LAURENT SCHWARTZ

Les équations d'évolution liées au produit de composition

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 19-49

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__19_0>

LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION LIÉES AU PRODUIT DE COMPOSITION

par **Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

Cet article utilisera les distributions, supposées connues (1).

§ 1. Équations aux dérivées partielles d'évolution.

Les variables spatiales sont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'un point x de l'espace vectoriel $X^n = R^n$; t est la variable temporelle, parcourant un intervalle fermé fini (a, b).

Rappelons que si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est un système de n nombres entiers $\geqslant 0$, D_x^p est la dérivation, par rapport aux variables spatiales seules, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$, d'ordre $|p| = p_1 + p_2 \cdots + p_n$.

L'état d'un système physique sera défini par certaines fonctions $U_j(x, t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, les « inconnues » ; elles seront supposées vérifier un système d'équations aux dérivées partielles, donnant l' « évolution du système », et qui sera du type suivant :

$$(1,1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l_j} U_j(x, t) + \sum_{k=1, 2, \ldots N} \left(\sum_{|p| \leqslant m;\ \lambda < l_k} A_{j, k; p; \lambda}(x, t) \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\lambda} D_x^p U_k(x, t) \right) = B_j(x, t);\ j = 1, 2, \ldots N.$$

(1) On pourra consulter notre ouvrage : « Théorie des Distributions », Paris, Hermann, 1950-51. En particulier l'index terminologique expliquera les notations utilisées. Dans les références ultérieures, cet ouvrage sera appelé « TD ».

Le présent article a pour but de généraliser et de simplifier un très beau mémoire de de M. Petrowsky (« Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtalytischen Funktionen ». Bulletin de l'Université d'État de Moscou, fasc. 7, 1938, p. 1-74) qui contient une grande partie des résultats énoncés ici, notamment le théorème fondamental III (et aussi de nombreux résultats non indiqués ici).

Les dérivations spatiales sont d'ordre $\leqslant m$ quelconque ; m peut être bien plus grand que l'ordre le plus grand des dérivations temporelles. Dans chacune de ces équations, l'ordre de dérivation temporelle de U_k est supposé $< l_k$, qui est l'ordre de dérivation temporel du premier terme $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l_k} U_k$ de la k-ième équation. Les « coefficients » A, les « seconds membres » B, sont des fonctions données de x et de t.

Par la considération du nouveau système d'inconnues $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\lambda} U_j$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots l_j - 1, j = 1, 2, \ldots N$, on se ramène à un nouveau système d'évolution, que nous considérerons seul désormais. et où tous les l_j sont égaux à 1 :

$$(1,2) \quad \frac{\partial}{\partial t} U_j(x, t) + \sum_{\substack{|p| \leqslant m \\ k=1, 2, \ldots N}} A_{j, k; p}(x, t) D_x^p U_k(x, t) = B_j(x, t) ; \; j = 1, 2, \ldots N.$$

Nous écrirons d'ailleurs toujours ce système sous la forme matricielle. U et B seront des matrices à N lignes et 1 colonne, d'éléments respectifs U_j et B_j, et A sera une matrice carrée à N lignes et N colonnes, d'éléments $A_{j, k}$:

$$(1,3) \qquad \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) + \sum_{|p| \leqslant m} A_p(x, t) D_x^p U(x, t) = B(x, t).$$

§ 2. Équations d'évolution du type de composition.

Nous supposerons désormais que les coefficients A_p dépendent seulement de t. Nous modifierons alors le point de vue classique, et écrirons le système (1,3) sous la forme :

$$(2,1) \qquad \frac{d}{dt} U_x(t) + \left(\sum_{|p| \leqslant m} A_p(t) D_x^p \right) \underset{(x)}{*} U_x(t) = B_x(t),$$

avec la signification suivante :

1° $U_x(t)$ n'est plus une fonction de x et t ; pour toute valeur de t, c'est une distribution $\in (\mathcal{D}')_x$ (en réalité c'est chacun des éléments U_j de la matrice U à N lignes et 1 colonne qui est une telle distribution, mais nous utiliserons constamment ce langage abrégé) ; l'application $t \to U_x(t)$ de (a, b) dans l'espace vectoriel topologique $(\mathcal{D}')_x$ sera supposée continuement différentiable ([2]), et $\frac{d}{dt}$ sera son application dérivée. De même, pour tout t, $B_x(t)$ sera une distribution $\in (\mathcal{D}')_x$, mais l'application $t \to B_x(t)$ sera seulement supposée continue.

2° Un polynome de dérivation (spatiale) ([3]) est une combinaison linéaire finie $\sum_{|p| \leqslant m} A_p D_x^p \in (\mathcal{E}')_x$; pour tout t, $\sum_{|p| \leqslant m} A_p(t) D_x^p$ est donc un polynome de dérivation, dépendant continuement de t si les matrices numériques $A_p(t)$ sont fonctions continues de t. (On pourrait remplacer la condition de continuité des A_p, de B_x, et de continue différentiabilité de U_x, par rapport à t, par des conditions beaucoup moins restrictives.)

Le signe $\underset{(x)}{*}$ indique un produit de composition, entre la distribution $U_x(t) \in (\mathcal{D}')_x$ et le polynome de dérivation $\in (\mathcal{E}')_x$, effectué sur X^n pour toute valeur fixée de t. On sait en effet qu'une dérivation est un produit de composition avec un polynome de dérivation.

Le système (2, 1) est alors un cas particulier du suivant :

$$\frac{d}{dt} U_x(t) + A_x(t) \underset{(x)}{*} U_x(t) = B_x(t), \tag{2,2}$$

où, pour toute valeur de t, $A_x(t)$ est une distribution qui n'est plus nécessairement à support ponctuel mais seulement compact, l'application $t \to A_x(t)$ de (a, b) dans $(\mathcal{E}')_x$ étant continue. Nous avons là un système d'équations d'évolution du type de composition, de nature intégro-différentielle.

§ 3. Espaces de distributions. Transformation de Fourier spatiale.

Au lieu de supposer les distributions $U_x(t)$, $B_x(t)$, quelconques, on pourra supposer qu'elles appartiennent à un espace de distribu-

([2]) Comme t est un paramètre réel, continuité (ou différentiabilité) forte ou faible sont identiques. Voir « TD », tome I, page 75.

([3]) Voir « TD », tome II, page 20.

tions $(\mathcal{H})_x$ [4], et que les applications $t \to U_x(t)$, $t \to B_x(t)$, de (a, b) dans $(\mathcal{H})_x$, sont respectivement continuement différentiable et continue. Dans ces conditions A_x ne sera plus nécessairement à support compact. L'opération de composition $A_x \underset{(x)}{*}$ devra être une opération linéaire continue de $(\mathcal{H})_x$ dans lui-même. De plus, lorsque t variera dans (a, b), ces opérations devront en général être équicontinues ; et $t \to A_x(t)$ devra être une application continue de (a, b) dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ des opérateurs linéaires continus sur $(\mathcal{H})$, muni de la topologie de la convergence simple (donc, en vertu de l'équicontinuité, il en sera de même pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes). L'application $t \to A_x(t) \underset{(x)}{*} U_x(t)$ de (a, b) dans $(\mathcal{H})$ sera alors continue. Comme nous résoudrons ici le problème par la transformation de Fourier spatiale, nous prendrons $(\mathcal{H})_x = (\mathcal{S}')_x$. U et B seront, pour tout t, des distributions tempérées sur X^n. Alors $A_x(t)$ n'aura plus besoin d'être à support compact : elle sera une distribution $\in (\mathcal{O}'_c)_x$ « à décroissance rapide », et l'application $t \to A_x(t)$ de (a, b) dans $(\mathcal{O}'_c)_x$ sera supposée continue, de sorte que $A_x(t) * U_x(t)$ variera dans $(\mathcal{S}')_x$ continuement avec t.

Par transformation de Fourier $\mathcal{F}_x$ spatiale, effectuée pour tout t entre X^n et son dual Y^n, le système (2,2) est alors complètement équivalent au suivant, de type multiplicatif :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}_y(t) + \mathcal{A}(y,\ t)\mathcal{U}_y(t) = \mathcal{B}_y(t). \tag{3,1}$$

Nous avons ici appelé $\mathcal{U}_y(t)$, $\mathcal{A}(y,\ t)$, $\mathcal{B}_y(t)$, les transformées de Fourier, pour tout t fixé, des distributions $U_x(t)$, $A_x(t)$, $B_x(t)$. Comme $A_x(t) \in (\mathcal{O}'_c)_x$, $\mathcal{A}(y,\ t) \in (\mathcal{O}_M)_y$, c'est donc une fonction de y et t, d'où la notation $\mathcal{A}(y,\ t)$ au lieu de $\mathcal{A}_y(t)$. L'application $t \to \mathcal{A}(y,\ t)$ de (a, b) dans $(\mathcal{O}_M)_y$ est continue, ce qui signifie que $\mathcal{A}(y,\ t)$ est indéfiniment différentiable en y, et que chacune des dérivées partielles en y, $D_y^q \mathcal{A}(y,\ t)$, est continue en y et t, et majorée par un polynome en y indépendant de t (mais pouvant dépendre de l'indice de dérivation D_y^q) [5].

[4] Nous appelons espace de distributions un espace $(\mathcal{H})$ contenant $(\mathcal{D})$ et contenu dans $(\mathcal{D}')$, et tel que l'application identique de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{H})$ et de $(\mathcal{H})$ dans $(\mathcal{D}')$ soient continues. On supposera aussi que $(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{H})$.

[5] Voir « TD », tome II, pages 101 et 102.

§ 4. La matrice résolvante d'un système différentiel ordinaire.

Considérons le système différentiel matriciel ordinaire :

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}(t)z(t) = k(t), \tag{4,1}$$

où $z(t)$ et $k(t)$ sont des matrices numériques à N lignes et 1 colonne, $\mathcal{A}(t)$ une matrice carrée numérique à N lignes et N colonnes, dépendant toutes continuement de t.

