x] \in \mathbb{P}^n | x_1 \neq 0\}$, la traduction en coordonnées locales de (5.14) est

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}_{1\leqslant i\leqslant m}(\mathrm{ord}_t\ \tilde{p}_i(\theta_0(t), 1, \theta_2(t), \ldots, \theta_n(t))) = m'_{i'_\infty} \\ (5.16) \qquad &\mathrm{ord}_t\ \theta_0(t) = e_{i'_\infty} \end{aligned}$$

où $\theta_0(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_n(t) \in k[[t]]$.

En tronquant les $\theta_i(t)$ à un ordre assez grand, on obtient donc des $\rho_i(t) \in k[t]$ tels que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}_{1\leqslant j\leqslant m}(\mathrm{ord}_t\ \tilde{p}_j(\rho_0(t), 1, \rho_2(t), \ldots, \rho_n(t))) = m'_{i'_\infty} \\ (5.17) \qquad &\mathrm{ord}_t\ \rho_0(t) = e'_{i'_\infty}. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $t \in k^*$, tel que $|t|$ soit assez petit on a :

$$\begin{aligned} \|(1/\rho_0(t), \rho_2(t)/\rho_0(t), \ldots, \rho_n(t)/\rho_0(t))\| &\simeq \frac{1}{|\rho_0(t)|} \\ &\simeq \frac{1}{|t|^{e'_{i'_\infty}}} \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{|p_i(1/\rho_0(t), \rho_2(t)/\rho_0(t), \ldots, \rho_n(t)/\rho_0(t))|}{|1/\rho_0(t)|^{d_i}} \\ &\simeq |t|^{m'_{i'_\infty}} \simeq \left(\frac{1}{1/|t|^{e'_{i'_\infty}}}\right)^{\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}. \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble des $x(t) = (1/\rho_0(t), \rho_2(t)/\rho_0(t), \ldots, \rho_n(t)/\rho_0(t))$ obtenus pour $|t|$ assez petit satisfait les conclusions du lemme 5.2.2.

Prouvons maintenant le point 4). Supposons $p : k^n \to k^m$ métriquement propre ou ce qui est équivalent $p' : k^n \to k^m$ métriquement propre, les p'_i étant m-combinaisons linéaires générales des p_i. Puisque $p^{-1}(0) = p'^{-1}(0)$ est borné, il est au plus 0 dimensionnel. D'autre part, d'après le lemme 5.2.2, il existe un ensemble non borné de k^n sur lequel

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m} |p'_i(x)| \simeq \frac{1}{\|x\|^{\nu_\infty(\mathcal{J}_p)-d}}.$$

Par conséquent $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'}) < d$, sans quoi $\sum_{1\leqslant i\leqslant m} |p'_i(x)|$ serait borné sur un ensemble non borné de k^n, ce qui contredirait la propreté métrique.

Réciproquement supposons V au plus 0 dimensionnel et $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'}) < d$, on a alors d'après 3) pour x assez grand

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m} |p'_i(x)| \geqslant C\,\|x\|^{d-\nu_\infty(\mathcal{J}_p)}.$$

Par conséquent $\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|p_i'(x)|$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini et donc (p') est propre.

Prouvons à présent 5). Considérons toujours m combinaisons linéaires générales des p_i. D'après les résultats précités de [NR] on peut (quitte à renuméroter) supposer qu'en tous les points de $V=V(I)=\{a_1,\dots,a_l\}$, $(p_1',\dots,p_n').\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a_i}$ est une réduction minimale de $I.\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a_i}$. D'autre part on a par application du point 3) à $p_1',\dots,p_n'$:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{|p_i'(x)|}{\|x\|^d}\geqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|p_i'(x)|}{\|x\|^d}\geqslant\frac{1}{\|x\|^{\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'})}}$$

où $\mathcal{I}_{p'}$ est le sous-faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ défini par les $\tilde{p}_1',\dots,\tilde{p}_n'$. Mais maintenant puisque la meilleure inégalité à l'infini pour $p_1',\dots,p_m'$ est obtenue d'après 3) pour $\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'})$, on a donc

$$\nu_\infty(\mathcal{J}_{p'})\leqslant\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'}).$$

