ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Ronan QUAREZ

**Espace des germes d'arcs réels et série de Poincaré d'un ensemble semi-algébrique**

Tome 51, n° 1 (2001), p. 43-67.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_1_43_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**51**, 1 (2001), 43–67

# ESPACE DES GERMES D'ARCS RÉELS ET SÉRIE DE POINCARÉ D'UN ENSEMBLE SEMI-ALGÉBRIQUE

par Ronan QUAREZ

## Introduction.

Dans [DL], Denef et Loeser considèrent l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}$ des variétés algébriques sur un corps $k$ de caractéristique nulle (que nous prendrons égal à $\mathbb{C}$ pour fixer les idées). L'anneau $\mathcal{M}$ est engendré par les symboles $[V]$ où $V$ est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ ; il vérifie les relations $[V] = [V']$ si $V$ est isomorphe à $V'$, $[V] = [V \setminus V'] + [V']$ si $V'$ est une sous-variété fermée de $V$, et $[V \times V'] = [V] \times [V']$.

Ils définissent ensuite $\mathfrak{L}(V)$, l'espace des germes d'arcs tracés sur la variété algébrique $V$. Si $V$ est affine, un élément de $\mathfrak{L}(V)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[[t]]$ avec $\mathbb{C}[V]$ l'anneau de coordonnées de $V$. De même, est défini $\mathfrak{L}_n(V)$, l'espace des arcs tronqués à l'ordre $n$ tracés sur $V$, par l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{C}[[t]]$. On dispose alors d'un morphisme de troncation canonique $\pi_n : \mathfrak{L}(V) \to \mathfrak{L}_n(V)$.

Ce fut J. Nash ([Na]) qui, le premier, étudia les ensembles constructibles $\pi_n(\mathfrak{L}(V))$ en relation avec la résolution des singularités d'Hironaka. Citons aussi sur le sujet, les travaux de [LJ] et [Hi].

---

*Mots-clés :* Germe d'arc – Élimination des quantificateurs – Semi-algébrique – Série de Poincaré – Spectre réel.
*Classification math. :* 14Gxx – 14Pxx.

Le résultat fondamental de [DL] donne que

$$P_V(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\mathfrak{L}(V))] T^n$$

est une fraction rationelle dans l'anneau $\mathcal{M}[[T]]$ où l'on a inversé $[\mathbb{C}[X]]$. La démonstration utilise deux outils essentiels : l'élimination des quantificateurs pour les ensembles semi-algébriques définis au-dessus des séries formelles, résultat dû à [Pa] ; ainsi que l'intégration motivique sur l'espace des arcs, s'inspirant d'une idée due à Kontsevitch.

Dans cet article, nous entamons l'étude de l'analogue *réel* de cette théorie. Tout d'abord considérons $\mathcal{M}$ l'anneau de Grothendieck engendré par les symboles $[S]$ d'ensembles semi-algébriques $S$ sur $\mathbb{R}$, avec les relations $[S] = [S']$ si $S$ est homéomorphe à $S'$, $[S] = [S \setminus S'] + [S']$ si $S'$ est un semi-algébrique fermé dans $S$, et $[S \times S'] = [S] \times [S']$. Alors les relations précédentes impliquent que $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ et $[.]$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré. Pour voir cela, remarquons que tout ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$ est homéomorphe à une union finie disjointe d'ensembles $B_d = ]-1,1[^d$, avec la convention $B_0 =$ un point ([BCR, 2.3.6]). Or, on peut découper $B_d$ en deux morceaux homéomorphes à $B_d$ se recollant suivant un morceau homéomorphe à $B_{d-1}$. Alors, on obtient $[B_0] = 1$ et $[B_d] = (-1)^d$.

De même l'anneau de Grothendieck engendré par les symboles $[C]$ où $C$ est un constructible réel d'une variété algébrique réelle $X$ (i.e. $X$ est un schéma de type fini sur $\mathbb{R}$, réduit et séparé), modulo les relations précédentes, est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $[.]$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré. Il suffit de remarquer que localement, on obtient le résultat en considérant les propriétés de l'application qui à un semi-algébrique $S$ de $\mathbb{R}^m$ associe canoniquement le constructible $\widetilde{S}$ de $\mathrm{Spec}_r\, \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ (cf. [BCR, 7.2]).

Dans la section 1, on montre que l'on peut définir $\mathfrak{L}(S)$, l'espace des germes d'arcs réels tracés sur un ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$. Et plus géneralement, nous introduisons $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ l'espace des germes d'arcs réels tracés sur une variété algébrique réelle $X$ ainsi que le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{L}}(C)$ des germes d'arcs réels tracés sur le constructible réel $C$ de $X$.

En sections 2 et 3, on introduit l'analogue réel du langage de Pas, rappelant les propriétés de base ainsi que leurs démonstrations.

Puis, dans la section 4, nous nous intéressons à la série de Poincaré $P_S(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\mathfrak{L}(S))] T^n$ d'un ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$. En reprenant les idées de [DL, Th. 5.1], nous montrons que la série $P_S(T)$ est en fait un élément de $\mathbb{Q}[T]$.

Je remercie Michel Coste de m'avoir suggéré ce travail et aussi pour ses précieux conseils tout au long de sa réalisation.

Merci aussi à François Loeser pour m'avoir indiqué comment utiliser efficacement les résultats de [DL].

## Préliminaires.

Soit $A$ un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$. Un sous-ensemble $\alpha$ de $A$ est appelé un ordre non réduit s'il satisfait les propriétés suivantes : $\alpha + \alpha \subset \alpha$, $\alpha\alpha \subset \alpha$, $-1 \notin \alpha$, $\{a^2 \mid a \in A\} \subset \alpha$, $\alpha \cup -\alpha = A$. Si de plus $\alpha \cap -\alpha$ est un idéal premier de $A$ alors, on dit que $\alpha$ est un ordre premier ou en abrégé un ordre. Modulo l'élimination de la redondance des conditions précédemment citées, ce point de vue coïncide avec la terminologie de [MS]. L'ensemble des ordres de $A$ peut être muni d'une structure d'espace topologique appelé spectre réel de $A$ et noté $\operatorname{Spec}_r A$ (pour la définition et les propriétés du spectre réel, on pourra se référer à [BCR]). Citons, entre autre chose, qu'un morphisme d'anneau $A \to B$ induit une application continue $\operatorname{Spec}_r B \to \operatorname{Spec}_r A$. Une base d'ouverts pour la topologie de $\operatorname{Spec}_r A$ est donné par les ensembles $\widetilde{U}(a_1, \dots, a_p) = \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r A \mid a_1(\alpha) > 0, \dots, a_p(\alpha) > 0\}$ avec $a_1, \dots, a_p \in A$ (on note $a(\alpha) > 0$ lorsque $a \in \alpha \setminus (-\alpha)$). Un sous-ensemble de $\operatorname{Spec}_r A$ qui est une combinaison booléenne d'ouverts de bases est appelé ensemble constructible de $\operatorname{Spec}_r A$. À un ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^d$ on peut donc associer canoniquement un ensemble constructible $\widetilde{S}$ de $\operatorname{Spec}_r \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ (cf. [BCR, 7.2]). Nous aurons aussi besoin de la topologie constructible dont une base d'ouvert est donnée par les ensembles constructibles, i.e. les ensembles qui s'écrivent comme combinaison booléenne finie d'ouverts de base pour la topologie du spectre réel.

Un peu moins classique, l'ensemble des ordres non réduits de $A$ peut être muni d'une structure d'espace topologique noté $\operatorname{Ord}(A)$ (cet espace et ses propriétés de base sont étudiés dans [MS]). De même que précédemment, un morphisme d'anneau $A \to B$ induit une application continue $\operatorname{Ord} B \to \operatorname{Ord} A$ ([MS, 2.3]). De plus, à un semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$, *donné avec ses équations*, on peut associer canoniquement un ensemble constructible $\widehat{S}$ de $\operatorname{Ord}(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m])$, constructible qui dépend fondamentalement des équations. Pour tout ordre non réduit $\alpha$, on note l'ensemble de ses éléments strictement positifs $\alpha^+ = \alpha \setminus (-\alpha)$.

On considère aussi l'anneau des séries de Laurent en une indéterminée $R((t))$. On note ord la valuation habituelle, et $\overline{\mathrm{ac}}\,(x)$ le coefficient de plus petit degré de $x \in \mathbb{R}((t))$ (on pose par convention $\overline{\mathrm{ac}}\,(0) = 0$).

Le spectre réel de l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[t]]$ est composé de 3 éléments : $\{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid f(0) \geqslant 0\}$, $0_+ = \{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid \overline{\mathrm{ac}}\,(f) \geqslant 0\}$, $0_- = \{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid -1^{\mathrm{ord}(f)}\overline{\mathrm{ac}}\,(f) \geqslant 0\}$.

Le spectre réel de l'anneau $\mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]]$ comprend uniquement l'ordre $\alpha = \{a_0 + \ldots + a_n t^n \mid a_0(0) \geqslant 0\}$. Dans la suite on est amené à considérer aussi l'ordre non réduit $\alpha_n = \{f = a_0 + \ldots + a_n t^n \mid \overline{\mathrm{ac}}_n(f) \geqslant 0\}$ où $\overline{\mathrm{ac}}_n(f)$ désigne le coefficient de plus petit degré du polynôme $f$ de degré $\leqslant n$. On peut voir l'ordre $0_+$ de $\mathbb{R}[[t]]$ comme la limite projective des ordres non réduits $\alpha_n$.

Pour tout ce qui concerne ces préliminaires, on peut bien entendu remplacer $\mathbb{R}$ par un corps réel clos quelconque $R$.