Ce système possède une matrice résolvante $\mathcal{R}(t, \tau)$, matrice carrée numérique à N lignes et N colonnes, définie pour t et τ dans (a, b), et ayant les propriétés suivantes :

1° Avec la condition initiale

$$\mathcal{R}(\tau, \tau) = \mathrm{I}, \qquad \text{matrice identique,} \tag{4,2}$$

elle vérifie l'équation différentielle qui la caractérise

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}(t, \tau) + \mathcal{A}(t)\mathcal{R}(t, \tau) = 0. \tag{4,3}$$

2° Elle vérifie la relation fonctionnelle

$$\mathcal{R}(t_3, t_2)\mathcal{R}(t_2, t_1) = \mathcal{R}(t_3, t_1). \tag{4,4}$$

En particulier $\mathcal{R}(t, \tau)$ est inversible, et

$$\mathcal{R}^{-1}(t, \tau) = \mathcal{R}(\tau, t). \tag{4,5}$$

3° Un problème de Cauchy relatif à (4,1) est résolu par la formule :

$$z(t) = \mathcal{R}(t, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t, \tau)k(\tau)d\tau. \tag{4,6}$$

4° $\mathcal{R}(t, \tau)$ est différentiable en t donc d'après (4,5) en τ, donc continuement différentiable en t et τ. En appliquant la formule de dérivation de l'inverse d'une matrice,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}^{-1}(t) = -\mathrm{M}^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{M}(t)\right)\mathrm{M}^{-1}(t),$$

on trouve

$$(4,7)\qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{R}(t,\ \tau)-\mathcal{R}(t,\ \tau)\mathcal{A}(\tau)=0.$$

5° Si la matrice numérique $\mathcal{A}$ est indépendante de t, l'équation différentielle est définie pour tout l'axe des t, et il y a lieu d'introduire la matrice $\mathcal{R}(t)=\mathcal{R}(t,\ 0)$; on a alors

$$(4,8)\qquad \begin{aligned}&\mathcal{R}(t,\ \tau)=\mathcal{R}(t)\mathcal{R}^{-1}(\tau)=\mathcal{R}(t-\tau)\,;\\ &\mathcal{R}(s+t)=\mathcal{R}(s)+\mathcal{R}(t).\end{aligned}$$

La matrice $\mathcal{R}(t)$ commute avec $\mathcal{A}$, et en est une fonction exponentielle :

$$(4,9)\qquad \mathcal{R}(t)=\exp(-t\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-t\mathcal{A})^k}{k\,!}.$$

6° Considérons une équation différentielle d'ordre l, du même type matriciel :

$$(4,10)\qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^l z+\sum_{\lambda<l}\mathcal{A}_\lambda(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^\lambda z=k(t).$$

On peut, comme il a été indiqué au § 1, la ramener à l'ordre 1. Néanmoins tous les problèmes peuvent être résolus par la connaissance de la résolvante $\mathcal{R}(t,\tau)$, matrice carrée à N lignes et N colonnes, vérifiant l'équation différentielle

$$(4,11)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l\mathcal{R}(t,\ \tau)+\sum_{\lambda<l}\mathcal{A}_\lambda(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\lambda\mathcal{R}(t,\ \tau)=0,$$

avec les conditions initiales

$$(4,12)\qquad \begin{aligned}&\mathcal{R}(\tau,\ \tau)=\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial t}\right)(\tau,\ \tau)=\cdots=\left(\frac{\partial^{l-2}\mathcal{R}}{\partial t^{l-2}}\right)(\tau,\ \tau)=0\,;\\ &\left(\frac{\partial^{l-1}\mathcal{R}}{\partial t^{l-1}}\right)(\tau,\ \tau)=\mathrm{I}.\end{aligned}$$

En particulier, le problème de Cauchy relatif au second membre $k(t)$, et aux conditions initiales toutes nulles pour $t=t_0$, est résolu par la formule

$$(4,13)\qquad z(t)=\int_{t_0}^{t}\mathcal{R}(t,\ \tau)k(\tau)d\tau.$$

§ 5. Matrice résolvante du système différentiel multiplicatif.

Associons au système multiplicatif (3,1) le système différentiel ordinaire, dépendant du paramètre y:

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}(y, t)z(t) = 0. \tag{5,1}$$

Pour chaque y il existe une matrice résolvante, que nous noterons $\mathcal{R}(y; t, \tau)$. Comme $\mathcal{A}(y, t)$ est indéfiniment différentiable en y, il en est de même de $\mathcal{R}(y; t, \tau)$, et chacune de ses dérivées partielles en y est continuement différentiable en t et τ. Par exemple sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{R}(y; t, \tau)$ est solution de l'équation aux variations associées à (4,3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{R}(y; t, \tau)\right) + \mathcal{A}(y, t)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{R}(y; t, \tau)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{A}(y, t)\right)\mathcal{R}(y; t, \tau), \tag{5,2}$$

avec la condition initiale $\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{R}(y; \tau, \tau) = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{R}(y; t, \tau) = -\int_\tau^t \mathcal{R}(y; t, \sigma)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{A}(y, \sigma)\right)\mathcal{R}(y; \sigma, \tau)d\sigma. \tag{5,3}$$

On peut encore dire que l'application $(t, \tau) \rightarrow \mathcal{R}(y; t, \tau)$ de $(a, b) \times (a, b)$ dans $(\mathcal{E})_y$ est continuement différentiable.

Revenons alors au système (3,1), où nous supposerons que $t \rightarrow \mathcal{B}_y(t)$ est une application continue quelconque de $(a\ \ b)$ dans $(\mathcal{D}')_y$ (et non plus nécessairement $(\mathcal{S}')_y$). On peut toujours effectuer le changement d'inconnue

$$\mathcal{U}_y(t) = \mathcal{R}(y; t, t_0)\mathcal{W}_y(t), \tag{5,4}$$

car $\mathcal{R}$ est inversible et $\mathcal{W}$ est définie par

$$\mathcal{W}_y(t) = \mathcal{R}(y; t_0, t)\mathcal{U}_y(t). \tag{5,5}$$

Comme pour t et t_0 fixés $\mathcal{R}(y; t, t_0)$ est une fonction indéfiniment dérivable en y, les produits multiplicatifs précédents ont une signification. La méthode classique dite de variation des constantes montre alors que le système (3,1) est équivalent à

$$(5,6) \qquad \mathfrak{R}(y;\, t,\, t_0)\frac{d}{dt}\mathfrak{W}_y(t) = \mathfrak{B}_y(t).$$

Avec la condition initiale $\mathfrak{W}_y(t_0) = \mathfrak{U}_y(t_0)$, la solution unique de ce système est

$$(5,7) \qquad \mathfrak{W}_y(t) = \mathfrak{U}_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{R}(y;\, t_0,\, \tau)\mathfrak{B}_y(\tau)d\tau, \qquad \text{ou}$$

$$(5,8) \qquad \mathfrak{U}_y(t) = \mathfrak{R}(y;\, t,\, t_0)\mathfrak{U}_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{R}(y;\, t,\, \tau)\mathfrak{B}_y(\tau)d\tau:$$

ainsi la solution a exactement la même forme que pour un système différentiel ordinaire. Les intégrales figurant aux seconds membres sont les intégrales de fonctions continues vectorielles de t, à valeurs dans $(\mathcal{D}')_y$. Nous pouvons donc dire :

Si $t \to \mathfrak{B}_y(t)$ est une application continue de $(a,\, b)$ dans $(\mathcal{D}')_y$, il existe une application continuement différentiable $t \to \mathfrak{U}_y(t)$ et une seule de $(a,\, b)$ dans $(\mathcal{D}')_y$ qui vérifie le système différentiel (3,1) *avec une valeur initiale donnée* $\mathfrak{U}_y(t_0)$ (6).

§ 6. Problème de Cauchy. Unicité de la solution.

Revenons au système différentiel donné (2,2) et choisissons une fois pour toutes un espace de distributions $(\mathcal{H})_x$. Nous appellerons problème de Cauchy relatif à $(\overrightarrow{a,\, b})$ (valeur initiale en a) et à l'espace $(\mathcal{H})_x$ le problème suivant :

Étant donnée une application continue $t \to \mathrm{B}_x(t)$ de $(a,\, b)$ dans $(\mathcal{H})_x$ et une distribution $\mathrm{U}_x(a) \in (\mathcal{H})_x$, trouver une application continuement différentiable $t \to \mathrm{U}_x(t)$ de $(a,\, b)$ dans $(\mathcal{H})_x$, vérifiant le système différentiel (2,2) et prenant la valeur $\mathrm{U}_x(a)$ pour $t = a$.

(Parfois on exige seulement que l'application $t \to \mathrm{U}_x(t)$ soit continuement différentiable et vérifie le système différentiel pour

$$a < t \leqslant b,$$

et que $\mathrm{U}_x(t)$ tende (dans $(\mathcal{H})_x$) vers $\mathrm{U}_x(a)$ lorsque t tend vers a.

(6) Il est bien connu que dans un espace de Banach une équation différentielle de ce type a toujours une solution et une seule, mais cette propriété est en général inexacte dans un espace vectoriel topologique non normé tel que $(\mathcal{D}')$, de sorte que ce résultat n'avait rien d'évident.

Mais cela revient au même, car alors $\frac{d}{dt}U_x(t)$ a une limite lorsque t tend vers a en vertu de l'équation différentielle, donc l'application est continuement différentiable et vérifie l'équation différentielle pour $a \leqslant t \leqslant b$.)

Le problème de Cauchy est dit *bien posé* s'il a une solution et une seule.

On peut aussi considérer un problème de Cauchy relatif à $(\overleftarrow{a, b})$ (valeur finale donnée $U_x(b)$ pour $t = b$). Nous distinguerons soigneusement ces deux problèmes, car l'un peut être bien posé sans que l'autre le soit (équation de la chaleur : § 17, exemple 2).