Il suffit donc de majorer $\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'})$. Soit $J=(p_1',\dots,p_n')$ l'idéal de $k_n[X]$ engendré par $p_1',\dots,p_n'$ et soit i_∞' qui réalise $\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'})$ i.e. $\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'})=m_{i_\infty'}'/e_{i_\infty'}'$. On a

$$\nu_\infty(\mathcal{I}_{p'})\leqslant m_{i_\infty'}'\leqslant m_{i_\infty} \tag{5.18}$$

où m_{i_∞} est la "multiplicité" attachée à $Y_{i_\infty}=N(Y_{i_\infty'}')$ par l'éclatement de centre $\mathcal{I}_{p'}$ (cf. lemme 4.3). D'autre part,

$$m_{i_\infty}+\sum_{i\in\Lambda_{aff}}m_i\leqslant\sum_{i\in\Lambda}m_i\leqslant d^n \tag{5.19}$$

d'après le théorème de Bezout raffiné où les m_i, $i\in\Lambda$ sont définis comme au §4 (cf. 4.19) par l'éclatement de centre $\mathcal{I}_{p'}$ et $\Lambda_{\mathrm{aff}}=\{i\in\Lambda\,/\,\Pi(Y_i)=Z_i\not\subset H_\infty\}$.

Pour conclure au point 5) du théorème 5.2 il suffit de voir d'après (5.16) et (5.17) que

$$\sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{aff}}}m_i=\dim_k\frac{k[X]}{J}; \tag{5.20}$$

la dernière majoration du point 5) étant simplement que $\dim\frac{k[X]}{I}\leqslant\dim\frac{k[X]}{J}$ puisque $J\subset I$.

Dans le cas considéré puisque $V(J)$ est 0 dimensionnel, les Z_i, $i \in \Lambda_{aff}$ sont simplement les points de $V(J)$. Mais

$$\mathcal{O}_{Y,Y_i} = \mathcal{O}_{X,Y_i}/\mathcal{I}.\mathcal{O}_{X,Y_i} = \mathcal{O}_{\Pi^{-1}(U_0),Y_i\cap\Pi^{-1}(U_0)}/\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\Pi^{-1}(U_0),Y_i\cap\Pi^{-1}(U_0)}$$

pour $i \in \Lambda_{\text{aff}}$.

Par conséquent les m_i, $i \in \Lambda_{\text{aff}}$, se calculent simplement par l'éclatement de $k_n[X]$ de centre J. Le diviseur exceptionnel de cet éclatement est

$$\operatorname{Proj}(\oplus_{l\geqslant 0} J^l/J^{l+1}).$$

Mais $p'_1, \ldots, p'_n$ est une suite quasi-régulière de $k_n[X]$ (cf. par exemple [M] pour une définition). [4] En effet, elle a n éléments et en chaque point a de $V(J)$, elle est régulière dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$ car

$$\sqrt{J.\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}} \simeq \mathfrak{m}_a.$$

Par suite $\oplus J^l/J^{l+1} \simeq \frac{k[X]}{J}[U_1, \ldots, U_m]$. Les Y_i, $i \in \Lambda_{\text{aff}}$ sont donc les $\{a_i\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ où les a_i sont les points de $V(J)$ avec pour m_i correspondant

$$m_i = \operatorname{long}(k[X]_{\mathfrak{m}_{a_i}}/J.k[X]_{\mathfrak{m}_{a_i}})$$

où $\mathfrak{m}_{a_i}$ est l'idéal maximal de $k[X]$ correspondant à a_i.

