ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE MOLINO

# Champs d'éléments sur un espace fibré principal différentiable

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, nº 2 (1964), p. 163-219

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_163_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**14**, 2 (1964), 163-220.

# CHAMPS D'ÉLÉMENTS SUR UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE

par Pierre MOLINO

## Introduction.

L'objet de ce travail est de présenter quelques propriétés des connexions infinitésimales dans leur cadre naturel de validité : c'est la notion de champ d'éléments qui fournit pour plusieurs questions ce cadre. Cette notion a déjà été utilisée, par exemple par Aragnol dans [1] sous une forme moins générale. Elle permet d'englober dans une même étude les propriétés classiques des connexions et celles des sous-fibrés principaux, en particulier des G-structures étudiées par Bernard dans [2]. Un champ d'éléments sur un espace fibré principal différentiable est un champ d'éléments de contact sur cet espace invariant par les translations à droite.

Le premier chapitre est un simple rappel de notions élémentaires concernant les espaces fibrés principaux. Pour la cohérence de l'exposé ultérieur on est amené à définir la notion de « forme tensorielle généralisée » sur un espace fibré principal.

Le second chapitre définit et étudie les champs d'éléments sur un espace fibré principal. On établit au paragraphe 6 le théorème d'Ambrose-Singer relatif aux champs d'éléments transitifs. On introduit les champs d'éléments uniformes auxquels peuvent être associées des formes généralisées qui, dans le cas des connexions, s'identifient à la forme de connexion. Dans la seconde partie du chapitre, on définit la différentielle absolue d'une forme tensorielle par rapport à un champ d'éléments uniforme (paragraphe 11). Dans le cas des connexions, on retrouve l'opération classique de différentielle absolue. On définit en particulier la forme de courbure d'un champ d'éléments uniforme. On peut aussi, à l'aide de l'opération ainsi définie, retrouver d'une manière naturelle les classes caractéristiques étudiées par Chern dans [3]. Enfin, dans le cas où l'espace considéré est muni d'une forme de soudure, à une forme tensorielle peut être associé un tenseur dérivé par rapport à un champ d'éléments uniforme. On peut ainsi définir, pour un champ d'éléments uniforme, un tenseur de courbure et un tenseur de torsion. Ce dernier, dans le cas du champ d'éléments associé à une G-structure réelle, n'est autre que le tenseur de structure défini par Bernard. Du même coup se trouve donnée une interprétation de ce tenseur de structure à partir du tenseur de courbure du champ d'éléments affine associé à la G-structure (paragraphe 12).

La subordination, à laquelle est consacré le troisième chapitre, généralise une opération courante en géométrie différentielle globale : celle qui fait correspondre dans certains cas à toute connexion sur un espace fibré principal une connexion « subordonnée » sur un sous-fibré principal. En fait, l'existence d'une telle correspondance est liée à l'existence des connexions invariantes sur un espace homogène, problème traité dans [16] par Wang. Aussi la première partie de ce chapitre reprend-elle cette question en l'intégrant dans une étude des champs d'éléments invariants sur un espace homogène, et en apportant des compléments, notamment une caractérisation locale des espaces homogènes à connexion linéaire invariante (paragraphe 16). Dans la seconde partie du chapitre on étudie les connexions subordonnées, en particulier du point de vue de l'holonomie. Les théorèmes 19-1, 19-2, 19-3, permettent de retrouver certains résultats classiques comme cas particuliers. On indique au paragraphe 20 les extensions possibles de la subordination au cas des champs d'éléments.

Des résultats très partiels relatifs aux connexions invariantes et subordonnées ont été signalés dans [10] et [11]. La brève bibliographie indiquée ne comporte que les références strictement nécessaires à la compréhension de ce travail. En ce qui concerne les notions essentielles, on pourra se référer, au sujet

des groupes de Lie à l'ouvrage de M. Chevalley ([4]), au sujet des fondements de la géométrie différentielle moderne aux travaux de MM. Ehresmann ([5]) et Lichnerowicz ([8]).

M. Lichnerowicz, sous la direction de qui a été effectué ce travail, m'a conseillé utilement et encouragé avec bienveillance. Il est à peine besoin de dire tout ce que je dois à ses leçons comme à ses ouvrages. Je l'en remercie vivement.

Je remercie également M. Ehresmann, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de thèse, et M. Malgrange qui a bien voulu me proposer le second sujet.

Qu'il me soit permis aussi à cette occasion d'exprimer ma gratitude aux Maîtres dont les leçons m'ont donné le goût des Mathématiques, en particulier MM. Julia et Lévy, professeurs à l'École Polytechnique, et MM. Barbotte, Dussol et Vachin, professeurs au Lycée de Montpellier.

Je tiens enfin à dire ma reconnaissance à M. Ullmo qui, outre son enseignement à l'École Polytechnique, m'a donné de précieux encouragements dans les débuts de mon travail de recherche.

# CHAPITRE I

## ESPACES FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES

Dans tout ce travail, différentiable signifiera, sauf avis contraire, indéfiniment différentiable. Les variétés différentiables considérées sont des espaces à base dénombrable d'ouverts.

### 1. Espaces fibrés principaux.

1. Soient $V$ une variété différentiable, $G$ un groupe de Lie, $E$ un ensemble muni d'une projection $p$ sur $V$. Étant donné un recouvrement ouvert $(U_i)$ de $V$, soit $(\varphi_i)$ une famille d'applications associées aux domaines du recouvrement et telles que :

(1.1) $\forall_i$, $\varphi_i$ est une application biunivoque de $U_i \times G$ sur $p^{-1}(U_i)$ vérifiant :

$$(p \circ \varphi_i)(x, g) = x$$

pour tout $x$ dans $U_i$ et tout $g$ dans $G$.

(1.2) pour tout couple $(i, j)$ tel que $U_i \cap U_j$ soit non-vide, $\exists$ une application différentiable $g_{ij}(x)$ de $U_i \cap U_j$ dans $G$ telle que :

$$(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(x, g) = (x, g_{ij}^{-1}(x)g)$$

pour tout $x$ dans $U_i \cap U_j$ et tout $g$ dans $G$.

De la famille $(\varphi_i)$ on déduit une famille maximale $\Phi$ possédant les propriétés précédentes. Par définition, $\Phi$ détermine sur $E$ une structure d'espace fibré principal (par abréviation EFP) de base $V$, groupe structural $G$. Muni de cette structure, E sera noté $E(V, G, p, \Phi)$. On emploiera aussi les notations simplifiées $E(V, G)$ et E lorsque cela ne pourra engendrer de confusions.

$E(V, G, p, \Phi)$ possède une structure naturelle de variété différentiable, obtenue en transportant par les opérations de $\Phi$ les structures différentiables des variétés $U_i \times G$. Les éléments de $\Phi$ sont, compte tenu de cette structure, des homéomorphismes, et seront dits homéomorphismes locaux.

2. Soient $z$ un point de $E(V, G)$, $\varphi$ un homéomorphisme local dont l'image contient $z$. Si $\gamma$ est un élément quelconque de G, et si $(x, g) = \varphi^{-1}(z)$, on posera :

$$D_\gamma z = \varphi(x, g\gamma). \tag{1.3}$$

Le point ainsi obtenu, que l'on notera également $z\gamma$, ne dépend pas de l'homéomorphisme local utilisé pour le définir. Par l'opération $D_\gamma$, le groupe structural G opère différentiablement à droite dans $E(V, G)$. $D_\gamma$ est dite translation à droite définie par l'élément $\gamma$.

La translation $D_\gamma$ applique un vecteur $l$ tangent à E en $z$ sur un vecteur — noté $D_\gamma l$ ou $l\gamma$ — tangent à E en $z\gamma$.

3. Étant donné un ouvert U de V, une section locale de $E(V, G)$ au-dessus de U est par définition une application différentiable $z_U$ de U dans $p^{-1}(U)$ telle que :

$$p \circ z_U = \text{identité sur } U. \tag{1.4}$$

Il y a correspondance biunivoque entre sections locales et homéomorphismes locaux de même domaine. Si par exemple il existe une section globale de $E(V, G)$, c'est-à-dire une section locale au-dessus de V, l'homéomorphisme local correspondant sera un homéomorphisme de $V \times G$ sur $E(V, G)$; ce dernier est alors dit trivial.

4. Considérons sur la variété différentiable V l'ensemble $E_0$ des repères linéaires aux différents points. Un atlas définissant la structure de variété différentiable de V détermine sur $E_0$ une structure d'EFP de base V et groupe structural $G_0 = GL(n, R)$. Muni de cette structure, qui ne dépend pas de l'atlas utilisé mais seulement de la structure différentiable de V, $E_0$ sera noté $E_0(V, G_0)$ ou $E_0(V)$.

## 2. Morphismes; produit fibré.

1. Étant donnés deux EFP, $E(V, G, p, \Phi)$ et

$$E'(V', G', p', \Phi'),$$

une représentation de E dans $E'$ sera par définition une application différentiable $\mathcal{F}$ de E dans $E'$ vérifiant :

(2.1) il existe une application différentiable $f$ de V dans $V'$ telle que :

$$p' \circ \mathcal{F} = f \circ p$$

(2.2) il existe un homomorphisme R de groupes de Lie de G dans $G'$ tel que pour tout $g$ dans G :

$$\mathcal{F} \circ D_g = D_{R(g)} \circ \mathcal{F}$$

$f$ est dite application projetée de $\mathcal{F}$; R est le type de $\mathcal{F}$ et son noyau est le noyau de $\mathcal{F}$.

Soient $E'(V', G', p', \Phi')$ un EFP, V une variété différentiable et $f$ une application différentiable de V dans $V'$. Considérons la partie $E'_{f-1}$ de $E' \times V$ constituée par les couples $(z', x)$ tels que : $p'(z') = f(x)$. On munit de façon naturelle cet ensemble d'une structure d'EFP de base V et groupe structural $G'$, de telle sorte que l'application de $E'_{f-1}$ dans $E'$ qui au couple $(z', x)$ associe le point $z'$ soit une représentation d'EFP. $E'_{f-1}$ est dit image réciproque de $E'$ par $f$.

Si par exemple W est une sous-variété de V, $f$ l'injection de W dans V, l'image réciproque de $E(V, G)$ par $f$ est un EFP, noté $E_W(W, G)$ qui est dit EFP induit par E sur W.

Si de même, $E(V, G)$ étant un EFP quelconque, $\hat{V}$ désigne le revêtement universel de la base, l'image réciproque de $E(V, G)$ par la projection de $\hat{V}$ sur V sera un EFP, noté $\hat{E}(\hat{V}, G)$, et appelé EFP relevé de E sur le revêtement universel de la base.

2. Un morphisme d'EFP est par définition une représentation dont l'application projetée est l'application identique de la base sur elle-même. L'image d'un morphisme $\mathcal{F}$ est

munie de façon naturelle d'une structure d'EFP, et $\mathcal{F}$ définit un morphisme surjectif, noté lui aussi $\mathcal{F}$, de E sur $\mathcal{F}(E)$.

Si H est un sous-groupe de Lie de G, et si $\mathfrak{J}$ est un morphisme de $e(V, H)$ dans $E(V, G)$ de type « injection de H dans G », $e(V, H)$ est dit sous-fibré principal (par abréviation SFP) de $E(V, G)$. $\mathfrak{J}$ définit alors un isomorphisme de $e$ sur $\mathfrak{J}(e)$, et on identifie ces deux EFP. L'image de E dans E' par un morphisme $\mathcal{F}$ est un SFP de E'.

Soient par ailleurs $E(V, G)$ un EFP et K un sous-groupe invariant fermé de G. La relation d'équivalence sur E : $z \sim zk$ pour tout $k$ dans K, définit un ensemble quotient E/K. Cette relation d'équivalence étant compatible avec la structure d'EFP, E/K se trouve muni d'une structure d'EFP de base V et groupe structural G/K. $E/K(V, G/K)$ sera dit fibré principal quotient (par abréviation FPQ) de E par K. La projection de E sur E/K apparaît alors comme un morphisme d'EFP.

L'image $\mathcal{F}(E)$ de $E(V, G)$ dans $E'(V, G')$ par un morphisme de noyau K est un EFP isomorphe à E/K.

Remarquons enfin que tout morphisme de $E(V, G)$ dans $E'(V, G')$ induit sur un SFP quelconque $e(V, H)$ de E un morphisme dans E' dont le type est induit sur H par le type du morphisme donné.

3. E/K étant le FPQ de $E(V, G)$ par K, $E(V, G)$ peut être considéré comme EFP de base E/K et de groupe structural K (ce dernier étant muni de sa structure naturelle de sous-groupe de Lie de G). En effet, G peut être considéré comme EFP de base G/K et de groupe structural K. On peut alors, à partir d'un recouvrement ouvert de G/K muni de sections locales dans G, construire un recouvrement ouvert de E/K muni de sections locales à valeurs dans E.

De même, si $\mathcal{F}$ est un morphisme d'EFP de E dans E' de noyau K, E peut être considéré comme EFP de base $\mathcal{F}(E)$ et de groupe structural K. Il en résulte que, si $e'(V, H')$ est un SFP de $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{F}^{-1}(e')$ est un SFP de $E(V, G)$.

4. Soient $E(V, G)$ un EFP, R un homomorphisme de groupes de Lie de G dans G'; considérons sur $E \times G'$

la relation d'équivalence : $(z, g') \sim (zg, R(g^{-1})\, g')$, pour $g$ dans G. On notera $(z, \dot{g}')$ la classe d'équivalence définie par le couple $(z, g')$, $E_R$ l'ensemble de ces classes d'équivalence.

$E_R$ peut être muni d'une structure d'EFP de base V et groupe structural G′, telle que l'application : $z \rightarrow (z, \dot{e}')$ devienne un morphisme $\mathcal{F}^E_R$ d'EFP de type R. Par définition, $\mathcal{F}^E_R$ est le morphisme canonique de type R de E, $E_R$ l'espace de ce morphisme canonique.

5. Soient $E(V, G, p, \Phi)$ et $E'(V, G', p', \Phi')$ deux EFP de même base. Considérons la partie de $E \times E'$ formée des couples $(z, z')$ tels que $p(z) = p'(z')$. Cet ensemble peut être muni d'une structure d'EFP de base V et groupe structural le produit direct $G \times G'$, telle que les applications $(z, z') \rightarrow z$ et $(z, z') \rightarrow z'$ deviennent des morphismes d'EFP. Muni de cette structure, l'ensemble considéré prend le nom de produit fibré de E et E′ et se note $E \boxtimes E'(V, G \times G')$.

Plus généralement, soient $E_1(V, G_1)$ et $E_2(V, G_2)$ deux EFP munis de morphismes respectifs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur $E(V, G)$. La partie de $E_1 \times E_2$ formée des couples $(z_1, z_2)$ tels que : $\mathcal{F}_1(z_1) = \mathcal{F}_2(z_2)$ peut être munie d'une structure d'EFP telle que les applications $(z_1, z_2) \rightarrow z_1$ et $(z_1, z_2) \rightarrow z_2$ deviennent des morphismes d'EFP. On note l'ensemble considéré $E_1 \underset{E}{\boxtimes} E_2$ et on l'appelle produit fibré généralisé de $E_1$ (muni du morphisme $\mathcal{F}_1$) et de $E_2$ (muni de $\mathcal{F}_2$). C'est un EFP de base V et de groupe structural le produit fibré de $G_1(G, K_1)$ et de $G_2(G, K_2)$. Il est muni de morphismes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{F}$ respectivement sur $E_1$, $E_2$ et E, tels que :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{L}_1 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{L}_2.$$

### 3. Espaces fibrés.

1. Soient F une variété différentiable et G un groupe de Lie opérant différentiablement et effectivement sur la variété F. On définira alors la notion d'espace fibré (par abréviation EF) de base V, groupe structural G et fibre-type F de façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe 1, n° 1, pour les EFP : les homéomorphismes locaux $\varphi_i$ seront dans ce

cas des applications biunivoques de $U_i \times F$ sur $p^{-1}(U_i)$. Un EF sera muni d'une structure naturelle de variété différentiable. Un EF. E, de base V, groupe structural G et fibre-type F sera noté $E(V, G, F, p, \Phi)$, où $p$ désigne la projection sur la base et $\Phi$ la famille des homéomorphismes locaux. On utilisera également les notations abrégées $E(V, G, F)$ ou E.