## 1. Espaces des germes d'arcs réels.

### 1.1. Germes d'arcs tracés sur un semi-algébrique.

DÉFINITION 1.1.— *Soit $S$ un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Un germe d'arc réel tracé sur $S$ est la donnée d'un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}[[t]]$, avec $\gamma^{-1}(0_+) \in \widetilde{S}$ où $\widetilde{S}$ est le constructible de $\mathrm{Spec}_r\, \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ associé au semi-algébrique $S$.*

*On note $\mathfrak{L}(S)$ l'ensemble des germes d'arcs tracés sur $S$. Du fait que le morphisme $\gamma$ soit caractérisé par les images $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des indéterminées $X_1, \ldots, X_m$ dans $\mathbb{R}[[t]]$, on peut voir $\mathfrak{L}(S)$ comme un sous-ensemble de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}[[t]]^m$. On notera aussi, si $T$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{L}(S_T)$ pour l'ensemble des germes d'arcs tracés sur $S$ dont l'origine est dans $T$, i.e. $\gamma \in \mathfrak{L}(S_T)$ si $\gamma \in \mathfrak{L}(S)$ et $\gamma(0) \in T$.*

*De la même manière, si on fixe des équations pour le semi-algébrique $S$, on peut définir $\mathfrak{L}_n(S)$ (resp. $\mathfrak{L}_n(S_T)$), l'ensemble des germes d'arcs tracés sur $S$ tronqués à l'ordre $n$ (resp. et d'origine dans $T$), comme les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]]$ tels que $\gamma^{-1}(\alpha_n) \in \widehat{S}$ (resp. et $\gamma(0) \in T$ ).*

Si on représente les images $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des indéterminées $X_1, \ldots, X_m$ par des polynômes de $\mathbb{R}[t]$ de degré $\leqslant n$, ou plus exactement par la liste de leurs coefficients, $\mathfrak{L}_n(S)$ et $\mathfrak{L}_n(S_T)$ peuvent être interprétés comme des sous-ensembles de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.

Du morphisme canonique de troncation à l'ordre $n$, $\mathbb{R}[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]]$, on déduit un morphisme $\pi_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$. On dispose aussi des morphismes naturels de projection pour $p \geqslant n$, $\pi_{p,n} : \mathfrak{L}_p(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$.

Les ensembles $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{(n+1)m}$ sont munis de la topologie euclidienne, alors $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}[[t]]^m$ est muni de la topologie induite : la topologie la moins fine qui rende les applications $\pi_n$ continues.

*Remarque 1.2.* — L'ensemble $\mathfrak{L}(S)$ ne dépend pas des équations de $S$ du fait que $\widetilde{S}$ n'en dépende pas ([BCR, 7.2.2]). En revanche, $\mathfrak{L}_n(S)$ dépend fondamentalement des équations de $S$ comme on peut s'en convaincre en comparant $\mathfrak{L}_n(X > 0)$ et $\mathfrak{L}_n(X^3 > 0)$, pour $A = \mathbb{R}[X]$. Ce fait est déjà apparent dans le cadre algébrique : $\mathfrak{L}_n(X = 0) \neq \mathfrak{L}_n(X^3 = 0)$.

— De plus, un arc $\gamma$ est centré "à distance finie" (i.e. en $\gamma(0)$), donc $\mathfrak{L}(S)$ dépend du plongement de $S$ dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $\alpha \in \operatorname{Spec}_r \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m] = \widetilde{\mathbb{R}^m}$. On a l'équivalence $F \in \gamma^{-1}(0_+) \iff \forall t \in ]0, \epsilon[\ \ F(\gamma) \geqslant 0 \iff \overline{\mathrm{ac}}\,(F(\gamma)) \geqslant 0$. Donc $\alpha = \gamma^{-1}(0_+)$ se traduit par $F \in \alpha \iff \overline{\mathrm{ac}}\,(F(\gamma)) \geqslant 0$.

Supposons l'ensemble semi-algébrique $S$ donné par les équations $S = \cup_{i=1}^r \cap_{j=1}^{s_i} \{f_{ij} = 0, g_{ij} > 0\}$. Alors $\widetilde{S} = \cup_{i=1}^r \cap_{j=1}^{s_i} \{\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}^m} \mid f_{ij} \in \alpha \cap -\alpha, g_{ij} \in \alpha \setminus -\alpha\}$. Donc $\gamma^{-1}(0_+) = \alpha \in \widetilde{S}$ signifie qu'il existe $i$ tel que pour tout $j = 1, \dots, l_i$ on a $f_{ij}(\gamma) = 0$ et $\overline{\mathrm{ac}}\,(g_{ij}(\gamma)) > 0$. De même, $\mathfrak{L}_n(S) = \{\gamma \in \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]] \mid \exists i \forall j \quad f_{ij}(\gamma) = 0, \overline{\mathrm{ac}}_n(g_{ij}(\gamma)) > 0\}$.

Si $S$ est localement fermé de la forme $S = \{f_1 = 0, \dots, f_r = 0, g_1 > 0, \dots, g_s > 0\}$ alors on dispose des morphismes de troncation $\pi_n : \mathfrak{L}(S_S) \to \mathfrak{L}_n(S_S)$ et, pour $p \geqslant n$, $\pi_{p,n} : \mathfrak{L}_p(S_S) \to \mathfrak{L}_n(S_S)$.

Dans la suite, on aura recours à la forme suivante du théorème d'approximation d'Artin :

THÉORÈME 1.3 (Artin). — *Notons $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $\mathbb{R}\{\{X\}\}$, $\mathbb{R}[[X]]$ respectivement les algèbres des séries convergentes et des séries formelles en les indéterminées $X$. Soit $F = (F_1, \dots, F_r) \in \mathbb{R}\{\{t, X\}\}^r$ tel que $F(0,0) = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute solution formelle $\gamma(t) \in k[[t]]^p$ du système $F(t, \gamma(t)) = 0$, il existe une solution convergente $\delta(t) \in \mathbb{R}\{\{t\}\}^p$ telle que $F(\delta) = 0$ et $\gamma \equiv \delta \bmod t^{n+1}$. L'énoncé reste* *valable si on remplace $\mathbb{R}\{\{X\}\}$ par l'anneau $\mathbb{R}[[X]]_{\text{alg}}$ des séries formelles algébriques sur $\mathbb{R}[X]$.*

*De plus, il existe une application $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, $n \in \mathbb{N}$ étant fixé : si $\gamma \in \mathbb{R}[[t]]^p$ est une solution modulo $t^{e(n)+1}$ du système, i.e. $F(t,\gamma(t)) \equiv 0 \bmod t^{e(n)+1}$, alors il existe une solution $\beta \in \mathbb{R}[[t]]^p$ du système $F(t,\beta(t)) = 0$ telle que $\gamma \equiv \beta \bmod t^{n+1}$.*

Mentionnons que la dernière assertion est en fait un résultat de Greenberg [Gg]. L'estimation de la fonction d'Artin est un problème difficile dont on a que des résultats partiels et peu nombreux. On peut citer, par exemple, [LJ] et [Hi], où il est montré que si $f(t,x) \in \mathbb{R}\{\{t,X\}\}$ définit le germe à l'origine d'une hypersurface à singularité isolée, alors sa fonction d'Artin vérifie $e(n) \leqslant \mathrm{E}[\nu n] + n$ où $E[.]$ désigne la partie entière et $\nu$ l'exposant de Łojasiewicz de la singularité.

PROPOSITION 1.4. — *Soit $S$ un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Alors $\pi_0(\mathfrak{L}(S))$ est l'adhérence $\bar{S}$ de $S$ pour la topologie euclidienne.*

*Démonstration.* — Supposons le semi-algébrique $S$ donné par $S = \cup_{i=1}^{r} \cap_{j=1}^{l_i} \{f_{ij} = 0, g_{ij} > 0\}$.

Montrons que $\pi_0(\mathfrak{L}(S)) \supset \bar{S}$. Soit $a \in \bar{S}$. D'après le lemme de sélection des courbes [BCR, 2.5.5], il existe $\delta(t) = (\delta_1(t),\dots,\delta_m(t))$ une fonction analytique réelle de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$ (en fait, on peut prendre pour $\delta$ une fonction de Nash) telle que $\delta(]0,1]) \subset S$ et $\delta(0) = a$. La fonction $\delta$ est développable en série entière au voisinage de 0, disons sur $[0,\epsilon]$ avec $0 < \epsilon < 1$, et on continue de noter $\delta$ son développement sur ce voisinage. On considère le germe d'arc défini par $\delta : \mathbb{R}[X_1,\dots,X_m] \to \mathbb{R}[[t]]$, $X_i \mapsto \delta_i(t)$. Alors, on a $\pi_0(\delta) = a$ et $(\delta_1(t),\dots,\delta_m(t)) \in S$ pour $0 < t < \epsilon$. Donc, pour tout $0 < t < \epsilon$, il existe $i$ tel que pour tout $j$, $f_{ij}(\delta(t)) = 0, g_{ij}(\delta(t)) > 0$. Or, pour tout polynôme $f$, la condition $f(\delta(t)) = 0$ pour tout $0 < t < \epsilon$ équivaut à $f(\delta(t)) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ par prolongement analytique. De plus, pour tout polynôme $g$, la condition $g(\delta(t)) > 0$ pour tout $0 < t < \epsilon$ équivaut à $\overline{\mathrm{ac}}\,(g(\delta(t))) > 0$. Ce qui prouve que $\delta \in \mathfrak{L}(S)$ avec $\delta(0) = a$.

Réciproquement, montrons que $\pi_0(\mathfrak{L}(S)) \subset \bar{S}$. Soit $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_m) \in \mathfrak{L}(S)$. Considérons $u = \max\{\mathrm{ord}\,(g_{ij}(\gamma))\}$. Notons alors $\bar{\gamma}$ le tronqué de $\gamma$ à l'ordre $u+1$. La condition $\overline{\mathrm{ac}}\,(g_{ij}(\gamma)) > 0$ est équivalente à $\overline{\mathrm{ac}}\,(g_{ij}(\bar{\gamma})) > 0$ ou encore à l'existence de $0 < \epsilon \leqslant 1$ tel que $g_{ij}(\bar{\gamma}(t)) > 0$ pour tout $0 < t < \epsilon \leqslant 1$.

D'après 1.3 il existe $\delta \in k\{\{t\}\}^d$ telle que $f_{ij}(\delta) = 0$ et $\gamma \equiv \delta \bmod t^{u+1}$. Par conséquent, pour tout $0 < \epsilon \leqslant 1$ on a $g_{ij}(\delta(t)) > 0$ et $f_{ij}(\delta) = 0$. D'où $\delta(]0,\epsilon]) \subset S$. Donc $\gamma(0) = \delta(0) \in \bar{S}$.

PROPOSITION 1.5. — *Soit $S$ un ensemble semi-algébrique fermé de $\mathbb{R}^m$. Alors $\pi_n(\mathfrak{L}(S))$ est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.*

*Démonstration.* — Par définition, on a toujours $\pi_n(\mathfrak{L}(S)) \subset \mathfrak{L}_n(S)$.

D'après le théorème de finitude [BCR, 2.7.1], on peut supposer le semi-algébrique fermé $S$ donné par $S = \cup_{i=1}^{r} \cap_{j=1}^{l_i} \{f_{ij} \geqslant 0\}$.