Or c'est un exercice d'algèbre commutative de montrer que

$$\sum_{i\in\Lambda_{\text{aff}}} \operatorname{long}(k[X]_{\mathfrak{m}_{a_i}}/J.k[X]_{\mathfrak{m}_{a_i}}) = \dim_k k[X]/J.$$

Nous donnons maintenant un résultat concernant la version «Prime Product» du Nullstellensatz (cf. [B2]) encore appelé théorème de Bezout algébrique. Pour formuler cet énoncé, nous reprécisons quelques notations. Soit I un idéal de $k_n[X]$ et Z_0 le sous-schéma de $\mathbb{A}^n_k$ défini par I. Nous noterons comme précédemment par :

(5.3.1) $X_0 \xrightarrow{\Pi_0} \mathbb{A}^n = U_0$ (Resp. $\Pi' : X_0 \to \mathbb{A}^n$) l'éclatement de centre Z_0 (resp. l'éclatement normalisé de centre Z_0).

(5.3.2) $Y_0 = \Pi_0^{-1}(Z_0) = P(C_{Z_0}\mathbb{A}^n)$ le projectivisé du cône normal de Z_0 dans $\mathbb{A}^n$ (Resp. $Y'_0 = \Pi_0'^{-1}(Z'_0)$).

[4] Ceci équivaut au fait que $p'_1, \ldots, p'_n$ est une suite régulière dans tout localisé $k_n[X]_{\mathfrak{m}_a}$.

(5.3.4) $[Y_0] = \sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{aff}}} m_i[Y_{0,i}]$ le cycle fondamental de Y_0.

(5.3.5) $[Y_0'] = \sum_{i'\in\Lambda'_{\mathrm{aff}}} m'_{i'}[Y'_{0,i'}]$ le cycle fondamental de Y'_0.

(5.3.6) $Z'_{i',0} = \Pi'_0(Y'_{0,i'})$ $Z_{i,0} = \Pi_0(Y_{0,i})$ (munis de leur structure réduite).

Les $Z'_{i',0}$ (resp. $Z_{i,0}$) sont la même chose que les $Z'_{i',0} \cap U_0$ (resp. $Z'_{i,0} \cap U_0$) précédents. La collection des $Z'_{i',0}$ est la même que celle des $Z_{i,0}$ mais avec une indexation différente et des redondances qui peuvent différer (il y a en général plus de $Z'_{0,i'}$ que de $Z_{0,i}$ car $N(Y'_{0,i'}) = Y_{0,i}$ pour plusieurs $i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}}$).

Notons $P_1, \dots, P_l$ les idéaux premiers de $k_n[X]$, avec $P_k \neq P_j$ si $k \neq j$, définis par la collection des $Z_{0,i}$ (où des $Z'_{0,i'}$). Ces idéaux premiers sont donc canoniquement associés à I par le cône normal de Z_0 dans $\mathbb{A}^n$. Par ailleurs, si s est un entier $P^{<s>}$ désignera la s$^{\text{ième}}$ puissance symbolique de l'idéal premier considéré. Puis posons :

(5.3.7) $r_t = \mathrm{Max}_{i\in\Lambda_t}(m_i)$ où $\Lambda_t = \{i \in \Lambda_{\mathrm{aff}} \,/\, P_t = I(Z_{0,i})\}, 1 \leqslant t \leqslant \ell$.

(5.3.8) $r'_t = \mathrm{Max}_{i'\in\Lambda'_t}(m'_{i'})$ où $\Lambda'_t = \{i' \in \Lambda'_{\mathrm{aff}} \,/\, P_t = I(Z'_{0,i'})\}, 1 \leqslant t \leqslant \ell$.

(5.3.9) $N(I) = \sum_{1\leqslant t\leqslant \ell} r_t \deg(P_t) \leqslant \sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{aff}}} m_i \deg(Z_{0,i}) = d_{\mathrm{aff}}(I)$.