Les notions de section locale et de section globale se définissent comme dans le cas des EFP. Mais il est important de remarquer que si un homéomorphisme local définit une section locale de même domaine, la réciproque n'est plus exacte. Par suite, il y a lieu de distinguer entre un EF admettant une section globale et un EF trivial, c'est-à-dire homéomorphe au produit de sa base par sa fibre-type.

2. Il est clair que un EFP est un EF dont la fibre-type s'identifie au groupe structural, ce dernier opérant sur lui-même par translations à gauche. A tout EF $E(V, G, F)$ on peut associer un EFP noté $E_s(V, G)$ qui sera dit EFP structural de E, obtenu de la manière suivante : sur chaque fibre $p^{-1}(x)$ de E les homéomorphismes locaux définissent un ensemble $G_x$ d'homéomorphismes sur la fibre-type. L'ensemble de ces homéomorphismes pour les différentes fibres de E constitue un EFP de base V et groupe structural G. Dans le cas d'un EFP, l'EFP structural s'identifie à l'EFP donné.

Sur une variété différentiable V, l'ensemble des vecteurs tangents constitue un EF, noté T(V), de base V, groupe structural $GL(n, R)$ et fibre-type $R^n$. Son EFP structural est $E_0(V)$. T(V) est un exemple d'EF à fibre vectorielle.

A tout EFP E(V,G) on peut associer un EF à fibre vectorielle noté $T_V(E)$ et appelé EF tangent de E : $T_V(E)$ est le quotient de l'espace T(E) des vecteurs tangents à E par la relation d'équivalence : $l \sim D_g l$ pour $g$ dans G.

3. Soient $E(V, G, F, p, \Phi)$ et $E'(V, G', F', p', \Phi')$ deux EF de même base, $E_s$ et $E'_s$ leurs EFP structuraux respectifs. Soient R un homomorphisme de groupes de Lie de G dans G', $f$ une application différentiable de F dans F', $\mathcal{F}_s$ un morphisme d'EFP de type R de $E_s$ dans $E'_s$. On appellera alors morphisme de E dans E' de type $f$

et de morphisme structural $\mathcal{F}_s$ une application différentiable $\mathcal{F}$ de E dans E′ telle que :

(3.1) $$p' \circ \mathcal{F} = p$$

(3.2) quel que soit le point $z_s$ de $E_s$ de projection $x$, on a le diagramme commutatif d'applications différentiables :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & p'^{-1}(x') \\ \uparrow{\scriptstyle z_s} & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{F}_s(z_s)} \\ F & \xrightarrow{f} & F' \end{array}$$

On remarquera que (3.2) entraîne la condition de compatibilité :

(3.3) $\quad f \circ g = R(g) \circ f$ pour tout $g$ dans G.

Réciproquement, la donnée d'un morphisme $\mathcal{F}_s$ de type R de $E_s$ dans $E'_s$ et d'une application différentiable $f$ de F dans F′, compatibles au sens de (3.3), définit d'une manière unique un morphisme $\mathcal{F}$ de E dans E′.

Un morphisme d'EFP est bien un cas particulier de morphisme d'EF. Notons d'ailleurs qu'entre deux EFP il n'existe pas d'autres morphismes d'EF que leurs morphismes d'EFP, ceci en raison de la condition de compatibilité.

Soient E(V, G, F) un EF, $E_s$(V, G) son EFP structural. Tout point $y$ de F définit un morphisme $\mathcal{F}_y$ d'EF de $E_s$ dans E par la formule :

(3.4) $$\mathcal{F}_y(z_s) = z_s(y).$$

Le type de ce morphisme est l'application $g \to gy$ de G dans F. Son morphisme structural est le morphisme identique de $E_s$.

4. Soient E(V, G, F) un EF, R un homomorphisme de G dans le groupe de Lie G′, $f$ une application différentiable de F dans F′, variété sur laquelle G′ opère différentiablement et effectivement. $f$ et R sont supposés compatibles au sens de (3.3).

Considérons alors sur le produit $E_s \times F'$ la relation d'équivalence :

$$(z_s, y') \sim (z_s g, R(g^{-1})y') \quad \text{pour } g \text{ dans G.}$$

L'ensemble quotient est muni d'une façon naturelle d'une structure d'EF de base V, groupe structural $G'$ et fibre-type $F'$. On le notera $E_R^{F'}$ en remarquant qu'il ne dépend pas de l'application $f$. Son EFP structural n'est autre que l'espace $E_{s_R}$ du morphisme canonique de type R de $E_s$. Ce morphisme canonique et $f$ sont compatibles par hypothèse et déterminent donc un morphisme canonique $\mathcal{F}_{f,R}^E$ de E dans $E_R^{F'}$.

5. La notion de produit fibré s'étend sans difficultés au cas des EF.

## 4. Tenseurs; formes tensorielles.

1. Soient $E(V, G)$ un EFP, R un homomorphisme de groupes de Lie de G dans $G'$ opérant différentiablement et effectivement sur la variété F. On peut, comme au paragraphe précédent, définir $E_R^F$, espace fibré de base V, groupe structural $G'$ et fibre-type F. Dans ce cas $E_R^F$ est dit espace fibré des tenseurs sur E à valeurs dans F de type R. L'EFP structural de $E_R^F$ sera l'espace $E_R$ du morphisme canonique de type R de E. Tout point $y$ de F définit un morphisme $\mathcal{F}_{y,R}^E$ de E dans $E_R^F$ par la correspondance :

$$z \rightarrow \text{classe d'équivalence de } (z, y)$$

Plus précisément, un tenseur $t$ sur E à valeurs dans F de type R sera une section globale de $E_R^F$. La donnée d'une telle section globale est la donnée d'une classe d'équivalence de $E \times F$ pour chaque point de V, dépendant différentiablement de ce point. Par suite, la donnée de $t$ équivaut à celle d'une application différentiable, notée elle aussi $t$, de E dans F, vérifiant :

$$(4.1) \qquad t(zg) = R(g^{-1})t(z) \text{ pour tout } g \text{ dans } G.$$

On réserve souvent le mot de tenseur pour le cas où la variété F est un espace vectoriel et où $G'$ est le groupe linéaire correspondant. Nous dirons dans ce cas que l'on a un tenseur linéaire.

Si pour tout $y$ dans F l'application $g \rightarrow (R(g)y)$ est injective, les tenseurs correspondants seront dits injectifs.

Si $R(G)$ opère transitivement sur $F$, les tenseurs seront dits intérieurs.

2. Soient $E(V, G)$ un EFP, $e(V, H)$ un SFP de $E$ dont le groupe structural est fermé dans $G$. Soit $H_0$ le plus grand sous-groupe de $H$ invariant dans $G$; on désigne par $R_0$ l'homomorphisme canonique de $G$ sur $G' = G/H_0$. $G'$ opère différentiablement et effectivement sur $F_0 = G/H$. On voit alors que $e(V, H)$ définit un tenseur $t_e$ sur $E$ à valeurs dans $F_0$ de type $R_0$. $t_e$ est un tenseur intérieur.

Réciproquement, supposons qu'il existe sur $E(V, G)$ un tenseur intérieur à valeurs dans $F_0 = G/H$ et de type $R_0$. On peut, de façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe 2, n° 3, montrer que $E$ est fibré principal de base $E_{R_0}^{F_0}$ et groupe structural $H$, et que la section globale $t$ de $E_{R_0}^{F_0}$ détermine par image réciproque un SFP $e(V, H)$ de $E(V, G)$.

En résumé, la donnée d'un SFP $e(V, H)$ de $E(V, G)$ à groupe structural fermé dans $G$ est équivalente à la donnée sur $E$ d'un tenseur intérieur. Tenseur et SFP seront dits associés l'un à l'autre.

3. Étant donnés deux EF, $E(V, G, F)$ et $E'(V, G', F')$ de même base, le produit fibré $E \boxtimes E'$ admet pour EFP structural le produit fibré des EFP structuraux respectifs de $E$ et $E'$. Par suite, on voit ce qu'on doit entendre par produit fibré de deux tenseurs quelconques : si $t$ et $t'$ sont des tenseurs respectivement sur $E(V, G)$ et $E'(V, G')$, à valeurs dans $F$ et $F'$, de types $R$ et $R'$, $t \boxtimes t'$ sera un tenseur sur $E \boxtimes E'$ à valeurs dans $F \times F'$, de type $R \times R'$.

Notons que la donnée d'un tenseur sur $E \boxtimes E'$ à valeurs dans $F \times F'$ de type $R \times R'$ détermine réciproquement un couple de tenseurs respectivement sur $E$ et $E'$, à valeurs dans $F$ et $F'$, de types $R$ et $R'$.

Lorsque $E$ et $E'$ sont identiques, $t \boxtimes t'$ pourra également être considéré comme un tenseur sur $E$ à valeurs dans $F \times F'$, son type étant toujours noté $R \times R'$.

4. Dans le cas linéaire, on peut définir le produit tensoriel de deux espaces fibrés vectoriels de même base : ce sera la réunion des produits tensoriels des fibres respectives des deux espaces correspondant au même point de la base. Sur cet ensemble, la donnée d'un recouvrement ouvert de la base muni

d'homéomorphismes locaux des deux EF déterminera une structure d'EF. Le produit tensoriel se note

$$E \otimes E'(V, G \times G', F \otimes F').$$

Son EFP structural est le produit fibré des EFP structuraux respectifs des deux espaces. Par suite, on pourra définir le produit tensoriel $t \otimes t'$ de deux tenseurs linéaires. Si R et R′ sont les types respectifs de $t$ et $t'$, le type de $t \otimes t'$ sera noté $R \otimes R'$.

Comme il n'existe pas de morphisme canonique du produit tensoriel sur ses composantes, les tenseurs à valeurs dans $F \otimes F'$ de type $R \otimes R'$ ne sont pas en général produits tensoriels de tenseurs respectivement à valeurs dans F et F′ et de types R et R′.

Le produit de deux tenseurs linéaires $t$ et $t'$ sur le même EFP $E(V, G)$, respectivement à valeurs dans F et F′ et de types R et R′, peut être considéré comme un tenseur sur E. Son type sera encore noté $R \otimes R'$.

D'une façon analogue, on peut définir dans le cas linéaire le produit extérieur d'un EF par lui-même. On pourra donc introduire le produit extérieur de deux tenseurs linéaires sur $E(V, G)$ à valeurs dans F de type R. Ce sera un tenseur sur E à valeurs dans $F \wedge F$, dont le type sera noté $R \wedge R$. Plus généralement, on définira les $q$-tenseurs sur E à valeurs dans F, qui seront les tenseurs sur E à valeurs dans $\wedge^{(q)}F$, de type $\wedge^{(q)}R$.

5. L'espace des vecteurs tangents sur une variété différentiable, celui des tenseurs d'un type donné, celui des formes extérieures d'un degré donné, sont des EF vectoriels dont l'EFP structural est l'EFP des repères linéaires de la variété, $E_0(V)$. Ce sont des espaces de tenseurs sur $E_0(V)$ à valeurs dans l'espace des tenseurs correspondants de $R^n$.

Par exemple, l'espace des $q$-formes différentielles sur V est l'espace des tenseurs sur $E_0(V)$ à valeurs dans l'espace $\wedge^{(q)}$ des formes extérieures de degré $q$ sur $R^n$. On notera cet espace $E_0^{(q)}(V, GL(n, R), \wedge^{(q)})$.

Ceci étant, soient $E(V, G)$ un EFP, R une représentation linéaire de G dans l'espace vectoriel M. Une $q$-forme tensorielle sur E à valeurs dans M de type R sera par définition un tenseur sur $E \boxtimes E_0$ à valeurs dans $M \otimes \wedge^{(q)}$, c'est-à-dire une section globale de $E_R^M \otimes E_0^{(q)}$. A partir de cette définition, il est facile de constater que la donnée d'une $q$-forme tensorielle $\alpha$ sur $E(V, G)$ à valeurs dans $M$ de type $R$ est équivalente à celle d'une $q$-forme sur $E(V, G)$ à valeurs dans $M$, notée elle aussi $\alpha$, et vérifiant :

(4.2) $\alpha(v_1, \ldots, v_q) = 0$ si l'un des vecteurs $v_i$ est vertical

(4.3) $$\alpha \circ D_g = R(g^{-1}) \circ \alpha.$$

On rappelle par ailleurs que, $\alpha$ étant une $q$-forme sur la variété $V$ à valeurs dans $M$, elle pourra s'écrire, $e_i$ étant une base de $M$ :

(4.4) $$\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes e_i$$

où les $\alpha_i$ sont des $q$-formes scalaires.

La différentielle de $\alpha$ est alors par définition la $q+1$ forme à valeurs dans $M$ :

(4.5) $$d\alpha = \sum_i d\alpha_i \otimes e_i.$$

On voit que la différentielle d'une forme tensorielle n'est pas en général une forme tensorielle.

6. On peut généraliser les produits tensoriels et extérieurs au cas des EF quelconques de la manière suivante :

Soient $E(V, G, F)$ un EF, $\mathfrak{V}(E)$ l'ensemble des vecteurs tangents verticaux à cet espace. $\mathfrak{V}(E)$ peut être considéré comme EF de base $V$, groupe structural $G$, fibre-type $T(F)$, et noté par conséquent $\mathfrak{V}(E)(V, G, T(F))$. On définit de même $\mathfrak{V}(E')(V, G', T(F'))$.

Considérons alors en chaque point $(z, z')$ de $F \times F'$ le produit tensoriel de l'espace tangent à $F$ en $z$ par l'espace tangent à $F'$ en $z'$. La réunion de tous ces produits tensoriels est une nouvelle variété, notée $T(F) \otimes T(F')$. $G \times G'$ opère dans cette variété, et l'on pourra alors définir le produit tensoriel généralisé :

$$\mathfrak{V}(E) \otimes \mathfrak{V}(E')(V, G \times G', T(F) \otimes T(F'))$$

dont l'EFP structural est le produit fibré des EFP structuraux respectifs de $E$ et $E'$.

On voit par suite ce que l'on entend par tenseur sur le produit fibré de deux EFP, $E(V, G)$ et $E'(V, G')$, à valeurs dans $T(F) \otimes T(F')$. Le type d'un tel tenseur, R et R' étant les types respectifs des tenseurs sur E et E' à valeurs dans F et F', sera noté $T(R) \otimes T(R')$.

Le cas linéaire peut être retrouvé à partir de cette construction par l'identification canonique des espaces tangents aux différents points d'un espace vectoriel avec cet espace lui-même.

Soient $E(V, G)$ un EFP, R un homomorphisme de G dans un groupe de Lie G' opérant différentiablement et effectivement dans la variété F. Une $q$-forme tensorielle sur $E(V, G)$ à valeurs dans F de type R sera, si $q \neq 0$, un tenseur sur $E \boxtimes E_0$ à valeurs dans $T(F) \otimes \Lambda^{(q)}$, c'est-à-dire une section globale de $\mathfrak{V}(E_R^F) \otimes E_0^{(q)}$. Une 0-forme tensorielle d'un type donné sera par définition un tenseur du même type. A toute forme tensorielle est sous-jacent un tenseur du même type, dont la valeur en un point est l'origine commune des vecteurs définis par la forme tensorielle.

En particulier, en prenant pour E le fibré trivial $V \times \{e\}$, se trouve définie la notion de $q$-forme à valeurs dans une variété différentiable, et celle d'application sous-jacente à une telle $q$-forme généralisée. Une $q$-forme tensorielle sur $E(V, G)$ est alors une $q$-forme sur cet espace vérifiant les conditions (4.2) et (4.3).

# CHAPITRE II

## CHAMPS D'ÉLÉMENTS

### A. Notions générales.

#### 5. Définitions.

1. Soient $E(V, G)$ un EFP, $\mathfrak{T}_z$ l'espace vectoriel tangent à $E$ en un point $z$, $\mathfrak{V}_z$ le sous-espace des vecteurs tangents verticaux. Soit $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de $G$. Si $l$ est un élément de $\underline{G}$, on en déduit un champ $gl$ de vecteurs sur $G$ invariant à gauche. Un homéomorphisme local de domaine $U$ permet à partir de ce champ de définir un champ de vecteurs verticaux sur $p^{-1}(U)$. Le vecteur de ce champ en un point $z$ ne dépend pas de l'homéomorphisme local considéré. On obtient par suite un champ de vecteurs sur l'EFP tout entier qui sera dit champ de vecteurs engendré par $l$. Le vecteur en $z$ de ce champ sera noté $z.l$. On aura la relation :

$$(5.1) \qquad D_g(z.l) = zg.(adj\ g^{-1}l).$$

De plus, le crochet des champs engendrés par deux éléments $l$ et $l'$ de $\underline{G}$ vérifie :

$$(5.2) \qquad [z.l, z.l'] = z.[l, l']$$

et par suite les champs de vecteurs engendrés par l'algèbre de Lie $\underline{G}$ forment une algèbre de Lie de champs de vecteurs verticaux isomorphe à $\underline{G}$.

