ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAULETTE LIBERMANN

# Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, nº 1 (1964), p. 145-172

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_145_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**14**, 1 (1964), 145-172.

# SUR LA GÉOMÉTRIE DES PROLONGEMENTS DES ESPACES FIBRÉS VECTORIELS

**par Paulette LIBERMANN (Rennes)** (1)

## I. Introduction.

Les connexions d'ordre supérieur dans un espace fibré différentiable ont été introduites par C. Ehresmann [5*c*] en utilisant les jets non holonomes et semi-holonomes [5*b*].

Nous avons introduit les connexions affines semi-holonomes d'ordre supérieur [10 *a*, *b*, *c*] c'est-à-dire relatives au fibré tangent $T(V_n)$. Notamment par dérivations covariantes successives, on définit les prolongements d'une connexion affine au sens usuel; ces prolongements ne sont holonomes que si la connexion affine est intégrable. Les jets semi-holonomes s'introduisent aussi naturellement quand on veut étendre au cas non symétrique un résultat de Kobayashi [8] : une connexion symétrique est une section de l'espace $H^2/L_n$.

Dans cet article, nous définirons les connexions semi-holonomes pour tout fibré vectoriel $E \rightarrow V_n$, ainsi que les « surconnexions ». L'outil utilisé sera essentiellement la notion de *forme différentielle semi-holonome d'ordre q sur un fibré vectoriel à valeurs dans un autre fibré vectoriel* (ces formes différentielles ont été introduites sous une forme plus restrictive dans [10 *b*]), ce qui conduit aux opérateurs différentiels d'ordre supérieur sur les fibrés vectoriels. Ces formes différentielles semi-holonomes sont définies à l'aide du foncteur $\overline{\mathfrak{D}}^p$ et de son dual $\overline{\Delta}_p$. On peut notamment, à l'aide de ces formes, définir les connexions de C. Ehresmann. D'ailleurs

(1) Ce travail a été préparé en partie quand l'auteur bénéficiait d'une bourse du « National Science Foundation ».

$\overline{\mathfrak{D}}^p E$ est un prolongement semi-holonome de E, au sens de C. Ehresmann [5 *b*].

On étendra à l'ordre supérieur la notion de douche (« spray »); on définit d'une part les *systèmes différentiels isobares*; ce sont des systèmes différentiels d'ordre $q$ déterminant une application « pseudoexponentielle » jouissant de propriétés analogues à la fonction exponentielle (correspondant à $q = 2$). On démontre qu'il y a correspondance biunivoque entre systèmes différentiels isobares et surconnexions d'ordre $q$ (les géodésiques de cette surconnexion étant les courbes intégrales du système isobare); pour $q = 2$, on retrouve les résultats de W. Ambrose, Palais et Singer [1]. On définit d'autre part les douches de prolongement définies sur des espaces fibrés principaux de repères, invariantes par les translations du groupe structural.

Les connexions holonomes et symétriques ont été étudiées par Pohl [11] et Feldman [6]; Pohl a notamment introduit le foncteur $\Delta_p$ dont nous donnons une définition simplifiée et étudié certaines connexions sur des fibrés vectoriels quelconques.

Autant que possible, nous éviterons d'utiliser les indices; souvent ceux-ci seront introduits uniquement pour illustrer l'exposé.

## 1. — Prolongements holonomes, semi-holonomes, non holonomes d'espaces fibrés.

Toutes les variétés sont supposées paracompactes et différentiables (c'est-à-dire $C^\infty$). Les espaces fibrés sont des fibrés différentiables au sens de C. Ehresmann (donc localement triviaux). Toutes les applications sont également supposées différentiables, en particulier les sections (locales ou globales) des espaces fibrés.