(5.3.10) $\bar N(I) = \sum_{1\leqslant t\leqslant r} r'_t \deg(P_t) \leqslant \sum_{i'\in\Lambda'_{\mathrm{aff}}} m'_{i'} \deg(Z'_{0,i'}) = \bar d_{\mathrm{aff}}(I)$.

THÉORÈME 5.3. — *Soit I un idéal de $k_n[X]$.*

1) $P_1^{n r'_1} \dots P_\ell^{n r'_l} \subset P_1^{<n r'_1>} \cap \dots \cap P_\ell^{<n r'_\ell>} \subset I$.

2) $P_1^{n r_1} \dots P_\ell^{n r_l} \subset P_1^{<n r_1>} \cap \dots \cap P_\ell^{<n r_\ell>} \subset I$.

3) $\bar N(I) \leqslant N(I) \leqslant d_{\mathrm{aff}}(I)$.

4) *Pour tout système de générateurs de $I = (p_1, \dots, p_m)$ on a :*

$$d_{\mathrm{aff}}(I) \leqslant d_1 \dots d_m \ \text{ si } \ m \leqslant n$$
$$d_{\mathrm{aff}}(I) \leqslant \frac{d_1 \dots d_m}{d_1^{m-n}} \ \text{ pour } \ m > n$$

où $\deg p_i = d_i$ *et* $d_1 \leqslant \dots \leqslant d_m$.

Bien entendu si I est homogène, les P_i sont des premiers homogènes. Par rapport au résultat de [B2] nous perdons un petit peu en «quantité» à cause de la présence du facteur n mais nous gagnons en «qualité» puisque les idéaux premiers obtenus et les r_t, r'_t sont canoniquement associés à I et ne dépendent pas des générateurs. Par rapport à [EL], l'assertion obtenue est une version, pour un corps de caractéristique quelconque et un idéal non nécessairement homogène, de l'exemple 1 p. 432 de [EL].

Preuve de 5.3. — Le théorème résulte assez simplement des techniques précédemment utilisés. En effet pour $f \in k_n[X]$ et $i' \in \Lambda'_{\text{aff}}$ posons :

$$v_{i'}(f) = v_{i',X'_0}(\mathcal{F}) = \operatorname{long}\left(\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{i',0}}/\mathcal{F}.\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{i',0}}\right)$$

où $\mathcal{F}$ est le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ engendré par f.

Pour parler analytiquement, $v_{i'}(f)$ est l'ordre auquel s'annule « $f \circ \Pi'$ » en un point assez général de $Y'_{i',0}$.

D'autre part, pour $i' \in \Lambda'_{\text{aff}}$ et $a \in \mathbb{N}^*$, notons

$$Q_{i',a} = \{f \in k_n[X] \ / \ v_{i'}(f) \geqslant a\}.$$

D'après les résultats précités de [LT] et [LS]*, on a

$$\overline{I^n} = \bigcap_{i' \in \Lambda'_{\text{aff}}} Q_{i',nm'_{i'}} \subset I. \tag{5.21}$$

D'autre part, soit $I(Z'_{0,i'}) = \{f \in k_n[X] \ / \ f(x) = 0, \ \forall x \in Z'_{0,i'}\}$.

Pour chaque t, $1 \leqslant t \leqslant l$, on a si $i' \in \Lambda'_t$,

$$I(Z'_{0,i'}) = P_t$$

$$P_t^{<nr'_t>}.\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{0,i'}} = I(Z'_{0,i'})^{<nr'_t>}.\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{0,i'}} = I(Z'_{0,i'})^{nr'_t}.\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{0,i'}} \subset \mathcal{M}^{nr'_t}_{X'_0,Y'_{0,i'}}$$

où $\mathcal{M}_{X'_0,Y'_{0,i'}}$ est le maximal de $\mathcal{O}_{X'_0,Y'_{0,i'}}$. Par conséquent pour $f \in \cap_{1 \leqslant t \leqslant l} P_t^{<n\,r'_t>}$ on a

$$\forall i' \in \Lambda'_{\text{aff}}\ , \qquad v_{i'}(f) \geqslant n\,m'_{i'}\ ,$$

donc d'après (5.21), $\cap_{1 \leqslant t \leqslant l} P_t^{<n\,r'_t>} \subset \overline{I^n} \subset I$.