Réciproquement, un vecteur vertical $v_z$ en un point $z$ de $E(V, G)$ détermine un élément unique de $\underline{G}$ qui l'engendre. Cet élément, noté $u(v_z)$, sera dit élément de $\underline{G}$ déterminé par $v_z$. On aura les relations :

$$(5.3) \qquad u(D_g v_z) = adj\ g^{-1}u(v_z) \qquad \text{et} \qquad u(z.l) = l.$$

De la même manière, tout sous-espace N de $\underline{G}$ engendre un sous-espace vertical en chaque point de E(V, G), et réciproquement un sous-espace vertical $\mathcal{N}_z$ en un point $z$ de E(V, G) détermine un sous-espace de $\underline{G}$ qui l'engendre. Ce qui justifie les notations $z.\mathrm{N}$ et $u(\mathcal{N}_z)$ avec :

$$u(z.\mathrm{N}) = \mathrm{N}. \tag{5.4}$$

2. Sur l'ensemble des vecteurs verticaux de E(V, G), considérons la relation d'équivalence :

$$v_z \sim \mathrm{D}_g v_z \quad \text{pour } g \text{ dans G.}$$

L'ensemble quotient se trouve muni d'une façon naturelle d'une structure d'EF de base V, groupe structural *adj*(G) et fibre-type $\underline{G}$. On le notera $\mathcal{L}$(E), et, tenant compte de la terminologie d'Aragnol (voir [1]), on l'appellera Fibré de Lie de E(V, G). L'EFP structural de $\mathcal{L}$(E) est l'image *adj*(E) du morphisme canonique de type *adj*. de E.

En effet, étant donné un repère $(l_0, \ldots, l_p)$ de $\underline{G}$, on en déduit en tout point $z$ de E le repère vertical $(z.l_0, \ldots, z.l_p)$, et ce dernier détermine un repère de la fibre correspondante de $\mathcal{L}$(E), c'est-à-dire un point de son EFP structural.

On pourra également utiliser les notations $\mathrm{E}^{\underline{G}}_{adj}$ et $\mathrm{E}_{adj}$ pour désigner respectivement $\mathcal{L}$(E) et *adj*(E), ces nouvelles notations correspondant aux conventions générales du chapitre précédent.

3. Un champ d'éléments (par abréviation CE) sur E(V, G) de dimension $p$ sera un système de Pfaff sur E tel que le champ de $p$-plans défini par ce système soit invariant par les translations à droite (au sujet des systèmes de Pfaff, voir [8] pages 39-41).

Soit $\mathrm{M}_z$ le sous-espace ainsi défini en chaque point $z$ de E. $\mathrm{M}_z$ dépend de façon différentiable de $z$ et vérifie

$$\mathrm{M}_{zg} = \mathrm{D}_g \mathrm{M}_z.$$

Par définition, $\mathrm{M}_z$ est l'élément du champ en $z$. Un CE est dit transverse si $\mathrm{M}_z \cap \mathcal{V}_z = 0$ en tout point, transitif si $\mathcal{T}_z = \mathrm{M}_z + \mathcal{V}_z$ en tout point. Un CE transverse et transitif est par définition une connexion infinitésimale (par abréviation CI). Un CE est dit intégrable si le système de Pfaff associé est complètement intégrable.

Étant donné un CE sur E(V, G), un vecteur tangent à E en un point $z$ est dit horizontal par rapport au CE s'il est contenu dans l'élément du champ en $z$. Un chemin $z(t)$ de E(V, G) est dit horizontal si les vecteurs tangents à ce chemin en chacun de ses points sont horizontaux.

On appelle groupe d'holonomie $P_z$ du CE $M_z$ en un point $z$ l'ensemble des éléments $g$ de G tels que $z$ et $zg^{-1}$ puissent être joints par un chemin horizontal par rapport au champ. On vérifie immédiatement que c'est un groupe et que de plus :

$$P_{zg} = adj\ g^{-1} P_z$$

pour tout $g$ dans G.

$$P_z = P_{z'}$$

si $z$ et $z'$ peuvent être joints par un chemin horizontal.

On appellera nappe d'holonomie $H_z$ du CE en $z$ l'ensemble des points de E(V, G) qui peuvent être reliés à $z$ par un chemin horizontal.

### 6. Champs d'éléments transitifs.

Soit $M_z$ un CE transitif sur E(V, G).

1. Il existe une CI, dont l'élément au point $z$ sera noté $m_z$, contenue dans le champ $M_z$, c'est-à-dire telle qu'en tout point $z$ de E $m_z \subset M_z$.

Considérons en effet l'EF tangent $T_V(E)$ de E. Sur cet espace, regardé comme variété différentiable, on peut construire une métrique riemannienne. Cette métrique définit une orthogonalité dans les fibres vectorielles de $T_V(E)$. Par ailleurs, le champ $M_z$ définit un champ de sous-espaces des fibres vectorielles de $T_V(E)$. La métrique précédente induit une métrique dans ces nouveaux sous-espaces. Si l'on considère alors dans ces sous-espaces le champ orthogonal à leur partie verticale, il engendre dans T(E) un champ $m_z$ répondant à la question.

2. Étant donnée une CI, il existe un chemin et un seul de l'EFP issu d'un point donné, se projetant suivant un chemin donné de la base et horizontal par rapport à la CI : on l'obtient comme variété intégrale d'un champ de vecteurs.

Ceci étant, soient $z_0$ un point de $E(V, G)$ et $x_0$ sa projection sur $V$. $x_1$ étant un point de $V$, $l_{x_0 x_1}$ un chemin de $V$ d'origine $x_0$ et d'extrémité $x_1$, on désignera par $z_1$ l'extrémité du chemin d'origine $z_0$, se projetant suivant $l_{x_0 x_1}$ et horizontal par rapport à $m_z$. Si alors $V_1$ est un voisinage de $x_1$ homéomorphe à la boule unité de $R^n$, de sorte que $x_1$ soit l'image de l'origine, on construira les chemins d'origine $z_1$, se projetant suivant les rayons de $V_1$, et horizontaux par rapport à $m_z$. Grâce à cette construction, on peut obtenir un recouvrement de $V$ muni de sections locales à valeurs dans la nappe d'holonomie $H_{z_0}$ du champ $M_z$ en $z_0$. Si alors on considère le groupe d'holonomie $P_{z_0}$ du CE en $z_0$ comme sous-groupe de Lie de $G$ (il peut toujours être muni d'une structure de sous-groupe de Lie de $G$), $H_{z_0}$ apparaît comme un SFP de $E(V, G)$ de groupe structural $P_{z_0}$. Notons que, si $P_{z_0}$ n'est pas fermé dans $G$, la structure de sous-variété de $E$ dont $H_{z_0}$ se trouve ainsi muni définit en général une topologie différente de celle induite par la topologie de $E$.

3. Soit maintenant $e(V, H)$ un SFP de $E(V, G)$. Considérons les sous-espaces de $\mathcal{C}_z$ définis en chaque point $z$ de $e(V, H)$ par le sous-espace tangent à $e$, et les sous-espaces qui se déduisent des précédents par les translations à droite de $E(V, G)$. Ces sous-espaces constituent un CE intégrable qui est dit CE défini par le SFP.

Réciproquement, soit $M_z$ un CE transitif intégrable sur $E(V, G)$. La variété intégrale maximale de ce champ passant par le point $z_0$ de $E$ s'identifie à la nappe d'holonomie $H_{z_0}$ du CE en $z_0$. Elle définit donc un SFP tel que le CE défini par ce SFP coïncide avec le CE donné. On a en particulier, $\underline{P}_{z_0}$ désignant l'algèbre de Lie du groupe $P_{z_0}$ :

$$u(M_{z_0} \cap \mathcal{V}_{z_0}) = \underline{P}_{z_0}. \tag{6.1}$$

Plus généralement, étant donné un CE transitif $M_z$, on désignera par CE transitif intégrable engendré par $M_z$ le CE — notée $\overline{M}_z$ — défini par les nappes d'holonomie du CE considéré. Il est clair que $\overline{M}_z$ est le CE intégrable minimal (pour la relation d'ordre définie par l'inclusion de l'élément de champ en chaque point) contenant $M_z$.

4. Soit $M_z$ un CE transitif. Considérons le crochet de deux champs de vecteurs horizontaux. Le vecteur défini au point $z$ par ce crochet engendre, lorsque on fait varier les champs de vecteurs considérés, un sous-espace noté $[M_z, M_z]$ de $\mathcal{T}_z$. Naturellement, l'ensemble des sous-espaces ainsi définis ne constitue pas en général un CE sur E.

La condition classique d'intégrabilité des systèmes de Pfaff équivaut à :

$$[M_z, M_z] \subset M_z \quad \text{pour tout } z. \tag{6,2}$$

De cette condition on peut déduire deux résultats importants sur l'holonomie des CE transitifs.

En premier lieu, $M_z$ étant un CE transitif quelconque, posons :

$$\tilde{M}_z = M_z + [M_z, M_z].$$

On aura naturellement $\overline{M}_z \supset \tilde{M}_z$ et par suite

$$\underline{P}_{z_0} \supset u(\tilde{M}_z \cap \mathcal{V}_z)$$

pour tout $z$ dans $H_{z_0}$. Soit alors $L_{z_0}$ l'algèbre de Lie engendrée dans $\underline{G}$ par les éléments de cette forme. Posons :

$$M'_{z_0} = M_{z_0} + z_0 . L_{z_0}$$

$M'_{z_0}$ définit lorsque $z_0$ varie un CE transitif. On vérifie la condition $[M'_z, M'_z] \subset M'_z$ en remarquant que $L_{z_0}$ est un idéal de $\underline{P}_{z_0}$ et en considérant le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite appartenant à $M'_z$ : on décompose ces deux vecteurs (la décomposition n'est pas en général unique) en une partie horizontale par rapport à $M_z$ et une partie verticale, d'où le résultat.

Par suite $M'_z$ est intégrable, et c'est par construction le CE intégrable minimal contenant $M_z$. Donc $\overline{M}_z = M'_z$. C'est le théorème d'Ambrose-Singer étendu aux CE transitifs, que l'on énoncera comme suit :

THÉORÈME. — *L'algèbre de Lie du groupe d'holonomie au point* $z_0$ *du* CE *transitif* $M_z$ *est engendrée par les éléments* $u((M_z + [M_z, M_z]) \cap \mathcal{V}_z)$ *lorsque* $z$ *parcourt la nappe d'holonomie* $H_{z_0}$.

En second lieu, on pourra définir d'une façon évidente les sous-espaces :

$$[M_z, [M_z, M_z]] \text{ etc...}$$

On posera alors :

$$(6,3) \qquad M''_z = M_z + [M_z, M_z] + [M_z, [M_z, M_z]] + \cdots$$

De la condition (6,2) résulte : $\overline{M}_z \supset M''_z$. En un point $z_0$ quelconque, $u(M''_{z_0} \cap \mathfrak{V}_{z_0})$ définit une sous-algèbre de Lie $\underline{P}''_{z_0}$ de $\underline{P}_{z_0}$ que l'on appellera algèbre d'holonomie infinitésimale du CE $M_z$ au point $z_0$.

On a visiblement $[M''_z, M''_z] \subset M''_z$. Il en résulte que, si $M''_z$ est un CE, il coïncide avec $\overline{M}_z$. Dans ce cas on dira que le CE considéré $M_z$ est régulier.

## 7. Champs uniformes.

1. Soient $E(V, G)$ un EFP, $e(V, H)$ un SFP de $E$ et $M_z$ un CE transitif sur $E$. $M_z$ est dit uniforme par rapport à $e$ si en tout point de $e$ $u(M_z \cap \mathfrak{V}_z)$ est un sous-espace $\underline{K}$ de $\underline{H}$ indépendant du point considéré. D'après cette définition, il est clair que $\underline{K}$ est un idéal de $\underline{H}$.

On dira qu'un CE transitif $M_z$ est uniforme s'il existe un SFP $e(V, H)$ de $E(V, G)$ par rapport auquel il est uniforme. En fait, à partir d'un tel SFP on pourra en construire un maximal ayant pour groupe structural le normalisateur de $\underline{K}$ dans $G$, qui est sous-groupe fermé de $G$. On supposera dans la suite que $e(V, H)$ est maximal; il est donc à groupe structural fermé dans $G$, et on peut lui associer le tenseur intérieur $t_e$ à valeurs dans $G/H$. On désignera par $K$ le sous-groupe connexe de $G$ défini par $\underline{K}$.

2. Un CE uniforme $M_z$ est dit connexe si le SFP $e(V, H)$ contient une de ses nappes d'holonomie. En d'autres termes, un CE transitif est connexe s'il est uniforme par rapport à l'une de ses nappes d'holonomie.

L'intérêt de cette nouvelle notion réside dans le fait qu'à tout CE transitif $M_z$ on peut associer un CE connexe de la manière suivante : si $z_0$ est un point de $E(V, G)$, on désignera par $L_{z_0}$ la sous-algèbre de Lie de $\underline{G}$ engendrée par les éléments $u(M_z \cap \mathfrak{V}_z)$ lorsque $z$ parcourt la nappe d'holonomie $H_{z_0}$. Si l'on pose alors :

$M'_{z_0} = M_{z_0} + z_0 . L_{z_0}$, $M'_{z_0}$ est l'élément en $z_0$ d'un CE connexe qui sera dit champ connexe engendré par le champ donné. Il est clair qu'un CE transitif et le champ connexe qu'il engendre admettent les mêmes nappes d'holonomie.

Les champs connexes comprennent comme cas particuliers d'une part les CI, d'autre part les CE intégrables, c'est-à-dire les CE définis par les SFP de l'EFP considéré.

Si $u(M_z \cap \mathcal{V}_z)$ est invariant quel que soit $z$ — c'est alors un idéal de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ — $M_z$ est dit connexion généralisée. Il est clair qu'un CE connexe induit sur une de ses nappes d'holonomie une connexion généralisée.

3. Un champ uniforme peut être muni d'une 1-forme généralisée associée, définie de la façon suivante :

Soient $M_z$ le CE, $e(V, H)$ le SFP de référence (maximal) associé. G étant considéré comme EFP de base $F = G/H$, on sait ce qu'on doit entendre par EF tangent $T_F(G)$. Les sous-espaces tangents à G obtenus à partir de $\underline{K}$ par les translations à gauche déterminent des sous-espaces des fibres de $T_F(G)$, et G opérant à gauche dans $T_F(G)$ laisse invariant le champ de sous-espaces ainsi défini. Par suite G opère sur l'espace $T_F/\underline{K}$ que l'on obtient en prenant les quotients des fibres de $T_F$ par les sous-espaces correspondants.

Soient $z$ un point de $E(V, G)$, $v$ un vecteur tangent à E en $z$. $t_e(z)$ est un point de F. Par ailleurs $u((v + M_z) \cap \mathcal{V}_z)$ engendre sur G par les translations à droite un champ de sous-espaces qui, au-dessus de $t_e(z)$, définit un point de $T_F/\underline{K}$, c'est-à-dire un vecteur tangent à cet espace en un point de F (considéré comme sous-variété de $T_F/\underline{K}$). La correspondance ainsi établie définit sur $E(V, G)$ une 1-forme $\omega$ à valeurs dans $T_F/\underline{K}$ qui vérifie :

— $\omega$ est différentiable,

— si R désigne l'opération de G dans $T_F/\underline{K}$,

$$\omega \circ D_g = R(g^{-1}) \circ \omega,$$

— si $v$ est vertical, $\omega(v)$ est le point de $T_F/\underline{K}$ défini par le champ de vecteurs invariant à droite engendré sur G par $u(v)$.

La 1-forme ainsi associée au champ uniforme dépend du

SFP de référence utilisé $e(V, H)$. En fait on constate que, les SFP de référence se déduisant l'un de l'autre par translation à droite, les formes obtenues en prenant deux SFP de référence distincts sont équivalentes à l'homéomorphisme près défini par un élément de G sur l'espace où elles prennent leurs valeurs.