Soit $\gamma \in \mathfrak{L}_{e(n)}(S)$. Il existe $i$ tel que pour tout $j = 1, \ldots, l_i$ on a, $\overline{\mathrm{ac}}_{e(n)}(f_{ij}(\gamma)) \geqslant 0$. La condition $\overline{\mathrm{ac}}_{e(n)}(f_{ij}(\gamma)) \geqslant 0$ est équivalente à l'existence de $\delta_j \in \mathbb{R}[[t]]/t^{e(n)+1}\mathbb{R}[[t]]$ tel que $f_{ij}(\gamma) = \delta_j^2$ ou $f_{ij}(\gamma) = t\delta_j^2$.

Il suffit donc d'appliquer 1.3 pour obtenir l'existence de $\alpha, \beta_j \in \mathbb{R}[[t]]^m$ tels que $f_{ij}(\alpha) = \beta_j^2$ ou $f_{ij}(\alpha) = t\beta_j^2$, ce qui équivaut à $\overline{\mathrm{ac}}\,(f_{ij}(\alpha)) \geqslant 0$. Donc $\pi_n(\mathfrak{L}(S)) \supset \pi_n^{e(n)}\mathfrak{L}_{e(n)}(S)$. On en déduit que $\pi_n(\mathfrak{L}(S)) = \pi_{e(n),n}\mathfrak{L}_{e(n)}(S)$.

Or il est clair que pour tout $n$, l'ensemble $\mathfrak{L}_n(S)$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$. En effet, une condition du type $f(\gamma) = 0$, avec $f$ un polynôme et $\gamma \in \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}R[[t]]$ s'exprime par une condition algébrique sur les coefficients de $\gamma$. De même, une condition du type $\overline{\mathrm{ac}}_n(g(\gamma)) > 0$, avec $g$ un polynôme, s'exprime, dans chaque cas de la disjonction $\operatorname{ord} g(\gamma) = 0, \ldots, n$, par une condition semi-algébrique sur les coefficients de $\gamma$.

Donc, $\pi_n(\mathfrak{L}(S))$ est ensemble semi-algébrique comme projection d'un ensemble semi-algébrique.

*Remarque 1.6.* — On peut aussi définir l'espace $\mathfrak{L}^{\mathrm{an}}(S)$ des germes d'arcs analytiques tracés sur $S$, en considérant les morphismes $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}\{\{t\}\}$ tels que $\gamma^{-1}(0_+) \in \widetilde{S}$. De même, l'espace $\mathfrak{L}^{\mathrm{alg}}(S)$ des germes d'arcs de Nash tracés sur $S$ (au sujet des fonctions de Nash voir [BCR, chapitre 8]), en considérant les morphismes $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}[[t]]_{\mathrm{alg}}$ tels que $\gamma^{-1}(0_+) \in \widetilde{S}$.

D'après 1.3 et en suivant la preuve de 1.5, on a $\mathfrak{L}_n(S) \simeq \mathfrak{L}_n^{\mathrm{an}}(S) \simeq \mathfrak{L}_n^{\mathrm{alg}}(S)$, relativement à des équations fixées de $S$.

On peut étendre l'identité $\pi_0(\mathfrak{L}(S)) = \pi_0(\mathfrak{L}(\bar{S}))$ de la manière suivante :

PROPOSITION 1.7. — *Soit $S$ un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\pi_n(\mathfrak{L}(S)) = \pi_n(\mathfrak{L}(\bar{S}))$.*

*Démonstration.* — Soit $\gamma \in \mathfrak{L}(\bar{S}) \setminus \mathfrak{L}(S)$. On peut considérer $Y$ une sous-variété analytique (et même de Nash d'après la remarque précédente) de dimension 1 telle que $\gamma \in \mathfrak{L}(Y)$ et $Y \cap S = \varnothing$. D'après le lemme de l'aile ([BCR, 9.6.3]), qui se déduit d'une version paramétrée du lemme de sélection des courbes, d'où l'analogie avec 1.4, il existe un nombre fini d'ouverts semi-algébriques $U_1, \ldots, U_k$ de $Y$ tels que $Y \setminus \cup_{i=1}^k U_i$ est une union finie de points et que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, il existe une aile de Nash d'axe $U_i$, i.e. une fonction de Nash $w_i : ]-1,1[\times U_i \to \mathbb{R}^m$ telle que

(i) pour tout $y \in Y$, $w_i(0,y) = y$,

(ii) pour tout $t \in ]-1,1[$, $w_i(t,y) \in T$ et $\rho(w_i(t,y)) = y$ où $T$ est un voisinage tubulaire de $Y$ avec la rétraction orthogonale $\rho : T \to Y$,

(iii) $w_i(]0,1[\times U_i) \subset S$.

Même si l'origine $\gamma(0)$ n'appartient pas à l'un des $U_i$, on peut construire un arc analytique tracé sur l'un des ensembles $w_i(]0,1[\times U_i)$ et tangent à $\gamma$ jusqu'à l'ordre $n$. Ce qui permet d'étendre 1.5 à un semi-algébrique quelconque $S$. Dans le cas non singulier, l'espace des arcs est facile à décrire :

Proposition 1.8. — *Soient $S \subset \mathbb{R}^m$ et $T \subset \mathbb{R}^p$ des ensembles semi-algébriques qui sont des sous-variétés $C^\infty$. Alors $S$ et $T$ sont des ensembles analytiques réels et toute application analytique $h : S \to T$ induit, par composition des arcs, une application $\mathfrak{L}^{\mathrm{an}}(S) \to \mathfrak{L}^{\mathrm{an}}(T)$. Si $S$ et $T$ sont analytiquement difféomorphes alors $\mathfrak{L}^{\mathrm{an}}(S) \simeq \mathfrak{L}^{\mathrm{an}}(T)$.*

On a une trivialisation de l'espace des arcs dans le cas d'un ensemble algébrique non singulier :

Proposition 1.9. — *Supposons que l'ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété $C^\infty$ de dimension $d$. Alors il existe des ensembles semi-algébriques $(S_i)_{i\in I}$ ouverts dans $S$ tels que $S = \cup_{i\in I} S_i$, et pour tout $i \in I$ on ait un homéomorphisme semi-algébrique $\pi_n(\mathfrak{L}(S_{S_i})) \simeq S_i \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$ (rappelons que $\mathfrak{L}(S_{S_i})$ est l'ensembles des arcs tracés sur $S$ et d'origine dans $S_i$). Et même, pour tout ensemble semi-algébrique $T \subset S_i$, $\pi_n(\mathfrak{L}(S_T)) \simeq T \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$.*

*Démonstration.* — Soit $a \in S$. Il existe un voisinage ouvert semi-algébrique $S_a$ de $a$ dans $S$ tel que la projection orthogonale $p$ de $S$ sur l'espace tangent $T_a$ à $S$ en $a$ induise un difféomorphisme analytique de $S_a$ sur son image. De plus, la projection orthogonale ne “change pas l'ordre d'un arc” donc $\pi_n(\mathfrak{L}(S_a, S)) \simeq \pi_n(\mathfrak{L}(p(S_a), p(S)))$. À un changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que l'équation du plan tangent est $X_{d+1} = \ldots = X_m = 0$. Par 1.10, on déduit que $\pi_n(\mathfrak{L}(S_a, S)) \simeq S_a \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$ d'où le résultat souhaité.

Un changement *affine* de coordonnées ne change pas l'espace des arcs.

LEMME 1.10. — *Soient $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $A$ une matrice inversible $m \times m$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}^m$. Alors l'application $h : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $X \mapsto AX+B$ induit un homéomorphisme $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ et mieux, des homéorphismes $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m) \simeq \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$ pour tout $n$.*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que $A(\gamma) \equiv B \mod t^n$ équivaut à $\gamma \equiv A^{-1}B \mod t^n$.

### 1.2. Germes d'arcs tracés sur une variété algébrique réelle.

Avant tout, décrivons une autre manière de voir le spectre réel. Soit $A$ une $\mathbb{R}$-algèbre. Un élément de $\operatorname{Spec}_r A$ est un morphisme $\phi : A \to R$ où $R$ est une extension réelle close de $\mathbb{R}$. Pour toute extension de corps réels clos $f : R \to S$, on identifie les points donnés par $\phi$ et $f \circ \phi$. En considérant l'image réciproque par $\phi$ de l'unique ordre du corps réel clos $R$, on retombe sur la même définition de $\operatorname{Spec}_r A$ (au moins en tant qu'ensemble) que celle donnée en introduction. Notons $\mathbf{A} = \operatorname{Spec}_r \mathbb{R}[X]$.

Par recollement, on peut définir l'espace topologique $X_r$, le spectre réel associé à un schéma quelconque $X$. Cette opération est fonctorielle : à un morphisme de schémas $f : X \to Y$ on associe une application continue $f : X_r \to Y_r$. Dans toute la suite, $X$ désigne une variété algébrique réelle, i.e. un schéma de type fini sur $\mathbb{R}$, réduit et séparé. Pour la topologie du spectre réel, $X_r$ est alors un espace topologique quasi-compact qui possède une base d'ouverts quasi-compacts et stable par intersections finies.

Dans [DL], l'espace des germes d'arcs tracés sur $X$ tronqués à l'ordre $n$, $\mathfrak{H}_n(X)$ est défini par la propriété suivante : pour toute $\mathbb{R}$-algèbre $R$, on a un isomorphisme (fonctoriel en $R$)

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Spec} R, \mathfrak{H}_n(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Spec} R[t]/t^{n+1}R[t], X).$$

De manière analogue à 1.1, on peut définir $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$, l'espace des arcs réels tracés sur $X$ et tronqués à l'ordre $n$, comme l'ensemble des morphismes $\phi : \operatorname{Spec} R[t]/t^{n+1}R[t] \to X$ où $R$ est une extension réelle close de $\mathbb{R}$, en identifiant, lorsque l'on a un morphisme de corps réels clos $f : R \to S$ (et le morphisme qu'il induit $f : R[[t]]/t^{n+1}R[[t]] \to S[[t]]/t^{n+1}S[[t]])$, les points donnés par $\phi$ et $f \circ \phi$. Il vient alors clairement que $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X) \simeq (\mathfrak{H}_n(X))_r$, et l'identification est un homéomorphisme pour la topologie du spectre réel.

Puis la limite projective $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ de la famille $(\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X))_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'espace des germes d'arcs réels tracés sur $X$, muni d'une struture d'espace topologique (celle du spectre réel). On dispose toujours d'un morphisme de troncation $\pi_n : \widetilde{\mathfrak{L}}(X) \to \widetilde{\mathfrak{L}}_n(X)$.

