ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AHMAD EL SOUFI
ROBERT PETIT

Immersions minimales et immersions pluriharmoniques entre variétés riemanniennes : résultats de non existence et de rigidité

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 1 (2000), p. 235-256
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_235_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 1 (2000), 235–256

IMMERSIONS MINIMALES ET IMMERSIONS PLURIHARMONIQUES ENTRE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES : RÉSULTATS DE NON EXISTENCE ET DE RIGIDITÉ

par A. EL SOUFI et R. PETIT

1. Introduction.

Étant donnée une variété kählérienne M de dimension réelle $m > 2$, il est bien connu que :

(A) il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans une variété riemannienne à courbure constante strictement négative,

(B) toute immersion isométrique minimale de M dans une variété kählérienne de courbure sectionnelle holomorphe constante strictement négative, est holomorphe ou anti-holomorphe.

Ces résultats avaient été obtenus dans les années 80 de manière indépendante par plusieurs auteurs (dont Sampson [18], Dajczer-Rodriguez [1], El Soufi [4] pour le premier résultat, et Dajczer-Thorbergsson [2], Udagawa [21] pour le second).

Dans la première partie de cet article, notre but sera de montrer que ces phénomènes de non existence et de rigidité subsistent dans un contexte bien plus général que celui décrit dans les résultats (A) et (B). En effet, nous montrerons, d'une part, que l'hypothèse "kählérienne" sur la variété source M peut être remplacée par celle (réelle) de l'existence sur M d'une 2-forme parallèle non nulle. D'autre part, nous verrons que les conditions

Mots-clés : Immersions minimales – Immersions pluriharmoniques – Immersions holomorphes – Formes parallèles – Variétés kählériennes – Résultat d'annulation – Opérateur de Dirac.
Classification math : 53C20 – 53C24 – 53C42 – 53C55.

sur la courbure de la variété but N dans (A) et (B) peuvent être affaiblies en des conditions (ouvertes) de négativité portant seulement sur sa courbure isotrope.

Ainsi, le résultat de non existence (A) peut être énoncé sous la forme plus générale suivante (théorème 3.1) :

si M est une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ qui admet une 2-forme parallèle non nulle, et si N est une variété riemannienne de courbure isotrope strictement négative, alors il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.

Notons que si M est localement le produit d'une variété kählérienne par une variété riemannienne, alors elle admet des 2-formes parallèles non nulles. Par ailleurs, la notion de courbure isotrope a été introduite et utilisée pour la première fois, à notre connaissance, par Micallef et Moore [12] (sa définition est rappelée dans le paragraphe 2). Le signe de cette courbure suit celui de l'opérateur de courbure, ainsi que celui de la courbure sectionnelle lorsque celle-ci est ponctuellement 1/4-pincée ([12] et [6]). D'un autre côté, la positivité, ou la négativité, de la courbure isotrope n'entraîne même pas celle de la courbure de Ricci (cf. [12], [13] et [14]). Seul le signe de la courbure scalaire est déterminé par celui de la courbure isotrope [13].

Sur une variété kählérienne N, la courbure isotrope s'annule nécessairement sur certains plans isotropes ; ce sont les plans $P = \mathbb{C}\{Z, W\}$ tels que $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$ (cf. §3). Néanmoins, il existe des variétés kählériennes dont la courbure isotrope est strictement positive (resp. strictement négative) sur tous les autres plans. On dira de ces variétés qu'elles sont de courbure isotrope fortement positive (resp. fortement négative). C'est le cas par exemple de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ (resp. de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{CH}^n$) muni de sa métrique canonique, ainsi que de toute variété kählérienne à tenseur de courbure fortement positif (resp. fortement négatif) selon la définition de Siu [20]. En particulier, la construction de Mostow-Siu [15] fournit des exemples de variétés kählériennes non localement symétriques qui vérifient cette hypothèse de courbure isotrope fortement négative.

Le résultat de rigidité (B) ci-dessus apparaîtra alors comme cas particulier du théorème suivant (Théorème 3.2) :

si M est une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ qui admet une 2-forme parallèle non nulle α, et si N est une variété kählérienne de courbure isotrope fortement négative, alors l'existence d'une immersion *isométrique minimale ϕ de M dans N entraîne que α est une forme de Kähler sur M et que ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.*

Autrement dit, si N est une variété kählérienne de courbure isotrope fortement négative, alors les sous-variétés complexes de N sont les seules sous-variétés minimales de dimension paire $m > 2$ admettant des 2-formes parallèles non nulles.

Notre preuve des résultats sus-cités est fondée sur une formule du type Weitzenböck qui fait intervenir l'opérateur de Dirac D agissant sur les formes à valeurs vectorielles (Lemme 2.2). L'utilisation de ce formalisme (multiplication de Clifford et opérateur de Dirac) dans le cadre des applications harmoniques (et donc des immersions minimales), avait été sugérée par Gromov et Pansu [5]. Cependant, plusieurs des ingrédients de cette méthode avaient d'abord été introduits et utilisés dans le cadre spinoriel par Hijazi [7] et [8], Kirchberg [9], [10], Polombo [17], etc... .

Dans le cas où la variété but N est de courbure constante positive, ainsi que le cas où N est kählérienne de courbure holomorphe constante positive, des résultats semblables à (A) et (B) avaient été établis pour les immersions isométriques pluriharmoniques issues d'une variété kählérienne M à valeurs dans N (cf. [2], [4], [21]). Rappelons à cet effet qu'une immersion ϕ définie sur une variété kählérienne M est dite pluriharmonique (ou encore circulaire, ou $(1,1)$-géodésique) si sa seconde forme fondamentale est anti-invariante pour la structure complexe de M. Cette notion de pluriharmonicité est intermédiaire entre l'holomorphie et la minimalité car toute immersion holomorphe est pluriharmonique et toute immersion pluriharmonique est minimale.

Au paragraphe 4 du présent article, nous nous intéressons à ce type de résultats et nous montrons que ceux-ci restent valables lorsqu'on affaiblit les hypothèses sur la courbure de N en les remplaçant par des hypothèses de positivité portant sur sa seule courbure isotrope.

Les résultats que nous obtenons dans ce cadre ont en fait une portée encore plus générale. En effet, la notion d'immersion pluriharmonique se généralise de manière naturelle au cas où la variété source M n'est pas nécéssairement kählérienne, mais seulement munie d'une 2-forme harmonique non nulle α (i.e. α appartient au noyau de D) : si M est une telle variété, une application ϕ définie sur M sera dite α-pluriharmonique si la forme $d\phi$ appartient au noyau de l'opérateur $[D, \alpha] = D\alpha - \alpha D$ (où D est l'opérateur de Dirac et où α agit par multiplication de Clifford). Dans le cas particulier où α est une forme de Kähler, les applications α-pluriharmoniques sont exactement les applications pluriharmoniques; l'opérateur $[D, \alpha]$ est connu dans ce cas sous le nom de "Kähler twist" de D. Les principaux résultats que nous obtenons sur ce thème se présentent en fait commme suit (Théorèmes 4.1 et 4.3) :

si M est une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ munie d'une 2-forme parallèle non nulle α, alors,

i) *il n'existe aucune immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans une variété de courbure isotrope strictement positive,*

ii) *s'il existe une immersion isométrique α-pluriharmonique ϕ de M dans une variété kählérienne de courbure isotrope fortement positive, alors α est une forme de Kähler et ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe,*

iii) *toute immersion isométrique minimale de M dans une variété de courbure isotrope non positive est α-pluriharmonique.*

De plus, dans le cas où M est compacte, les assertions (i) et (ii) restent valables lorsque la forme α est seulement supposée harmonique.