On vérifie sans peine que, réciproquement, une 1-forme généralisée du type précédent définit un CE uniforme par rapport au SFP $e(V, H)$, et ceci d'une manière univoque.

## 8. Connexions infinitésimales.

On a montré précédemment que tout CE transitif contenait une CI. Il en résulte en particulier l'existence d'une CI sur tout EFP.

1. Soit $M_z$ l'élément en $z$ d'une CI. On a la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{T}_z = M_z + \mathcal{V}_z.$$

Tout vecteur tangent $v$ en $z$ à E peut alors se décomposer en une partie horizontale $\mathcal{H}(v)$ et une partie verticale $\mathcal{V}(v)$. On posera :

$$\omega(v) = u(\mathcal{V}(v)). \tag{8.1}$$

La 1-forme sur E à valeurs dans $\underline{G}$ ainsi définie vérifie les propriétés suivantes, qui sont caractéristiques :

— $\omega$ est différentiable
— $\omega \circ D_g = \text{adj}\, g^{-1} \circ \omega$
— $\omega(v) = u(v)$ si $v$ est vertical.

La 1-forme ainsi associée à la connexion n'est autre que la 1-forme introduite dans le cas des CE uniformes, avec $\underline{K} = 0$ et $G = H$.

D'une façon générale, on note par la même lettre $\omega$ la connexion et la 1-forme associée. La différence de deux formes de connexion sur un EFP est une 1-forme tensorielle à valeurs dans $\underline{G}$ de type adjoint.

2. Soient $z(t)$ un chemin de $E(V, G)$, $x(t)$ sa projection, $z_0(t)$ le chemin horizontal par rapport à $\omega$ qui a même origine et même projection que $z(t)$. Nous avons déjà remar-

qué que $z_0(t)$, obtenu comme variété intégrale d'un champ de vecteurs, est unique. Posons alors :

$$z(t) = z_0(t)\ g(t).$$

On a :

$$dz(t) = (dz_0(t))g(t) + z_0(t)g(t).[g^{-1}(t)\ dg\ (t)]$$

d'où, puisque $z_0(t)$ est horizontal :

$$\omega(dz(t)) = g^{-1}(t)\ dg\ (t) \tag{8.2}$$

formule qui détermine par intégration la fonction $g(t)$, et par suite le chemin $z_0(t).g(t)$ est dit développement de $z(t)$ sur G suivant $\omega$.

D'une façon générale, si $z'(t)$ est le chemin défini par $z'(t) = z(t)g(t)$, de la formule :

$$dz'(t) = (dz(t))g(t) + z(t)g(t).[g^{-1}(t)\ dg(t)]$$

on déduit :

$$\omega(dz'(t)) = \operatorname{adj} g(t)^{-1}\,\omega(dz(t)) + g^{-1}(t)\ dg(t). \tag{8.3}$$

Si maintenant $(U_i)$ est un recouvrement ouvert de V muni de sections locales $(z_i)$, avec $z_j(x) = z_i(x)g_{ij}(x)$, $\omega$ induit sur $p^{-1}(U_i)$ une forme dont l'image réciproque par $z_i$ sera notée $\omega_i$. $\omega_i$ est donc une 1-forme sur $U_i$ à valeurs dans $\underline{G}$. Les formes locales ainsi obtenues vérifient les relations déduites de (8.3) :

$$\omega_j = \operatorname{adj} g_{ij}^{-1}\omega_i + g_{ij}^{-1}\ dg_{ij} \tag{8.4}$$

relations qui sont dites formules de passage d'une forme locale à l'autre.

La donnée d'une CI est équivalente à celle d'un ensemble de formes locales vérifiant les conditions de cohérence (8.4).

3. On peut, en utilisant la construction, signalée au paragraphe 2, de l'EFP relevé d'un EFP donné sur le revêtement universel de la base, se ramener au cas où la base V est simplement connexe.

Or, une CI étant donnée, toute homotopie de lacets de la base peut être relevée en une famille à un paramètre de chemins horizontaux issus d'un même point. Il en résulte que, dans le cas où V est simplement connexe, le groupe d'holonomie d'une connexion en un point est sous-groupe connexe du groupe structural.

4. Soient $E(V, G)$ un EFP, $\omega$ une CI sur $E(V, G)$, $\mathcal{F}$ un morphisme d'EFP de type R de E dans $E'(V, G')$. Les images par $\mathcal{F}$ des éléments de $\omega$, complétées par les translations à droite de $E'$, définissent sur $E'$ une CI qui sera dite image de la précédente par $\mathcal{F}$.

Il est clair que l'image d'un chemin de E horizontal par rapport à $\omega$ est un chemin de $E'$ horizontal par rapport à la connexion image. Par suite, l'image d'une nappe d'holonomie sera une nappe d'holonomie, et l'image $R(P_z)$ du groupe d'holonomie en $z$ de $\omega$ sera le groupe d'holonomie en $\mathcal{F}(z)$ de la connexion image.

5. Soient $\omega$ une CI sur l'espace $E(V, G)$ et $\omega'$ une CI sur l'espace $E'(V, G')$. Sur le produit fibré $E \boxtimes E'$, le couple $(\omega, \omega')$ définit une CI notée $\omega \boxtimes \omega'$ de la manière suivante : si $\nu$ est un vecteur tangent à $E \boxtimes E'$, $\nu_E$ et $\nu_{E'}$ ses projections respectives sur E et $E'$, on pose :

$$(8.5) \qquad (\omega \boxtimes \omega')(\nu) = \omega(\nu_E) + \omega'(\nu_{E'}).$$

La 1-forme ainsi définie est bien une forme de connexion. On obtient donc une nouvelle connexion qui sera dite produit fibré des précédentes. L'image du produit fibré de deux CI par le morphisme canonique de l'EFP produit fibré sur ses composantes est la CI initiale correspondante. Par suite, si $P_{(z,z')}$, $P_z$, $P_{z'}$ sont les groupes d'holonomie respectifs de $\omega \boxtimes \omega'$, $\omega$, $\omega'$ en $(z, z')$, $z$, $z'$, on a :

$$P_{z,z'} = P_z . Q_{z'} . = P_{z'} . Q_z$$

où les signes d'égalité traduisent des isomorphismes et les points des produits directs.

$Q_z$ est un sous-groupe invariant de $P_z$ obtenu de la façon suivante : un lacet de V sera dit $\omega'$-horizontal si son développement suivant $\omega'$ à partir d'un point de $E'$ donne un lacet de $G'$. Alors $Q_z$ est le sous-groupe de $P_z$ obtenu en développant à partir de $z$ suivant $\omega$ les lacets de E dont la projection sur V est $\omega'$-horizontale. On définit $Q_{z'}$ de la même façon, et on pose :

DÉFINITION. — $\omega$ *et* $\omega'$ *sont dites séparées si le groupe d'holonomie de l'une en un point peut être obtenu en développant des lacets dont la projection est horizontale par rapport à l'autre.* On a alors le résultat :

THÉORÈME. — *Soient* $\omega$ et $\omega'$ *deux* CI *respectivement sur* $E(V, G)$ *et* $E'(V, G')$. *Alors, ou bien ces deux connexions sont séparées, ou bien leurs nappes d'holonomie respectives admettent des* FPQ *isomorphes.*

Dans le premier cas le groupe d'holonomie de $\omega \boxtimes \omega'$ est produit direct des groupes d'holonomie respectifs des deux connexions aux points correspondants des EFP composants. Dans le second cas, les images respectives des deux connexions dans les FPQ définis par le théorème coïncident à l'isomorphisme près existant entre ces deux FPQ.

## B. Différentielles absolues.

### 9. Opérations tensorielles.

1. Soient $V$ une variété différentiable, $M$ un espace vectoriel de dimension finie $r$, $\alpha$ une $p$-forme sur $V$ à valeurs dans $M$, $\eta$ une $q$-forme sur $V$ à valeurs dans l'algèbre des matrices linéaires de dimension $r$ opérant sur $M$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $M$ et $\varepsilon^\alpha_\beta$ la base de l'algèbre des matrices de $M$ définie par :

$$\varepsilon^\alpha_\beta(e_\gamma) = \delta^\gamma_\beta e_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1,2 \ldots, r).$$

On peut alors poser :

$$\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \alpha_\alpha \otimes e_\alpha \qquad \text{et} \qquad \eta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \eta_{\alpha\beta} \otimes \varepsilon^\alpha_\beta$$

où les $\alpha_\alpha$ et les $\eta_{\alpha\beta}$ sont des formes scalaires de degrés respectifs $p$ et $q$. Ceci étant, on posera :

$$(9.1) \qquad \eta . \alpha = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} (\eta_{\alpha\beta} \wedge \alpha_\beta) \otimes e_\alpha.$$

2. Si $\eta$ et $\eta'$ sont deux formes à valeurs dans l'algèbre des matrices linéaires de M :

$$\eta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \eta_{\alpha\beta} \otimes \varepsilon_{\beta}^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \eta' = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \eta'_{\alpha\beta} \otimes \varepsilon_{\beta}^{\alpha}$$

on posera par définition :

$$\eta . \eta' = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{r} (\eta_{\alpha\gamma} \wedge \eta'_{\gamma\beta}) \otimes \varepsilon_{\beta}^{\alpha} \tag{9.2}$$

d'où la formule d'associativité :

$$\eta . (\eta' . \alpha) = (\eta . \eta') . \alpha. \tag{9.3}$$

Enfin, si l'on munit l'algèbre des matrices de sa structure naturelle d'algèbre de Lie :

$$[A, B] = AB - BA,$$

on peut poser :

$$[\eta, \eta'] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{r} (\eta_{\alpha\beta} \wedge \eta'_{\gamma\delta}) \otimes [\varepsilon_{\beta}^{\alpha}, \varepsilon_{\delta}^{\gamma}]$$

soit, $q$ et $q'$ étant les degrés respectifs de $\eta$ et $\eta'$,

$$[\eta, \eta'] = \eta . \eta' + (-1)^{qq'+1} \eta' . \eta \tag{9.4}$$

On en déduit :

$$[\eta, \eta'] = (-1)^{qq'+1} [\eta', \eta]$$

3. Soient $\alpha$ une $p$-forme sur V à valeurs dans M, G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\underline{G}$ et R un homomorphisme de groupes de Lie de G dans GL(M). R définit un homomorphisme $\underline{R}$ de $\underline{G}$ dans l'algèbre de Lie $\underline{GL(M)}$ des matrices linéaires de M. Si alors $\eta$ est une $q$-forme sur V à valeurs dans $\underline{G}$, on posera, $(\lambda_i)$ désignant une base de $\underline{G}$ :

$$\underline{R}(\eta) = \sum_{i} \eta_i \otimes \underline{R}(\lambda_i) = \sum_{\alpha,\beta} \underline{R}(\eta)_{\alpha\beta} \otimes \varepsilon_{\beta}^{\alpha}$$

d'où

$$\underline{R}(\eta)_{\alpha\beta} = \sum_{i} \eta_i R(\lambda_i)_{\alpha\beta}$$

Au sujet des opérations tensorielles, on pourra trouver des compléments dans [2].

### 10. Différentielle absolue par rapport à une CI.

1. Soient E(V, G) un EFP, $\omega$ une CI sur E, R un homomorphisme de G dans le groupe linéaire des matrices de l'espace vectoriel M de dimension $r$.

Si $\alpha$ est une $p$-forme sur E à valeurs dans M, $d\alpha$ sa différentielle extérieure, on appelle différentielle absolue de $\alpha$ par rapport à $\omega$ la $(p+1)$-forme définie par :

$$(10.1) \qquad \nabla_\omega \alpha(v_0, \ldots, v_p) = d\alpha(\mathcal{H}(v_0), \ldots, \mathcal{H}(v_p)).$$

Si $\alpha$ vérifie la relation : $\alpha \circ Dg = R(g^{-1}) \circ \alpha$, on en déduit que $\nabla_\omega \alpha$ vérifie la même relation. Comme de plus $\nabla_\omega \alpha$ est une forme qui s'annule dès que l'un des vecteurs $v_i$ est vertical, il en résulte que $\nabla_\omega \alpha$ est une $(p+1)$-forme tensorielle de type R.

Il en est en particulier ainsi :

— si $\alpha$ est une $p$-forme tensorielle de type R.

— si $\alpha$ est la forme de connexion $\omega$ elle-même. Dans ce dernier cas, la différentielle absolue sera notée $\Omega$ et appelée forme de courbure de $\omega$. C'est une 2-forme tensorielle à valeurs dans $\underline{G}$ de type adjoint.

Si $\alpha$ est une $p$-forme tensorielle de type R, $\nabla_\omega \alpha$ est entièrement déterminée par les conditions suivantes : 1) coïncider avec $d\alpha$ sur les vecteurs horizontaux 2) s'annuler dès que l'un des vecteurs est vertical. Or la forme $d\alpha + \underline{R}(\omega).\alpha$ remplit visiblement la première condition. On démontre qu'elle remplit également la seconde en prolongeant le vecteur vertical par un champ local de vecteurs verticaux et en utilisant la formule classique qui donne la différentielle extérieure d'une forme en fonction de champs locaux de vecteurs (voir [8] p. 36).

On a donc démontré la formule :

$$(10\text{-}2) \qquad \nabla_\omega \alpha = d\alpha + \underline{R}(\omega).\alpha$$

pour toute forme tensorielle de type R.

On démontrerait de façon analogue :

$$(10\text{-}3) \qquad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Enfin, la formule donnant la différentielle extérieure du produit extérieur de deux formes scalaires de degrés respectifs $p$ et $q$:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

entraîne, si $\alpha$ est une forme tensorielle de type R :

$$d(\nabla_\omega \alpha) = d(\underline{\mathrm{R}}(\omega) . \alpha) = (d\underline{\mathrm{R}}(\omega)) . \alpha + (-1)\underline{\mathrm{R}}(\omega) . d\alpha.$$

Il en résulte :

$$(10.4) \qquad \nabla_\omega \nabla_\omega \alpha = \underline{\mathrm{R}}(\Omega) . \alpha$$

et de même :

$$(10.5) \qquad \nabla_\omega \Omega = 0$$

cette formule étant l'identé de Bianchi.

2. Grâce à la notion de forme de courbure introduite au paragraphe précédent, le Théorème d'Ambrose-Singer, tel que nous l'avons formulé pour les CE transitifs, peut être mis sous sa forme habituelle dans le cas des CI. En effet, dans ce cas :

$$u((\mathrm{M}_z + [\mathrm{M}_z, \mathrm{M}_z]) \cap \mathfrak{V}_z) = \omega([\mathrm{M}_z, \mathrm{M}_z]).$$

Or, si $\nu_1$ et $\nu_2$ sont deux champs de vecteurs horizontaux dans un voisinage de $z$, on a :

$$\omega([\nu_1, \nu_2]) = -\Omega(\nu_1, \nu_2).$$

Il en résulte que le groupe d'holonomie de $\omega$ en un point $z$ a pour algèbre de Lie la sous-algèbre de $\underline{\mathrm{G}}$ engendrée par les éléments de courbure aux différents points de la nappe d'holonomie $\mathrm{H}_z$.

3. Soit $t$ un tenseur linéaire sur E(V, G) de type R à valeurs dans M. Si $\omega$ est une CI sur E, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\nabla_\omega t = 0$ est que $t$ soit constant sur les nappes d'holonomie de la connexion $\omega$. En effet $\nabla_\omega t = 0$ équivaut à : $t$ constant le long de tout chemin horizontal par rapport à $\omega$.

4. On peut maintenant introduire une différentielle sur les formes généralisées. Soient en effet V et W deux variétés différentiables, $\alpha$ une $p$-forme sur V à valeurs dans W, $f_\alpha$ l'application sous-jacente à $\alpha$, $\pi$ une CI sur $\mathrm{E}_0(\mathrm{W})$.

Si $u_1, \ldots, u_p$ sont $p$ champs de vecteurs sur V,

$$\alpha(u_1, \ldots, u_p)$$

est une application de V dans T(W) qui à un point $x$ fait correspondre un vecteur d'origine $y = f_\alpha(x)$.