Soient $X$ une variété algébrique réelle et $C$ un ensemble construtible de $X_r$. On définit $\widetilde{\mathfrak{L}}(C) = \{\gamma : \operatorname{Spec} R[[t]] \to X \in \widetilde{\mathfrak{L}}(X) \mid \gamma(0_+) \in C\}$, avec $R$ réel clos contenant $\mathbb{R}$ et l'identification habituelle sur les points. De même, on peut définir $\widetilde{\mathfrak{L}}(C_D)$, l'ensemble des arcs tracés sur $C$ avec origine dans $D$, pour tous ensembles construtibles $C$ et $D$ de $X_r$.

On obtient alors des résultats analogues à ceux de la section précédente. Citons :

Proposition 1.11. — a) *L'ensemble $\pi_n(\widetilde{\mathfrak{L}}(X))$ est un ensemble constructible de $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$.*

b) *Lorsque $X$ est lisse de dimension pure $d$, on a un homéomorphisme local pour tous $m \geqslant n$ : $\widetilde{\mathfrak{L}_m}(X)) \simeq \mathbf{A}^{(m-n)d} \times \widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$.*

c) *Soient $S$ un semi-algébrique de $\mathbb{R}^d$, donné avec ses équations, et $\widetilde{S}$ défini par les mêmes équations dans $\operatorname{Spec}_r \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$. On a $\widetilde{\mathfrak{L}_n(S)} \simeq \widetilde{\mathfrak{L}_n}(\widetilde{S})$.*

## 2. Ensembles simples.

Par convention, les variables décrivant $\mathbb{R}((t))$ sont notées $x_1, \dots, x_m$ et les variables décrivant $\mathbb{Z}$ sont notées $l_1, \dots, l_r$.

Définition 2.1. — *Une condition simple de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$, notée $\theta(x_1, \dots, x_m, l_1, \dots, l_r)$, est une combinaison booléenne de conditions de la forme :*

(i) $\operatorname{ord}_t f_1(x_1, \dots, x_m) \geqslant \operatorname{ord}_t f_2(x_1, \dots, x_m) + L(l_1, \dots, l_r)$

(ii) $\operatorname{ord}_t f_1(x_1, \dots, x_m) \equiv L(l_1, \dots, l_r) \bmod d$

(iii) $h(\overline{\mathrm{ac}}\,(f_1(x_1, \dots, x_m)), \dots, \overline{\mathrm{ac}}\,(f_p(x_1, \dots, x_m))) \geqslant 0$

*où $f_1, \dots, f_p, h$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, $L$ est un polynôme de degré au plus 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}$.*

*— Un sous-ensemble de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$ est dit simple lorsqu'il est donné par une condition simple. Une fonction $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ est dite simple lorsque son graphe est un ensemble simple.*

*— Les sous-ensembles simples de $\mathbb{Z}^r$ (donnés par une combinaison booléenne de conditions de type (i) ou (ii), avec $m = 0$) sont appelés ensembles de Presburger et seront étudiés dans la section suivante.*

On a un résultat d'élimination des quantificateurs portant sur les variables entières qui interviennent dans la description des ensembles simples. C'est un résultat élémentaire dû à Presburger [Pr] qu'on peut démontrer par un argument similaire à celui de la preuve de 3.2.

PROPOSITION 2.2. — *Soit $\theta$ une condition simple de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$. Alors la formule $\exists l_1 \in \mathbb{Z} \quad \theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$ est simple.*

Le résultat fondamental suivant est la version réelle du résultat de Pas [Pa, Th 4.1] :

THÉORÈME 2.3. — *Soit $\theta$ une condition simple. Alors la condition*

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}((t)) \quad \theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$$

*est simple.*

*De plus, pour toute extension réelle close $S$ de $\mathbb{R}$, la condition*

$$\exists x_1 \in S((t)) \quad \theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$$

*est simple et peut être définie par la condition précédente, indépendamment de $S$.*

*Démonstration.* — Attachons-nous d'abord à démontrer la première assertion. On aménage légèrement le résultat de Pas à notre cadre réel.

Tout d'abord, on considère $K$ un corps valué de valuation $\operatorname{ord} : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$. On note $R = \{x \in K \mid \operatorname{ord} x \geqslant 0\}$, $P = \{x \in K \mid \operatorname{ord} x > 0\}$, $U = \{x \in K \mid \operatorname{ord} x = 0\}$. Soit $\bar{K} = K/P$ le corps résiduel et $\operatorname{Res} : R \to \bar{K}$ la projection canonique. L'analogue des conditions [Pa, 2.4] sont les suivantes :

(i) $K$ et $\bar{K}$ sont de caractéristique nulle,

(ii) $K$ est hensélien,

(iii) $K$ et $\bar{K}$ sont réels, munis respectivement des deux ordres premiers $\alpha$ et $\bar{\alpha}$,

(iv) $K$ a une application composante angulaire modulo $P$, notée $\overline{\mathrm{ac}}$ : $K \to \bar{K}$ qui satisfait les 3 conditions : $\overline{\mathrm{ac}}\,(0) = 0$; $\overline{\mathrm{ac}}$ induit, en restriction à $K^\times$ un morphisme multiplicatif $K^\times \to \bar{K}^\times$ ; $\overline{\mathrm{ac}}$ et Res induisent le même morphisme, en restriction à $U$. De plus, on suppose que $\overline{\mathrm{ac}}$ est compatible avec les ordres de $K$ et $\bar{K}$, i.e. $\overline{\mathrm{ac}}^{\,-1}(\bar{\alpha}) = \alpha$.

Considérons le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{\mathfrak{L}_K, \mathfrak{L}_{\bar{K}}, \mathfrak{L}_\Gamma, \mathrm{ord}\,, \overline{\mathrm{ac}}\,\}$ (resp. $\mathcal{L}' = \{\mathfrak{L}'_K, \mathfrak{L}'_{\bar{K}}, \mathfrak{L}_\Gamma, \mathrm{ord}\,, \overline{\mathrm{ac}}\,\}$) où : $\mathfrak{L}_K$ est le langage des corps ordonnés $K$ (resp. $\mathfrak{L}'_K$ est le langage des corps $K$), $\mathfrak{L}_{\bar{K}}$ est le langage des corps ordonnés résiduels $\bar{K}$ (resp. $\mathfrak{L}'_{\bar{K}}$ est le langage des corps résiduels $\bar{K}$), $\mathfrak{L}_\Gamma$ est l'extension du langage des groupes abéliens $\Gamma$ avec un élément $\infty$, ord : $K \to \Gamma$ est un symbole de fonction valuation, $\overline{\mathrm{ac}}$ : $K \to \bar{K}$ est un symbole de fonction composante angulaire modulo $P$.

Alors, $(K, \bar{K}, \Gamma \cup \{\infty\}, \mathrm{ord}\,, \overline{\mathrm{ac}}\,)$ est une structure pour le langage $\mathcal{L}$ ainsi que pour le langage $\mathcal{L}'$.

L'analogue du théorème [Pa, 4.1] dit que

Proposition 2.4. — *La structure* $(K, \bar{K}, \Gamma \cup \{\infty\}, \mathrm{ord}\,, \overline{\mathrm{ac}}\,)$ *admet l'élimination des $K$-quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$.*

*Démonstration.* — On fait appel de manière centrale au théorème de décomposition cellulaire [Pa, 3.2].

Il suffit de considérer une formule du genre

$$(\exists y)\, \psi\, (y, x, \eta, k) \tag{1}$$

où $\psi$ est une formule dans $\mathcal{L}$ sans $K$-quantificateurs, $y$ est une $K$-variable, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ des $K$-variables, $\eta$ et $k$ sont des uplets de $\bar{K}$ et $\Gamma$-variables respectivement. Dans $\psi$, les formules atomiques de la forme $h(x, y) \geqslant 0$ peuvent être remplacées par $\overline{\mathrm{ac}}\,(h(x, y)) \geqslant 0$ où $h$ est un polynôme à coefficients entiers en les variables $(x, y)$. On peut donc supposer que $y$ n'apparaît dans $\psi$ que dans les $\bar{K}$-termes $\overline{\mathrm{ac}}\, f_1(x, y), \ldots, \overline{\mathrm{ac}}\, f_r(x, y)$ et les $\Gamma$-termes $\mathrm{ord}\, g_1(x, y), \ldots, \mathrm{ord}\, g_s(x, y)$ où $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$ sont des polynômes à coefficients entiers en les variables $(x, y)$.

Considérons $\phi$ la formule obtenue en remplaçant dans $\psi$, $\overline{\mathrm{ac}}\, f_i(x, y)$ par une $\bar{K}$-variable $\rho_i$ et $\mathrm{ord}\, g_j(x, y)$ par une $\Gamma$-variable $l_j$. Alors (1) est équivalente à

$$(\exists y)(\exists \rho_1) \ldots (\exists \rho_r)(\exists l_1) \ldots (\exists l_s) \Big[ \phi(x, \eta, k, \rho_1, \ldots, \rho_r, l_1, \ldots, l_s) \\ \wedge \Big( \bigwedge_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{ac}}\, f_i(x, y) = \rho_i \Big) \wedge \Big( \bigwedge_{j=1}^{s} \mathrm{ord}\, g_j(x, y) = l_j \Big) \Big].$$

Comme $\phi$ ne contient pas la variable $y$ on peut pousser le quantificateur $(\exists y)$ et il suffit de l'éliminer de la formule

$$(2) \qquad (\exists y)\Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{ac}}\, f_i(x,y) = \rho_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{s} \mathrm{ord}\, g_j(x,y) = l_j\Big)\Big].$$

On applique alors le théorème de décomposition cellulaire [Pa, II theorem 3.2] aux polynômes $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$. Il existe une partition de $K^m \times K$ en un nombre fini de cellules $A = \cup_\epsilon A(\epsilon)$ de paramètres $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ et de centre $c(x,\epsilon)$ telle que pour $(x,t) \in A(\epsilon)$ on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{ac}}\, f_i(x,y) &= \epsilon_{\mu(i)} & i &= 1, \dots, r \\ \mathrm{ord}\, g_j(x,y) &= \mathrm{ord}\,(h_j(x,\epsilon)(y - c(x,\epsilon))^{\nu_j}) & j &= 1, \dots, s \end{aligned}$$

où $\mu$ est une application $\{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, n\}$, $\mu_j \in \mathbb{N}$ et les $h_j$ sont des fonctions définissables dans le langage de Pas $\mathcal{L}'$ (elles sont donc a fortiori définissables dans notre langage réel $\mathcal{L}$). Par définition d'une cellule, la condition $(x,y) \in A(\epsilon)$ est de la forme

$$\theta(x, \epsilon, \mathrm{ord}\,(y - c(x,\epsilon))) \wedge \overline{\mathrm{ac}}\,(y - c(x,\epsilon)) = \epsilon_1$$

où $\theta$ est une formule simple de $\mathcal{L}'$ et $c(x,\epsilon)$ est définissable dans $\mathcal{L}'$.