Ces résultats nous permettent non seulement de généraliser les résultats antérieurs concernant les immersions pluriharmoniques de variétés kählériennes, mais aussi d'obtenir des résultats d'annulation et d'unicité pour les 2-formes parallèles ou harmoniques, eu égard au fait que l'application identité d'une variété riemannienne est toujours α-pluriharmonique, quelle que soit la 2-forme α. En effet, nous en déduisons (Corollaires 4.3 et 4.4, Proposition 4.1) que,

si M est une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ et

i) *si M est compacte de courbure isotrope strictement positive, alors son second nombre de Betti est nul,*

ii) *si la courbure isotrope est strictement positive ou strictement négative en au moins un point de M, alors toute 2-forme parallèle sur M est nulle,*

iii) *si M est kählérienne de courbure isotrope fortement positive ou fortement négative en au moins un point, alors la forme de Kähler de M est, à une homothétie près, l'unique 2-forme parallèle sur M.*

L'assertion (i) avait également été obtenue de manière indépendante par Micallef-Wang [13] et Seaman [19].

2. Équation principale.

Tout au long de cet article, M et N désigneront deux variétés riemanniennes connexes de dimensions respectives $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Tous les produits scalaires induits par les métriques g et g' de M et de N seront notés $< \ , \ >$. Si ϕ est une application différentiable de M dans N, on désignera par ϕ^*TN le fibré image réciproque induit sur M par ϕ. Dans ce qui suit V sera soit le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$ soit le fibré ϕ^*TN.

Si on désigne par $\Omega(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(V)$ l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans V, alors, pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^p(V)$ et tout $x \in M$, on pose :

$$< \alpha, \beta >= \frac{1}{p!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} < \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}), \beta(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}) >,$$

où $\{e_i\}_{i\leqslant m}$ désigne une base g-orthonormée de T_xM.

Soit $\Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(M)$ l'espace des formes différentielles réelles sur M (i.e. $\Omega(M) = \Omega(M \times \mathbb{R})$). Le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ d'une forme vectorielle $\alpha \in \Omega^p(V)$ contre une forme réelle $\beta \in \Omega^q(M)$ est une forme vectorielle de degré $p+q$ qui se définit de manière naturelle. De plus, via l'isomorphisme canonique entre $\Omega(V)$ et $\Omega(V^*)$, nous pouvons définir le produit extérieur entre formes vectorielles :

$$\begin{aligned} \Omega^p(V) \ \times \ \Omega^q(V) &\mapsto \ \Omega^{p+q}(M) \\ (\ \alpha\ ,\ \beta\ ) &\mapsto \ \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

Si $\sigma \in \Omega^q(V)$ est une q-forme, alors, pour tout $p \geqslant q$, on appelle produit intérieur par σ l'opérateur $i(\sigma) : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{p-q}(V)$ donné pour tout $\alpha \in \Omega^p(M)$, tout $\beta \in \Omega^{p-q}(V)$ et tout $x \in M$ par

$$< i(\sigma)\alpha, \beta > (x) =< \alpha, \sigma \wedge \beta > (x).$$

La multiplication de Clifford à gauche (resp. à droite) est l'opération (cf. Lawson-Michelsohn [11]) :

$$\begin{aligned} \Omega^1(V) \ \times \ \Omega^p(M) &\mapsto \ \Omega(V) \\ (\ \sigma\ ,\ \alpha\ ) &\mapsto \ \sigma.\alpha = \sigma \wedge \alpha - i(\sigma)\alpha \end{aligned}$$
$$\Big(\text{resp. } (\ \sigma\ ,\ \alpha\ ) \mapsto \ \alpha.\sigma = (-1)^p(\sigma \wedge \alpha + i(\sigma)\alpha) \Big).$$

On désignera par ∇ toutes les connexions canoniques associées aux métriques riemanniennes de TM et de V. On a alors, pour tout $\sigma \in \Omega^1(V)$, tout $\alpha \in \Omega^p(M)$ et tout $X \in TM$,

$$\nabla_X(\alpha.\sigma) = (\nabla_X\alpha).\sigma + \alpha.(\nabla_X\sigma).$$

L'opérateur de Dirac agissant sur $\Omega(V)$ est l'opérateur $D = d + \delta$, où d et δ désignent respectivement la différentielle et la codifférentielle extérieures (*cf.* [EL]). Si $\{e_i\}_{i\leqslant m}$ est un repère g-orthonormé local de M, alors on a $D = \sum_i e_i^*.\nabla_{e_i}$, où $\{e_i^*\}_{i\leqslant m}$ est le repère dual de $\{e_i\}_{i\leqslant m}$.

Dans ce qui suit, une 2-forme $\alpha \in \Omega^2(M)$ sera dite harmonique (au sens fort) si $D\alpha = 0$ (i.e. $d\alpha = \delta\alpha = 0$). Noter qu'une telle 2-forme vérifie $\triangle\alpha = (d\delta + \delta d)\alpha = 0$. La réciproque étant vraie dans le cas où M est compacte.

La première étape dans la preuve des résultats est le

LEMME 2.1. — *Si $\alpha \in \Omega^2(M)$ est une 2-forme harmonique, alors pour tout $X, Y \in TM$, on a*

(1)
$$\Big(D(\alpha.d\phi)-\alpha.D(d\phi)\Big)(X,Y) = 2\Big(\nabla d\phi((i(X)\alpha)^\#, Y)-\nabla d\phi(X,(i(Y)\alpha)^\#)\Big),$$

où $(i(X)\alpha)^\#$ désigne le champ de vecteurs associé canoniquement à la 1-forme $i(X)\alpha$.