Pour tout espace fibré $E \rightarrow V_n$ (où $V_n$ est de dimension $n$), on désignera par $\mathfrak{D}^q E$ l'espace des $q$-jets de toutes les sections locales de E ($\mathfrak{D}^q E = \Pi^q E$ dans les notations de C. Ehresmann [5*b*]). Soit $\tilde{\mathfrak{D}}^2 E = \mathfrak{D}^1(\mathfrak{D}^1 E)$. Par récurrence on définit le *prolongement non holonome* $\tilde{\mathfrak{D}}^q E = \mathfrak{D}^1(\tilde{\mathfrak{D}}^{q-1} E)$. On définit le *prolongement semi-holonome* $\overline{\mathfrak{D}}^q E$ en se restreignant aux sections telles que pour tout $k (0 < k < q)$ le relèvement $\sigma$ de $V_n$ dans $\tilde{\mathfrak{D}}^k E$ vérifie la condition : $j_x^1(\pi^{k-1}\sigma) = \sigma(x)$, où $\pi^{k-1}$ est la projection : $\tilde{\mathfrak{D}}^k E \to \tilde{\mathfrak{D}}^{k-1} E$. On a : $\mathfrak{D}^q E \subset \bar{\mathfrak{D}}^q E \subset \tilde{\mathfrak{D}}^q E$. En particulier si $J^1(V_m, V_n) \to V_n$ est le fibré des jets d'ordre 1 de $V_n$ dans $V_m$, $\bar{\mathfrak{D}}^q(J^1, (V_m, V_n))$ est l'espace $\bar{J}^{q+1}(V_m, V_n)$ des $(q+1)$ — *jets semi-holonomes* de $V_n$ dans $V_m$(5 *b*]. Les jets au sens usuel seront dit *holonomes*. Si E est un espace fibré $E(V_n, F, G, H)$, $\mathfrak{D}^q E$ (resp. $\bar{\mathfrak{D}}^q E$, $\tilde{\mathfrak{D}}^q E$) est un espace fibré sur $V_n$, de groupe structural isomorphe à $L_n^q \times T_n^q(G)$ (resp. $\bar{L}_n^q + \bar{T}_n^q(G)$, $\tilde{L}_n^q \times \tilde{T}_n^q(G)$) où $L_n^q$ est le groupe des $q$-jets inversibles de but et source O de $R^n$ dans $R^n$, $T_n^q(G)$ l'espace des $n$-vitesses d'ordre $q$ sur la variété G; $\bar{L}_n^q$, $\tilde{L}_n^q$, $\bar{T}_n^q(G)$, $\tilde{T}_n^q(G)$ étant définies de la même manière (voir la démonstration dans [5*b*]).

Nous supposerons maintenant que E est un fibré vectoriel de symbole $E(V_n, R^m, G, H)$ où $G \subset GL(m, R)$ (ou plus brièvement $L_m$). On considérera en particulier le fibré tangent $T(V_n)$ et son dual $T^*(V_n)$, désignés aussi (quand il n'y aura pas de confusion) par T et $T^*$.

Le faisceau des germes de sections de E est un faisceau d'espaces vectoriels, d'où de manière évidente une structure d'espace vectoriel dans les fibres de $\mathfrak{D}^q E$ : ces fibres sont isomorphes à

$$R^m \oplus R^m \otimes R^{n*} \oplus R^m \otimes \left(\overset{2}{\bigcirc} R^{n*}\right) + \cdots + R^m \otimes \left(\overset{q}{\bigcirc} R^{n*}\right),$$

le signe $\bigcirc$ signifiant la multiplication tensorielle symétrique.

Pour toute section X de E et un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ dans l'ouvert $U \subset V_n$, on désigne par $D^s X (s = 0, \ldots, q)$ la suite de fonctions :

$$\frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n} X^\alpha}{(\partial x^1)^{p_1} \ldots (\partial x^n)^{p_n}},$$

$(p_1 + \cdots + p_n = s, \alpha = 1, \ldots, m)$; on en déduit une graduation de $(\mathfrak{D}^q E)_x$, car on a : $j_x^q X = (D^0 X)_x + \cdots + (D^q X)_x$; cette graduation est naturellement liée au système de coordonnées.

$(D^s X)_x$ représente l'image dans $R^m \otimes \left(\overset{s}{\bigcirc} R^{n*}\right)$ du noyau de la projection $\mathfrak{D}^s X \to \mathfrak{D}^{s-1} X$ par l'application de $(\mathfrak{D}^q E)_x$ sur la fibre type, associée au système de coordonnées.

Si $A = (A^{\alpha}_{\beta}(x))$ est une matrice de transition (en chaque $x$, $A(x) \in G$), on définit de la même manière $D^s A$. Mêmes conventions pour définir $D'^s X$ et $D'^s A$ associées à un système de coordonnées $(x'^1, \ldots, x'^n)$ dans l'ouvert $U'$; alors dans $U \cap U'$, on a les formules de transition :

$$(1)\quad \begin{cases} D'^0X = A.D^0X \\ D'^1X = b \,\square\, D^1(A.D_0X) = b \,\square\, (D^1A.D^0X + A.D^1X) \\ D'^2X = D'^1 b \,\square\, (D^1A.D^0X + A.D^1X) \\ \qquad + b \,\square\, [b \,\square\, (D^2A.D^0X + 2D^1A.D^1X + A.D^2X)] \end{cases}$$

où $b$ est la matrice contragrédiente de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)$, les signes. et $\square$ désignant des multiplications tensorielles contractées définies de la manière suivante :

1°) si $u \in R^m \otimes R^m \otimes (\overset{s}{\bigcirc} R^{n*})$ et $u' \in R^m \otimes (\overset{h}{\bigcirc} R^n)$, alors $u.u' = \gamma(u \otimes u')$ où $\gamma$ désigne la contraction entre le facteur covariant de $u$ (relativement à $R^{m*}$) et le facteur contravariant de $u'$.