Soient $\mathfrak{V}$ un voisinage de $y$ de coordonnées locales $(e_i)$, $f_\alpha^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{U}$ le voisinage correspondant de $x$. Sur $\mathfrak{U}$, $\alpha$ peut s'écrire :

$$\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes e_i$$

où les $\alpha_i$ sont des $p$-formes scalaires. On peut alors définir :

$$d\alpha = d\alpha_i \otimes e_i \quad \text{et} \quad \pi.\alpha = (\pi_v \circ f_\alpha)^i_j \wedge \alpha_j \otimes e_i$$

où $\pi_v \circ f_\alpha$, image réciproque par $f_\alpha$ de la forme locale de connexion $\pi_v$, est une 1-forme sur $\mathfrak{U}$ à valeurs dans l'algèbre des matrices linéaires qui opèrent sur les $e_i$. On posera alors :

$$(10.6) \qquad d^\pi\alpha = d\alpha + \pi.\alpha$$

qui ne dépend pas des coordonnées locales utilisées. Par suite $d^\pi\alpha$ est une $(p+1)$-forme sur V à valeurs dans W, qui est dite différentielle suivant $\pi$ de $\alpha$.

On remarquera que cette différentielle n'est pas en général de carré nul. En fait, un calcul analogue à celui fait pour les différentielles absolues montrerait que, $\Pi$ désignant la courbure de la connexion linéaire $\pi$, on a :

$$(10.7) \qquad d^\pi d^\pi\alpha = (\Pi.\alpha) \quad \text{ou encore} \quad (d^\pi d^\pi\alpha)_{\mathfrak{U}} = (\Pi_{\mathfrak{V}} \circ f_\alpha).\alpha_{\mathfrak{U}}.$$

Si $f$ est une application différentiable de V dans W, c'est-à-dire une $o$-forme sur V à valeurs dans W, la différentielle de cette application suivant $\pi$ est nulle d'après la définition précédente.

5. Ceci étant, on définira la différentielle absolue d'une forme tensorielle généralisée de la façon suivante :

Soient E(V, G) un EFP, R un homomorphisme de G dans un groupe de Lie G' opérant différentiablement et effectivement sur la variété F. Si $\alpha$ est une $p$-forme tensorielle sur E à valeurs dans F de type R, et si $\omega$ et $\pi$ sont des CI respectivement sur E et $E_0(F)$, la différentielle absolue de $\alpha$ suivant $\omega$ et $\pi$ sera définie par :

$$(10.8) \qquad \nabla^\pi_\omega\alpha(v_0, \ldots, v_p) = d^\pi\alpha(\mathcal{H}(v_0), \ldots, \mathcal{H}(v_p))$$

c'est une $(p+1)$-forme tensorielle du même type que $\alpha$ à condition que la connexion linéaire $\pi$ soit supposée invariante par G' opérant sur F. Par exemple, dans le cas où G' opère transitivement sur F, ce dernier espace est supposé être un espace homogène à connexion linéaire invariante (voir Ch. III, paragraphe 15).

## 11. Différentielle absolue par rapport à un CE uniforme.

1. Soit $M_z$ un CE sur $E(V, G)$ uniforme par rapport au SFP $e(V, H)$, que l'on supposera SFP maximal de référence. Si $z$ est un point quelconque de $e$, $\underline{K} = u(M_z \cap \mathfrak{V}_z)$ est un idéal de $\underline{H}$.

Soient M un espace vectoriel de dimension finie, R un homomorphisme de G dans GL(M), $\alpha$ une $p$-forme tensorielle sur E à valeurs dans M de type R.

Considérons le tenseur $t_e \boxtimes \alpha$ sur $E \boxtimes E_0(V)$. C'est une $p$-forme tensorielle sur E à valeurs dans $F \times M$. On définit de façon naturelle la $(p+1)$-forme sur E à valeurs dans $F \times M$ :

$$d(t_e \boxtimes \alpha).$$

Soit $\underline{R}$ l'homomorphisme de $\underline{G}$ dans $\underline{GL(M)}$ défini par R. $\underline{R}(\underline{K})$ est une algèbre de Lie de matrices linéaires. Soit N le sous-espace de M engendré par les images par $\underline{R}(\underline{K})$ des vecteurs de M. Soit $y_0$ le point de F projection de l'élément neutre de G. Au point $(y_0, O)$ de $F \times M$, N définit le sous-espace $(y_0, N)$. Transportant ce sous-espace par les opérations de G, on obtient un champ de sous-espaces de la forme $(gy_0, R(g)N)$. G opère sur l'espace $(F \times M)/N$ que l'on obtient en faisant en chaque point de F le quotient de M par le sous-espace correspondant.

Soit $n$ la projection de $F \times M$ sur $(F \times M)/N$. On posera :

$$n(t_e \boxtimes \alpha) = \dot{\alpha} \qquad \text{et} \qquad n(d(t_e \boxtimes \alpha)) = d\dot{\alpha}.$$

Soient alors $v_0, \ldots, v_p$ des vecteurs tangents à E en $z$. On notera $\mathcal{H}(v_i)$ un vecteur horizontal par rapport à $M_z$ et ayant même projection que $v_i . \mathcal{H}(v_i)$ est défini modulo un vecteur contenu dans $M_z \cap \mathfrak{V}_z$.

Posons alors :

(11.1) $$\nabla_{M_z}\dot{\alpha} = d\dot{\alpha} \circ \mathcal{H}$$

c'est-à-dire $\nabla_{M_z}\dot{\alpha}(v_o, \ldots, v_p) = d\dot{\alpha}(\mathcal{H}(v_o), \ldots, \mathcal{H}(v_p)$.

On constate que cette formule définit de façon univoque la $(p+1)$-forme $\nabla_{M_z}\dot{\alpha}$ à valeurs dans $(F \times M)/N$. De plus la forme ainsi introduite est tensorielle. Elle sera dite différentielle absolue de $\dot{\alpha}$ (ou, par extension, de $\alpha$) par rapport à $M_z$.

2. Les opérations tensorielles définies au paragraphe 9 peuvent être généralisées au cas où $\alpha$, $\eta$, $\eta'$ sont des formes généralisées.

Supposons par exemple que $\alpha$ soit une $p$-forme sur V à valeurs dans un fibré vectoriel $\mathcal{M}(W)$ de base W, $\eta$ une $q$-forme sur V à valeurs dans un autre fibré vectoriel $\mathcal{A}(W)$ de même base, de telle sorte que les applications sous-jacentes à $\alpha$ et $\eta$ soient une même application de V dans W, et que en tout point de W la fibre de $\mathcal{A}(W)$ opère linéairement dans la fibre correspondante de $\mathcal{M}(W)$. On pourra alors définir la $(p+q)$-forme $\eta . \alpha$.

C'est ainsi que, les fibres de $T_F/\underline{K}$ opérant sur les fibres correspondantes de $(F \times M)/N$, on pourra définir une composition entre la forme $\omega$ associée à $M_z$ et la forme tensorielle $\dot{\alpha}$. On obtiendra la $(p+1)$-forme à valeurs dans $(F \times M)/N$ $\omega . \dot{\alpha}$, et l'on peut démontrer la formule suivante :

(11.2) $$\nabla_{M_z}\dot{\alpha} = d\dot{\alpha} + \omega . \dot{\alpha}$$

On remarquera enfin que, si $\tilde{\omega}$ est une CI contenue dans $M_z$ — et nous avons vu qu'il existe toujours une telle connexion — on peut introduire $\nabla_{M_z}\dot{\alpha}$ à partir de $\nabla_{\tilde{\omega}}\alpha$ en posant :

(11.3) $$\nabla_{M_z}\dot{\alpha} = n(t_e \boxtimes \nabla_{\tilde{\omega}}\alpha).$$

ce qui fournit d'ailleurs de (11.2) la démonstration la plus naturelle.

La formule (11.3) prouve de façon évidente que la différentielle absolue par rapport à une CI est un cas particulier de l'opération qui vient d'être introduite.

3. On peut également définir la différentielle absolue par rapport à $M_z$ d'une forme de connexion sur $E(V, G)$ : si

$[\underline{K}, \underline{G}] = L$, la différentielle absolue $\nabla_{M_z}\dot{\tilde{\omega}}$ sera une 2-forme sur E à valeurs dans $T_F/L$.

Si par ailleurs $\omega$ est la forme associée à $M_z$, $\omega$ est une forme à valeurs dans $T_F/\underline{K}$. On peut définir la forme $\dot{\omega}$ par projection de $T_F/\underline{K}$ sur $T_F/(\underline{K} + L)$ et introduire ainsi la 2-forme tensorielle :

$$\Omega = \nabla_{M_z}\dot{\omega} \quad \text{qui sera dite forme de courbure du CE.}$$

On remarquera que, si $\tilde{\omega}$ est une CI contenue dans $M_z$, et si $n$ est la projection de $T_F/L$ sur $T_F/(\underline{K} + L)$ on a :

$$n(\nabla_{M_z}\dot{\tilde{\omega}}) = \Omega.$$

Si $\tilde{\Omega}$ est la forme de courbure de $\tilde{\omega}$, $n'$ la projection de $T_F$ sur $T_F/(\underline{K} + L)$, on a :

$$n'(t_e \boxtimes \tilde{\Omega}) = \Omega. \tag{11.4}$$

4. On aurait pu éviter d'introduire des formes généralisées en restreignant la définition de la différentielle absolue au SFP de référence $e(V, H)$ : en reprenant les notations du paragraphe 11 n° 1, $\alpha$ étant une $p$-forme sur E à valeurs dans M, $n$ la projection de M sur $\mathfrak{M} = M/N$, on posera :

$$\nabla_{M_z}\dot{\alpha} = n(d\alpha \circ \mathcal{H}).$$

La différentielle absolue se trouve ainsi définie seulement sur $e$ comme $(p + 1)$-forme tensorielle. De même, la restriction à $e(V, H)$ de la forme associée au CE est une forme linéaire.

5. Sur un EFP quelconque E(V, G) il existe un CE évident, appelé champ global, à savoir celui défini par l'espace $\mathfrak{T}_z$ tout entier en chaque point. Il est naturellement intégrable. A ce champ global peut être associée, par la méthode précédente, une différentielle absolue : si $\alpha$ est une $p$-forme à valeurs dans M, soit $N = \underline{R}(\underline{G})M$ et $\mathfrak{M} = M/N$. $n$ étant la projection de M sur $\mathfrak{M}$, posons $\dot{\alpha} = n(\alpha)$. On voit que $\dot{\alpha}$ peut être considérée comme $p$-forme sur V à valeurs dans $\mathfrak{M}$. La différentielle absolue de $\dot{\alpha}$ par rapport au champ global correspond alors tout simplement à la différentielle de la forme sur V correspondant à $\dot{\alpha}$.

Il en résulte que la différentielle absolue définie par le CE global sur les formes tensorielles n'introduit aucun élément nouveau. Il n'en est plus ainsi quand on considère des formes $\alpha$ non tensorielles, mais vérifiant simplement :

$$\alpha \circ Dg = R(g^{-1}) \circ \alpha.$$

Dans ce cas $\nabla_{\mathcal{C}_z}\dot{\alpha}$ est une forme tensorielle, associée par conséquent à une forme sur V. Cette dernière est fermée en raison de la nullité de $\nabla_{\mathcal{C}_z}\nabla_{\mathcal{C}_z}\dot{\alpha}$, nullité qui résulte, par passage au quotient, de la relation $\nabla_\omega\nabla_\omega\alpha = 0$ vraie pour une CI $\omega$ dans tout voisinage où $\omega$ est sans courbure. (Or l'existence de telles connexions localement triviales associées à un recouvrement de V est assurée.)

On obtient donc ainsi, à partir des formes sur E vérifiant $\alpha \circ Dg = R(g^{-1}) \circ \alpha$, des formes fermées sur V, et par conséquent des classes de cohomologie de V.

Par exemple, si $\omega$ est une forme de connexion, $\nabla_{\mathcal{C}_z}\dot{\omega}$ est une 2-forme tensorielle à valeurs dans $\underline{G}/[\underline{G}, \underline{G}]$ qui peut être obtenue par passage au quotient à partir de la forme de courbure $\Omega$ de $\omega$. Elle définira une classe caractéristique de degré 2 de V. Plus généralement, en substituant la courbure aux arguments d'une forme multilinéaire symétrique sur $\underline{G}$ invariante par G, on obtient l'ensemble des classes caractéristiques étudiées par Chern dans [3].

Il est évident que l'on peut définir directement les classes de cohomologie introduites sans faire appel au CE global. Ce qui précède est simplement destiné à montrer comment les classes de Chern s'introduisent naturellement à partir de la notion de différentielle absolue par rapport à un CE uniforme.

## 12. Tenseurs dérivés.

1. Soient E(V, G) un EFP, R un homomorphisme de G dans le groupe linéaire GL(M), M étant un espace vectoriel de dimension égale à celle de V. Une forme de soudure $\theta$ sur E à valeurs dans M sera par définition une 1-forme tensorielle sur E à valeurs dans M telle qu'en tout point $z$ de E l'application linéaire de $\mathcal{C}_z$ dans M définie par $\theta$ soit surjective. Dans ces conditions, $\theta$ définit en tout point $z$ un isomorphisme de l'espace tangent à la base au point $p(z)$

sur M, c'est-à-dire un repère linéaire de V. Il en résulte que $\theta$ définit un morphisme $\mathcal{F}_\theta$ de type R de E(V, G) dans $E_0(V)$.

Désignons par $\tilde{R}$ l'homomorphisme défini par R de G dans le groupe affine de $M . E_R$ est un SFP de $E_{\tilde{R}}$. A toute CI$\omega$ sur E(V, G) correspond par $\mathcal{F}^E_{\tilde{R}}$ une CI notée $\underline{\tilde{R}}(\omega)$ sur $E_{\tilde{R}}$; $\underline{\tilde{R}}(\omega)$ induit sur $E_R$ l'image $\underline{R}(\omega)$ de $\omega$ par le morphisme $\mathcal{F}^E_R$. $\theta$ définit sur $E_R$ une 1-forme tensorielle, notée elle aussi $\theta$, à valeurs dans M. Or M s'identifie à un sous-espace de l'algèbre de Lie du groupe affine de M supplémentaire de $\underline{GL(M)}$. Par suite, la forme $\underline{\tilde{R}}(\omega) + \theta$ définit sur $E_{\tilde{R}}$ une $\overline{CI\tilde{\omega}}$ qui est dite CI associée à $\omega$ par la forme de soudure $\theta$. L'élément de $\tilde{\omega}$ en un point $z$ de $E_R$ a une intersection nulle avec le sous-espace tangent à $E_R$ (on dit que $\tilde{\omega}$ est extérieure à $E_R$).

La donnée d'une forme de soudure permet d'associer à toute forme tensorielle sur E(V, G) un tenseur sur le même EFP. Soit en effet $\alpha$ une $p$-forme linéaire sur E à valeurs dans M' de type R'. $\alpha$ est, on l'a vu, un tenseur sur le produit fibré $E \boxtimes E_0(V)$. On posera alors :

$$t_\alpha(z) = \alpha(z, \mathcal{F}_\theta(z)) \tag{12.1}$$

$t_\alpha$ est donc un tenseur sur E à valeurs dans $M' \otimes \bigwedge^{(p)}$.

2. Étant données une CI $\omega$ sur E(V, G) et une $p$-forme tensorielle $\alpha$, on définira la dérivée covariante de $\alpha$ par rapport à $\omega$ comme la différentielle absolue par rapport à $\omega$ de $t_\alpha$. Les notions de différentielle absolue et de dérivée covariante coïncident dans le cas d'un tenseur, c'est-à-dire d'une $o$-forme. Naturellement, la notion de dérivée covariante par rapport à un CE uniforme se définit de la même manière.

Sur $E_0(V)$, la forme tensorielle qui à un vecteur $v$ tangent au point $z$ fait correspondre l'image dans $R^n$ de sa projection sur V par l'isomorphisme défini par $z$, est une forme de soudure. Les notions que l'on a introduites coïncident dans ce cas avec les notions usuelles : connexion affine associée à une connexion linéaire, tenseur associé à une forme tensorielle, dérivée covariante.