Les points 2) et 3) résultent du fait que pour t, $1 \leqslant t \leqslant l$, on a $r'_t \leqslant r_t$. En effet si $i' \in \Lambda'_t$ calcule r'_t, on a $N(Y'_{0,i'}) = Y_{0,i}$ pour un certain $i \in \Lambda_t$. Par conséquent $m_i \geqslant m'_{i'}$ d'après la formule (4.20) vue dans le lemme 4.3. Par suite $r_t \geqslant m_i \geqslant m'_{i'} = r'_t$.

Le point 4) est donné par le théorème de Bezout raffiné. En effet comme au §4 on a

$$d_{\text{aff}}(I) \leqslant d_{\text{tot}}(\mathcal{J}_p) = \sum_{i \in \Lambda} m_i \deg(Z_i) \tag{5.22}$$

* Nous utilisons cette fois le théorème de Briançon-Skoda sous forme globale i.e. pour un anneau noethérien régulier non nécessairement local.

où Λ est déterminé par le cycle fondamental (tout entier) de $\mathcal{J}_p.\mathcal{O}_X$.

Enfin le membre de droite de (5.22) se majore par le théorème de Bezout raffiné tel que rappelé en 4.4.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] F. AMOROSO, Tests d'appartenance d'après un théorème de J. Kollár, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math., 309 (1989), 691–694.

[A2] F. AMOROSO, "Membership Problem" in approximation diophantienne et nombres Transcendants, Luminy 1990, éd. P. Philippon, Walter de gruyter, Berlin, 1992, 1–13.

[A3] F. AMOROSO, On a conjecture of C. Berenstein and A. Yger, Progress in Mathematics, vol. 143, 1996, Birkhaüser verlag.

[AHV1] J.M. AROCA, H. HIRONAKA, J.L. VICENTE, The theory of the maximal contact, Memorias de Mathematica del Instituto "Jorge Juan", n° 29, Madrid 1975.

[AHV2] J.M. AROCA, H. HIRONAKA, J.L. VICENTE, Desingularization theorems, Memorias de Matematica del Instituto "Jorge Juan", n° 30, Madrid 1977.

[B1] W.D. BROWNAWELL, Bounds for the degrees in the Nullstellensatz, Ann. of Math., 126 (1987), 577–591.

[B2] W.D. BROWNAWELL, A prime product version of the Nullstellensatz, Michigan Math. Journal, 45 (1998), 581–597.

[BS] J. BRIANÇON, H. SKODA, Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, Math., 278 (1974), 949–951.

[BY1] C.A. BERENSTEIN, A. YGER, Bounds for the degrees in the division Problem, Michigan Math. J., 37, n° 1 (1990), 25–43.

[BY2] C.A. BERENSTEIN, A. YGER, Formules de représentation intégrale et problèmes de division, in approximation diophantiennes et nombres transcendants Luminy 1990, éd. P. Philippon, Walter de Gruyter, Berlin, 16–37, 1992.

[BY3] C.A. BERENSTEIN, A. YGER, Residue calculus and effective Nullstellensatz, American Journal of Mathematics, 121 (1999), 723–796.

[CKT] E. CYGAN, I. KRASINSKI, P. TWORZEWSKI, Separation of algebraic sets and the Łojasiewicz exponent of polynomial mappings, Invent. Math., 136 (1999), 75–87.

[EL] L. EIN, R. LAZARSFELD, A Geometric effective Nullstellensatz, Invent. Math., 137 (1999), 427–448.