On peut donc supposer que (2) est équivalente à

$$(3) \quad (\exists y)(\exists \epsilon_1)\dots(\exists \epsilon_n)\Big[(x,y) \in A(\epsilon) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{r} \epsilon_{\mu(i)} = \rho_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{s} \mathrm{ord}\, h_j(x,\epsilon) + \nu_j \mathrm{ord}\,(y - c(x,\epsilon)\Big) = l_j)\Big].$$

Si on introduit une nouvelle $\Gamma$-variable $l$ pour $\mathrm{ord}\,(y - c(x,\epsilon))$, la formule (3) devient

$$(\exists y)(\exists \epsilon_1)\dots(\exists \epsilon_n)(\exists l)\mathfrak{q}\Big[\theta(x,\epsilon,l) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{r} \epsilon_{\mu(i)} = \rho_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{s} \mathrm{ord}\, h_j(x,\epsilon) + \nu_j l = l_j\Big) \wedge \mathrm{ord}\,(t - c(x,\epsilon)) = l \wedge \overline{\mathrm{ac}}\,(t - c(x,\epsilon)) = \epsilon_1\Big].$$

Si on pousse $(\exists t)$ de nouveau, il vient la formule

$$(\exists y)[\mathrm{ord}\,(y - c(x,\epsilon)) = l \wedge \overline{\mathrm{ac}}\,(y - c(x,\epsilon)) = \epsilon_1]$$

de laquelle on peut trivialement éliminer le quantificateur.

La première assertion du théorème n'est alors qu'un corollaire. En effet, notons $f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha,i}x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ l'ensemble des polynômes intervenant dans la description de la condition simple $\theta$.

On considère chacun de leurs coefficients $a_{\alpha,i} \in \mathbb{R}$ comme une nouvelle variable de $\mathbb{R}((t))$. Il en résulte une formule dans la structure $(\mathbb{R}((t)),\mathbb{R},\mathbb{Z}\cup\{\infty\},\mathrm{ord}\,,\overline{\mathrm{ac}}\,)$. On peut alors éliminer le quantificateur $\exists x_1$. Ce faisant, il apparaît de nouveaux quantificateurs portant sur des variables de $\mathbb{R}$ qu'on élimine du fait que $\mathbb{R}$ est réel clos (voir [BCR, 2.2.4] par exemple). Il apparaît aussi de nouveaux quantificateurs portant sur des variables de $\mathbb{Z}$ qu'on élimine par 2.2. Reste ensuite à substituer les variables auxiliaires $a_{\alpha,i}$ de $\mathbb{R}((t))$ par les coefficients des polynômes de départ qui leur ont été respectivement associés.

La seconde assertion du théorème découle, d'une part du fait que la décomposition cellulaire de Pas est valable uniformément pour tout corps satisfaisant aux conditions [Pa, 2.4], d'autre part du théorème de Tarski-Seidenberg (voir par exemple la formulation [BCR, 1.4.6]).

À ce stade, nous sommes en mesure d'introduire la notion d'ensembles simples de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$ et de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ pour une variété algébrique réelle $X$. Toutes les définitions et propriétés suivantes sont de nouveau directement inspirées de [DL].

Soit $\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ et $k_\gamma$ le corps résiduel (réel) correspondant. On peut voir $\gamma$ comme un morphisme de schémas $\gamma : \operatorname{Spec} k_\gamma \to \widetilde{\mathfrak{L}}(X)$, ou encore de manière équivalente comme un morphisme $\gamma : \operatorname{Spec} k_\gamma[[t]] \to X$. Lorsque $X$ est un ouvert affine de Zariski de $\mathbb{R}^d$ on pourra même considérer $\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ comme un élément de $R[[t]]^d$ où $R$ est une extension réelle close de $\mathbb{R}$ (la clôture réelle de $k_\gamma$ par exemple).

Définition 2.5. — *Une famille de sous-ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^r}$ de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ est dite famille simple d'ensembles simples (ou simplement un ensemble simple lorsque $r = 0$) s'il existe une condition simple $\theta$ de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$ telle que*

$$A_n = \{\gamma \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \mid \theta(\gamma_1,\ldots,\gamma_m,n)\}.$$

*Soit $X$ une variété algébrique réelle. Une famille de sous-ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^r}$ de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ est dite famille simple d'ensembles simples s'il existe un recouvrement de $X$ par des ouverts affines de Zariski $U$ tels que*

$$A \cap \widetilde{\mathfrak{L}}(U) = \{\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(U) \mid \theta(h_1(\gamma),\ldots,h_m(\gamma);n)\}$$

*où $h_1, \dots, h_m$ sont des fonctions régulières sur $U$ et $\theta$ est une condition simple de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$. Les $h_i$ et $\theta$ dépendent de $U$ et $h_i(\gamma)$est un élément de $k_\gamma[[t]]$ avec $k_\gamma$ le corps résiduel de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ en $\gamma$.*

Notons que pour tout ensemble semi-algébrique $S$ de $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{L}(S)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$. Comme l'origine d'un arc $\gamma \in \mathbb{R}[[t]]$ est donné par la formule simple ($\overline{\mathrm{ac}}\,(\gamma)$ si $\mathrm{ord}_t(\gamma) = 0$ et 0 sinon), il apparaît aussi que pour tous semi-algébriques $S$ et $T$ de $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{L}(S_T)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$. De même, pour tous constructibles $C$ et $D$ de $X_r$, le sous-ensemble $\widetilde{\mathfrak{L}}(C_D)$ de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ est simple.

PROPOSITION 2.6. — *Soit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres*

$$h : \mathbb{R}[X_1, \dots, X_p] \to \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_m].$$

*Considérons un ensemble simple $A$ de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$ et $B$ un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. Alors $h$ induit un morphisme $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$. De plus, $h^{-1}(A)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ et $h(B)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$.*

*De même, soient $h : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques réelles, $F$ un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ et $G$ un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y)$. Alors $h(F)$ est un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y)$ et $h^{-1}(G)$ est un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$.*

*Démonstration.* — Nous nous limitons à prouver la première assertion, la seconde se démontrant de manière similaire. Un élément $\gamma$ de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ est donné par un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_m] \to \mathbb{R}[[t]]$. On définit naturellement $h(\gamma)$ comme le composé $\gamma \circ h$.

Si $A$ est donné par la formule simple $\theta(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ et $h$ défini par $h(X_i) = F_i$, alors on a $h^{-1}(A) = \{\delta \in \mathbb{R}[[t]]^m \mid \theta(F_1(\delta), \dots, F_p(\delta))\}$, qui est un ensemble simple.

Si $B$ est donné par la formule simple $\Gamma(\delta_1, \dots, \delta_m)$ alors on a $h(B) = \{\gamma \in \mathbb{R}[[t]]^d \mid \exists \delta \in B, F_1(\delta) = \gamma_1, \dots, F_p(\delta) = \gamma_p\}$, qui est un ensemble simple d'après 2.3.

Le résultat suivant est une généralisation de la proposition 1.5.

PROPOSITION 2.7. — *Soit $A$ un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. Alors $\pi_n(A)$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.*

*De même, soit $A$ un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$, où $X$ est une variété algébrique réelle. Alors $\pi_n(A)$ est un constructible de $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$.*

*Démonstration.* — Encore une fois, nous donnons uniquement la démonstration de la première assertion. La preuve est en tout point similaire à celle de [DL, 2.3]. On considère une section $s$ de $\pi_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$.

Supposons que $A$ est donné par la formule simple $\theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Alors $(\pi_n^{-1}\pi_n(A)) = \{\delta \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \mid \exists\gamma \in R[[t]]^m \quad \theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \equiv \delta \mod (t^{n+1})\}$ est un ensemble simple d'après 2.3.

Notons que $\gamma \in \pi_n(A) \iff s(\gamma) \in \pi_n^{-1}\pi_n(A)$. Sur chaque cas de la disjonction $\operatorname{ord}(f(\gamma)) = 0, \ldots, n+1$ où $f$ décrit l'ensemble des polynômes qui interviennent dans la formule de l'ensemble simple $\pi_n^{-1}\pi_n(A)$, les coefficients de $\gamma$ satisfont une condition semi-algébrique. Ce qui achève la démonstration.

Nous aurons besoin de nous ramener à des variétés algébriques réelles affines. Lorsque $X$ est lisse de dimension pure $d$, on peut recouvrir $X$ par des ouverts affines de Zariski $U$ tels que l'on ait des morphismes étales $U \to \mathbb{R}^d$.

LEMME 2.8. — *Soit $Y \to X$ un morphisme étale de variétés algébriques réelles lisses. L'application canonique $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(Y) \to Y_r \times_{X_r} \widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$ donnée par le morphisme de troncation $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(Y) \to \widetilde{\mathfrak{L}_0}(Y) \simeq Y_r$ et le morphisme de composition $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(Y) \to \widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$, est un homéomorphisme local.*

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que la composition des isomorphismes donnés par 1.9 coincide avec le morphisme canonique défini ci-dessus.