Preuve. — Soit $\{e_i\}$ un repère orthonormé local au voisinage d'un point x de M. On a

$$(2) \qquad D(\alpha.d\phi) = \sum_i e_i^*.\nabla_{e_i}(\alpha.d\phi) = \sum_i e_i^*.(\nabla_{e_i}\alpha.d\phi + \alpha.\nabla_{e_i}d\phi)$$
$$= D\alpha.d\phi + \sum_i e_i^*.\alpha.\nabla_{e_i}d\phi,$$

car la multiplication de Clifford est associative. Or on a d'une part $D\alpha = 0$ et, d'autre part, $e_i^*.\alpha = \alpha.e_i^* - 2i(e_i^*)\alpha$. Donc, (2) donne

$$(3) \qquad D(\alpha.d\phi) = \alpha.D(d\phi) - 2\sum_i i(e_i^*)\alpha.\nabla_{e_i}d\phi.$$

En développant (3) on obtient

$$(4) \quad D(\alpha.d\phi) - \alpha.D(d\phi) = 2\sum_i \nabla_{e_i}d\phi \wedge i(e_i)\alpha + 2\sum_{i,j}\nabla d\phi(e_i,e_j)\alpha(e_i,e_j).$$

Du fait que le hessien est symétrique on déduit que

$$\sum_{i,j} \nabla d\phi(e_i, e_j)\alpha(e_i, e_j) = 0.$$

Appliquée à $X, Y \in T_xM$, l'équation (4) donne

$$\begin{aligned}\Big(D(\alpha.d\phi) - \alpha.D(d\phi)\Big)&(X,Y)\\ &= 2\sum_i \Big(\nabla d\phi(e_i, X)\alpha(e_i, Y) - \nabla d\phi(e_i, Y)\alpha(e_i, X)\Big).\end{aligned}$$

Sachant que $(i(X)\alpha)^{\#} = \sum_i \alpha(X, e_i)e_i$ et $(i(Y)\alpha)^{\#} = \sum_i \alpha(Y, e_i)e_i$, on déduit immédiatement le résultat. □

Notons respectivement K' et ρ' la courbure sectionnelle et l'opérateur de courbure de N. On désigne par $T_y^{\mathbb{C}}N$ le complexifié de l'espace tangent à N au point y, et par $\rho'_{\mathbb{C}}$ et $(\ ,\ )$ les extensions naturelles respectives de ρ' et de $<\ ,\ >$ à $\wedge^* T_y^{\mathbb{C}}N$.

À chaque 2-plan $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$, on peut associer un nombre réel, appelé *courbure sectionnelle complexe* de P, en posant

$$K'_{\mathbb{C}}(P) = K'_{\mathbb{C}}(Z \wedge W) = \frac{\Big(\rho'_{\mathbb{C}}(Z \wedge W), (\overline{Z \wedge W})\Big)}{\Big(Z \wedge W, \overline{Z \wedge W}\Big)}.$$

Noter que si $\{Z_1, Z_2\}$ est une famille orthonormée dans T_yN, alors $K'(Z_1 \wedge Z_2) = K'_{\mathbb{C}}((Z_1 + iZ_2) \wedge (Z_2 + iZ_1))$. Par suite si $K'_{\mathbb{C}}$ est négative (resp. positive) alors K' est partout négative (resp. positive). Un vecteur $Z = X + iY \in T_y^{\mathbb{C}}N$ est dit *isotrope* si $(Z, Z) = 0$ (i.e. $|X| = |Y|$ et $< X, Y >= 0$). Un plan P est dit *isotrope* s'il est formé de vecteurs isotropes. On appellera *courbure isotrope* de N la restriction de $K'_{\mathbb{C}}$ aux plans isotropes.

On rappelle que, si α est une 2-forme sur M, alors, pour tout $x \in M$, il existe une base orthonormée $\{e_i\}_{i \leqslant m}$ de T_xM telle que

$$\alpha(x) = a_1 e_1^* \wedge e_{d+1}^* + \ldots + a_d e_d^* \wedge e_{2d}^*,$$

où $\{e_i^*\}_{i \leqslant m}$ est la base duale de $\{e_i\}_{i \leqslant m}$, $d = [m/2]$ est la partie entière de $m/2$, et où les a_i sont des réels positifs ou nuls. Une telle base sera dite *α-standard*.

Les résultats de cet article sont fondés sur l'équation suivante :

LEMME 2.2. — *Si ϕ est une immersion isométrique de M dans N, alors, pour toute 2-forme harmonique α sur M et tout $x \in M$, on a*

$$(5) \qquad |D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2 + 4 < \nabla^*\nabla\alpha, \alpha > +4R_\phi(\alpha),$$

où H est le vecteur courbure moyenne de ϕ (i.e. $H = \frac{1}{m}\mathrm{trace}_g \nabla d\phi$), $\nabla^*\nabla$ le laplacien brut de M, et où, dans une base α-standard $\{e_i\}_{i\leqslant m}$ de T_xM,

$$R_\phi(\alpha) = \sum_{i,j\leqslant d} K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge Z_j)(a_i + a_j)^2 + \sum_{i,j\leqslant d} K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge \overline{Z_j})(a_i - a_j)^2 + \chi_m \sum_{i\leqslant d}(K'_{im} + K'_{i'm})a_i{}^2$$

avec $Z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + ie_{i'})$ $\quad i' = i+d \quad K'_{ij} = K'(e_i \wedge e_j)$ et $\chi_m = m - 2[m/2]$.

Noter que les plans engendrés par les couples de vecteurs $\{Z_i, Z_j\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ et $\{Z_i, \overline{Z_j}\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ ci-dessus sont des plans isotropes.

Preuve. — Sachant que $d\phi$ est fermée en tant que 1-forme à valeurs dans ϕ^*TN, on a $Dd\phi = \delta d\phi = -mH$. On peut donc réécrire (4) sous la forme

$$D(\alpha.d\phi) = -mH\alpha + 2\sum_{i\leqslant m} i(e_i)h \wedge i(e_i)\alpha,$$

où $h = \nabla d\phi$ est la seconde forme fondamentale de ϕ, et où $\{e_i\}_{i\leqslant m}$ est une base orthonormée quelconque de T_xM. En considérant la norme de $D(\alpha.d\phi)$ on obtient :

$$\begin{aligned}|D(\alpha.d\phi)|^2 =& m^2|H|^2|\alpha|^2 - 4m\sum_{i\leqslant m} < \alpha H, i(e_i)h \wedge i(e_i)\alpha > \\ &+ 4|\sum_{i\leqslant m} i(e_i)h \wedge i(e_i)\alpha|^2, \\ =& m^2|H|^2|\alpha|^2 - 4m\sum_{i,j,k} < H, h_{ij} > \alpha_{ik}\alpha_{jk} \\ (6) \qquad &+ 4\sum_{i,j,k,l} < h_{il}, h_{jl} > \alpha_{ik}\alpha_{jk} - 4\sum_{i,j,k,l} < h_{ik}, h_{jl} > \alpha_{jk}\alpha_{il},\end{aligned}$$

où $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ et $\alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. D'autre part la formule de Weitzenböck classique appliquée à α donne

$$\triangle\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + R(\alpha),$$

où $\triangle = d\delta + \delta d$ et où

$$R(\alpha)(X,Y) = \alpha(\mathrm{Ric}(X), Y) + \alpha(X, \mathrm{Ric}(Y)) - \sum_{i,j} R(X,Y,e_i,e_j)\alpha_{ij},$$

ici Ric désigne la courbure de Ricci de M. D'après les hypothèses, on a $d\alpha = \delta\alpha = 0$. Donc $\triangle\alpha = 0$ et