3. Soit $M_z$ un CE uniforme pour lequel on reprendra les notations du paragraphe 11 n° 1. Soient $\alpha$ une $p$-forme ten-

sorielle à valeurs dans $M'$ de type $R'$, et $t_\alpha$ le tenseur associé. $t_e \boxtimes t_\alpha$ est un tenseur sur $E$ à valeurs dans

$$F \times (M' \otimes \Lambda^{(p)}).$$

Soit $\pi$ une 1-forme tensorielle sur $E(V, G)$ à valeurs dans $\underline{G}$ de type adjoint, telle que la restriction de $\pi$ au SFP $e(V, H)$ soit à valeurs dans $\underline{K}$. On désignera par $t_{\underline{R}'(\pi).\alpha}$ le tenseur associé à la forme tensorielle $\underline{R}'(\pi).\alpha$; ce tenseur engendre, lorsque $\pi$ varie et que $z$ parcourt $e(V, H)$, un sous-espace $N_\alpha$ de $M' \otimes \Lambda^{(p+1)}$. On définira alors, de façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe 11 n° 1 $(F \times (M' \otimes \Lambda^{(p+1)}))/N_\alpha$. On aura la projection:

$$n_{\alpha, p+1} : F \times (M' \otimes \Lambda^{(p+1)}) \to (F \times (M' \otimes \Lambda^{(p+1)}))/N_\alpha$$

et l'on définira:

$$\delta\alpha = n_{\alpha, p+1}(t_e \boxtimes t_{d\alpha \circ \mathcal{H}}) \tag{12.2}$$

formule qui a un sens bien que l'opérateur $\mathcal{H}$ soit défini modulo $M_z \cap \mathfrak{V}_z$, car toute indétermination disparaît par la projection $n_{\alpha, p+1}$. On peut en particulier remplacer $t_{d\alpha \circ \mathcal{H}}$ par $t_{\nabla_\omega \alpha}$ où $\nabla_\omega \alpha$ est la différentielle absolue de $\alpha$ par rapport à une connexion $\omega$ contenue dans $M_z$.

Le tenseur $\delta\alpha$ obtenu est le tenseur dérivé de $\alpha$ par rapport à $M_z$. On remarquera que l'espace où il prend ses valeurs dépend de la forme $\alpha$ elle-même, et pas seulement de son type $R'$. Notons par ailleurs que la restriction de $\delta\alpha$ au SFP $e(V, H)$ est un tenseur linéaire.

Il est clair que le tenseur dérivé d'une $p$-forme tensorielle par rapport à une CI est le tenseur associé à la différentielle absolue. Dans le cas d'un CE uniforme quelconque, on constate que le tenseur associé à la différentielle absolue est la projection du tenseur dérivé sur l'espace où il prend ses valeurs, par un passage au quotient qui dépend naturellement de $N_\alpha$. Il en résulte que le tenseur dérivé est « plus précis » que la différentielle absolue.

On peut de façon analogue définir le tenseur dérivé de la forme associée à un CE uniforme. La construction ne présente aucune difficulté supplémentaire bien qu'il s'agisse d'une forme généralisée. Le tenseur obtenu sera appelé tenseur de courbure du CE. D'après ce qui vient d'être dit, ce tenseur décrit les propriétés du CE de façon plus précise que la forme de courbure. Dans le cas d'une CI, le tenseur de courbure n'est autre que le tenseur associé à la forme de courbure.

4. $\theta$ étant toujours une forme de soudure sur $E(V, G)$ à valeurs dans M de type R, soit $\omega$ une CI sur E. On appellera par définition forme de torsion de $\omega$ la 2-forme tensorielle à valeurs dans M de type R :

$$\Sigma = \nabla_\omega \theta = d\theta + \underline{R}(\omega).\theta. \tag{12.3}$$

Le tenseur associé est le tenseur de torsion.

Une interprétation géométrique de cette forme est fournie par la notion de connexion associée à $\omega$ : si $\tilde{\omega}$ est cette connexion, $\tilde{\Omega}$ sa forme de courbure, $\tilde{\Omega}$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine de M, algèbre qui se décompose en somme directe de M et de $\underline{GL(M)}$. Si alors $\Sigma^*$ est la composante de $\tilde{\Omega}$ suivant M dans cette décomposition, l'image réciproque de $\Sigma^*$ par $\mathcal{F}_\theta$ est la forme de torsion, soit :

$$\Sigma = \Sigma^* \circ \mathcal{F}_\theta.$$

On peut d'une façon analogue définir une 2-forme de torsion et un tenseur de torsion — tenseur dérivé de la forme de soudure — pour tout CE uniforme. Le tenseur de torsion sera le plus intéressant puisque, d'après ce que nous avons vu, il donne des propriétés plus précises.

L'interprétation géométrique donnée dans le cas d'une CI peut être étendue au cas des CE uniformes : on peut en effet associer à un tel CE à l'aide de la forme de soudure un nouveau CE uniforme sur $E_{\tilde{R}}$. La forme (ou le tenseur) de torsion du CE initial sera obtenue comme dans le cas d'une CI à partir de la forme (ou du tenseur) de courbure du CE associé.

Considérons le cas où $E(V, G)$ est $E_0(V)$ muni de sa soudure naturelle $\theta_0$. Soient $e(V, H)$ un SFP de $E_0$, $M_z$ le CE intégrable défini par $e$, $\tilde{M}_z$ le CE associé à $M_z$ par $\theta_0$. $\tilde{M}_z$ est un CE sur l'espace $\tilde{E}_0(V)$ des repères affines, uniforme par rapport à $e(V, H)$. $\omega$ étant une CI contenue dans $M_z$ (c'est-à-dire réductible à $e$), la restriction à $e$ du tenseur de torsion de $M_z$ sera obtenue en projetant le tenseur de torsion de $\omega$ sur l'espace quotient de l'espace où il prend ses valeurs par le sous-espace engendré par les formes $\pi.\theta_0$ ($\pi$ étant une forme tensorielle sur $e$ à valeurs dans $\underline{H}$ de type adjoint) : on reconnaît le tenseur de structure défini par Bernard dans [2]. Bien entendu nous nous sommes limités ici au cas des H-structures réelles. Ainsi le tenseur de structure d'une H-structure réelle apparaît-il comme restriction au SFP considéré du tenseur de torsion du CE intégrable correspondant.

Notons que l'on obtient de cette façon une interprétation géométrique du tenseur de structure comme projection sur l'espace où il prend ses valeurs du tenseur de courbure du CE $\tilde{M}_z$ associé à $M_z$.

# CHAPITRE III

## SUBORDINATION

### A. Champs d'éléments invariants.

#### 13. Espaces homogènes.

1. Nous allons d'abord démontrer un résultat concernant les formes différentielles invariantes à gauche sur un groupe de Lie G. Soient M un espace vectoriel de dimension finie, $\alpha$ une $p$-forme sur G à valeurs dans M invariante à gauche.

Si $\lambda$ est un élément de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G, on notera ${}_\lambda X$ le champ de vecteurs sur G invariant à gauche déduit de $\lambda$. Soient $l_o, \ldots, l_p$ des vecteurs de $\underline{G}$. La $o$-forme :

$$\alpha_i = \alpha({}_{l_o}X, \ldots, {}_{l_i}\hat{X}, \ldots, {}_{l_p}X)$$

est invariante à gauche sur G. Elle est donc constante, et on peut écrire, en adoptant pour les dérivées de Lie les notations de [9] : $\mathcal{L}({}_{l_i}X)\alpha_i = 0$.

Utilisons alors la formule classique (voir [8]) qui donne la valeur de $d\alpha$ en fonction de champs locaux de vecteurs. Il vient :

$$(13.1)\quad d\alpha({}_{l_o}X, \ldots, {}_{l_p}X) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\alpha([{}_{l_i}X, {}_{l_j}X], {}_{l_o}X, \ldots, {}_{l_i}\hat{X}, \ldots, {}_{l_j}\hat{X}, \ldots, {}_{l_p}X)$$

formule qui, appliquée à l'élément neutre de G, donne :

$$(13.2)\quad d\alpha(l_o, \ldots, l_p) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\alpha[(l_i, l_j], l_o, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, \hat{l}_j, \ldots, l_p).$$

2. Soient G un groupe de Lie, $V = G/H$ l'espace homogène quotient de G par le sous-groupe fermé H. On considèrera G comme EFP de base V et groupe structural H.

Soit $\mathcal{F}$ un morphisme d'EFP de $G(V, H)$ dans $E'(V, G')$ de type R et de noyau $H_1$. Un tel morphisme définit une opération à gauche $L_g$ de G dans $E'$ de la façon suivante : tout point $z'$ de $E'$ peut se mettre sous la forme :

$$z' = D_{g'}\mathcal{F}(g)$$

avec $g$ dans G et $g'$ dans $G'$.

On posera alors, pour tout $\gamma$ dans G, $L_\gamma z' = D_{g'}\mathcal{F}(\gamma g)$.

On vérifiera immédiatement que le point ainsi obtenu ne dépend que de $z'$ et $\gamma$. Il en dépend d'ailleurs différentiablement. Les classes d'intransitivité définies dans $E'$ par cette opération sont les SFP de $E'$ déduits de $\mathcal{F}(G)$ par les translations à droite.

3. La formule (13.2) fournit des résultats concernant les formes tensorielles sur $E'$ invariantes à gauche par G : si $\alpha$ est une telle forme, $\alpha_{e'}$ la forme qu'elle induit sur

$$e'(V, H') = \mathcal{F}(G),$$

l'image réciproque de $\alpha_{e'}$ par $\mathcal{F}$ est une forme à laquelle s'applique (13.2).

En ce qui concerne les tenseurs invariants sur $E'$, on peut donner une caractérisation commode de ces tenseurs : si $t$ est un tenseur ayant cette propriété, $t$ est constant sur $e'$, et réciproquement.

Soit alors $\omega_0$ une CI sur $E'$ réductible à $e'$. On notera $\nabla_0 t$ la différentielle absolue par rapport à cette connexion de $t$. On voit que la propriété d'invariance est équivalente à la propriété tensorielle :

$$\nabla_0 t = 0. \tag{13.3}$$

## 14. Champs d'éléments invariants.

1. Conservons les notations du paragraphe précédent. $M_{z'}$ étant un CE sur $E'(V, G')$, on dit que c'est un CE invariant de type R sur G/H si G, opérant à gauche dans $E'$, transforme tout vecteur horizontal par rapport à ce champ en un autre vecteur horizontal.

Si, $\lambda$ étant un élément de $\underline{G}$, $X_\lambda$ désigne le champ de vecteurs sur $E'$ correspondant à la transformation infinitésimale définie par $\lambda$, la condition nécessaire et suffisante pour que $M_{z'}$ soit invariant par G est que, pour tout $\lambda$ dans $\underline{G}$ et tout champ de vecteurs $h$ horizontal par rapport à $M_{z'}$, le champ $[X_\lambda, h]$ soit également horizontal.

2. Soit $M_{z'}$ un CE invariant sur $E'(V, G')$. Posons :

$$z'_0 = \mathcal{F}(e)$$

au point $z'_0 g'$ l'élément du champ sera $D_{g'} M_{z'_0}$ quelque soit $g'$ dans $G'$.
au point $L_g z'_0$ l'élément du champ sera $L_g M_{z'_0}$ quelque soit $g$ dans G.

On voit que la donnée de $M_{z'}$ est équivalente à celle de l'élément $M_{z'_0}$ du champ en $z'_0$, cet élément devant vérifier la condition :

(14.1) pour tout $h$ dans H, $L_{h^{-1}} D_{R(h)} M_{z'_0} \subset M_{z'_0}$.

En effet, s'il existe un tel sous-espace $M_{z'_0}$, un CE invariant s'en déduit par les translations à droite et les opérations de G.

Or $E'$ est isomorphe à l'espace $G_R$ du morphisme canonique de type R de G(V, H). L'espace $\mathcal{T}_{z'_0}$ tangent à $E'$ en $z'_0$ est isomorphe à l'espace $\underline{G}_{\underline{R}}$ que l'on appellera espace du morphisme canonique de type $\underline{R}$ de $\underline{G}$, et que l'on définira de la façon suivante : ce sera le quotient de la somme directe $\underline{G} + \underline{G}'$ par le sous-espace des vecteurs de la forme :

$$\lambda - \underline{R}(\lambda) \quad \text{avec } \lambda \text{ dans } \underline{H}.$$

H opère dans $\underline{G} + \underline{G}'$ par l'opération $\rho(H)$ définie de la façon suivante : pour tout $h$ dans H, tout $\gamma$ dans $\underline{G}$ et tout $\gamma'$ dans $\underline{G}'$, on posera :

$$\rho(h)(\gamma + \gamma') = adj\, h\, \gamma + adj\, R(h)\, \gamma'.$$

Par passage au quotient, H opèrera dans $\underline{G}_{\underline{R}}$ par une opération notée $adj_{\underline{R}}$.

Ceci étant, on voit qu'il y a correspondance biunivoque entre les CE invariants sur G/H de type R et les sous-espaces de $\underline{G}_{\underline{R}}$ invariants par $adj_{\underline{R}}(H)$.

Un cas particulièrement simple est celui où R est l'application identique de H dans lui-même. Dans ce cas $E'(V, G')$ s'identifie à G(V, H), $\underline{G}_{\underline{R}}$ à $\underline{G}$ et $adj_{\underline{R}}$ à l'opération adjointe de H dans $\underline{G}$. Les CE invariants correspondants sont dits CE invariants propres.

3. Soit $M_{z'}$ un CE invariant sur $E'(V, G')$. On peut définir, comme on l'a déjà vu, en chaque point $z'$ de $E'$ le sous-espace $[M_{z'}, M_{z'}]$. On pourra ainsi définir au point $z'_0$ la suite croissante de sous-espaces :

$$M^0_{z'_0} = M_{z'_0}\ M^1_{z'_0} = M_{z'_0} + [M_{z'_0}, M_{z'_0}], \ldots, M^p_{z'_0} = M_{z'_0} + [M_{z'_0}, M^{p-1}_{z'_0}], \ldots\ M^\infty_{z'_0} = \bigcup_p M^p_{z'_0}.$$

Chacun de ces sous-espaces définit un CE invariant. La suite de CE invariants ainsi obtenus est appelée suite croissante de CE invariants engendrée par $M_{z'}$. Si $M_{z'}$ est transitif, du fait que $M^\infty_{z'}$ est un CE résulte que $M_{z'}$ est régulier. Par suite le CE $M^\infty_{z'}$ est le CE intégrable engendré par $M_{z'}$. On l'appellera CE intégrable invariant engendré par $M_{z'}$.

La notion de CE intégrable invariant que nous avons introduite est, remarquons-le, plus générale que la notion de « G-structure invariante » signalée par Ngo-van-que (voir [12]). En effet les SFP définis par un CE intégrable invariant ne sont pas eux-même invariants par les opérations du groupe : celles-ci échangent entre eux ces SFP.

On peut remarquer par ailleurs que, $M_{z'_0}$ étant l'élément en $z'_0$ d'un CE invariant sur $E'(V, G')$, les sous-espaces : $N^0_{z'_0} = M_{z'_0}, \ldots, N^p_{z'_0} = [M_{z'_0}, N^{p-1}_{z'_0}], \ldots$ définissent une nouvelle suite de CE invariants engendrée par $M_{z'}$.

## 15. Connexions invariantes.

1. Les résultats du paragraphe précédent s'appliquent en particulier à l'étude des CI invariantes sur un espace homogène. On obtient ainsi d'une part la condition d'existence d'une CI invariante d'un type donné, d'autre part les nappes d'holonomie d'une CI invariante, qui constituent un CE intégrable invariant. Ces résultats sont équivalents à ceux donnés par Wang dans [16]. On peut, comme cet auteur, présenter les résultats en termes de formes de connexions, et non plus de sous-espaces comme il était naturel de le faire dans le cas général. Cette nouvelle présentation nous sera utile dans la suite.

C'est ainsi que la donnée d'une CI invariante $\omega$ sur $E'(V, G')$ peut être considérée comme équivalente à celle d'une application linéaire, notée $\omega^*$, de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$, telle que :

$$(15.1) \quad \begin{array}{l} — \omega^* \text{ coïncide avec } R \text{ sur } \underline{H} \\ — \omega^* \circ adj\, h = adj\, R(h) \circ \omega^* \text{ pour tout } h \text{ dans } H. \end{array}$$

Par ailleurs, la formule (13.2), appliquée à $\omega^*$ qui est l'image réciproque par $\mathcal{F}$ de la forme de connexion $\omega$, permet d'obtenir la formule :

$$d\omega^*(l_0, l_1) = - \omega^*([l_0, l_1]) \text{ pour } l_0 \text{ et } l_1 \text{ dans } \underline{G}$$

d'où :

$$(15.2) \qquad \Omega^*(l_0, l_1) = [\omega^*(l_0), \omega^*(l_1)] - \omega^*([l_0, l_1])$$

$\Omega^*$ désignant l'image réciproque par $\mathcal{F}$ de la forme de courbure $\Omega$ de $\omega$.