THÉORÈME I. — Pour $(\mathcal{H})_x = (\mathcal{S}')_x$, *le problème de Cauchy n'a jamais plus d'une solution.*

Pour le voir, il suffit de montrer que le système équivalent (3,1) n'a jamais plus d'une solution dans $(\mathcal{S}')_y$: or même dans $(\mathcal{D}')_y$, nous avons vu qu'il n'a jamais plus d'une solution.

Remarque. — Cela ne prouve en rien qu'il ne puisse pas exister une solution $\neq 0$ du système homogène ($B_x(t) \equiv 0$) avec condition initiale $U_x(a) = 0$, qui soit *non tempérée*. Même pour une équation aussi simple que l'équation de la chaleur, il ne nous semble pas qu'on ait jamais montré l'unicité de la solution sans faire des hypothèses sur son comportement à l'infini dans X^n.

§ 7. Problème de Cauchy homogène. Condition d'existence de la solution.

THÉORÈME II. — *Pour que le problème de Cauchy homogène* $B_x(t) \equiv 0$) *soit bien posé dans* (a, b) *pour l'espace de distributions* $(\mathcal{S}')_x$, *il faut et il suffit que chaque dérivée partielle en* y, $D_y^q \mathcal{R}(y\,;\, t, a)$, *de la matrice résolvante* $\mathcal{R}(y\,;\, t, a)$, *soit majorée par un polynome en* y *indépendant de* t (*mais pouvant dépendre de la dérivée* D_y^q *considérée*).

Nous avons vu que $t \to \mathcal{R}(y\,;\, t, a)$ est une application continue de (a, b) dans $(\mathcal{E})_y$; la condition du théorème II exprime qu'elle est une application continue de (a, b) dans $(\mathcal{O}_M)_y$ [7].

[7] Voir « TD », tome II, page 100. Rappelons que $(\mathcal{O}_M)$ a la topologie induite par l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$ des opérations linéaires continues sur $(\mathcal{S}')$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées).

Ici encore on démontre le théorème sur le système équivalent (3, 1), qui d'ailleurs intervient dans l'énoncé du théorème par sa matrice résolvante.

1° *La condition est nécessaire.*

Par hypothèse, quelle que soit $\mathcal{U}_y(a) \in (\mathcal{S}')_y$, $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)\,\mathcal{U}_y(a)$ est aussi dans $(\mathcal{S}')_y$; donc le multiplicateur $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)$ applique $(\mathcal{S}')_y$ dans $(\mathcal{S}')_y$, donc est dans $(\mathcal{O}_M)_y$. De plus, toujours pour toute $\mathcal{U}_y(a)$ fixée dans $(\mathcal{S}')_y$, $t \to \mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)\,\mathcal{U}_y(a)$ est une application continue de $(a,\ b)$ dans $(\mathcal{S}')_y$, et l'ensemble des $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)\,\mathcal{U}_y(a)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ est compact, donc borné ; alors l'ensemble des $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)$ est borné dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}',\ \mathcal{S}')$ des applications linéaires continues de $(\mathcal{S}')_y$ dans $(\mathcal{S}')_y$ muni de la topologie de la convergence simple, et par suite équicontinu (⁸). Mais alors la continuité de l'application $t \to \mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)$, de $(a,\ b)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}',\ \mathcal{S}')$ muni de la topologie de la convergence simple, entraîne sa continuité pour $\mathcal{L}(\mathcal{S}',\ \mathcal{S}')$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes (ou bornées) de $(\mathcal{S}')_y$, topologie qui est précisément celle de $(\mathcal{O}_M)_y$.

2° *La condition est suffisante.*

Nous supposerons cette fois que $t \to \mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)$ est une application continue de $(a,\ b)$ dans $(\mathcal{O}_M)_y$. Mais la formule (4,3) montre que sa dérivée en t (dans l'espace vectoriel topologique $(\mathcal{E})_y$) est aussi dans $(\mathcal{O}_M)_y$ et y dépend continuement de t, c'est donc sa dérivée dans $(\mathcal{O}_M)_y$ (⁹), et l'application précédente de $(a,\ b)$ dans $(\mathcal{O}_M)_y$ est continuement différentiable. Alors, pour toute $\mathcal{U}_y(a) \in (\mathcal{S}')_y$, l'application $t \to \mathcal{R}(y\,;\ t,\ a)\,\mathcal{U}_y(a)$ de $(a,\ b)$ dans $(\mathcal{S}')_y$ est continuement différentiable, et est solution du problème de Cauchy homogène pour (3, 1) avec valeur initiale $\mathcal{U}_y(a)$, c. q. f. d.

Remarques. — 1° La condition classique de M. Hadamard est toujours vérifiée lorsque le problème de Cauchy est bien posé : la solution $U_x(t)$ dépend continuement (dans $(\mathcal{S}')_x$) de t et de la valeur initiale $U_x(a)$.

2° On pourrait exprimer la condition du théorème sans faire intervenir la transformation de Fourier. Remarquons en effet que si $\lambda \in Y^n$, la matrice $\mathcal{R}(\lambda\,;\ t,\ a)\,\delta_{y\,;\,(\lambda)}$ (¹⁰) est solution du système (3, 1)

(⁸) Voir « La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$ », Dieudonné et Schwartz, Annales de l'Université de Grenoble, tome I, 1949, prop. 24, page 93.

(⁹) Voir le lemme sur la dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable réelle t, qui sera donné à la suite de cet article (critère 1^er par exemple).

(¹⁰) Rappelons que $\delta_{y\,;\,(\lambda)}$ est la distribution en y (ou sur Y^n) formée de la masse $+1$

avec valeur initiale $I\delta_{y;(\lambda)}$; donc il existe une solution et une seule du système (2,2), qui soit une matrice carrée à N lignes et N colonnes à valeurs dans $(\mathcal{S}')_x$, et qui prenne la valeur initiale I exp $(2i\pi\lambda \cdot x)$: c'est $\mathcal{R}(\lambda;\ t,\ a)\exp(2i\pi\lambda \cdot x)$. Alors les conditions du théorème II relatives à $\mathcal{R}(\lambda;\ t,\ a)$ sont des conditions relatives à cette solution : elle doit être bornée dans $(\mathcal{S}')_x$ (ainsi que chacune de ses dérivées partielles en λ) quels que soient t et λ. On aurait pu directement par ce procédé voir que la condition du théorème était nécessaire.

§ 8. Problème de Cauchy homogène uniformément bien posé.

Le problème de Cauchy pour le système (2,2) est dit *uniformément bien posé,* dans l'intervalle de temps $(\overrightarrow{a,\ b})$ (valeur initiale) et l'espace de distributions $(\mathcal{H})_x$, si, pour tout t_0 de $(a,\ b)$, le problème de Cauchy est bien posé pour l'intervalle $(\overrightarrow{t_0,\ b})$, et si la solution dépend continuement (dans $(\mathcal{H})_x$) de t, t_0, et de la valeur initiale $U_x(t_0)$ (les applications $U_x(t_0) \to U_x(t)$ de $(\mathcal{H})_x$ dans lui-même, sont donc, pour $a \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant b$, équicontinues).

THÉORÈME III. — *Pour que le problème de Cauchy homogène de* (2,2) *soit uniformément bien posé dans* $(\overrightarrow{a,\ b})$ *et l'espace* $(\mathcal{S}')_x$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{R}(y;\ t,\ \tau)$ *soit majorée par un polynome en* y *indépendant de* t *et* τ, $a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b$.

La même méthode que pour le théorème II (mais beaucoup plus élémentaire à cause des conditions d'uniformité) montre qu'il faut et il suffit que l'application $(t,\ \tau) \to \mathcal{R}(y;\ t,\ \tau)$ de la région $t \geqslant \tau$ de $(a,\ b) \times (a,\ b)$ dans $(\mathcal{O}_M)_y$ soit continue. Mais il en est ainsi dès que $\mathcal{R}(y;\ t,\ \tau)$ est majorée par un polynome en y indépendant de t et τ, car alors chacune de ses dérivées partielles en y possède la même propriété, en vertu de la forme (5,3) de la solution de l'équation aux variations (5,2).

§ 9. Problème de Cauchy non homogène.

THÉORÈME IV. — *Si le problème de Cauchy homogène est uniformément bien posé dans* $(\overrightarrow{a,\ b})$ *et* $(\mathcal{S}')_x$, *il en est de même du problème de Cauchy non homogène.*

au point λ. On peut aussi l'écrire $\delta_y(\lambda)$, puisque, en tant que distribution sur Y^n, elle est une fonction (indéfiniment différentiable) de λ.

En utilisant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème II, on peut montrer qu'il en est ainsi si l'on remplace $(\mathcal{S}')_x$ par n'importe quel espace de distributions $(\mathcal{H})_x$ complet, ou dans lequel l'enveloppe convexe fermée d'un compact est faiblement compacte.

Pour $(\mathcal{H})_x = (\mathcal{S}')_x$, la démonstration se fait sur (3,1) et résulte immédiatement de la formule (5,8) : si $\mathcal{U}_y(t_0) \in (\mathcal{S}')_y$, et si $t \to \mathcal{B}_y(t)$ est une application continue de (a, b) dans $(\mathcal{S}')_y$, $t \to \mathcal{U}_y(t)$ est une application continuement différentiable de (a, b) dans $(\mathcal{S}')_y$, vérifiant le système différentiel (3,1) avec la condition initiale et le second membre donnés. De plus, la solution dépend continuement de la donnée initiale et du second membre, dans un sens évident.

Remarque. — Si le problème de Cauchy homogène est bien posé, mais non uniformément, alors $\mathcal{R}(y\,;\, t,\, a) \in (\mathcal{O}_M)_y$, mais on ne peut rien dire de $\mathcal{R}(y\,;\, t,\, \tau)$ et on ne peut rien conclure sur le problème de Cauchy non homogène.