(7)
$$< \nabla^*\nabla\alpha, \alpha >= - < R(\alpha), \alpha >= -\sum_{i,j,k} \mathrm{Ric}_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jk} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} R_{jkil}\alpha_{il}\alpha_{jk},$$

où $\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j)$ et $R_{jkil} = R(e_j, e_k, e_i, e_l)$. Or, les équations de Gauss donnent, pour tout X, Y, Z, W :

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = R'(X,Y,Z,W) + &< h(X,Z), h(Y,W) > \\ &- < h(X,W), h(Y,Z) > \end{aligned}$$
$$\mathrm{Ric}(X,Z) = r_\phi(X,Z) + m < H, h(X,Z) > - \sum_{j\leqslant m} < h(X,e_j), h(Z,e_j) >,$$

où $r_\phi(X,Z) = \sum_{j\leqslant m} R'(X,e_j,Z,e_j)$. En remplaçant dans (7) on trouve

$$\begin{aligned} < \nabla^*\nabla\alpha, \alpha > = &-R_\phi(\alpha) - m\sum_{i,j,k} < H, h_{ij} > \alpha_{ik}\alpha_{jk} \\ &+ \sum_{i,j,k,l} < h_{il}, h_{jl} > \alpha_{ik}\alpha_{jk} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} < h_{ij}, h_{kl} > \alpha_{il}\alpha_{jk} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} < h_{jl}, h_{ik} > \alpha_{il}\alpha_{jk}, \end{aligned} \tag{8}$$

où $R_\phi(\alpha) = \sum_{i,j,k} r_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jk} - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} R'_{jkil}\alpha_{il}\alpha_{jk}$ avec $r_{ij} = r_\phi(e_i, e_j)$ et $R'_{jkil} = R'(e_j, e_k, e_i, e_l)$. La combinaison de (6) et de (8) donne

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2 + 4 < \nabla^*\nabla\alpha, \alpha > + 4R_\phi(\alpha).$$

Reste à exprimer $R_\phi(\alpha)$ dans une base α-standard. Or si $\{e_i\}_{i\leqslant m}$ est une telle base on a

$$\alpha_{kl} = \begin{cases} a_k \ si\ k \leqslant d\ et\ l = k' \\ -a_k\ si\ l \leqslant d\ et\ l' = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On en déduit

$$R_\phi(\alpha) = \sum_{i\leqslant d}(r_{ii} + r_{i'i'})a_i^2 - 2\sum_{i,j\leqslant d} R'_{ii'jj'}a_ia_j. \tag{9}$$

En développant (9) on obtient

$$\begin{aligned}R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d}(R'_{ijij} + R'_{ij'ij'} + R'_{i'ji'j} + R'_{i'j'i'j'})(a_i^2 + a_j^2)\\ &\quad + \chi_m \sum_{i\leqslant d}(R'_{imim} + R'_{i'mi'm})a_i^2 - 2\sum_{i,j\leqslant d} R'_{ii'jj'}a_i a_j.\end{aligned} \tag{10}$$

En utilisant les identités $a_i^2 + a_j^2 = \frac{1}{2}\Big((a_i + a_j)^2 + (a_i - a_j)^2\Big)$ et $a_i a_j = \frac{1}{4}\Big((a_i + a_j)^2 - (a_i - a_j)^2\Big)$, l'équation (10) devient

$$\begin{aligned}R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{4}\sum_{i,j\leqslant d}(R'_{ijij} + R'_{ij'ij'} + R'_{i'ji'j} + R'_{i'j'i'j'} - 2R'_{ii'jj'})(a_i + a_j)^2\\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{i,j\leqslant d}(R'_{ijij} + R'_{ij'ij'} + R'_{i'ji'j} + R'_{i'j'i'j'} + 2R'_{ii'jj'})(a_i - a_j)^2\\ &\quad + \chi_m \sum_{i\leqslant d}(K'_{im} + K'_{i'm})a_i^2.\end{aligned}$$

En revenant à la définition de $K'_{\mathbb{C}}$ on déduit le résultat. □

3. Immersions minimales dans les variétés de courbure isotrope négative.

Dans ce paragraphe, nous examinons le cas où la variété N est de courbure isotrope négative. On notera $P_2(M) = \{\alpha \in \Omega^2(M); \nabla\alpha = 0\}$, l'espace des 2-formes parallèles sur M. On rappelle qu'une immersion isométrique ϕ de M dans N est dite *minimale* si son *vecteur courbure moyenne* H est nul en tout point x de M.

Le premier théorème que nous obtenons dans ce paragraphe est un résultat de non existence qui s'énonce comme suit :

THÉORÈME 3.1.— *Soit M une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ telle que $P_2(M) \neq \{0\}$. Soit N une variété riemannienne à courbure isotrope strictement négative. Alors il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.*

Ce théorème étend un certain nombre de résultats connus (voir par exemple Dajczer-Rodriguez [1], El Soufi [4], Sampson [18]) obtenus dans le cas particulier où M est kählérienne et avec une hypothèse plus forte sur la courbure de N. En effet, notre hypothèse sur la courbure de N est en particulier réalisée dans le cas où l'opérateur de courbure de N est strictement négatif, ainsi que dans le cas où la courbure sectionnelle de N est négative et (ponctuellement) strictement $1/4$ pincée (*cf.*[6]). Par ailleurs, le plongement canonique du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ montre la nécessité de l'hypothèse $m \neq 2$.

Dans le cas où N est une variété kählérienne dont on note J' la structure complexe, on a une décomposition du fibré tangent complexifié $TN^{\mathbb{C}}$ en deux sous fibrés $TN^{1,0}$ et $TN^{0,1}$ telle que

$$TN^{\mathbb{C}} = TN^{1,0} \oplus TN^{0,1}.$$

En chaque point y de N, la fibre $T_yN^{1,0}$ (resp. $T_yN^{0,1}$) est l'espace propre de J'_y pour la valeur propre i (resp. $-i$). Cette décomposition induit une décomposition de $\wedge^2 TN^{\mathbb{C}}$ sous la forme

$$\wedge^2 TN^{\mathbb{C}} = \wedge^{2,0}TN \oplus \wedge^{1,1}TN \oplus \wedge^{0,2}TN.$$

Comme N est kählérienne, la restriction de $\rho'_{\mathbb{C}}$ à $\wedge^{2,0}TN$ et à $\wedge^{0,2}TN$ est identiquement nulle. En particulier, si $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$ est un 2-plan tel que $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$, où $(Z \wedge W)^{1,1}$ est la composante dans $\wedge^{1,1}TN$ de $Z \wedge W$, alors la courbure sectionnelle complexe $K'_{\mathbb{C}}(P)$ de P est nulle. Par conséquent, il n'existe pas de variété kählérienne de courbure isotrope strictement négative. Cependant il existe des variétés kählériennes dont la courbure isotrope est strictement négative sur tous les plans sauf ceux vérifiant la propriété $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$ ci-dessus.