Dans le cas où $R$ est injectif, on peut identifier $G$ à son image $e'(V, H')$ par $\mathcal{F}$. Dans ce cas la formule (15.2) fournit la courbure pour les couples de vecteurs tangents à $E'$ au point $z'_0 = e$ et appartenant à $\underline{G}$.

Si de plus l'application $\omega$ de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ est injective, c'est-à-dire s'il n'existe pas dans $G$ de vecteur horizontal par rapport à $\omega$ (on dit dans ce cas que la connexion $\omega$ est extérieure à $G$), on pourra, de la formule (15.2) mise sous la forme :

$$(15.3) \qquad - \omega([l_0, l_1]) = \Omega(l_0, l_1) - [\omega(l_0), \omega(l_1)]$$

déduire le crochet de deux éléments de $\underline{G}$ en fonction de $\omega$ et de $\Omega$.

2. $G$ opère naturellement dans l'espace $E_0(V)$ des repères linéaires de $V$. Le morphisme correspondant de $G(V, H)$ dans $E_0$ sera noté $\mathcal{F}_0$. Le noyau $H_0$ de ce morphisme peut être caractérisé de la façon suivante : les transformations infinitésimales de son algèbre de Lie $\underline{H}_0$ définissent sur $V$ des champs de vecteurs dont le crochet avec un champ quelconque est nul au point $x_0 = p(e)$. En d'autres termes $\underline{H}_0$ est le sous-espace de $\underline{H}$ caractérisé par :

$$[\underline{G}, \underline{H}_0] \subset \underline{H}.$$

Supposons que $M_z$ soit l'élément en $z$ d'une CI invariante sur $E_0(V)$. Soit $v$ un champ de vecteurs sur $E_0(V)$ horizontal par rapport à $M_z$. Pour tout $\lambda_0$ dans $\underline{H}_0$, si $X_{\lambda_0}$ est le champ de vecteurs sur $E_0(V)$ défini par la transformation infinitésimale $\lambda_0$, on aura :

$$[v, X_{\lambda_0}]_e \text{ horizontal.}$$

Or ce vecteur est aussi vertical, d'après ce qu'on a vu. Il est donc nul. Ce qui entraîne une nouvelle caractérisation de $\underline{H}_0$ comme le sous-espace de $\underline{H}$ tel que $[v, X_{\lambda_0}]_e = 0$ pour tout vecteur $v$ horizontal. Sur cette caractérisation il est clair que $[\underline{G}, \underline{H}_0] \subset \underline{H}_0$, et par suite $H_0$ est invariant dans G, donc G n'opère pas effectivement dans V.

Sous réserve donc que G opère effectivement dans V, $H_0$ est réduit à l'identité s'il existe une connexion linéaire invariante. Dans ces conditions, on identifiera G à $\mathcal{F}_0(G)$. On associera à la connexion linéaire invariante la connexion affine définie par la soudure naturelle $\theta_0$ de $E_0(V)$ : $\varpi = \omega + \theta_0$. Cette connexion affine elle-même sera invariante car la forme de soudure $\theta_0$ est invariante par G. Mais de plus $\varpi$ est extérieure à G. On pourra donc appliquer la formule (15.3). Si l'on considère $\theta_0$ comme forme à valeurs dans $M = M_{z_0}$, on pourra écrire cette formule en décomposant la courbure de $\varpi$ en courbure et torsion de $\omega$, soit :

$$(15.4) \quad [l_0, l_1] = e.([\omega(l_0), \omega(l_1)] - \Omega(l_0, l_1)) \\ + \omega(l_0)l_{1_M} - \omega(l_1)l_{0_M} - \Sigma(l_0, l_1).$$

3. $M_z$ désignant toujours une connexion linéaire invariante sur $V = G/H$. $\omega_0$ une CI sur $G(V, H)$, c'est-à-dire une connexion linéaire réductible à G, on notera $\nabla_0$ la dérivation covariante définie par $\omega_0$.

On appellera tenseurs fondamentaux de $M_z$ les tenseurs de courbure et de torsion de cette connexion ainsi que leurs dérivées covariantes successives. Il est clair que, $M_z$ étant invariante par G, il en est de même de tous ses tenseurs fondamentaux. Ceci étant, la formule (13.3) entraîne que, pour tout tenseur $t$ fondamental de $M_z$ on a :

$$(15.5) \qquad \nabla_0 t = 0.$$

On remarquera que ce qui vient d'être dit aux paragraphes 15 nº 2 et 15 nº 3 se généralise immédiatement au cas où $E'(V, G')$ est muni d'une soudure invariante par $G$.

4. Une CI invariante propre sera, d'après les définitions antérieures, une CI $\omega$ sur $G(V, H)$ invariante par $G$ opérant à gauche. L'existence d'une telle connexion est, d'après les résultats généraux, équivalente à celle d'un sous-espace $M$ de $\underline{G}$ supplémentaire de $\underline{H}$ et tel que :

$$adj\,(H)M \subset M.$$

Lorsqu'une telle connexion existe, on dit que l'espace homogène est réductif. Cette notion a été introduite et étudiée par Nomizu (voir [13]). L'image par $\mathcal{F}_0$ de cette connexion est une connexion linéaire invariante. Il en résulte que $\mathcal{F}_0$ est injectif et que $\omega$ peut être considérée comme une connexion linéaire. Les propriétés de la courbure et de la torsion de $\omega$, classiques dans ce cas, se déduisent des résultats généraux qui précèdent.

## 16. Variétés à connexion linéaire localement invariante.

Nous allons montrer que les propriétés que nous avons mises en évidence pour les espaces homogènes à connexion linéaire invariante caractérisent ces espaces du point de vue local. En d'autres termes qu'une variété à connexion linéaire possédant ces propriétés est localement représentable sur un espace homogène à connexion linéaire invariante.

1. Soit $V$ une variété différentiable analytique munie d'une connexion linéaire analytique $\omega$. S'il existe sur $V$ une autre connexion linéaire $\omega_0$ — non nécessairement analytique — telle que $\nabla_0 t$ soit nul pour tout tenseur fondamental $t$ de $\omega$, on dit que $\omega$ est localement invariante par rapport à $\omega_0$. $V$, munie du couple $(\omega, \omega_0)$, est dite variété à connexion linéaire localement invariante.

On utilisera dans la suite le lemme suivant : étant données deux variétés à connexion linéaire analytique $(V, \omega)$ et $(V', \omega')$, si pour $x_0$ dans $V$ et $x'_0$ dans $V'$ il existe un isomorphisme $f$ de $T_{x_0}$ sur $T_{x'_0}$ appliquant les tenseurs fondamentaux de $\omega$ sur les quantités correspondantes de

$\omega'$, alors il existe un voisinage U de $x_0$ et un homéomorphisme différentiable $\mathcal{F}$ de U sur un voisinage U' de $x'_0$ qui induit $f$ sur $T_{x_0}$ et tel que $\omega'$ soit l'image sur U' de $\omega$ par $\mathcal{F}$. Ce lemme résulte immédiatement du fait que les coefficients des deux connexions sont analytiques.

2. Ceci étant, soit V une variété à connexion linéaire localement invariante, et soit $(\omega, \omega_0)$ le couple de connexions qui définit cette structure.

Soient $z_0$ un point de $E_0(V)$, M et $M_0$ les éléments respectifs de $\omega$ et $\omega_0$ en $z_0$, $\underline{H}$ l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de $T_{p(z_0)}$ qui laissent invariants les tenseurs fondamentaux de $\omega . z_0 . \underline{H}$ est un sous-espace vertical de l'espace $\mathcal{T}_{z_0}$ tangent à $E_0$ en $z_0$. Soit $\underline{G}$ l'espace vectoriel somme directe :

$$\underline{G} = z_0 . \underline{H} + M_0.$$

La torsion $\Sigma$ de $\omega$ sera considérée comme une forme à valeurs dans M. On posera alors, pour tout couple $(l_0, l_1)$ de vecteurs de $\underline{G}$ :

$$[l_0, l_1] = z_0 . ([\omega(l_0), \omega(l_1)] - \Omega(l_0, l_1)) + \omega(l_0) l_{1_M} \\ - \omega(l_1) l_{0_M} - \Sigma(l_0, l_1).$$

Cette formule munit l'espace vectoriel $\underline{G}$ d'une structure d'algèbre de Lie. En effet :

— En premier lieu $[l_0, l_1]$ appartient à $\underline{G}$ : ce qui caractérise les vecteurs de $\underline{G}$, c'est la condition : $dt(v) = 0$ pour tout tenseur $t$ fondamental de $\omega$. Ceci peut s'écrire :

$$\nabla t(v) = \omega(v) . t.$$

Pour démontrer que, $l_0$ et $l_1$ vérifiant cette condition, $[l_0, l_1]$ la vérifie aussi, il suffit de montrer que :

$$\nabla t(\omega(l_0) l_{1_M} - \omega(l_1) l_{0_M} - \Sigma(l_0, l_1)) = ([\omega(l_0), \omega(l_1)] - \Omega(l_0, l_1)) . t$$

ce qui, tenant compte des égalités :

$$\nabla t(l_0) = \omega(l_0) . t \qquad \text{et} \qquad \nabla t(l_1) = \omega(l_1) . t$$

résulte de l'identité de Ricci appliquée à la connexion $\omega$ et au tenseur $t$ (au sujet de l'identité de Ricci, voir [8] pages 87-88).

— En second lieu, l'identité de Jacobi est satisfaite : en effet, de l'identité de Bianchi relative à la connexion affine associée à $\omega$, on déduit :

$$\int_{0,1,2} \omega([[l_0, l_1], l_2]) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{0,1,2} [[l_0, l_1], l_2]_{\mathrm{M}} = 0$$

$\int_{0,1,2}$ désignant la somme des permutations circulaires relativement aux trois indices 0, 1, 2.

Soit donc G le groupe de Lie simplement connexe admettant $\underline{\mathrm{G}}$ pour algèbre de Lie; soit H le sous-groupe connexe fermé de G défini par $\underline{\mathrm{H}}$. G/H est un espace homogène de Lie, $\mathcal{T}_{z_0}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{G}}_{\mathrm{R}_0}$, où $\mathrm{R}_0$ désigne la représentation linéaire de H. M est alors invariant par $\mathrm{adj}_{\underline{\mathrm{R}}_0}(\mathrm{H})$, et par suite G/H admet une connexion linéaire invariante $\omega'$. De plus, l'application de $\underline{\mathrm{G}}$ dans $\mathcal{T}_{z_0}$ applique les tenseurs fondamentaux de $\omega'$ sur les quantités correspondantes de $\omega$ car $\Omega$, $\Sigma$ et leurs dérivées covariantes successives se déduisent de la donnée du crochet $[l_0, l_1]$ par des formules analogues à (15.3). D'après le Lemme, on a donc démontré le résultat suivant :

Théorème. — *Une variété à connexion linéaire localement invariante est localement représentable sur un espace homogène à connexion linéaire invariante.*

Ce résultat a été signalé dans [10]. Dans [15], Nomizu en propose une démonstration fondée sur la notion de germe de champ de Killing affine. Ce théorème généralise le résultat correspondant dans le cas réductif, dû à Nomizu (variétés localement réductives). Le résultat fourni dans [7] par Kostant est également limité au cas d'une variété localement réductive.

## B. Champs d'éléments subordonnés.

### 17. Connexions subordonnées.

1. Soient E(V, G) un EFP, *e*(V, H) un SFP de E dont le groupe structural est fermé dans G, $\omega$ une CI sur E(V, G). On notera $\omega_e$ la 1-forme à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}$ induite par $\omega$ sur *e*.

Supposons que l'espace homogène $F = G/H$ admette une CI invariante $\pi$ de type R dans $E'(F, G')$. Comme on l'a vu, la donnée de cette CI est équivalente à celle d'une application $\pi^*$ de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ vérifiant :

— $\pi^*$ coïncide avec $\underline{R}$ sur $\underline{H}$

— $\pi^* \circ \text{adj}\, h = \text{adj}\, R(h) \circ \pi^*$ pour tout $h$ dans H.

Considérons alors la forme $\tilde{\omega} = \pi^* \circ \omega_e$. C'est une 1-forme sur $e(V, H)$ à valeurs dans $\underline{G}'$. Comme $\pi^*$ coïncide avec $\underline{R}$ sur $\underline{H}$, elle définit sur l'EFP $R(e)$ image de $e$ par le morphisme canonique de type R une 1-forme à valeurs dans $\underline{G}'$ qui est la restriction à $R(e)$ d'une forme de connexion sur $e_R$. Cette nouvelle connexion, notée $\underline{\omega}$, sera dite connexion subordonnée à $\omega$ par la CI invariante $\pi$, ou encore connexion $\pi$-subordonnée à $\omega$.

On a donc le résultat :

THÉORÈME. — *Si* $\omega$ *est une* CI *sur* $E(V, G)$, $e(V, H)$ *un* SFP *de* E *à groupe structural fermé dans* G, $\pi$ *une* CI *invariante sur* G/H *de type R*, $\pi$ *fait correspondre à* $\omega$ *une* CI $\underline{\omega}$ *sur* $e_R$ *qui est dite connexion subordonnée à* $\omega$ *par* $\pi$.

2. Un cas particulièrement simple est celui où G/H admet une structure d'espace homogène réductif définie par la décomposition en somme directe :

$$\underline{G} = \underline{H} + M \quad \text{avec} \quad \text{adj}(H)\, M \subset M. \tag{17.1}$$

Dans ce cas, à toute connexion $\omega$ sur $E(V, G)$ correspond une connexion subordonnée $\underline{\omega}$ sur le SFP $e(V, H)$. La forme $\underline{\omega}$ est la composante suivant $\underline{H}$ de $\omega$ par la décomposition précédente.

De nombreux exemples de cette situation se rencontrent dans la pratique. C'est ainsi qu'à toute connexion affine correspond une connexion linéaire subordonnée, à toute connexion linéaire sur une variété presque complexe une connexion presque complexe subordonnée, à toute connexion projective une connexion linéaire subordonnée.

Dans [6], Kobayashi a utilisé la subordination dans le cas réductif, dans des conditions particulières, pour étudier les « connexions de Cartan ».

3. Le cas réductif admet une généralisation intéressante, signalée par Kobayashi dans [6] et étudiée dans [11] en ce qui concerne la subordination : on dira que $G/H$ admet une structure d'espace homogène semi-réductif s'il existe un sous-groupe $G'$ de $G$ contenant $H$ et un sous-espace $M$ de $\underline{G}$ tels que :

$$(17.2) \quad \underline{G} = \underline{G}' + M \text{ (somme directe) et adj } (H)M \subset M.$$

Dans ce cas $G/H$ admet une connexion invariante du type « injection de $H$ dans $G'$ ». La donnée de cette connexion $\pi$ et celle de $M$ sont évidemment équivalentes.

Si alors $e(V, H)$ est un SFP de $E(V, G)$, $\pi$ définira une subordination qui fera correspondre à toute CI sur $E(V, G)$ une CI sur le SFP de $E$ de groupe structural $G'$ contenant $e$. On peut utiliser par exemple une structure de ce type pour associer à une connexion projective une connexion affine (ou coaffine) subordonnée.

4. On peut généraliser encore la situation précédente : on dira que $G/H$ admet une structure d'espace homogène semi-réductif généralisé s'il existe un sous-groupe de Lie $G'$ de $G$ contenant $H$, un sous-groupe fermé $H'$ de $H$ invariant dans $G'$ et un sous-espace $M$ de $\underline{G}$ tels que :

$$(17.3) \quad \underline{G}' \cap M = \underline{H}'; \quad \underline{G} = \underline{G}' + M; \quad \text{adj } (H)M \subset M.$$

Si $G' = H$ on dira qu'on a une structure réductive généralisée. Si $G/H$ est muni d'une structure semi-réductive généralisée définie par le triple $(G', H', M)$, $G/H$ admet une CI invariante $\pi$ du type « application de $H$ dans $G'/H'$ », dont l'existence est équivalente à celle de la structure.