§ 10. Matrice résolvante du système de composition et expression de la solution du problème de Cauchy.

Nous supposerons désormais vérifiées les conditions du théorème III. Posons alors

$$(10,1) \qquad \mathrm{R}_x(t, \tau) = \overline{\mathcal{F}}_y \mathcal{R}(y\,;\, t,\, \tau) \quad \text{pour } a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b.$$

Il s'agit là d'une transformation de Fourier sur la seule variable d'espace, pour t et τ fixés. $\mathrm{R}_x(t, \tau)$ est la matrice résolvante du système d'évolution du type de composition (2,2). Elle possède les propriétés suivantes :

1° Pour toutes valeurs de t et τ ($\tau \leqslant t$), $\mathrm{R}_x(t, \tau)$ est une distribution à décroissance rapide, $\in (\mathcal{O}'_c)_x$. L'application $(t, \tau) \to \mathcal{R}_x(t, \tau)$ du triangle $(a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b)$ de $(a, b) \times (a, b)$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$ est continuement différentiable.

2° Avec la condition initiale

$$(10,2) \qquad \mathrm{R}_x(\tau, \tau) = \mathrm{I}\delta_x, \qquad \mathrm{I} = \text{matrice identique},$$

elle vérifie le système différentiel qui la caractérise

$$(10,3) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{R}_x(t, \tau) + \mathrm{A}_x(t) \underset{(x)}{*} \mathrm{R}_x(t, \tau) = 0.$$

3° Elle vérifie la relation fonctionnelle

$$(10,4) \qquad \mathrm{R}_x(t_3, t_2) \underset{(x)}{*} \mathrm{R}_x(t_2, t_1) = \mathrm{R}_x(t_3, t_1) \quad \text{pour } t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3.$$

Elle n'est pas nécessairement inversible.

4° Un problème de Cauchy ($t_0 \leqslant t$) est résolu par la formule :

$$(10,5) \quad \mathrm{U}_x(t) = \mathrm{R}_x(t, t_0) \underset{(x)}{*} \mathrm{U}_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{R}_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} \mathrm{B}_x(\tau)\, d\tau.$$

L'intégrale figurant au second membre est l'intégrale d'une fonction continue de τ à valeurs dans $(\mathcal{S}')_x$. Tous les produits de composition sont relatifs à la seule variable d'espace x pour t et τ fixés.

5° La dérivée en τ de $\mathrm{R}_x(t, \tau)$ ne peut pas s'obtenir par le passage à son inverse, puisqu'elle n'est peut-être pas inversible, mais il suffit de faire une transformation de Fourier sur la dérivée en τ de $\mathcal{R}(y; t, \tau)$, donnée par (4,7) :

$$(10,6) \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \mathrm{R}_x(t, \tau) - \mathrm{R}_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} \mathrm{A}_x(\tau) = 0.$$

6° Si la matrice A_x est indépendante de t, le système différentiel est défini pour tout l'axe des t. Si dans un intervalle $(\overrightarrow{a, b})$ particulier, le problème de Cauchy est bien posé, il l'est uniformément, et dans tout intervalle $(\overrightarrow{a', b'})$ fermé fini (comme on le voit sur (3,1) en appliquant les théorèmes II et III). Il y a lieu d'introduire la matrice $\mathrm{R}_x(t) = \mathrm{R}_x(t, 0)$, définie pour $t \geqslant 0$; alors

$$(10,7) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{R}_x(t, \tau) = \mathrm{R}_x(t - \tau); \qquad \tau \leqslant t, \\ &\mathrm{R}_x(s + t) = \mathrm{R}_x(s) \underset{(x)}{*} \mathrm{R}_x(t), \qquad s \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{R}_x(t)$ commute avec A_x (pour le produit de composition en x, pour t fixé), et elle peut être interprétée comme une exponentielle de cette matrice (pour le produit de composition en x, pour t fixé) :

$$(10,8) \qquad \mathrm{R}_x(t) = \exp_{\underset{(x)}{*}}(-t\mathrm{A}_x).$$

Cette exponentielle est une façon d'écrire la relation (10,3), et les relations fonctionnelles (10,7) ; elle ne doit pas être interprétée comme une série convergente

$$(10,9) \qquad \mathrm{R}_x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-t\mathrm{A}_x)^{\underset{(x)}{*}k}}{k!},$$

car une telle série est en général divergente. La série correspondante dans Y^n

$$(10,10) \qquad \mathcal{R}(y\,;\,t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-t\mathcal{A}(y))^k}{k!}$$

est bien convergente dans $(\mathcal{E})_y$ mais non dans $(\mathcal{O}_M)_y$ ou $(\mathcal{S}')_y$. Remarquons cependant que l'application $t \to R_x(t)$ de la demi-droite $t \geqslant 0$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$ est indéfiniment différentiable (mais non analytique, et non prolongeable à t complexe) et que (10,9) est son développement de Taylor pour $t = 0$. Nous avons là un semi-groupe d'opérateurs dans $(\mathcal{S}')_x$ (ou un semi-groupe dans l'algèbre $(\mathcal{O}'_c)_x$) dont $-A_x$ est le générateur infinitésimal ([11]).

§ 11. Valeurs initiales et valeurs finales.

La matrice $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ \tau)$ est toujours inversible. Son inverse $\mathcal{R}(y\,;\ \tau,\ t)$ est toujours dans $(\mathcal{E})_y$, mais non nécessairement dans $(\mathcal{O}_M)_y$; donc $R_x(t,\ \tau)$ n'est pas nécessairement inversible, et le problème de Cauchy peut être bien posé dans $(\overrightarrow{a,\ b})$ sans l'être dans $(\overleftarrow{a,\ b})$. L'équation de la chaleur en donnera un exemple. Mais si les deux problèmes de Cauchy sont uniformément bien posés, alors $R_x(t,\ \tau)$ est inversible (pour le produit de composition en x, pour t et τ fixés) et

$$(11,1) \qquad R_x^{\overset{*}{(x)}(-1)}(t,\ \tau) = R_x(\tau,\ t).$$

Le système d'évolution est alors dit réversible. Le présent permet non seulement d'indiquer l'avenir mais aussi le passé. Dans le cas où A_x est indépendant du temps, cela signifie que $R_x(t)$ est définie pour toutes les valeurs réelles de t ; (10,7) et (10,8) sont vrais quels que soient s et t réels, et

$$(11,2) \qquad R_x^{\overset{*}{(x)}(-1)}(t) = R_x(-t).$$

Au lieu d'un semi-groupe, on a un groupe à un paramètre.

§ 12. Autres problèmes de Cauchy.

Lorsqu'on remplace l'espace de distributions $(\mathcal{S}')_x$ par un autre $(\mathcal{H})_x$, les conditions changent complètement. Cependant si $(\mathcal{H})$ est

([11]) Voir « Functional analysis and semi-groups », Hille, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31, 1948.

l'un quelconque des espaces $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{O}'_c)$, $(\mathcal{D}_{L^p})$, $(\mathcal{D}'_{L^p})$, $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{S}')$, les conditions pour que le problème de Cauchy soit uniformément bien posé sont toujours celles du théorème III. Nous admettrons la nécessité de cette condition. Mais sa suffisance est triviale : car si $(t, \tau) \to R_x(t, \tau)$ est une application continuement différentiable de $(a, b) \times (a, b)$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$, l'application

$$(t, t_0, U_x(t_0)) \to U_x(t) = R_x(t, t_0) \underset{(x)}{*} U_x(t_0)$$

de $(a, b) \times (a, b) \times (\mathcal{H})_x$ dans $(\mathcal{H})_x$ est continue, et $U_x(t)$, continuement différentiable en t, vérifie l'équation différentielle avec la condition initiale donnée.

Dans la théorie classique des équations aux dérivées partielles, on utilise des espaces de fonctions tels que les L^p plutôt que des distributions ; mais on se heurte alors à des difficultés qui sont très gênantes dans la solution du problème (remarquons alors que si A_x est un opérateur différentiel, il ne définit pas une opération continue dans L^p, le problème doit être posé autrement). Dans les plus élémentaires systèmes hyperboliques, la matrice résolvante $R_x(t, \tau)$ est une distribution authentique et non une fonction ;

$$U_x(t) \doteq R_x(t, t_0) \underset{(x)}{*} U_x(t_0)$$

est une distribution $\in (\mathcal{D}'_{L^p})$ si $U_x(t_0) \in L^p$, mais elle n'est pas dans L^p elle-même. Soit k le plus petit entier tel que $R_x(t, \tau)$ soit somme finie de dérivées d'ordre $\leqslant k$ (en x) de fonctions sommables $(\in L^1)$ [12]. Alors $U_x(t)$ sera, pour tout t, dans L^p ainsi que ses dérivées (en x) d'ordre $\leqslant m$, si $U_x(t_0)$ est dans L^p ainsi que ses dérivées (en x) d'ordre $\leqslant k + m$, tandis que, si on suppose seulement $U_x(t_0) \in L^p$, $U_x(t)$ sera seulement somme finie de dérivées (en x) d'ordre $\leqslant k$ de fonctions de L^p. Cet écart inévitable de k entre la différentiabilité de $U_x(t_0)$ et celle de $U_x(t)$ est d'autant plus gênant que le système différentiel peut être d'ordre $< k$.

§ 13. Systèmes hyperboliques.

Un cas particulièrement intéressant d'autres problèmes de Cauchy est celui où $(\mathcal{H})_x$ est l'un quelconque des espaces suivants : $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{D}')$. Dans ce cas il y aura évidemment lieu de prendre $A_x(t)$

([12]) Voir « TD », tome II, page 100.

dans $(\mathcal{E}')_x$ et non plus seulement dans $(\mathcal{O}'_c)_x$, de façon que le produit de composition avec $A_x(t)$ soit une opération continue de $(\mathcal{H})$ dans $(\mathcal{H})$; nous supposerons aussi continue l'application $t \to A_x(t)$ de (a, b) dans $(\mathcal{E}')_x$. De toute façon nous ne connaissons pas d'autres cas que ceux de certains systèmes différentiels ($A_x(t)$ = polynome de dérivation, support à l'origine) pour lesquels le système puisse être bien posé dans ces quatre espaces.