DÉFINITION. — *On dira qu'une variété kählérienne est de courbure isotrope fortement négative au point y si sa courbure isotrope en y est strictement négative sur tous les plans isotropes $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$ tels que $(Z \wedge W)^{1,1} \neq 0$.*

Noter que dans [20], Siu introduisit pour les variétés kählériennes la notion de tenseur de courbure fortement négatif (resp. fortement positif). Cette propriété du tenseur de courbure équivaut en fait à dire que la courbure sectionnelle complexe est strictement négative (resp. strictement positive) sur *tous* les plans $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$ tels que $(Z \wedge W)^{1,1} \neq 0$. Par suite, une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif (resp. fortement positif) est en particulier de courbure isotrope fortement négative (resp. fortement positive). Noter que les variétés kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante négative (resp. positive), sont des exemples particuliers de variétés à courbure fortement négative (resp. fortement positive).

On rappelle qu'une application ϕ d'une variété kählérienne (M, g, J) dans une variété kählérienne (N, g', J') est dite *holomorphe* (resp. *anti-holomorphe*) si, pour tout $X \in TM$, $J'd\phi(X) = d\phi(JX)$ (resp. $J'd\phi(X) = -d\phi(JX)$).

THÉORÈME 3.2.— *Soit M une variété riemannienne de dimension paire $m = 2d > 2$ telle que $P_2(M) \neq \{0\}$, et soit N une variété kählérienne à courbure isotrope fortement négative. S'il existe une immersion isométrique minimale ϕ de M dans N, alors*

i) $\dim P_2(M) = 1$ *et $P_2(M)$ est engendré par une forme de Kähler α,*

ii) *ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.*

Dans le cas particulier où M est une variété kählérienne, les deux théorèmes précédents donnent lieu au :

COROLLAIRE 3.1.— *Soit M une variété kählérienne de dimension $m > 2$. Alors*

a) *Il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans une variété riemannienne N à courbure isotrope strictement négative.*

b) *Toute immersion isométrique minimale de M dans une variété kählérienne N à courbure isotrope fortement négative est holomorphe ou anti-holomorphe.*

Preuve du théorème 3.1.— Soit $\alpha \in P_2(M)$, $\alpha \neq 0$. L'équation (5) donne, pour toute immersion isométrique ϕ de M dans N,

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha),$$

d'où

$$m^2|H|^2|\alpha|^2 \geqslant -4R_\phi(\alpha).$$

D'autre part, les plans engendrés par les vecteurs $\{Z_i, Z_j\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ et $\{Z_i, \overline{Z_j}\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, définis dans le lemme 2.2, sont des plans isotropes. Les hypothèses $K'_{\mathbb{C}} < 0$ sur les plans isotropes et m pair $\geqslant 4$, entraînent donc que $R_\phi(\alpha)$ est strictement négative. D'où $H \neq 0$ et ϕ n'est pas minimale.□

Preuve du théorème 3.2.— Supposons qu'il existe une immersion isométrique minimale ϕ de M dans N et soit $\alpha \in P_2(M)\backslash\{0\}$ qu'on choisit telle que $|\alpha|^2 = d$. L'hypothèse sur la courbure de N entraîne que $R_\phi(\alpha) \leqslant 0$. L'équation (5), nous dit alors que $R_\phi(\alpha)$ est identiquement nul. Par suite, si $\{e_i\}_{i \leqslant 2d}$ est une base α-standard de T_xM, où $x \in M$, alors on a, pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge Z_j)(a_i + a_j)^2 = 0 \tag{11}$$

et

$$K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge \overline{Z_j})(a_i - a_j)^2 = 0,$$

dont on déduit

$$\Big(K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge Z_j) + K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge \overline{Z_j})\Big)(a_i^2 - a_j^2) = 0. \tag{12}$$

La suite de la preuve utilise le lemme suivant :

LEMME 3.1.— *Soient Z et W deux vecteurs linéairement indépendants de $T_y^{\mathbb{C}}N$. Si $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$, alors $(Z \wedge \overline{W})^{1,1} \neq 0$ et, ou bien $Z^{1,0} = W^{1,0} = 0$, ou bien $Z^{0,1} = W^{0,1} = 0$.*

Preuve.— On a $(Z \wedge W)^{1,1} = Z^{1,0} \wedge W^{0,1} + Z^{0,1} \wedge W^{1,0} = 0$, c'est-à-dire :

$$Z^{1,0} \wedge W^{0,1} = W^{1,0} \wedge Z^{0,1}.$$

Si $Z^{1,0} \wedge W^{0,1} = W^{1,0} \wedge Z^{0,1} \neq 0$, alors, en effectuant respectivement le produit extérieur par $W^{1,0}$, puis par $W^{0,1}$, on trouve, $W^{1,0} = \alpha Z^{1,0}$ et $W^{0,1} = \beta Z^{0,1}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ce qui donne $0 = (Z \wedge W)^{1,1} = (\beta - \alpha) Z^{1,0} \wedge Z^{0,1}$, c'est-à-dire : $\beta = \alpha$ et $W = \alpha Z$. Or Z et W sont supposés linéairement indépendants. Par suite, on a nécessairement $Z^{1,0} \wedge W^{0,1} = W^{1,0} \wedge Z^{0,1} = 0$. Ces dernières équations entraînent, comme Z et W sont non nuls, que, ou bien $Z^{1,0} = W^{1,0} = 0$, ou bien $Z^{0,1} = W^{0,1} = 0$. Maintenant, $(Z \wedge \overline{W})^{1,1} = Z^{1,0} \wedge \overline{W}^{0,1} + Z^{0,1} \wedge \overline{W}^{1,0} = Z^{1,0} \wedge \overline{W^{1,0}} + Z^{0,1} \wedge \overline{W^{0,1}}$. D'après ce qui précède, l'un de ces deux derniers termes est nul. L'autre terme est alors automatiquement non nul et donc $(Z \wedge \overline{W})^{1,1} \neq 0$. □

Suite de la preuve du théorème 3.2 :

• On a $a_1 = \dots = a_d = 1$ et, ou bien $Z_1^{1,0} = \dots = Z_d^{1,0} = 0$, ou bien $Z_1^{0,1} = \dots = Z_d^{0,1} = 0$.

En effet, d'après le lemme précédent, et comme les Z_i sont linéairement indépendants, on ne peut pas avoir simultanément $(Z_i \wedge Z_j)^{1,1} = 0$ et $(Z_i \wedge \overline{Z_j})^{1,1} = 0$ (pour $i \neq j$). Par suite, vu l'hypothèse sur la courbure de

N, on a, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $i \neq j$, $\Big(K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge Z_j) + K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge \overline{Z_j})\Big) < 0$, et donc par l'équation (12), $a_i^2 = a_j^2$, c'est à dire $a_i = a_j$ (les a_i étant positifs). D'où $a_1 = \dots = a_d = \frac{|\alpha|}{\sqrt{d}} = 1$. L'équation (11) entraîne que, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $K'_{\mathbb{C}}(Z_i \wedge Z_j) = 0$ et donc que $(Z_i \wedge Z_j)^{1,1} = 0$. D'après le lemme 3.1, on a donc, pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, $Z_i^{1,0} = 0$ ou $Z_i^{0,1} = 0$. S'il existe i et j tel que $Z_i^{1,0} = 0$ et $Z_j^{0,1} = 0$, alors $(Z_i \wedge \overline{Z_j})^{1,1} = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc, soit tous les $Z_i^{1,0}$ sont nuls, soit tous les $Z_i^{0,1}$ sont nuls.