DÉFINITION 2.9. — *Soient $X$ une variété algébrique réelle et $A$ un ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$. On dit que $A$ est stable au niveau $n \in \mathbb{N}$, si $\pi_n^{-1}\pi_n(A) = A$, avec $\pi_n : \widetilde{\mathfrak{L}}(X) \to \widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$. On dit que $A$ est stable s'il est stable à un certain niveau. Notons que les ensembles simples stables forment une algèbre de Boole.*

*Supposons $X$ lisse de dimension pure $d$. On déduit de 1.11 que si $A$ est stable au niveau $n$, alors pour tout $m \geqslant n$, le morphisme $\pi_{m,n} : \widetilde{\mathfrak{L}_m}(X) \to \widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$ est une fibration localement triviale au-dessus de $\pi_m(A)$, de fibre $\mathbf{A}^{(m-n)d}$, i.e. il existe une partition finie de $\pi_m(A)$ en sous-ensembles $S$ localement fermés dans $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$ tels que $\pi_{m,n}^{-1}(S)$ est localement fermé dans $\widetilde{\mathfrak{L}_m}(X)$ et homéomorphe à $S \times \mathbf{A}^{(m-n)d}$, et $\pi_{m,n}$ correspond dans l'homéomorphisme précédent à la projection canonique $S \times \mathbf{A}^{(m-n)d} \to S$.*

Un ingrédient clé de [DL] est que toute réunion infinie stable d'ensembles stables se réduit à une union finie. Cette propriété de compacité n'est pas satisfaite dans l'espace des arcs $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la décomposition de $\mathbb{R}$ en ensembles semi-algébriques $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+2]$. L'image inverse par $\pi_0$ donne $\pi_0^{-1}(\mathbb{R}) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\pi_0^{-1}([n, n+2])$. On obtient donc un recouvrement de $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ par des ensembles simples stables dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

C'est pourquoi nous travaillerons préférentiellement avec l'espace $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$. La topologie constructible réelle sur $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ induit une topologie constructible réelle sur $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$. Pour cette topologie, les ouverts fermés (les constructibles) sont exactement les ensembles simples stables. Or pour tout $n$, tout ouvert fermé de $\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X)$ est compact pour la topologie constructible. Comme $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ est la limite projective de la famille $(\widetilde{\mathfrak{L}_n}(X))_{n\in\mathbb{N}}$, il ressort que tout ouvert fermé de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ est encore compact pour la topologie constructible. Ce résultat, analogue de [DL, 2.4], se reformule de la manière suivante :

LEMME 2.10. — *Soit, por tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble simple stable $A_n$ de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$. Supposons que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi un ensemble simple stable. Alors $A$ est réunion d'un nombre fini de $A_n$.*

Introduisons la notion de représentation bornée :

DÉFINITION 2.11. — *Soit $X$ une variété algébrique réelle et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille simple d'ensembles simples de $\mathfrak{L}(X)$. On dit que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à représentation bornée s'il existe un recouvrement affine de $X$ par des ouverts de Zariski $U$ tel que sur chaque ouvert $U$ la famille est donnée par une condition simple $\theta$, avec pour tout $f_i$ apparaissant dans la condition simple, $\operatorname{ord}_t f_i$ borné sur $A_n \cap U$ pour chaque $n$ fixé.*

Bien entendu, lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à représentation bornée alors, pour tout $n$, $A_n$ est stable.

Le lemme suivant tiré de [DL, Lemma 2.8] est basé sur le théorème d'approximation d'Artin 1.3 :

LEMME 2.12. — *Soit $X$ une variété algébrique réelle quasi-projective. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille simple d'ensembles simples de $\mathfrak{L}(X)$. On suppose que $A_n$ est stable pour tout $n$. Alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire comme une combinaison boolénne finie de familles simples d'ensembles simples à représentation bornée.*

## 3. Ensembles de Presburger.

DÉFINITION 3.1. — *Une condition simple de $\mathbb{Z}^r$, notée $\theta(l_1,\ldots,l_r)$, est une combinaison booléenne de conditions de la forme*

$$\text{(i) } L(l_1,\ldots,l_r) \geqslant 0 \quad \textit{ou} \quad \text{(ii) } L(l_1,\ldots,l_r) \equiv 0 \mod d,$$

*où L est un polynôme de degré au plus un à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$.*

*Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^r$ est dit simple ou de Presburger lorsqu'il est donné par une condition simple. Une fonction $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ est dite simple lorsque son graphe est un ensemble simple.*

Les fonctions affines sur un Presburger de $\mathbb{Z}^r$ sont des exemples de fonctions simples de $\mathbb{Z}^r$. La proposition qui suit affirme que ce sont essentiellement les seules.

PROPOSITION 3.2. — *Une fonction $\alpha : \mathbb{Z}^{r-1} \to \mathbb{Z}$ est simple si et seulement s'il existe une partition de $\mathbb{Z}^r$ en un nombre fini d'ensembles de Presburger P sur lesquels $\alpha$ est une fonction affine : $\alpha(l_1,\ldots,l_{r-1}) = c_1l_1 + \ldots + c_{r-1}l_{r-1} + c$, avec $c_i, c \in \mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* — Notons $P$ le graphe de $\alpha$ dans $\mathbb{Z}^r$; c'est un ensemble de Presburger en les variables $(l_1,\ldots,l_{r-1},l_r)$. Posons $l' = (l_1,\ldots,l_{r-1})$. On appelle $\mu$ le ppcm des entiers $d$ qui apparaissent dans les congruences des relations de type (ii) dans la description de $P$. Si on fixe $w_r$, la classe de congruence de $l_r$ modulo $\mu$, on peut remplacer dans les équations qui décrivent $P$, les variables $l_r$ par $\mu l_r + w_r$. Aussi, en distinguant un nombre fini de cas, on peut supposer que $l_r$ n'apparaît dans aucune congruence de type (ii) de la description de $P$.

L'ensemble $P$ s'écrit alors comme l'ensemble des $r$-uplets $l = (l_1,\ldots,l_r) \in P' \subset \mathbb{Z}^r$ qui satisfont une disjonction de conditions (que l'on peut supposer disjointes en effectuant l'opération booléenne $P_1 \cup P_2 = P_1 \setminus (P_1 \cap P_2) \cup P_2 \setminus (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_2))$ du genre :

(1) $\nu l_r \leqslant A_i(l')$, $i = 1,\ldots,u$, (2) $\nu l_r \geqslant B_j(l')$, $j = 1,\ldots,v$, où $P'$ est un ensemble de Presburger de $\mathbb{Z}^r$ (la projection canonique de $P$ relativement aux $r-1$ premières coordonnées est un ensemble de Presburger par 2.2), $A_i, B_j \in \mathbb{Z}[l_1,\ldots,l_{r-1}]$ sont des polynômes de degré au plus 1, et $\nu \in \mathbb{N}$ (le coefficient commun $\nu$ s'obtient en multipliant chaque polynôme par un entier convenable).

En incluant à $P'$ des inégalités du type $A_i \leqslant A_s$ et $B_t \leqslant B_j$, on peut supposer que $u = 1$ et $v = 1$. Si on fixe $w_1, \dots, w_{r-1}$, la classe de congruence de $l_1, \dots, l_{r-1}$ modulo $\nu$, on peut remplacer dans les nouvelles équations qui décrivent $P$, les variables $l_1, \dots, l_{r-1}$ par $\nu l_1 + w_1, \dots, \nu l_{r-1} + w_{r-1}$. Aussi, en distinguant un nombre fini de cas, on peut supposer que les coefficients des polynômes $A$ et $B$, hormis éventuellement les coefficients constants, sont divisibles par $\nu$.

Après simplification des inégalités précédentes (1) et (2), il résulte une partition de $P$ par des ensembles du type : $l \in \mathbb{Z}^r$ tels que $l' \in P'$ et $B(l') \leqslant l_r \leqslant A(l')$, où $P'$ est un ensemble de Presbuger de $\mathbb{Z}^{r-1}$, et $A, B$ sont des fonctions affines en $l'$.

Du fait que $\alpha$ est une fonction, on a alors nécessairement $l_r = A(l') = B(l')$ pour $l' \in P'$.

La proposition clé suivante est contenue dans [De, Lemma 3.2] :

PROPOSITION 3.3. — *Soit $P$ un ensemble de Presburger de $\mathbb{Z}^{d+r}$ et soit $\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ une fonction simple. Supposons que les séries*

$$J(l,T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, (k,l) \in P} T^{\alpha(k)}$$

*convergent dans $\mathbb{Z}[[T]]$ pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$ : alors, $J(l,T)$ peut s'écrire sous la forme suivante pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$ :*

$$J(l,T) = \frac{\sum_{i=1}^{e} c_i \beta_i(l) T^{\alpha_i(l)}}{\prod_{j=1}^{h} (1 - T^{a_j})}$$

*avec $c_i \in \mathbb{Q}$, $e \in \mathbb{N}$, $\beta_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{N}$ produit d'au plus $d$ fonctions simples, $\alpha_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{N}$ des fonctions simples et $a_j \in \mathbb{N}^*$.*

Terminons par la remarque suivante. Soient des fonctions simples $\alpha_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$ de la variable $l \in \mathbb{Z}^r$. Alors le produit $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_d$ est une fonction qui peut s'écrire comme une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de fonctions de la forme $\sum_{k \in \mathbb{Z}^{d+1} (k,l) \in P} \mathbf{1}$ où $P$ est un ensemble Presburger de $\mathbb{Z}^{d+1+r}$.

## 4. La série de Poincaré.

Pour tout ensemble semi-algébrique $S$ de $\mathbb{R}^m$, on note $[S]$ sa caractéristique d'Euler, calculée par exemple par l'homologie de Borel-Moore à support compact ([BCR, 11]). En particulier, elle est multiplicative, $[S \times T] = [S][T]$ ; additive $[S \cup T] = [S] + [T] - [S \cap T]$ ; et $[\mathbb{R}^0] = 1$. De même, la caractéristique d'Euler d'un ensemble constructible d'une variété algébrique réelle vérifie ces mêmes conditions. Pour faire le lien entre ensembles semi-algébriques et constructibles ([BCR, 7.2]), rappelons que l'application $S \mapsto \widetilde{S}$ est un isomorphisme d'algèbres de Boole entre les ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^m$ et les ensembles constructibles de $\mathbf{A}^m$. De plus, l'opération $\widetilde{\ }$ transforme un homéomorphisme semi-algébrique en un homéomorphisme.

On s'intéresse à la série

$$P_S(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\widetilde{\mathfrak{L}}(\widetilde{S}))](T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\mathfrak{L}(S))](T),$$

où $S$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. La série $P_S(T)$ est appelée série de Poincaré associée au semi-algébrique $S$, elle a un sens par 2.7, est indépendante des équations de $S$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On peut calculer explicitement la série de Poincaré d'un ensemble algébrique non singulier ; il suffit d'appliquer 1.9 pour obtenir :

Proposition 4.1. — *Supposons que l'ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété $C^\infty$ fermée de dimension pure $d$ (ce qui revient essentiellement au même de supposer que $S$ est une composante connexe d'un ensemble algébrique non singulier). Alors on a $P_S(T) = (-1)^d[S]/(1 + (-1)^{d+1}T)$.*

Plus généralement, nous nous plaçons dans le contexte suivant. Soient $X$ une variété algébrique réelle lisse et $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille simple d'ensembles simples de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$. On s'intéresse à la série de Poincaré de $A$ donnée par $P_A(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\pi_n(A_n)]T^n$. L'objet du paragraphe est de montrer que cette série est une fraction rationnelle (i.e. un élément de $\mathbb{Q}(T)$) lorsque, pour tout $n$, l'ensemble $A_n$ est stable au niveau $n$.