THÉORÈME V. — *Pour que le problème de Cauchy soit uniformément bien posé dans (a, b) pour l'un des quatre espaces $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{D}')$, il faut et il suffit qu'il le soit dans $(\mathcal{S}')$, et que la matrice résolvante $R_x(t, \tau)$ soit dans $(\mathcal{E}')_x$, et ait son support dans un compact fixe de X^n.*

1° *La condition est nécessaire.*

On ne peut pas employer directement une transformation de Fourier, car les hypothèses n'entraînent pas trivialement que le problème de Cauchy soit bien posé dans $(\mathcal{S}')$.

Nous supposons que l'application $U_x(\tau) \to U_x(t)$ de $(\mathcal{H})_x$ dans $(\mathcal{H})_x$ est continue. Le problème de Cauchy étant bien posé, a une solution unique, donc l'application précédente commute avec les translations de X^n ; elle est donc de la forme $U_x(t) = R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} U_x(\tau)$, où $R_x(t, \tau) \in (\mathcal{E}')_x$ (13).

Ces applications étant équicontinues lorsque t et τ varient, $R_x(t, \tau)$ est bornée dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ des applications continues de $(\mathcal{H})$ dans $(\mathcal{H})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées, c'est-à-dire précisément dans $(\mathcal{E}')_x$ avec sa topologie : donc le support de $R_x(t, \tau)$ reste contenu dans un compact fixe de X^n (ce raisonnement suppose évidemment (a, b) compact ; le support de $R_x(b, a)$ grandit avec l'intervalle (a, b)). Encore faut-il faire la jonction entre cette matrice $R_x(t, \tau)$ et celle des précédents paragraphes. Comme $U_x(t)$ est solution de l'équation différentielle (2,2) dans $(\mathcal{H})_x$, $R_x(t, \tau)$ est solution de l'équation différentielle (10,3) dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ muni de la topologie de la convergence simple ; mais alors $R_x(t, \tau)$ différentiable en t pour cette topologie a une dérivée $\frac{\partial}{\partial t} R_x(t, \tau) = - A_x(t) \underset{(x)}{*} R_x(t, \tau)$ qui est continue pour cette topologie, mais qui, les $R_x(t, \tau)$ et $A_x(t)$ étant équicontinues, est aussi continue dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes (ou bornées) de $(\mathcal{H})$, donc dans $(\mathcal{E}')_x$; alors

(13) Voir « TD », tome II, page 18, et tome I, page 89.

$R_x(t, \tau)$ est différentiable en t dans $(\mathcal{E}')_x$ [14], et y vérifie l'équation différentielle (10,3). A fortiori est-elle différentiable dans $(\mathcal{O}'_c)_x$ et solution de l'équation (10,3), ce qui prouve que le problème est uniformément bien posé dans $(\mathcal{S}')_x$ et que $R_x(t, \tau)$ est la matrice résolvante déjà définie.

2° *La condition est suffisante.*

Moyennant les hypothèses, l'application

$$t \to U_x(t) = R_x(t, t_0) \underset{(x)}{*} U_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} B_x(\tau) d\tau$$

est évidemment solution de l'équation différentielle (2,2) dans $(\mathcal{H})_x$ et y dépend continuement des données initiales et du second membre supposés dans $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H})$ étant l'un quelconque des quatre espaces précédents.

Il faut encore montrer l'unicité de la solution, qui, si $(\mathcal{H})$ est $(\mathcal{D})$ ou $(\mathcal{E}')$, résulte du théorème I, mais n'en résulte pas pour $(\mathcal{H}) = (\mathcal{E})$ ou $(\mathcal{D}')$. Il suffit d'ailleurs de montrer l'unicité dans $(\mathcal{D}')$. Pour cela, écrivons (2,2) en y remplaçant t par τ, composons (en x) à gauche avec $R_x(t, \tau)$, nous obtenons

$$(13,1) \qquad R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} \frac{d}{d\tau} U_x(\tau) + R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} A_x(\tau) \underset{(x)}{*} U_x(\tau) = R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} B_x(\tau).$$

Compte tenu de (10,6), cette équation s'écrit

$$(13,2) \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\left[R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} U_x(\tau)\right] = R_x(t, \tau) \underset{(x)}{*} B_x(\tau);$$

compte tenu de la condition initiale pour $t = t_0$, une intégration en τ de $\tau = t_0$ à $\tau = t$ redonne la formule (10,5) comme seule forme possible de la solution.

Il n'aurait pas été possible de démontrer l'unicité de la solution par la méthode du changement d'inconnues du § 5, car $R_x(t, \tau)$ n'est pas nécessairement inversible (pour le produit de composition en x).

Nous appellerons *hyperbolique* un système (2,2) (avec $A_x(t)$ dans $(\mathcal{E}')_x$) pour lequel le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans les quatre espaces $(\mathcal{H})$ précédents. La résolution d'un tel problème de Cauchy est purement locale, en ce sens que la connais-

[14] Voir note 9, page 28

sance de $U_x(t)$ sur un ouvert ω relativement compact de X^n ne dépend que de la connaissance de $U_x(t_0)$ et de $B_x(t)$ sur un ouvert Ω relativement compact de X^n. Tous les systèmes hyperboliques connus sont réversibles (§ 11). Des conditions très générales d'hyperbolicité ont été données par MM. Petrowsky et Garding ([15]).

THÉORÈME VI. — *Si un système d'équations aux dérivées partielles du type de composition de la forme* (2,1) *où toutes les dérivations sont d'ordre* $\leqslant m = 1$, *est tel que le problème de Cauchy homogène soit uniformément bien posé dans* $(\overrightarrow{a, b})$ *pour l'espace* $(\mathcal{S}')$, *le système est hyperbolique.*

Notre système homogène peut en effet s'écrire sous la forme

$$(13,3) \qquad \frac{d}{dt}U_x(t) + \sum_{j=1,2,\dots n} A_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}U_x(t) = 0.$$

Les A_j sont des matrices carrées numériques dépendant continuement de t. Par transformation de Fourier :

$$(13,4) \qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{U}_y(t) + \left(\sum_{j=1,2,\dots n} 2i\pi y^j A_j(t)\right)\mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

La matrice résolvante $\mathcal{R}(y\,;\, t, \tau)$ est définie par

$$(13,5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}(y\,;\, t, \tau) + \left(\displaystyle\sum_{j=1,2,\dots n} 2i\pi y_j A_j(t)\right)\mathcal{R}(y\,;\, t, \tau) = 0, \\ \mathcal{R}(y\,;\, \tau, \tau) = I. \end{cases}$$

Les coefficients de cette équation différentielle sont analytiques en y, et permettent de définir $\mathcal{R}(y\,;\, t, \tau)$ pour y complexe comme une fonction holomorphe entière de y. Ceci est d'ailleurs valable toutes les fois que $A_x(t)$ est dans $(\mathcal{E}')_x$. Mais ici nous pourrons majorer $\mathcal{R}(y\,;\, t, \tau)$, pour y complexe, de la façon suivante.

Si nous appelons $\overline{M}$ la norme d'une matrice carrée à N lignes et N colonnes (considérée comme opérateur dans l'espace R^N muni d'une norme quelconque), on voit que la matrice numérique $A_j(t)$

([15]) Petrowsky : « Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen », Recueil Mathématique (Sbornik), 1937, t. II (44), N. 5, pages 815-868. Gårding : « Équations différentielles linéaires hyperboliques à coefficients constants », Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. CCXXVI, p. 539-541, 16-2-48.

conserve une norme bornée lorsque t varie, donc la norme de $\sum_j y_j A_j(t)$ est bornée par $A|y|$, où A est une constante, et

$$|y|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots |y_n|^2.$$

Par ailleurs, si la matrice numérique $M(t)$ dépend de t, et si elle est dérivable, $\overline{M}(t)$ est continue, non nécessairement dérivable, mais ses nombres dérivés vérifient toujours $\left|\frac{d}{dt}\overline{M}(t)\right| \leqslant \frac{d\overline{M}}{dt}$. D'où, en vertu de (13,5),

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{R}}(y\,;\,t,\,\tau)\right| \leqslant 2\pi A|y|\overline{\mathcal{R}}(y\,;\,t,\,\tau)\,; \tag{13,6}$$

d'où, puisque $\overline{\mathcal{R}}(y\,;\,t,\,\tau) = 1$, la majoration classique

$$\overline{\mathcal{R}}(y\,;\,t,\,\tau) \leqslant \exp(2\pi A|y|(t-\tau)). \tag{13,7}$$

La résolvante est donc une fonction holomorphe entière de type exponentiel en y; alors, d'après le théorème de Paley-Wiener [16], si l'on fait l'hypothèse que le problème de Cauchy est uniformément bien posé (ou même plus généralement que $\mathcal{R}(y\,;\,t,\,\tau)$ est dans $(\mathcal{S}')_y$), $R_x(t,\,\tau)$ a son support contenu dans un compact de X^n, à savoir la boule $|x| \leqslant A(t-\tau) \leqslant A(b-a)$. Ce support est réduit à l'origine pour $t=\tau$, et s'agrandit progressivement avec $t-\tau$, avec une vitesse finie. En utilisant les résultats de MM. Plancherel et Polya [17], on peut obtenir beaucoup plus de précisions sur le support de $R_x(t,\,\tau)$, dans les cas hyperboliques classiques.

§ 14. Système adjoint.

Le système adjoint du système homogène (2,2) est, par définition

$$-\frac{d}{dt}V_x(t) + {}'\check{A}_x(t) \underset{(x)}{*} V_x(t) = 0 \tag{14,1}$$

($'A$ est la matrice transposée de A ; $\check{T}$ est la symétrique de T, définie par l'isomorphisme $x \rightarrow -x$ de X^n sur lui-même) [18].