[F] W. FULTON, Intersection theory, Ergebnisse der mathematic und ihrer Grenzgebiete 3 Folge, band, Springer Verlag 1984 (First Edition).

[H] G. HERMANN, Die Frage der endlich vielen Schritter in der theorie polynomial ideale, Math. Ann., 95 (1926), 736-788.

[Hi1] M. HICKEL, Fontion de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, American Journal of Mathematics, 115, n° 6 (1993), 1299-1335.

[Hi2] M. HICKEL, Sur l'ubiquité d'un théorème de J. Briançon-H. Skoda, Effectivity problems algebraic and analytic methods, University of Calabria (Italie), 22–28 juin 1998.

[HIO] M. HERMAN, S. IKODA, U. ORBANZ, Equimultiplicity and blowing up, an algebraic study with an appendice by B. Moonen, Springer-Verlag, 1988.

[Hir] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Memorias de Mathematica del Instituto "Jorge Juan" n° 28, Madrid 1974.

[JKS] S. JI, J. KOLLÁR, B. SHIFFMAN, A global Łojasiewicz inéquality for algebraic varieties, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 129, N° 2 (1992), 813–818.

[K1] J. KOLLÁR, Sharp effective Nullstenellensatz, Journal of the American Mathematical Society, 1 (1988), 963–975.

[K2] J. KOLLÁR, Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals, J. Eur. Math. Soc., 1 (1999), 313–337.

[LS] J. LIPMAN, A. SATHAYE, Jacobian ideals and a theorem of J. Briançon-H. Skoda, Michigan Math. J., 28 (1981), 199–222.

[LTe] J. LIPMAN, B. TEISSIER, Pseudo-Rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closure of ideals, Michigan Math. J., 28 (1981), 97–116.

[LT] M. LEJEUNE, B. TEISSIER, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité chapitre 1, Séminaire Lejeune-Tessier, centre de Mathématiques école Polytechnique 1974, Publication Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[M] H. MATSUMURA, Commutative ring theory,, Cambridge Studies in Advanced Mathematics n° 8, Cambridge University Press, 1989.

[MM] E. MAYR, A. MEYER, The complexity of the word problem for commutative semigroups and polynomial ideals, Adv. in Math., 46 (1982), 305–329.

[NR] D.G. NORTHCOTT, D. REES, Reductions of Ideals in local rings, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 50, part 2 (1984), 145–158.

[P] P. PHILIPPON, Théorème des zéros effectifs d'après J. Kollár, dans problèmes diophantiens 1987/88, Publication de l'Université de Paris VI, n° 88, 1988.

[Ray] M. RAYNAUD, Contre exemple au "Vanishing theorem" en caractéristique positive, C.P. Ramanujan a tribute, 273-278, Tata Inst. Res. Studies in Math. n° 8.

[Re] D. REES, Lectures on the asymptotic theory of ideals, London mathematical Society Lectures Notes Series n° 113, Cambridge University Press.

[S] P. SAMUEL, Some asymptotic properties of ideals, Ann. of Math., 56 (1952), 11–21.

[Te1] B. TEISSIER, Variétés polaires I, Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, Invent. Math., 40, 267–292.

[Te2] B. TEISSIER, Variétés polaires II, Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney, proceedings La Rabida, 1981. L.N. in Mathematics n° 961, Springer-Verlag.

[Te3] B. TEISSIER, Résultats récents d'algèbre commutative effective, Séminaire Bourbaki 1989-90, 42ème année, n°178.

[ZS] O. ZARISKI, P. SAMUEL, Commutative algebra vols 1 et 2, Van Nostrand, New York, vol. 1, 1958, vol. 2, 1960.

Manuscrit reçu le 16 novembre 2000,
accepté le 15 janvier 2001.

Michel HICKEL,
Université Bordeaux I
Mathématiques Pures de Bordeaux
F-33405 Talence cedex (France).
hickel@math.u-bordeaux.fr