Toutes les techniques de cette partie sont tirées de [DL]. Néamoins, pour le confort du lecteur, on en reprend les démonstrations, qui se simplifient du fait que la variété ambiante est lisse (confer la remarque qui suit [DL, Theorem 5.4]).

Proposition 4.2. — *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille simple d'ensembles simples de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ et $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction simple. On suppose qu'il existe un recouvrement de $X$ par des ouverts affines de Zariski $U$ tel que sur* *tout $U$ la famille simple soit définie par une condition simple $\theta$ et chaque fonction régulière $f_i$ qui apparaît dans $\theta$ est un produit de coordonnées multiplié par un polynôme qui ne s'annule pas. On suppose de plus, que cette représentation de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, i.e. pour tous les $f_i$ précédents, on a* $\operatorname{ord}_t f_i < \infty$.

*Alors $[\pi_{c(n)}(A_n)]$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire finie de fonctions $\sum_{l\in\mathbb{N}^d,\theta(l,n)} \mathbf{1}$ où $\theta$ est une condition simple de $\mathbb{Z}^{d+1}$.*

*Démonstration.* — En utilisant 2.8, on peut se ramener au cas où $X$ est un ouvert affine de $\mathbb{R}^d$. Notons alors $f_i = Z_i g_i$ où $Z_i$ est un produit de fonctions coordonnées $x_1, \ldots, x_d$ et $g_i$ ne s'annule pas. On a les relations $\operatorname{ord}_t f_i(\gamma) = \operatorname{ord}_t Z_i(\gamma)$ (on effectue la substitution dans les conditions de type (i) et (ii)), et $\overline{\operatorname{ac}}(f_i(\gamma)) = \overline{\operatorname{ac}}(Z_i(\gamma))g_i(\pi_0(\gamma))$. Notant $I = \{1, \ldots, d\}$, on peut alors écrire

$$A_n = \bigcup_{l\in\mathbb{N}^d,\theta(l,n)} \{\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(X) \mid \forall i \in I \ \operatorname{ord}_t \gamma_i = l_i \quad ((\overline{\operatorname{ac}}(\gamma_i))_{i\in I}, \pi_0(\gamma)) \in W\}$$

où $W$ est un constructible de $(\mathbf{A}\setminus\{0\})^d \times \mathbf{A}^d$ donné par les conditions de type (iii) et $\theta(l,n)$ une formule simple déduite des conditions de type (i) et (ii).

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions $P = (J,K)$ de l'ensemble $I = \{1, \ldots, d\}$ de la forme $I = J \cup K$ avec $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$ et $K = \{k_1, \ldots, k_t\}$. Pour évaluer $[\pi_m(A_n)]$ on effectue une disjonction finie de cas de la forme $l_j \leqslant m$ pour tout $j \in J$ et $l_k > m$ pour tout $k \in K$ avec $(J,K) \in \mathcal{P}$.

La contribution à $\pi_m(A_n)$ est alors

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}^d,\theta_P(l,n,m)} \{\bar{\gamma} \mid \forall i \in I \ \operatorname{ord}_t \gamma_i = l_i \quad ((\overline{\operatorname{ac}}(\gamma_j))_{j\in J}, \pi_0(\gamma_j)_{j\in J}) \in W_P\}$$

où $\theta_P$ est la conjonction de la condition $\theta$ et des conditions de la partition $P$, et $W_P$ est la projection de $W$ sur $(\mathbf{A}\setminus\{0\})^s \times \mathbf{A}^s$ qui oublie les coordonnées d'indices $k_1, \ldots, k_t, d+k_1, \ldots, d+k_t$.

On obtient alors l'homéomorphisme semi-algébrique avec l'union disjointe $\pi_m(A_n) \simeq \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}^d,\theta_P(l,n,m)} \mathbf{A}^{ms-\Sigma_{j\in J} l_j} \times W_P$. On en déduit le résultat du fait que $[\mathbf{A}^i] = 1$ si $i \equiv 0 \bmod 2$ et $[\mathbf{A}^i] = -1$ si $i \equiv 1 \bmod 2$.

En utilisant 3.3, on déduit la rationalité de la série de Poincaré de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la famille est sous forme normale, i.e. satisfait les hypothèses de 4.2. Lorsque la famille simple $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, on se ramène au cas précédent en composant par des éclatements. Dans ce cas, on fait appel au lemme 4.3 ci-dessous pour évaluer l'impact d'un éclatement sur les quantités $[\pi_n(A_n)]$.

Soit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : A \to A[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_m)$. On pose $J_h = (\partial f_i / \partial x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$. En globalisant, à tout morphisme $h : Y \to X$ de variétés algébriques réelles lisses de dimension pure $d$, on peut associer une fonction simple $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y) \to \mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto \operatorname{ord}_t \det J_h(\gamma)$. Les ensembles suivants $\Delta_e = \{\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(Y) \mid \operatorname{ord}_t \det J_h(\gamma) = e\}$, pour $e \in \mathbb{N}$, sont des ensembles simples de $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y)$. On note $h_n : \widetilde{\mathfrak{L}}_n(Y) \to \widetilde{\mathfrak{L}}_n(X)$ l'application induite par $h$.

Lemme 4.3. — *Soit $h : Y \to X$ un morphisme propre birationnel entre deux variétés algébriques réelles $X$ et $Y$, lisses de dimension pure $d$. Avec $\Delta_e = \{\gamma \in \widetilde{\mathfrak{L}}(Y) \mid \operatorname{ord}_t \det J_h(\gamma) = e\}$ on note $\Delta_{e,n} = \pi_n(\Delta_e)$. Alors, pour tout $n \geqslant 2e$, on a*

a) $\Delta_{e,n} = h_n^{-1} h_n(\Delta_{e,n})$,

b) *La restriction de $h_n$ à $\Delta_{e,n}$ est une fibration localement triviale sur son image, de fibre $\mathbf{A}^e$.*

*Démonstration.* — Grâce à 2.8, on peut supposer que $X$ et $Y$ sont des ouverts de Zariski de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \widetilde{\mathfrak{L}}(Y)$, on note $\bar{x} = \pi_n(x)$.

Pour montrer a), il suffit de voir que pour toute extension réelle close $R$ de $\mathbb{R}$, on a

$$(1) \quad \forall \delta \in \Delta_e, \forall v \in R[[t]], \exists u \in R[[t]]^d \quad h(\delta + t^{n+1-e}u) = h(\delta) + t^{n+1}v.$$

En effet, on a toujours $\Delta_{e,n} \subset h_n^{-1} h_n(\Delta_{e,n})$. De plus, soit $\delta \in \Delta_e$ et $\gamma \in \mathfrak{L}(Y)$ tels que $h_n(\bar{\gamma}) = h_n(\bar{\delta})$. Notons que $\pi_{n,X}$ et $\pi_{n,Y}$ sont surjectifs car $X$ et $Y$ sont lisses. On a $h(\gamma) = h(\delta) + t^{n+1}v$ avec $v \in R[[t]]^d$. D'où par (1), il existe $u \in R[[t]]^d$ tel que $h(\delta + t^{n+1-e}u) = h(\gamma)$. Comme $n + 1 - e \geqslant e + 1$, $h$ est birationnel et $\delta \in \Delta_e$ (donc $J_h(\delta) \neq 0$), on en déduit que $\gamma = \delta + t^{n+1-e}$. Par conséquent $\gamma \in \Delta_e$ et $\bar{\gamma} \in \Delta_{e,n}$. Reste donc à montrer (1).

Un développement de Taylor montre que (1) est équivalente au fait que $t^{-e} J_h(\delta) - v$ est égal au produit de $t$ par une somme de termes d'ordre supérieur en $u$. Comme $\operatorname{ord}_t \det J_h(\delta) = e$, l'inverse de la matrice $J_h(\delta)$ est à coefficients dans $R[[t]]$. Alors, il existe une solution $u$ à (1) par le lemme d'Hensel.

Dorénavant attachons-nous à démontrer b). On considère une section $s : \mathfrak{L}_n(X) \to \mathfrak{L}(X)$ de $\pi_n$. Remarquons que si $\bar{\gamma} \in \mathfrak{L}_n(X)$, avec $\bar{\gamma} \in h_n(\Delta_{e,n})$ alors $s(\bar{\gamma}) \in h(\Delta_e)$ en vertu de (1).

Soit alors l'application $\theta : h_n(\Delta_{e,n}) \to \Delta_e$, $\bar{\gamma} \mapsto h^{-1}(s(\bar{\gamma}))$. Elle est bien définie par birationalité de $h$ qui induit une bijection $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y \setminus h^{-1}(J_h^{-1}(0)) \simeq \widetilde{\mathfrak{L}}(X \setminus (J_h^{-1}(0))$. Elle est localement représentée par une fonction régulière de $h_n(\Delta_{e,n})$.

En considérant que, dans la partie droite de l'égalité ci-dessous, $R$ décrit l'ensemble des extensions réelles closes de $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\forall \bar{\gamma} \in h_n(\Delta_{e,n}), h_n^{-1}(\bar{\gamma}) = \{\theta(\bar{\gamma}) + t^{n+1-e}u \bmod t^{n+1} \mid u \in R[[t]]^d, J_h(\theta(\bar{\gamma}))\, u \equiv 0 \bmod t^e\}.$$

En effet, on pose $\bar{\gamma} = h(\bar{x})$ avec $\bar{x} \in \Delta_{e,n}$. On peut supposer $\bar{x} = \theta(\bar{\gamma})$. Alors

$$\begin{aligned} h_n^{-1}h_n(\bar{x}) &= \{\bar{y} \in \widetilde{\mathfrak{L}_n}(Y) \mid \exists v \in R[[t]]^d, h(y) = h(\theta(\bar{\gamma})) + t^{n+1}v\} \\ &= \{\bar{y} \in \widetilde{\mathfrak{L}_n}(Y) \mid \exists u \in R[[t]]^d, h(y) = h(\theta(\bar{\gamma})) + t^{n+1-e}u, \\ &\qquad J_h(\theta(\bar{\gamma}))u \equiv 0 \bmod t^e\}. \end{aligned}$$

En conséquence, $h_n^{-1}(\bar{\gamma})$ peut être identifié à un sous-espace linéaire de $\{u \bmod t^e \mid u \in R[[t]]^d\} \simeq \mathbf{A}^{de}$ donné par des équations linéaires dont les coefficients sont localement des fonctions régulières sur $h_n(\Delta_{e,n})$.