(16) Voir « TD », tome II, page 128.

(17) Plancherel-Polya : « Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples », Commentarii Mathematici Helvetici, 9 (1936-37), pages 224-248.

(18) Voir « TD », tome II, page 24.

On voit en effet que l'opérateur $-\frac{d}{dt}+{}'\check{A}_x(t)\underset{(x)}{*}$ est le transposé de l'opérateur $\frac{d}{dt}+A_x(t)\underset{(x)}{*}$.

Théorème VII. — *Si le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans $(\overrightarrow{a, b})$ (valeurs initiales) pour le système (2,2) il est uniformément bien posé dans $(\overleftarrow{a, b})$ (valeurs finales) pour le système adjoint (14,1).*

Sous des conditions très générales ce théorème est vrai quel que soit l'espace de distributions $(\mathcal{H})$ considéré ; nous le montrerons ici seulement pour $(\mathcal{S}')$.

Par transformation de Fourier (en variable spatiale) le système adjoint devient :

$$(14,2) \qquad -\frac{d}{dt}\mathcal{U}_y(t)+{}'\mathcal{A}(-y,\ t)\mathcal{U}_y(t)=0.$$

L'équation (4,7), si l'on y échange t et τ et que l'on effectue la transposition et la symétrie $\check{}$, montre que la matrice résolvante pour (14,2) est

$$(14,3) \qquad {}'\mathcal{R}(-y\,;\tau,\ t)$$

qui, si $\mathcal{R}(y\,;\ t,\ \tau)$ est majorée par un polynome en y quels que soient t et τ, $\tau \leqslant t$, est aussi majorée par un polynome en y quels que soient t et τ, $\tau \geqslant t$. Nous voyons en même temps que la matrice résolvante de (14,1) est

$$(14,4) \qquad {}'\check{R}_x(\tau,\ t).$$

On voit d'ailleurs directement que cette matrice vérifie toutes les propriétés caractéristiques de la matrice résolvante.

Soient alors $U_x(t)$ et $V_x(t)$ des solutions respectives de (2,2) homogène et (14,1). On a la relation suivante

$$(14,5) \quad \frac{d}{dt}[{}'U_x(t)\underset{(x)}{*}\check{V}_x(t)]=\frac{d}{dt}({}'U_x(t))\underset{(x)}{*}\check{V}_x(t)+{}'U_x(t)\underset{(x)}{*}\frac{d}{dt}\check{V}_x(t)$$
$$=-\,{}'U_x(t)\underset{(x)}{*}{}'A_x(t)\underset{(x)}{*}\check{V}_x(t)+{}'U_x(t)\underset{(x)}{*}{}'A_x(t)\underset{(x)}{*}\check{V}_x(t)=0,$$

d'où

$$(14,6) \qquad {}'U_x(t)\underset{(x)}{*}\check{V}_x(t)=C_x,$$

distribution indépendante de t.

Cette formule suppose que ces produits de composition aient un sens. Il en sera ainsi par exemple si $U_x(a) \in (\mathcal{S}')_x$, $V_x(b) \in (\mathcal{O}'_c)_x$, car alors d'après le § 12 et le théorème VII, $U_x(t)$ et $V_x(t)$ sont, respectivement dans $(\mathcal{S}')_x$ et $(\mathcal{O}'_c)_x$, des fonctions continuement différentiables de t.

Si maintenant $V_x(b) = V(x, b)$ est une fonction $\in (\mathcal{S})_x$, le théorème VII montre que $V_x(t) = V(x, t)$ est dans $(\mathcal{S})_x$ et y dépend différentiablement de t, de sorte que $C_x = C(x)$ est une fonction (qui appartient à $(\mathcal{O}_M)_x$), et, en faisant $x = 0$, on trouve

$$(14,7) \qquad {}'U_x(t) \cdot V(x, t) = \int_{X^n} {}'U_x(t) V(x, t)\, dx = C, \text{ constante.}$$

Ces propriétés, basées sur l'équation différentielle (4,7), peuvent remplacer cette dernière dans la démonstration d'unicité du théorème V (condition suffisante). En prenant en effet, pour le système homogène, $U_x(t_0) \in (\mathcal{D}')_x$, $V_x(t_1) = V(x, t_1) \in (\mathcal{D})_x$, on aura, pour

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

la relation (14,7) qui donne

$$(14,8) \qquad {}'U_x(t_0) \cdot V(x, t_0) = {}'U_x(t_1) \cdot V(x, t_1).$$

Le premier membre est nul si $U_x(t_0) = 0$, donc le deuxième l'est aussi ; mais $V(x, t_1)$ est arbitraire, donc $U_x(t_1) = 0$, ce qui prouve que le système homogène (2,2) n'a pas de solution non nulle correspondant à une valeur initiale nulle.

§ 15. L'onde élémentaire. Le principe de Huygens.

Les équations (10,2) et (10,3) permettent d'appeler $R_x(t, \tau)$ l'onde élémentaire relative à l'instant initial τ et au point initial o de X^n ; celle qui correspondrait au point initial ξ de X^n serait la translatée $R_{x-\xi}(t, \tau)$.

Considérons alors une solution $U_x(t)$ du système homogène (2,2). Sa valeur initiale $U_x(t_0)$ peut être décomposée en « combinaison » de distributions à supports ponctuels sous la forme

$$(15,1) \qquad U_x(t_0) = \int_{X^n} \left[\delta_{x-\xi} I \right] U_\xi(t_0)\, d\xi,$$

qui revient à écrire

$$(15,2) \qquad U_x(t_0) = \delta_x I \underset{(x)}{*} U_x(t_0).$$

Alors en vertu de la linéarité du problème, il sera naturel de prendre comme solution du système homogène

$$(15,3) \qquad U_x(t) = \int_{X^n} R_{x-\xi}(t, t_0) U_\xi(t_0) d\xi ;$$

ce n'est autre chose que l'expression (10,5) de la solution. D'autre part la majeure du principe de Huygens ([19]) exprime que, pour passer de la valeur $U_x(t_1)$ à la valeur $U_x(t_3)$, on peut passer successivement de $U_x(t_1)$ à $U_x(t_2)$ puis de $U_x(t_2)$ à $U_x(t_3)$; elle est identique à la constatation de l'existence et de l'unicité du problème de Cauchy. Sur l'onde élémentaire, elle donne la relation fonctionnelle (10,4), qu'on peut aussi écrire

$$(15,4) \qquad \int_{X^n} R_{x-\lambda}(t_3, t_2) R_{\lambda-\xi}(t_2, t_1) d\lambda = R_{x-\xi}(t_3, t_1).$$

§ 16. Noyau élémentaire, solution élémentaire.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons systématiquement les notations et propriétés de la théorie des noyaux ([20]). Nous raisonnerons alors sur l'espace $X^n \times (a, b)$, et considérerons des fonctions et distributions en x et t (on pourra remplacer ici l'intervalle (a, b) fermé par l'intervalle ouvert correspondant pour éviter toute difficulté). Toute expression telle que $A_x(t)$ sera alors considérée comme distribution en x et t.

L'opération $\frac{\partial}{\partial t} + A_x(t) \underset{(x)}{*}$ (de $(\mathcal{D})_{x,t}$ dans $(\mathcal{D}')_{x,t}$) sera définie par un noyau L qui est manifestement

$$(16,1) \qquad L_{x,\xi,t,\tau} = \left[\delta_{x-\xi} \times \frac{\partial}{\partial t} \delta_{t-\tau}\right] I + A_{x-\xi}(t) \delta_{t-\tau}.$$

Autrement dit, si $\varphi(x, t) \in (\mathcal{D})_{x,t}$, on a

$$(16,2) \quad L \cdot \varphi = \iint_{X^n \times (a,b)} L_{x,\xi,t,\tau} \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_x(t) \underset{(x)}{*} \varphi(x, t).$$

([19]) Hadamard : « Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques », Paris, Hermann, 1932, page 75.

([20]) Cette théorie n'est pas encore publiée. Un résumé paraîtra dans les Proceedings du Congrès Mathématique International de Cambridge (septembre 1950).

Le noyau adjoint ou transposé s'obtient en transposant la matrice L et échangeant x et ξ, t et τ : si ${}^sL$ est ce noyau,

$$(16,3) \qquad ({}^sL)_{x,\,\xi,\,t,\,\tau} = {}'L_{\xi,\,x,\,\tau,\,t},$$

et ${}^sL$ est le noyau associé à l'opérateur transposé $-\dfrac{\partial}{\partial t} + {}'\check{A}_x(t)^*_{(x)}$ défini au § 14.

La matrice résolvante $R_x(t, \tau)$ n'est en principe définie que pour $t \geqslant \tau$; nous appellerons $E_x(t, \tau)$ l'application de $(a, b) \times (a, b)$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$ égale à $R_x(t, \tau)$ pour $t \geqslant \tau$ et à o pour $t < \tau$. (On peut écrire $E_x(t, \tau) = Y(t-\tau)R_x(t, \tau)$, Y étant la fonction d'Heaviside, si $R_x(t, \tau)$ est définie pour toutes les valeurs de t et τ.) Au sens usuel des dérivations en t que nous avons considéré jusqu'à maintenant, nous devons substituer le sens de la théorie des distributions en x et t. Comme alors E présente la discontinuité $\delta_x I$ pour $t = \tau$, sa dérivée $\dfrac{\partial E}{\partial t}$ sera sa dérivée usuelle, considérée jusqu'à maintenant, augmentée de $\delta_x I \times \delta_{t-\tau}$. Alors

$$(16,4) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + A_x(t)^*_{(x)}\right] E_x(t, \tau) = \delta_x \times \delta_{t-\tau} I,$$

ou

$$(16,5) \quad L \circ E = \iint_{X^n \times (a,\,b)} L_{x,\,\lambda,\,t,\,\theta} E_{\lambda-\xi}(\theta, \tau)\, d\lambda\, d\theta = \delta_{x-\xi} \times \delta_{t-\tau} I,$$

ce qui prouve que $E_{x,\,\xi,\,t,\,\tau} = E_{x-\xi}(t, \tau)$ est inverse à droite du noyau L. C'est donc ce qu'on appelle ordinairement un « noyau élémentaire » associé à l'opérateur différentiel L.