• La forme α induit sur M une structure kählérienne pour laquelle ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe :

En effet, soit J le champ d'endomorphismes associé à la forme α via la métrique g, i.e. pour tout $X, Y \in TM$,

$$\alpha(X,Y) = g(JX,Y).$$

D'après ce qui précède, si $\{e_i\}_{i \leqslant 2d}$ est une base α-standard en un point x de M, on a $\alpha(x) = \sum_{i \leqslant d} e_i \wedge e_{i'}$ et donc, pour tout $i \leqslant d$, $J(e_i) = e_{i'}$ et $J(e_{i'}) = -e_i$. Par suite, $J^2 = -\mathrm{Id}$ et J est une structure presque hermitienne sur M. Comme α et g sont parallèles, J est parallèle (et donc intégrable) et induit une structure kählérienne sur la variété M. Par ailleurs, d'après l'étape précédente, on a au point x, ou bien, $Z_i^{1,0} = 0$ pour tout i, ou bien $Z_i^{0,1} = 0$ pour tout i. Or, on a $Z_i^{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + ie_{i'})^{1,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((-Je_{i'} + J'e_{i'}) + i(Je_i - J'e_i)\Big)$ et $Z_i^{0,1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((-Je_{i'} - J'e_{i'}) + i(Je_i + J'e_i)\Big)$. Par suite, la nullité des $Z_i^{1,0}$ (resp. des $Z_i^{0,1}$) équivaut à l'égalité $J'_{/T_xM} = J_{/T_xM}$ (resp. $J'_{/T_xM} = -J_{/T_xM}$). En particulier, J' préserve les espaces tangents à M et induit donc une structure complexe J_ϕ sur M telle qu'en tout point x de M, on ait $J_\phi = J$ ou $J_\phi = -J$. Par un argument classique de connexité, on montre que l'on a ou bien $J_\phi = J$ (i.e. ϕ est holomorphe) ou bien $J_\phi = -J$ (i.e. ϕ est anti-holomorphe) sur M toute entière.

• On a $\dim P_2(M) = 1$:

Si β est une autre 2-forme parallèle non nulle sur M, alors d'après ce qui précède, β induit sur M une structure kählérienne J_1 telle que $J_\phi = J_1$ ou $J_\phi = -J_1$. D'où $J_1 = J$ ou $J_1 = -J$, et donc α et β sont proportionnelles. Ce qui termine la démonstration du théorème. □

4. Immersions isométriques pluriharmoniques, α-pluriharmoniques, et applications.

• <u>*Préliminaires*</u>

On rappelle qu'une application ϕ d'une variété kählérienne (M, g, J) dans une variété riemannienne N est dite *pluriharmonique* si la partie J invariante de $\nabla d\phi$ est nulle (i.e. pour tout $X, Y \in TM$, on a $\nabla d\phi(X,Y) + \nabla d\phi(JX, JY) = 0$, ou de manière équivalente, $\nabla d\phi(JX, Y) - \nabla d\phi(X, JY) = 0$). Une immersion isométrique pluriharmonique est toujours minimale.

Cette notion peut être généralisée de la façon suivante :

DÉFINITION.— *Soit $H_2(M) = \{\alpha \in \Omega^2(M), d\alpha = \delta\alpha = 0\}$ l'espace des 2-formes harmoniques sur M. Pour toute 2-forme $\alpha \in H_2(M)$, on dira qu'une application ϕ de M dans une variété N est α-pluriharmonique si $D(\alpha.d\phi) = \alpha.D(d\phi)$.*

Dans le cas particulier où α est une forme de Kähler, on a le

LEMME 4.1.— *Soit M une variété kählérienne et soit α sa forme de Kähler. Une application ϕ de M dans une variété riemannienne N est α-pluriharmonique si et seulement si elle est pluriharmonique.*

Preuve.— Si J désigne la structure complexe de M, on a, pour tout $X, Y \in TM$, $\alpha(X,Y) = g(JX,Y)$. La 2-forme α est parallèle, donc $d\alpha = \delta\alpha = 0$, et on a $(i(X)\alpha)^\# = JX$. L'équation (1) devient dans ce cas :

$$\Big(D(\alpha.d\phi) - \alpha.D(d\phi)\Big)(X,Y) = 2\Big(\nabla d\phi(JX,Y) - \nabla d\phi(X,JY)\Big).$$

D'où l'équivalence. □

Notons que la α-pluriharmonicité n'implique pas toujours la minimalité. Toutefois on a le

LEMME 4.2.— *Si M est une variété riemannienne de dimension paire et si $\alpha \in H_2(M)$ est de rang maximum en tout point de M, alors, toute immersion isométrique α-pluriharmonique ϕ de M dans une variété N est minimale.*

Preuve.— Soit $\alpha \in H_2(M)$ et soit ϕ une immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans N. D'après le lemme 2.1, pour tout $X, Y \in$

TM, on a :

$$\nabla d\phi((i(X)\alpha)^{\#}, Y) - \nabla d\phi(X, (i(Y)\alpha)^{\#}) = 0.$$

Soit x un point de M et $\{e_i\}_{i\leqslant 2d}$ une base α-standard de T_xM telle que

$$\alpha(x) = \sum_{i\leqslant d} a_i e_i \wedge e_{i'}.$$

Pour tout $i \leqslant d$, on a

$$\nabla d\phi((i(e_i)\alpha)^{\#}, e_{i'}) - \nabla d\phi(e_i, (i(e_{i'})\alpha)^{\#}) \\ = a_i\Big(\nabla d\phi(e_i, e_i) + \nabla d\phi(e_{i'}, e_{i'})\Big) = 0.$$

Si maintenant α est de rang maximum, alors tous les a_i sont non nuls et on a, pour tout $i \leqslant d$,

$$\nabla d\phi(e_i, e_i) + \nabla d\phi(e_{i'}, e_{i'}) = 0,$$

ce qui entraîne

$$mH(x) = \sum_{i\leqslant d}\Big(\nabla d\phi(e_i, e_i) + \nabla d\phi(e_{i'}, e_{i'})\Big) = 0. \qquad \square$$

Cette même preuve permet de voir que, dans le cas particulier où M est orientable de dimension 2, la minimalité et la α-pluriharmonicité, $\alpha \neq 0$, sont deux notions équivalentes.