On sait que pour $\bar{\gamma} \in h_n(\Delta_{e,n})$ fixé, on peut trouver des matrices carrées $P, Q, D$ de taille $d \times d$ à coefficients dans $R[[t]]$, avec $P, Q$ inversibles et où $D$ est diagonale de termes diagonaux $(g_1, \ldots, g_d)$ avec $g_i = t^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{N}$, telles que $J_h(\theta(\bar{\gamma})) = PDQ$. On a nécessairement $e_1 + \ldots + e_g = e$ en considérant le déterminant de l'identité précédente. D'où l'équivalence $J_h(\theta(\bar{\gamma}))u \equiv 0 \bmod t^e \iff \forall i\ u_i \equiv 0 \bmod t^{e-e_i}$.

Donc $h_n^{-1}(\bar{\gamma})$ s'identifie à un sous-espace linéaire $\mathbf{A}^e$ de $\mathbf{A}^{de}$, donné par des équations linéaires avec pour coefficients des fonctions régulières localement sur $h_n(\Delta_{e,n})$. Aussi la fibration triviale précédente s'étend à un voisinage de chaque point $\bar{\gamma}$.

THÉORÈME 4.4. — *Soit $X$ une variété algébrique réelle lisse et $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille simple d'ensembles simples de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ telle que $A_n$ est stable au niveau $n$, pour tout $n$. Alors la série $P_A(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\pi_n(A_n)] T^n$ est une fraction rationnelle.*

*Démonstration.* — Le but est de montrer que $[\pi_n(A_n)]$ est de la même forme qu'en 4.2. À cet effet, on peut supposer que la famille $A_n$ est à représentation bornée. En effet, d'après 2.12, la famille $A_n$ est combinaison booléenne, notons-la (CB), de familles simples $B_n^i$ à représentation bornée. Notons $f(n)$ le plus petit des majorants des niveaux de stabilité des ensembles $A_n$ et $B_n^i$. Il suffit de remarquer qu'alors $\pi_{f(n)}(A_n)$ et $\pi_{f(n)}(B_n^i)$ satisfont la même combinaison booléene (CB). Pour conclure on écrit que $[\pi_n(A_n)] = (-1)^{(f(n)-n)d}[\pi_{f(n)}(A_n)]$ car $A_n$ est stable au niveau $n$. On s'est donc ramené à montrer que $[\pi_{f(n)}(A_n)]$ est de la même forme qu'en 4.2 avec $f(n)$ le plus bas niveau de stabilité de $A_n$ et la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à représentation bornée. D'après 2.3, il vient que la fonction $f$ est simple.

On peut supposer que $X$ est affine et que la condition simple définit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $X$ tout entier (sans recouvrement). Soit $F$ le produit de toutes les fonctions régulières $f_i$ qui apparaissent dans la description de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $h : Y \to X$ une résolution plongée des singularités du lieu de $F^{-1}(0)$ dans $X$. Le lieu exceptionnel de $h$ est contenu dans $h^{-1}(F^{-1}(0))$. Par 2.8, on peut supposer que $Y$ est un ouvert affine de Zariski de $\mathbb{R}^d$ sur lequel il existe des fonctions régulières $z_1, \dots, z_d$, tels que chaque $f_i \circ h$ est le produit d'un monôme en $z_1, \dots, z_d$ par une fonction régulière qui ne s'annule pas sur $Y$. On peut aussi exiger que $J_h$ soit de la même forme.

Comme $A_n$ est stable au niveau $f(n)$, alors aussi $h^{-1}(A_n)$. De plus, $\Delta_e$ est stable au niveau $e$. Or on a $h^{-1}(A_n) = \cup_{e\in\mathbb{N}}(h^{-1}(A_n) \cap \Delta_e)$ du fait que $h^{-1}(A_n) \cap \Delta_\infty = \varnothing$. On déduit de 2.10 que l'union précédente est fine : $h^{-1}(A_n) = \cup_{e\leqslant g(n)} B_{n,e}$ avec $B_{n,e} = h^{-1}(A_n) \cap \Delta_e$.

Si on prend pour $g(n)$ la plus petite valeur qui convienne dans l'union précédente, il ressort de 2.3 que $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction simple. On considère $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que, $c(n)$ soit le plus petit entier à vérifier $c(n) \geqslant 2g(n)$ et $c(n) - f(n)$ est pair. Alors $c$ est une fonction simple et $B_{n,e}$ est stable au niveau $c(n)$ pour tout $n, e$.

LEMME. — *On a l'égalité* $\sum_{e\leqslant g(n)}(-1)^e[\pi_{c(n)}(B_{n,e})] = [\pi_{f(n)}(A_n)]$.

*Démonstration.* — Posons $G_n = \sum_{e\leqslant g(n)}(-1)^e[\pi_{c(n)}(B_{n,e})]$. D'après 4.3, on a localement l'homéomorphisme $\pi_{c(n)}(B_{n,e}) \simeq h_{c(n)}\pi_{c(n)}(B_{n,e}) \times \mathbf{A}^e$ puisque $c(n) \geqslant 2e$. D'où $G_n = \sum_{e\leqslant f(n)}[h_{c(n)}\pi_{c(n)}(B_{n,e})]$. Les ensembles $h_{c(n)}\pi_{c(n)}(B_{n,e})$ pour $e \leqslant g(n)$ sont disjoints du fait que $h_{c(n)}^{-1}(u)$ s'identifie à $\mathbf{A}^e$ pour $u \in B_{n,e}$.

Donc $G_n = [h_{c(n)}\pi_{c(n)}(\cup_{e\leqslant f(n)}(B_{n,e}))] = [h_{c(n)}\pi_{c(n)}(h^{-1}(A_n))] = [\pi_{c(n)}hh^{-1}(A_n)]$. Du fait que $h$ est birationnel, il induit une application surjective $\widetilde{\mathfrak{L}}(Y \setminus h^{-1}(J_h^{-1}(0))) \to \widetilde{\mathfrak{L}}(X \setminus J_h^{-1}(0))$. On en déduit que $hh^{-1}(A_n) = A_n$, et comme $A_n$ est stable au niveau $f(n)$ $G_n = [\pi_{c(n)}(A_n)] = (-1)^{d(c(n)-f(n))}[\pi_{f(n)}(A_n)] = [\pi_{f(n)}(A_n)]$ par parité de $c(n) - f(n)$.

Il suffit alors d'utiliser 4.2 et 3.3 pour conclure.

COROLLAIRE 4.5. — *Soit $S$ un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^d$. Alors la série $P_S(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}}[\pi_n(\mathfrak{L}(S))]T^n$ est une fraction rationnelle.*

*Démonstration.* — Posons $A_n = \pi_n^{-1}\pi_n(\widetilde{\mathfrak{L}}(\widetilde{S}))$. D'après 2.3, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille simple d'ensembles simples. De plus, il est clair que $A_n$ est stable au niveau $n$ et $\pi_n(A_n) = \pi_n(\widetilde{\mathfrak{L}}(\widetilde{S}))$, d'où le résultat.

## 5. Intégration sur l'espace des germes d'arcs réels.

Par commodité, dans toute cette partie on change de notation et on désigne par $\mathfrak{X}$ la caractéristique d'Euler. Soit $X$ une variété algébrique réelle, de dimension pure $d$. Soit $A$ un ensemble simple *stable* de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ et $\alpha : A \to \mathbb{Z}$, une fonction simple dont toutes les fibres sont stables.

On peut définir l'intégrale de $\alpha$ relativement à la caractéristique d'Euler par

$$\int_A (-1)^\alpha d\mathfrak{X} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{X}(A \cap \alpha^{-1}(n))(-1)^{d(n+1)}.$$

Pour tout ensemble simple de $\widetilde{\mathfrak{L}}(X)$ stable au niveau $n$, posons $\mathfrak{X}(B) = \mathfrak{X}(\pi_n(B))(-1)^{d(n+1)}$. Notons que cette définition est indépendante de l'indice de stabilité et que la somme précédente est finie d'après 2.10.

Dans ce contexte, la proposition 4.3, fournit une formule de changement de variables qui peut s'énoncer comme suit :

PROPOSITION 5.1. — *Soit $h : Y \to X$ un morphisme propre birationnel avec $X$ et $Y$ lisses. Supposons que $A \cap \widetilde{\mathfrak{L}}(h(E)) = \varnothing$ où $E$ est le lieu exceptionnel de $h$. Alors, on a*

$$\int_A (-1)^\alpha d\mathfrak{X} = \int_{h^{-1}(A)} (-1)^{\alpha\circ h + \operatorname{ord}_t \det J_h} d\mathfrak{X}.$$

On peut même généraliser l'intégration précédente à une variété algébrique réelle $X$ singulière [DL]. Cependant, il n'apparaît pas clairement comment poursuivre la théorie pour obtenir une intégration motivique, en raison de l'identification des dimensions que réalise la caractéristique d'Euler.

## BIBLIOGRAPHIE


[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, Géométrie algébrique réelle, Ergeb. Math., 12, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[CK] C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory, North-Holland, 1973

[De] J. Denef, On the evaluation of certain $p$-adic integrals, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983-1984, Progress in Math. 59, Birkhauser (1985), 25-47.

[DL] J. Denef, F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, Invent. Math., 135, no. 1 (1999) 201-232.

[Gg] M. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math., I.H.E.S., 31 (1966), 59-64.

[LJ] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, Amer. J. Math., 112 (1990), 525-568.

[Hi] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, Amer. J. Math., 115 (1993), 1299-1334.

[MS] J. McEnerney, G. Stengle, The nonreduced order spectrum of a commutative ring, Rev. Math., Univ. Complut. Madrid , no. extra, (1997), 251-275.

[Na] J.F. Nash Jr., Arc structure of singularities, Duke Math., 81 (1995), 31-38.

[Pa] J. Pas, Uniform $p$-adic cell decomposition and local zeta function, J. reine angew. Math., 399 (1989), 137-172

[Pr] M. Presburger, Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems des Arithmetik..., Comptes-rendus du I congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warsaw (1929), 92-101.


Manuscrit reçu le 27 mars 2000,
accepté le 31 mai 2000.

Ronan QUAREZ,
Université de Rennes 1
IMR (CNRS, URA 305)
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex (France).
quarez@maths.univ-rennes1.fr