Mais il y a plus. Les résultats du § 14 montrent que le noyau adjoint de E, soit

$$(16,6) \qquad ({}^sE)_{x,\,\xi,\,t,\,\tau} = {}'E_{\xi-x}(\tau, t)$$

est aussi l'inverse à droite du noyau adjoint ${}^sL$; donc E est non seulement inverse à droite, mais aussi inverse à gauche et donc inverse bilatère de L ; ce qui d'ailleurs résulte directement de (10,6) :

$$(16,7) \quad L \circ E = E \circ L = {}^sL \circ {}^sE = {}^sE \circ {}^sL = \delta_{x-\xi} \times \delta_{t-\tau} I.$$

Cette nature bilatère du noyau élémentaire est connue pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Elle tient à la même raison profonde : les opérateurs considérés ici forment une algèbre. (Ce sont des opérateurs de composition en x, pour t et τ fixés, définis par des applications continues de $(a, b) \times (a, b)$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x)$; or dans une algèbre l'existence simultanée d'un inverse à droite et d'un inverse à gauche entraîne leur égalité.

On sait qu'un noyau élémentaire assez régulier donne une « solution élémentaire ». Ainsi $E_{x-\xi}(t, \tau)$, pour ξ et τ fixés, est une distribution en x et t, et l'équation (16,4) montre que c'est une solution élémentaire du système différentiel (2,2) pour le point ξ, τ.

Le noyau ou la solution élémentaire (dans le cas d'équations aux dérivées partielles) servent à résoudre des problèmes de Cauchy correspondant à des données initiales sur des hypersurfaces très générales, qui ne sont pas nécessairement des hyperplans $t =$ constante [21] ; ainsi la matrice résolvante $R_x(t, \tau)$ résoud non seulement les problèmes de Cauchy posés dans les paragraphes précédents, mais des problèmes de Cauchy bien plus généraux.

Remarque. — Considérons le système (matriciel) d'ordre l en t :

$$(16,8) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^l U_x(t) + \sum_{\lambda < l} \left[(A_\lambda)_x(t) \underset{(x)}{*} \left(\frac{d}{dt}\right)^\lambda U_x(t) \right] = B_x(t).$$

Comme nous l'avons vu au § 1, il peut être ramené à l'ordre 1 ; mais il peut aussi être résolu directement. En particulier, si nous appelons matrice résolvante (si elle existe) la matrice $R_x(t, \tau)$ vérifiant le système différentiel avec les conditions initiales suivantes :

$$(16,9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l R_x(t, \tau) + \sum_{\lambda < l} \left[(A_\lambda)_x(t) \underset{(x)}{*} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\lambda R_x(t, \tau) \right] = 0 ;$$

$$R_x(\tau, \tau) = \left(\frac{dR}{dt}\right)_x (\tau, \tau) = \cdots = \left(\frac{d^{l-2}R}{dt^{l-2}}\right)_x (\tau, \tau) = 0 ;$$

$$\left(\frac{d^{l-1}R}{dt^{l-1}}\right)_x (\tau, \tau) = \delta_x I,$$

le noyau $E_{x, \xi, t, \tau} = E_{x-\xi}(t, \tau)$ associé à R comme il a été vu plus haut est un noyau élémentaire (et pour la même raison un inverse bilatère).

§ 17. Exemples divers.

Exemple I. — *Équation de Laplace, elliptique.*

$$(17,1) \qquad \frac{d^2}{dt^2} U_x(t) + \Delta_x U_x(t) = 0.$$

[21] Voir « TD », tome I, pages 131 et 135.

(17,2) $$\frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{U}_y(t) + 4\pi^2|y|^2\mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

(17,3) $$\mathfrak{U}_y(t) = (\operatorname{ch} 2\pi|y|t)\mathfrak{U}_y(0) + \frac{(\operatorname{sh} 2\pi|y|t)}{2\pi|y|}\left(\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\right)_y(0).$$

La solution trouvée n'est pas en général tempérée, le problème de Cauchy est mal posé. Mais la formule précédente permettrait d'étudier divers « problèmes de Dirichlet » : si on se donne $U_x(0)$, déterminer $\left(\frac{dU}{dt}\right)_x(0)$ de façon que le problème de Cauchy soit possible et donner sa solution. La solution trouvée, toujours harmonique au sens usuel pour $t \geqslant 0$, correspond néanmoins à une valeur au contour qui est une distribution $\in(\mathcal{S}')_x$.

Exemple II. — *Équation de la chaleur, parabolique.*

(17,4) $$\frac{d}{dt}U_x(t) - \Delta_x U_x(t) = 0.$$

(17,5) $$\frac{d}{dt}\mathfrak{U}_y(t) + 4\pi^2|y|^2\mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

(17,6) $$\mathcal{R}(y;\, t) = \exp(-4\pi^2|y|^2 t) \qquad \text{(voir § 4, 5°)}.$$

$\mathcal{R}(y;\, t)$ est dans $(\mathcal{O}_M)_y$ pour $t \geqslant 0$; le problème de Cauchy est bien posé pour les valeurs initiales, mais non pour les valeurs finales. $R_x(t)$ est donc définie seulement pour $t \geqslant 0$, et

(17,7) $$R_x(t) = \exp^{(\overset{*}{x})}(t\Delta_x) = \overline{\mathcal{F}}_{(y)}[\exp(-4\pi^2|y|^2 t)] = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp(-|x|^2/4t).$$

On trouve des circonstances analogues pour l'équation de la chaleur itérée :

(17,8) $$\left(\left(\frac{d}{dt} - \Delta_x\right)\right)^k U_x(t) = 0.$$

(17,9) $$\left(\left(\frac{d}{dt} + 4\pi^2|y|^2\right)\right)^k \mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

La distribution résolvante (au sens de la remarque qui termine le § 16) est

(17,10) $$\mathcal{R}^{(k)}(y;\, t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\exp(-4\pi^2|y|^2 t),$$

d'où, pour $t \geqslant 0$:

$$(17,11) \qquad R_x^{(k)}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp(-|x|^2/4t).$$

La distribution $E_x^{(k)}(t)$, égale à $R_x^{(k)}(t)$ pour $t \geqslant 0$ et à 0 pour $t < 0$, redonne la solution élémentaire bien connue de l'équation de la chaleur itérée.

La nature des solutions trouvées appelle quelques remarques.

A) La résolvante relative à l'équation itérée k fois s'obtient en multipliant par $t^{k-1}/(k-1)!$ la résolvante de l'équation elle-même.

Plus généralement, soit $(\mathcal{H})_x$ un espace de distributions. Nous désignerons par $U_x \to A_x \cdot U_x$ n'importe quelle opération linéaire continue de $(\mathcal{H})_x$ dans lui-même. Un système d'évolution très général (qui n'est plus du type de composition) est défini par l'équation différentielle (matricielle)

$$(17,12) \qquad \frac{d}{dt}U_x(t) + A_x(t) \cdot U_x(t) = 0,$$

où les $A_x(t)$ sont équicontinues, et où $t \to A_x(t)$ est une application continue de (a, b) dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ des applications linéaires continues de $(\mathcal{H})$ dans lui-même (muni de la topologie de la convergence simple). Si le problème de Cauchy est uniformément bien posé, on pourra, si $(\mathcal{H})$ est complet, ou si dans $(\mathcal{H})$ l'enveloppe convexe fermée de tout compact est faiblement compacte, trouver une matrice résolvante $R_x(t, \tau)$, $t \to R_x(t, \tau)$ étant encore une application continue de (a, b) dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Cette matrice vérifie l'équation différentielle, avec la condition initiale $R_x(\tau, \tau) =$ opérateur identique de $(\mathcal{H})$ dans lui-même. On voit alors immédiatement que l'équation itérée

$$(17,13) \qquad \left[\frac{d}{dt} + A_x(t) \cdot\right]^k U_x(t) = 0$$

a aussi son problème de Cauchy uniformément bien posé et a pour matrice résolvante (au sens de la remarque qui termine le § 16) :

$$(17,14) \qquad R_x^{(k)}(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} R_x(t, \tau).$$

B) La résolvante de l'équation de la chaleur relative à X^n s'obtient en élevant à la puissance n-ième (pour la multiplication ordinaire) celle qui correspond à $n = 1$ [22].

[22] C'est à la suite d'une conversation avec M. Garnir que j'indique cette propriété.

Plus généralement soient

$$(17,15) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} U_x(t) + A_x(t) \cdot U_x(t) = 0, \\ \dfrac{d}{dt} V_y(t) + B_y(t) \cdot V_y(t) = 0, \end{cases}$$

deux systèmes d'évolution très généraux (non nécessairement du type de composition; voir A), relatifs à deux espaces X^m et Y^n. Supposons leurs problèmes de Cauchy uniformément bien posés, et soient $R_x(t, \tau)$ et $S_y(t, \tau)$ leurs matrices résolvantes.

On peut alors former le système d'évolution sur $Z^p = X^m \times Y^n$:

$$(17,16) \quad \frac{d}{dt} W_{x,y}(t) + \Big[A_x(t) + B_y(t)\Big] \cdot W_{x,y}(t) = 0.$$

On devra cette fois faire sur les espaces $(\mathcal{H})_x$ et $(\mathcal{H})_y$ considérés des restrictions telles que leurs produit « tensoriel » puisse être défini (avec d'honnêtes propriétés), alors $W_{x,y} \in (\mathcal{H})_x \otimes (\mathcal{H})_y$.