• Résultats de non existence et de rigidité

Dans le cadre des applications α-pluriharmoniques, l'équation principale nous permet d'établir les résultats suivants :

THÉORÈME. — *Soit M une variété riemannienne de dimension paire $m > 2$ et soit N une variété riemannienne.*

a) *Si la courbure isotrope de N est strictement positive ou strictement négative, alors, quelle que soit $\alpha \in P_2(M)$, $\alpha \neq 0$, il n'existe aucune immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans N.*

b) *Si la courbure isotrope de N est non positive, alors, toute immersion isométrique minimale de M dans N est, pour tout $\alpha \in P_2(M)$, α-pluriharmonique.*

Notons que les espaces localement symétriques de type non compact ont une courbure isotrope non positive.

Dans le cas particulier où M est kählérienne, on déduit immédiatement du théorème 4.1 et du lemme 4.1, le

COROLLAIRE 4.1.— *Soit M une variété kählérienne de dimension $m > 2$. Alors*

a) *Il n'existe aucune immersion isométrique pluriharmonique de M dans une variété N de courbure isotrope partout strictement positive ou strictement négative.*

b) *Toute immersion isométrique minimale de M dans une variété riemannienne N de courbure isotrope non positive est pluriharmonique.*

Le cas particulier où N est de courbure constante dans ce corollaire correspond au résultat de Dajczer-Rodriguez [1].

Preuve du théorème 4.1.— Si $\alpha \in P_2(M)$ et ϕ une immersion isométrique de M dans N. L'équation du lemme 2.2 donne en tout point de M

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha).$$

a) Si la courbure isotrope de N est strictement positive (resp. strictement négative) alors on a (avec $m = 2d > 2$) $R_\phi(\alpha) > 0$ (resp. $R_\phi(\alpha) < 0$). D'où, $D(\alpha.d\phi) \neq -mH\alpha = \alpha.Dd\phi$ et l'application ϕ ne peut être α-pluriharmonique.

b) Si la courbure isotrope de N est non positive, alors on a $R_\phi(\alpha) \leqslant 0$ et donc

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 \leqslant m^2|H|^2|\alpha|^2.$$

Par suite, si ϕ est minimale ($H = 0$), alors on a nécessairement $D(\alpha.d\phi) = 0 = \alpha.Dd\phi$, c'est-à-dire que ϕ est α-pluriharmonique. □

Le plongement canonique de la sphère S^2 dans S^n montre la nécessité de l'hypothèse sur la dimension de M dans ce théorème. Par ailleurs, le plongement canonique de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^d$ dans $\mathbb{C}P^n$, où $n \geqslant d$, est évidemment pluriharmonique (car totalement géodésique) alors que la courbure isotrope de $\mathbb{C}P^n$ est partout non négative (mais non strictement positive). Par suite, notre hypothèse sur la courbure de N ne peut être remplacée par l'hypothèse plus faible “courbure isotrope de N non négative”. Enfin, les plongements canoniques de $\mathbb{C}P^d$, ou du produit des sphères $S^2(\sqrt{1/d}) \times \ldots \times S^2(\sqrt{1/d})$, dans S^n, qui sont des plongements minimaux, montrent bien pourquoi ce résultat de non existence ne concerne que les immersions α-pluriharmoniques (et non les immersions minimales).

Dans le cas où M est compacte et où N est à courbure isotrope strictement positive, le résultat de non existence du théorème 4.1 a) s'étend à toutes les immersions α-pluriharmoniques, où $\alpha \in H_2(M)$ est n'importe quelle 2-forme harmonique non nulle.

THÉORÈME 4.2. — *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m > 2$ et soit N une variété riemannienne à courbure isotrope strictement positive. Alors, quelle que soit $\alpha \in H_2(M)$, $\alpha \neq 0$, il n'existe aucune immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans N.*

Preuve. — Soit $\alpha \in H_2(M)$. On a $d\alpha = \delta\alpha = 0$. Si ϕ est une immersion isométrique α-pluriharmonique, alors, $|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2$, et, l'équation (5) devient

$$< \nabla^*\nabla\alpha, \alpha > + R_\phi(\alpha) = 0. \tag{13}$$

Comme M est compacte, on peut intégrer (13) par rapport à la forme volume canonique v_g de M. Ce qui donne

$$\int_M |\nabla\alpha|^2 v_g + \int_M R_\phi(\alpha) v_g = 0. \tag{14}$$

Or, les hypothèses entraînent que $R_\phi(\alpha) > 0$. D'où le résultat. □

Lorsque la variété but N est kählérienne, nous obtenons le résultat de rigidité suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Soit M une variété riemannienne (resp. compacte) de dimension paire $m > 2$ et soit N une variété kählérienne à courbure isotrope fortement positive. On suppose qu'il existe une immersion isométrique α-pluriharmonique ϕ de M dans N pour un certain $\alpha \in P_2(M)$ (resp. $\alpha \in H_2(M)$), $\alpha \neq 0$. Alors :*

i) *α est une forme de Kähler sur M,*

ii) *$P_2(M) = \mathbb{R}\alpha$ (resp. $b_2(M) = 1$),*

ii) *ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.*

Nous en déduisons immédiatement le

COROLLAIRE 4.2. — *Soit M et N deux variétés kählériennes de dimensions réelles strictement supérieures à 2. Si N a une courbure isotrope fortement positive, alors, toute immersion isométrique pluriharmonique de M dans N est holomorphe ou anti-holomorphe.*

Ce corollaire généralise les résultats de Dajczer-Thorbergsson [2] et Udagawa [21] qui concernaient le cas où N est l'espace projectif complexe.

Preuve du théorème 4.3. — Soit $\alpha \in P_2(M)\backslash\{0\}$ (resp. $\alpha \in H_2(M)\backslash\{0\}$). Si ϕ est une immersion isométrique α-pluriharmonique, alors on a $|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2$, et donc, d'après (5), $R_\phi(\alpha) = 0$ (resp. d'après (14) α est parallèle et $R_\phi(\alpha) = 0$). La suite de la preuve est identique à celle du théorème 3.2. □

• *Applications*

L'application identité d'une variété M est clairement α-pluriharmonique pour tout $\alpha \in H_2(M)$. Cette remarque nous permet de déduire de ce qui précède un certain nombre d'applications intéressantes.

En effet, nous avons vu ci-dessus qu'une variété kählérienne ne pouvait avoir en aucun de ses points une courbure isotrope strictement positive ou strictement négative. Ce résultat concerne en fait toutes les variétés admettant des 2-formes parallèles non nulles.