Si alors $E(V, G)$ est un EFP, $e(V, H)$ un SFP de $E$, la subordination définie par $\pi$ fera correspondre à toute CI $\omega$ sur $E$ une CI subordonnée $\underline{\omega}$ sur le FPQ par $H'$ du SFP de $E$ de groupe structural $G'$ contenant $e$.

## 18. Connexions invariantes subordonnées.

1. Soient $G/H$ un espace homogène de Lie, $\mathcal{F}$ un morphisme d'EFP de type $R$ de $G(V, H)$ dans $E_1(V, G_1)$. Posons $H_1 = R(H)$ et $\mathcal{F}(G) = e_1(V, H_1)$. [on a posé naturellement $V = G/H$].

Supposons que $G/H$ admette dans $E_1$ une connexion invariante $\omega_1$ de type R, que $H_1$ soit fermé dans $G_1$ et que $G_1/H_1$ admette une connexion invariante $\pi$ de type $\rho.\rho$ est un homomorphisme de $H_1$ dans un groupe de Lie $G_2$. Soit $E_2(V, G_2)$ l'espace $e_{1\rho}$ du morphisme canonique de type $\rho$ de $e_1$.

La CI $\omega_2$ subordonnée à $\omega_1$ par $\pi$ est une CI sur $E_2(V, G_2)$. Si par ailleurs $\mathcal{F}_1$ est le morphisme canonique de $e_1$ dans $e_{1\rho}$, $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}$ est un morphisme de type $\rho \circ R$ de $G(V, H)$ dans $E_2$. Il est alors facile de constater que la CI $\omega_2$ est invariante par G. $\omega_2$ sera dite connexion invariante subordonnée à $\omega_1$ par $\pi$.

2. Supposons en particulier que, avec les notations précédentes, $G_1/H_1$ admette une structure réductive. Dans ces conditions la connexion invariante subordonnée définira sur $G/H$ une structure réductive généralisée. Si par ailleurs le morphisme $\mathcal{F}$ est de plus injectif, $G/H$ sera muni d'une structure réductive. Il en est en particulier ainsi, d'après ce qu'on a vu, si $E_1(V, G_1)$ est l'EFP des repères linéaires de V, c'est-à-dire si $\omega_1$ est une connexion linéaire invariante. On énoncera :

THÉORÈME 18.1. — *Si* $G/H$ *admet une connexion linéaire invariante et si* H *est réductif dans le groupe linéaire, alors* $G/H$ *admet une structure réductive.*

On obtient un résultat analogue dans le cas localement homogène : on dira qu'une connexion linéaire est réductive en un point si le groupe des automorphismes de l'espace tangent qui laisse invariants ses tenseurs fondamentaux est réductif dans le groupe linéaire. On aura alors le résultat :

THÉORÈME 18.2. — *Si le couple* $(\omega, \omega_0)$ *munit la variété analytique* V *d'une structure de variété à connexion linéaire localement invariante, et si la connexion* $\omega$ *est réductive en un point, alors* V *peut être munie d'une structure de variété localement réductive.*

3. Tout espace homogène de Lie $G/H$ possède une connexion invariante canonique de type I (injection de H dans G). En effet, considérons sur $G \times G$ la relation d'équivalence :

$$(g, g') \sim (gh, h^{-1}g') \quad \text{pour } h \text{ dans H.}$$

La classe d'équivalence définie par le couple $(g, g')$ sera notée $(g \dot{,} g')$. L'ensemble de ces classes d'équivalence s'identifie à l'espace $G_I$ du morphisme canonique de type I de $G(V, H)$.

L'ensemble des éléments de la forme $(g \dot{,} g^{-1})$ détermine une section globale de $G_I$ et par suite une CI $\omega_0$ sur cet EFP. On constate immédiatement que $\omega_0$ est invariante par G. Cette connexion sera dite connexion invariante canonique de G/H. La forme $\omega_0^*$ correspondante, avec les notations du paragraphe 15, est tout simplement l'application identique de $\underline{G}$.

Supposons maintenant que G/H possède une connexion invariante $\pi$ de type R. $\pi$ fait correspondre à $\omega_0$ une connexion invariante subordonnée $\underline{\omega_0}$. On constate aussitôt que $\underline{\omega_0}$ s'identifie à $\pi$ elle-même, soit :

Proposition. — *Toute connexion invariante $\pi$ sur un espace homogène G/H est $\pi$-subordonnée à la connexion invariante canonique de cet espace homogène.*

## 19. Holonomie des connexions subordonnées.

1. Soient $E(V, G)$ un EFP, $e(V, H)$ un SFP de E de groupe structural fermé dans G, $\pi$ une connexion invariante de type R sur G/H. $\omega$ étant une CI sur E, soit $\underline{\omega}$ la CI $\pi$-subordonnée à $\omega$. $\underline{\omega}$ est une CI sur $e_R(V, G')$. On désignera, conformément aux conventions du premier chapitre, par $\mathcal{F}_R^e$ le morphisme canonique de type R de $e$, par $\mathcal{F}_R^G$ le morphisme canonique de type R de G(G/H,H).

Ceci étant, soit $z(t)$ un chemin de $e(V, H)$. On posera :

$$z'(t) = \mathcal{F}_R^e(z(t)).$$

De même, si $g(t)$ est un chemin de G, on posera :

$$g'(t) = \mathcal{F}_R^G(g(t))$$

et, si $e$ est l'élément neutre de G, $e' = \mathcal{F}_R^G(e)$.

Pour développer $z(t)$ suivant $\omega$ sur G, on intègrera :

$$g^{-1}(t)\, dg\,(t) = \omega(dz(t)).$$

Et de même, pour développer $z'(t)$ sur $G'$ suivant $\underline{\omega}$, on intègrera :

$$\gamma^{-1}(t)\, d\gamma\,(t) = \underline{\omega}(dz'(t))$$

d'où, par définition de $\underline{\omega}$,

$$\gamma^{-1}(t)\, d\gamma\,(t) = \pi^*(g^{-1}(t)\, dg\,(t))$$

soit :

$$\gamma^{-1}(t)\, d\gamma\,(t) = \pi(g'^{-1}(t)\, dg'\,(t)). \tag{19.1}$$

Or cette formule est justement celle qui, dans l'EFP $G_R(G/H, G')$, définit le développement du chemin $g'(t)$ sur $G'$ suivant $\pi$. On a donc le résultat :

Théorème 19-1. — Si $\underline{\omega}$ est $\pi$-subordonnée à $\omega$, et si $z(t)$ est un chemin de $e(V, H)$, le développement suivant $\underline{\omega}$ sur $G'$ du chemin $\mathcal{F}^e_R(z(t))$ s'obtient en développant suivant $\pi$ sur $G'$ le chemin $\mathcal{F}^G_R(g(t))$, où $g(t)$ est le développement suivant $\omega$ sur $G$ de $z(t)$.

De ce théorème résulte immédiatement une propriété des groupes d'holonomie $P_z$ et $P'_{z'}$ respectivement de $\omega$ en un point $z$ de $e(V, H)$ et de $\underline{\omega}$ au point $z' = \mathcal{F}^e_R(z)$ : si l'on reprend les notations précédentes, $D_{\gamma(t)}e'$ et $g'(t)$ sont reliés dans $G_R$ par un chemin horizontal par rapport à $\pi$. Il en résulte que, dans $G_R$, ces deux points sont situés dans une même nappe d'holonomie de $\pi$. Soit :

Théorème 19-2. — *Dans l'espace* $G_R$, $e'P'_{z'}$ *et* $\mathcal{F}^G_R(P_z)$ *engendrent la même nappe d'holonomie relativement à* $\pi$.

Dans cet énoncé, $e'P'_{z'}$ désigne l'ensemble des points $D_{\gamma'}e'$ avec $\gamma' \in P'_{z'}$ et le terme « nappe d'holonomie engendrée par un ensemble » signifie : réunion des nappes d'holonomie des différents points de l'ensemble.

2. Le dernier résultat se simplifie notablement dans le cas réductif : dans ce cas $z$ et $z'$ s'identifient de même que $g$ et $g'$, $e$ et $e'$, et l'on obtient la formulation suivante :

Théorème 19-3. — *Dans le cas réductif, le groupe d'holonomie de* $\underline{\omega}$ *et celui de* $\omega$ *en un même point de* $e(V, H)$ *engendrent dans* $G$ *la même nappe d'holonomie relativement à la connexion* $\pi$.

Or la nappe d'holonomie relativement à $\pi$ de l'élément neutre de $G$ est un sous-groupe de Lie $G_0$ de $G$ invariant dans $G$. Le résultat exprimé peut donc s'écrire :

$$(19.2) \qquad P_z . G_0 = P'_z . G_0.$$

On dira qu'on est dans le cas réductif-trivial si $G_0 \cap H$ est réduit à l'élément neutre ($\pi$ est alors sans courbure). Soit dans ce cas $f_0$ l'homomorphisme de $G$ sur $H$ défini par $G_0$. La formule (19.2) équivaut alors à :

$$(19.3) \qquad P'_z = f_0(P_z)$$

$P_z$ est donc isomorphe au produit de $P'_z$ par $P_z \cap G_0$. L'algèbre de Lie de ce dernier groupe est invariante par $\mathrm{adj}(P_z)$. Supposons $G_0$ connexe et $\mathrm{adj}(P_z)$ opérant dans $\underline{G}_0$ irréductible. Alors l'algèbre de Lie de $P_z \cap G_0$ est soit réduite à $\{0\}$, soit identique à $\underline{G}_0$. Par suite $P_z$ est ou bien isomorphe à $P'_z$ ou bien isomorphe au produit de ce groupe par $G_0$.

Notons que, dans le cas où $\omega$ est une connexion affine, $\underline{\omega}$ la connexion linéaire subordonnée, on retrouve ainsi un résultat classique (Lichnerowicz, voir [8] page 145).

## 20. Subordination pour les champs d'éléments.

Diverses généralisations des opérations de subordination, telles qu'elles viennent d'être définies pour les connexions, peuvent être introduites dans les cas où interviennent des CE. Nous nous contenterons d'indiquer brièvement ces diverses opérations, qui pourraient donner lieu à une étude détaillée, en particulier du point de vue de l'holonomie.

1. Soient $E(V, G)$ un EFP et $e(V, H)$ un SFP de $E$ de groupe structural fermé dans $G$. Considérons un CE $M_z$ sur $E$ uniforme par rapport à $e$. Pour $z$ dans $e$, soit $\underline{K}$ l'idéal de $\underline{H}$ défini par :

$$\underline{K} = u(M_z \cap \mathcal{V}_z).$$

Supposons qu'il existe un sous-espace $M$ de $\underline{G}$ qui vérifie :

$$(20.1) \qquad \underline{G} = \underline{K} + M \quad \text{(somme directe)} \quad \text{et} \quad adj\,(H)M \subset M.$$

On dira alors que le couple $(\underline{K}, M)$ définit sur l'espace homogène $G/H$ une structure semi-réductive de deuxième espèce.

Dans ces conditions, considérons en chaque point $z$ de $e(V, H)$ le sous-espace $m_z$ défini par une CI $\omega$ sur E. On définira un nouveau sous-espace :

$$(20.2) \qquad m'_z = (m_z + z.M) \cap M_z.$$

Il est immédiat de constater que $m'_z$ est l'élément en $z$ d'une CI $\underline{\omega}$ contenue dans $M_z$ et qui sera dite CI subordonnée à $\omega$ dans $M_z$ par la structure semi-réductive de deuxième espèce considérée.

Naturellement, si l'on considère le cas particulier où $M_z$ est le CE intégrable défini par $e(V, H)$, on a $\underline{K} = \underline{H}$, et la structure semi-réductive de deuxième espèce qui intervient sera une structure réductive. On retrouvera alors le cas réductif étudié au paragraphe 17.

On pourrait définir également la notion de structure semi-réductive de deuxième espèce généralisée sur un espace homogène $G/H$. Une telle structure serait la donnée du triple $(H', \underline{K}, M)$, où M est un sous-espace de $\underline{G}$, $\underline{K}$ un idéal de $\underline{H}$, $H'$ un sous-groupe fermé de H invariant dans G, ces éléments devant vérifier :

$$(20.3) \qquad \underline{G} = M + \underline{K}; \quad M \cap \underline{K} = \underline{H}'; \quad adj(H)M \subset M.$$

A l'aide de cette nouvelle notion, on peut introduire une connexion subordonnée qui sera une connexion sur le FPQ $E/H'$ contenue dans l'image de $M_z$ dans ce FPQ.

2. On peut aussi définir des CE subordonnés. On va donner un exemple simple de subordination associant à un CE uniforme un CE connexe.

Soient $E(V, G)$ un EFP, $M_z$ un CE sur E uniforme par rapport au SFP $e(V, H)$ — H étant fermé dans G. Supposons que $G/H$ admette une structure réductive définie par la décomposition en somme directe :

$$(20.4) \qquad \underline{G} = \underline{H} + M; \quad adj\,(H)M \subset M.$$

Considérons alors en chaque point $z$ de $e(V, H)$ le sous-espace :

$$(20.5) \qquad M'_z = (M_z + z.M) \cap T_z$$

où $T_z$ est le sous-espace tangent en $z$ à $e(V, H)$.

$M'_z$ définit sur $E(V, G)$, en complétant par les translations à droite, un CE connexe qui sera dit CE subordonné à $M_z$ par la structure réductive.

Il n'est pas nécessaire pour la définition que $e(V, H)$ soit SFP de référence maximal. Par exemple, si $M_z$ est une CI, on retrouve la notion de connexion subordonnée dans le cas réductif.

3. En ce qui concerne les CE invariants sur un espace homogène de Lie, les résultats du paragraphe 18 peuvent se généraliser de façon convenable. Par exemple, si $E_1(V, G_1)$ est un EFP où G opère à gauche par un morphisme d'EFP, et si $\omega_1$ et $M_{1_z}$ sont respectivement une connexion invariante et un CE invariant sur $E_1$, de sorte qu'on puisse à l'aide d'une structure réductive définir une CI $\underline{\omega_1}$ subordonnée à $\omega_1$ dans $M_{1_z}$, alors $\underline{\omega_1}$ est une nouvelle connexion invariante sur $E_1(V, G_1)$.

De même, on pourra à l'aide de la même structure réductive définir un CE connexe invariant subordonné à $M_{1_z}$.

On notera qu'un espace homogène de Lie $G/H$ possède, outre la connexion canonique invariante déjà signalée, un CE invariant évident sur tout EFP où G opère par un morphisme $\mathcal{F}$, à savoir le CE intégrable défini par le SFP $\mathcal{F}(G)$. C'est lui qu'on a utilisé implicitement au paragraphe 18 pour définir les connexions invariantes subordonnées.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ARAGNOL, Sur la géométrie différentielle des espaces fibrés. *Annales Sci. Ec. Norm. Sup.*, (3) 75 (1958), pp. 257-407.

[2] BERNARD, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, 10 (1960), pp. 151-270.

[3] CHERN, Differential geometry of fiber bundles, *Proceedings of Intern. Cong. of Math.*, Cambridge, 2 (1950), p. 397.

[4] CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press (1946).

[5] EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré principal, *Colloque de topologie*, Bruxelles, (1950) pp. 29-55.

[6] KOBAYASHI, Theory of connections, *Ann. Math. Pura Appl.*, (4) 43 (1957).

[7] KOSTANT, A characterization of invariant affine connections, *Nagoya Math. J.*, 16 (1960), pp. 35-50.

[8] LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, *éd. Cremonese*, Rome (1955).

[9] LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, éd. Dunod Paris, (1958).
[10] MOLINO, Variétés à connexion linéaire localement invariante, *C.R.A.S.*, 252 (1961), pp. 1551-1553.
[11] MOLINO, Espaces homogènes semi-réductifs et connexions subordonnées, *C.R.A.S.*, 252 (1961), pp. 3379-3380.
[12] NGO-VAN-QUE, G-structures invariantes, *C.R.A.S.*, 253 (1961), pp. 2454-2456.
[13] NOMIZU, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. Math. J.*, 76 (1954), pp. 33-65.
[14] NOMIZU, Lie groups and differential geometry. *Publications de la Math. Soc. of Japan*, (1956).
[15] NOMIZU, *Math. Review*, A. 1326 (février 1962).
[16] WANG, Invariant connections, *Nagoya Math. J.*, 13 (1958).

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1963.)

Pierre MOLINO,
3, Immeuble le Peyrou,
Boulevard Renouvier,
Montpellier (Hérault).