Ce système aura alors aussi un problème de Cauchy uniformément bien posé, et sa matrice résolvante sera

$$(17,17) \qquad T_{x,y}(t, \tau) = R_x(t, \tau) \times S_y(t, \tau).$$

C) Pour les équations de la chaleur itérées, le problème de Cauchy est uniformément bien posé (en valeurs initiales) pour l'espace $(\mathcal{H})_x$ des distributions dont le produit par $\exp(-\varepsilon|x|^2)$ est borné sur X^n, quel que soit $\varepsilon > 0$, muni de la topologie suivante: des $T_j \in (\mathcal{H})_x$ convergent vers 0 si, quel que soit $\varepsilon > 0$, les

$$T_j \exp(-\varepsilon|x|^2)$$

convergent vers 0 dans l'espace $(\mathcal{B}')_x$ des distributions bornées sur X^n. $(\mathcal{H})$ a des propriétés analogues à $(\mathcal{O}'_c)$[23].

D) La solution élémentaire $E_x(t)$ (§ 16) est, en dehors de l'origine $x = 0$, $t = 0$, une fonction indéfiniment dérivable en x et t, donc toute distribution (en x et t) solution d'une équation homogène de la chaleur itérée est une fonction indéfiniment dérivable en x et t[24].

(23) Voir « TD », tome II, page 100.
(24) Voir « TD », tome I, page 137, et tome II, page 151.

Exemple III. — *Équation des ondes, hyperbolique.*

$$(17,18)\qquad \frac{d^2}{dt^2}U_x(t) - \Delta_x U_x(t) = 0.$$

$$(17,19)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{U}_y(t) + 4\pi^2|y|^2\mathcal{U}_y(t) = 0.$$

$$(17,20)\qquad \mathcal{U}_y(t) = (\cos 2\pi|y|t)\mathcal{U}_y(0) + \left(\frac{\sin 2\pi|y|t}{2\pi|y|}\right)\left(\frac{d\mathcal{U}}{dt}\right)_y(0).$$

Les fonctions $\cos 2\pi|y|t$ et $\dfrac{\sin 2\pi|y|t}{2\pi|y|}$ sont dans $(\mathcal{O}_M)_y$ et même dans $(\mathcal{B})_y$ (bornées ainsi que toutes leurs dérivées partielles en y). Donc le problème de Cauchy est uniformément bien posé pour tout intervalle de temps fini; indifféremment en valeurs initiales ou finales (système réversible). De plus le système est bien « hyperbolique » au sens du § 13, en vertu du théorème de Paley-Wiener : $\cos 2\pi|y|t$ et $\dfrac{\sin 2\pi|y|t}{2\pi|y|}$ sont des fonctions holomorphes entières de y, de type exponentiel.

Aucune différence n'apparaît, dans la formule de la solution, suivant la parité de n. Mais cette différence va apparaître dans la transformation de Fourier $\overline{\mathcal{F}}_{(y)}$. On trouve les formules suivantes, pour la résolvante :

$$(17,21)\qquad R_x(t) = \overline{\mathcal{F}}_{(y)}\frac{\sin 2\pi|y|t}{2\pi|y|}.$$

D'où les formules suivantes :

$$(17,22)\quad R_x(t) = \left[2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}\mathrm{Pf.}\left[(t^2-|x|^2)^+\right]^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}$$

(avec $a^+ = \sup(a, 0)$), si n est pair ou égal à 1,

$$(17,23)\quad R_x(t) = [1.\ 3.\ 5\cdots(2p-1)]^{-1}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\right)^{p-1}\left(t^{2p-1}\mu_x(t)\right)$$

($\mu_x(t)$ étant la distribution sur X^n formée de la masse $+1$ répandue de façon homogène sur la sphère $|x| = t$), si $n = 2p + 1$ est un nombre impair $\geqslant 3$. On appelle souvent δ_{r-t} la mesure portée par la sphère $|x| = t$, de densité superficielle $+1$ ([25]), de sorte que

$$(17,24)\quad \mu_x(t) = (S_n t^{n-1})^{-1}\delta_{r-t},\qquad S_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right);$$

([25]) Dans un article ultérieur, relatif au changement de variables pour les distributions, nous montrerons que ce langage est entièrement justifié.

S_n est l'aire de la sphère unité. Alors on a aussi pour $n=2p+1$:

$$(17,25) \qquad R_x(t)=\pi^{-p}2^{-(p+1)}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\right)^{p-1}\left(\frac{\delta_{r-t}}{t}\right);$$

et, dans le cas particulièrement important $n=3$:

$$(17,26) \qquad R_x(t)=t\mu_x(t)=\frac{1}{4\pi t}\delta_{n-t}.$$

La solution élémentaire de l'équation des ondes est alors $E_x(t)$ (§ 16, remarque finale), égale à $R_x(t)$ pour $t\geqslant 0$ et à o pour $t<0$.

On peut de même considérer l'équation des ondes itérée

$$(17,27) \qquad \left(\left(\frac{d^2}{dt^2}-\Delta_x\right)\right)^k U_x(t)=0.$$

$$(17,28) \qquad \left(\left(\frac{d^2}{dt^2}+4\pi^2|y|^2\right)\right)^k \mathcal{U}_y(t)=0.$$

La résolvante (§ 4, 6°) est

$$(17,29) \quad \mathcal{R}^{(k)}(y\,;\,t)=\left(\frac{t}{\pi|y|}\right)^{k-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k-1)!}J_{k-\frac{1}{2}}(2\pi|y|t).$$

Pour avoir la transformée de Fourier de cette fonction (qui est holomorphe entière de type exponentiel en y), nous utiliserons la formule suivante :

$$(17,30) \quad \overline{\mathcal{F}}\left\{\mathrm{Pf.}\left[(t^2-|x|^2)^+\right]^\nu\right\}=\pi^{-\nu}\left(\frac{t}{r}\right)^{\frac{n}{2}+\nu}\Gamma(\nu+1)J_{\frac{n}{2}+\nu}(2\pi|x|t).$$

Cette formule est valable sans le symbole Pf. pour $\mathcal{R}\nu>-1$.

Pour $\mathcal{R}\nu\leqslant-1$, elle est valable par prolongement analytique en ν, sauf pour les valeurs singulières, qui sont $\nu=-1, -2, -3\ldots$

Alors, pour n pair, ou pour n impair si $k\geqslant(n+1)/2$,

$$\nu=k-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}$$

n'est pas singulière, et on aura

$$(17,31) \quad R_x^{(k)}(t)=\left[\pi^{\frac{n-1}{2}}2^{2k-1}(k-1)!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\right]^{-1} \times \mathrm{Pf.}\left[(t^2-|x|^2)^+\right]^{k-\frac{n+1}{2}}.$$

Au contraire, si n est impair et $k \leqslant (n-1)/2$, ν est singulière. Nous utiliserons alors la formule

$$(17,32) \qquad \overline{\mathcal{F}}_{(y)}\mu_y(t) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(\pi|x|t)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|t).$$

Alors, de la formule classique

$$(17,33) \qquad \left(\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\right)\left[z^{\nu}J_{\nu}(\lambda z)\right] = \lambda\left[z^{\nu-1}J_{\nu-1}(\lambda z)\right],$$

on déduit

$$(17,34) \quad R_x^{(k)}(t)$$
$$= \left[1.\,3.\,5\cdots(2p-1)2^{k-1}(k-1)!\right]^{-1}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\right)^{p-k}\left(t^{2p-1}\mu_x(t)\right)$$
$$= \left[\pi^{p}2^{p+k}(k-1)!\right]^{-1}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\right)^{p-k}\left(\frac{\delta_{r-t}}{t}\right).$$

Rappelons que, dans les formules (17, 23 et 34) le fait que le support de la solution élémentaire soit sur la surface du cône d'ondes, $t^2-|x|^2=0$, est la mineure du principe de Huygens (26).

Exemple IV. — *Évolution d'une fonction d'ondes en mécanique ondulatoire.*

Dans le cas d'un potentiel nul, la « distribution d'ondes » d'une masse ponctuelle vérifie l'équation d'évolution (28)

$$(17,35) \qquad \frac{d}{dt}\Psi_x(t) - \frac{h}{4i\pi m}\Delta_x\Psi_x(t) = 0.$$

$$(17,36) \qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{U}_y(t) + \frac{h}{4i\pi m}4\pi^2|y|^2\mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

$$(17,37) \qquad \mathcal{R}(y;\, t) = \exp\left(-\frac{h}{im}\pi|y|^2 t\right).$$

Le problème de Cauchy est uniformément bien posé, car $\mathcal{R}(y;\, t)$ est dans $(\mathcal{O}_M)_y$ (27) et réversible (§ 11). La matrice résolvante est

$$(17,38) \quad R_x(t) = [(1+i)\sqrt{m}/\sqrt{2ht}]^n \exp(-i\pi m|x|^2/ht).$$

(26) Voir note 19, page 22.
(27) Voir « TD », tome II, page 126.
(28) Louis de Broglie : « L'électron magnétique », Paris, Hermann, 1934, page 59.

EXEMPLE V. — *Une équation intégro-différentielle.*

$$(17,39)\qquad \frac{d}{dt}U_x(t) - \mu_x(t) \underset{(x)}{*} U_x(t) = 0.$$

$$(17,40)\qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{U}_y(t) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(\pi|y|t)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|y|t)\mathfrak{U}_y(t) = 0.$$

$$(17,41)\qquad \mathcal{R}(y;\, t,\, \tau) = \exp \int_\tau^t \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(\pi|y|\sigma)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|y|\sigma)\right] d\sigma.$$

Comme $\mathcal{R}(y;\, t,\, \tau)$ est une fonction indéfiniment dérivable, bornée sur Y^n ainsi que chacune de ses dérivées, le problème de Cauchy est uniformément bien posé, et le système est réversible (§ 11).

(Parvenu aux Annales en février 1951.)