PROPOSITION 4.1. — *Soit M une variété riemannienne de dimension paire $m > 4$ telle que $P_2(M) \neq \{0\}$. Alors, pour tout $x \in M$, il existe un plan isotrope $P \subset T_x^{\mathbb{C}}M$ dont la courbure isotrope est nulle.*

Pour démontrer la proposition 4.1, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.3. — *Soit M une variété riemannienne de dimension $m > 4$. Pour tout $x \in M$, l'ensemble P_x des plans isotropes de $T_x^{\mathbb{C}}M$ est connexe par arcs.*

Preuve. — Si P (resp. P') est un plan isotrope de $T_x^{\mathbb{C}}M$, alors il existe une base $\{Z, W\}$ de P (resp. $\{Z', W'\}$ de P') de la forme :

$$Z = e_1 + ie_2, \quad W = e_3 + ie_4$$

$$(\textit{resp. } Z' = e_1' + ie_2', \quad W' = e_3' + ie_4'),$$

où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ sont des familles orthonormées de vecteurs de T_xM. Sachant que M est de dimension strictement supérieure à 4, on peut compléter les familles ci-dessus, de manière à obtenir deux bases orthonormées $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_m\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, \ldots, e'_m\}$ de T_xM. Si l'on oriente T_xM par la base B, alors, quitte à remplacer e'_m par $-e'_m$, on peut supposer la base B' directe. Il existe alors un élément $r \in SO(m)$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $r(e_i) = e'_i$. Sachant que $SO(m)$ est connexe par arcs, il existe alors une famille continue $r_t \in SO(m)$ telle que $r_0 = I$ et $r_1 = r$. Le plan P_t engendré par les vecteurs, $Z_t = r_t(e_1) + ir_t(e_2)$ et $W_t = r_t(e_3) + ir_t(e_4)$, définit alors une famille continue de plans isotropes tels que $P_0 = P$ et $P_1 = P'$. Ce qui démontre le lemme. □

Preuve de la proposition 4.1.— Soit $\alpha \in P_2(M)\backslash\{0\}$. L'application identité I de M est une application α-pluriharmonique car elle est totalement géodésique. L'équation (5) appliquée à I équivaut alors à $R_I(\alpha) = 0$. Si l'on suppose qu'il existe un point x de M tel que la courbure isotrope ne s'annule pour aucun plan isotrope $P \subset T_x^{\mathbb{C}}M$, alors, d'après le lemme précédent, cette courbure isotrope en x sera soit strictement positive (pour tous les plans isotropes), et donc $R_I(\alpha) > 0$, soit strictement négative, et donc $R_I(\alpha) < 0$. D'où la contradiction. □

Eu égard au théorème 4.2, nous obtenons le résultat suivant dû à Micallef-Wang [13] et Seaman [19].

COROLLAIRE 4.3.— *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m > 2$ à courbure isotrope non négative. S'il existe un point $x \in M$ où la courbure isotrope est strictement positive, alors, $b_2(M) = 0$.*

Preuve.— Si $b_2(M) \neq 0$, alors, le théorème de Hodge-De Rham nous assure l'existence d'une 2-forme harmonique α non nulle. L'identité I de M est une application α-pluriharmonique. On a donc, comme dans la preuve du théorème 4.2 :

$$\int_M |\nabla\alpha|^2 v_g + \int_M R_I(\alpha) v_g = 0.$$

Or, les hypothèses sur la courbure isotrope de N assurent que $R_I(\alpha)$ est partout non négatif et non identiquement nul sur M. D'où, $b_2(M)$ est nécéssairement nul. □

Une conséquence immédiate des théorèmes 3.2 et 4.3 est le

COROLLAIRE 4.4. — *Si M est une variété kählérienne de dimension $m > 2$ à courbure isotrope fortement négative (ou fortement positive) en un point de M, alors* $\dim P_2(M) = 1$. *En particulier, il existe sur M une unique (au signe près) structure complexe compatible avec sa métrique riemannienne.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DAJCZER et L. RODRIGUEZ, Rigidity of real Kähler submanifolds, Duke Math. J., 53, 1 (1986), 211-220.

[2] M. DAJCZER et G. THORBERGSSON, Holomorphicity of minimal submanifolds in complex space forms, Math. Ann., 277 (1987), 353-360.

[3] J. EELLS et L. LEMAIRE, Selected topics in harmonic maps, CBMS Regional Conf. Series 50, AMS Providence, 1983.

[4] A. EL SOUFI, Géométrie des sous-variétés admettant une structure kählérienne ou un second nombre de Betti non nul, Congrès de Géométrie d'Oran, 1989.

[5] M. GROMOV et P. PANSU, Rigidity of lattices : An introduction. Geometric topology : recent developments, CIME Conf. ; 1990, Springer lecture Notes in Math., 1504, 39-137 (1991).

[6] L. HERNANDEZ, Kähler manifolds and 1/4 Pinching, Duke Math. J., 62, 3 (1991), 601-611.

[7] O. HIJAZI, A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors, Commun. Math. Phys., 104 (1986), 151-162.

[8] O. HIJAZI, Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds, Commun. Math. Phys., 160 (1994), 563-579.

[9] K.D KIRCHBERG, Properties of kählerian twistor-spinors and vanishing theorems, Math. Ann., 293 (1992), 349-369.

[10] K.D KIRCHBERG, Killing spinors on Kähler manifolds, Ann. Global. Anal. Geom., 11 (1993), 141-164.

[11] H.B. LAWSON et M.L. MICHELSOHN, Spin Geometry, Princeton Math. Ser. 38, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[12] M. MICALLEF et J. MOORE, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two planes, Ann. of Math., 127 (1988), 199-227.

[13] M. MICALLEF et M. WANG, Metrics with non negative isotropic curvature, Duke Math. J., 72, 3 (1993), 649-672.

[14] M. MICALLEF et J. WOLFSON, The second variation of area of minimal surfaces in four-manifolds, Math. Ann., 295 (1993), 245-267.

[15] G.D. MOSTOW et Y.T. SIU, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, Ann. of Math., 112 (1980), 321-360.

[16] R. PETIT, Sur la rigidité des immersions minimales et des immersions pluriharmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série 1 (1994), 1125-1128.

[17] A. POLOMBO, De nouvelles formules de Weitzenböck pour des endomorphismes harmoniques. Applications géométriques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4, 25 (1992), 393-428.

[18] J.H. SAMPSON, Harmonic maps in Kähler geometry, CIME Conf.; 1984, Springer Lecture Notes in Math., 1161 (1985), 193-205.

[19] W. SEAMAN, On manifolds with non negative curvature on totally isotropic 2-planes, Trans. Amer. Math. Soc., 338 (1993), 843-855.

[20] Y.T. SIU, The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. of Math., 112 (1980), 73-111.

[21] S. UDAGAWA, Minimal immersions of Kähler manifolds into complex space forms, Tokyo. Math. J., 10 (1987), 227-239.

Manuscrit reçu le 7 avril 1998,
accepté le 22 juin 1999.

A. EL SOUFI,
Université de Tours
UPRES-A 6083 CNRS
Laboratoire de Mathématiques
et Physique Théorique
Parc de Grandmont
37200 Tours (France).
elsoufi@univ-tours.fr
&
R. PETIT,
Université de Nantes
UMR 6629 CNRS
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière
BP 92208
44322 Nantes (France).
petit@math.univ-nantes.fr