2°) si $t \in R^n \otimes (\overset{s}{\bigcirc} R^{n*})$, $t' \in R^m \otimes (\overset{h}{\bigcirc} R^{n*})$, alors $t \,\square\, t' = \rho(t \otimes t')$ où $\rho$ indique que l'on contracte de toutes les manières possibles le facteur contravariant de $t$ avec les facteurs covariants de $t'$ et on divise par le nombre de termes obtenus. Ces formules sont à rapprocher de celles de Glaeser [7].

Par récurrence on démontre que $D'^q X$ est linéaire par rapport à $D^0X, \ldots, D^qX$ :

$$(2)\quad D'^qX = D'^{q-1}b \,\square\, (D^1A.D^0X + A.D^1X) + \cdots + b \,\square\, b \,\square\, \cdots \,\square\, b \,\square\, A.D^qX.$$

On en déduit :

Proposition 1. — *Si* E *est un fibré vectoriel sur* $V_n$, $\mathfrak{D}^q E$ *est un fibré vectoriel sur* $V_n$ *et en chaque* $x \in V_n$, *le noyau de la projection* $\pi^{q-1} : (\mathfrak{D}^q E)_x \to (\mathfrak{D}^{q-1}E)_x$ *s'identifie* à $E_x \otimes (\overset{q}{\bigcirc} T^*_x)$.

Corollaire. — *On a la suite exacte de morphismes d'espaces fibrés :*

$$(3)\qquad 0 \to E \otimes (\overset{q}{\bigcirc} T^*) \to \mathfrak{D}^q E \to \mathfrak{D}^{q-1} E \to 0.$$

(*quel que soit l'entier* $q > 0$ *avec la convention* $\mathfrak{D}^0 E = E$).

Remarquons que $\mathfrak{D}^1$ est la restriction à la catégorie des fibrés vectoriels réels du foncteur D défini par Atiyah [2 *a*]; quel que soit $q$, $\mathfrak{D}^q$ est un foncteur covariant de la catégorie des fibrés vectoriels de $V_n$ dans elle-même.

Le foncteur $\Delta_q$ introduit par Pohl [11 *a*] n'est autre que le foncteur défini par :

$$\Delta_q E = (\mathfrak{D}^q E^*)^*. \tag{4}$$

Par récurrence, on déduit que $\tilde{\mathfrak{D}}^p E$ est un fibré vectoriel et l'on a la suite exacte :

$$0 \to \tilde{\mathfrak{D}}^{q-1} E \otimes T^* \to \tilde{\mathfrak{D}}^q E \to \tilde{\mathfrak{D}}^{q-1} E \to 0. \tag{5}$$

On déduit de la proposition 1, que si $s$ et $s'$ sont deux sections de $\mathfrak{D}^q E$ au-dessus de l'ouvert $U \subset V_n$, telles que les sections $\pi^{q-1}s$ et $\pi^{q-1}s'$ de $\mathfrak{D}^{q-1} E$ soient identiques, alors $s - s'$ s'identifie à une section de $E \otimes (\overset{q}{\bigcirc} T^*)$. En particulier soit $s$ une section locale de $\mathfrak{D}^1E$; par la projection $\pi^0 : \mathfrak{D}^1E \to E$, on obtient une section $s_0 = \pi^0 s$ et la section $s'$ de $\mathfrak{D}^1E$ définie par : $x \to j^1_x s_0$ vérifie la condition : $\pi^0 s = \pi^0 s'$ et par suite $s - s'$ s'identifie à une section de $E \otimes T^*$; en considérant le jet $j^1_x s$, on définit ainsi une application : $(\tilde{\mathfrak{D}}^2E)_x \to E_x \otimes T_x$ qui est une surjection et dont le noyau est le prolongement semi-holonome $(\bar{\mathfrak{D}}^2E)_x$($j^1_x s$ est semi-holonome si et seulement si $s - s' = 0$). Par récurrence on déduit que $\bar{\mathfrak{D}}^q E$ est le noyau de la surjection : $\mathfrak{D}^1(\bar{\mathfrak{D}}^{q-1}E) \to \bar{\mathfrak{D}}^{q-2} \otimes T^*$. On en déduit, pour tout $q \geqslant 2$ le diagramme commutatif dont toutes les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \otimes \left(\overset{q}{\bigotimes} T^*\right) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{D}}^q E \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{D}}^{q-1} E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{\mathfrak{D}}^{q-1} E \otimes T^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{D}^1(\bar{\mathfrak{D}}^{q-1} E) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{D}}^{q-1} E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{\mathfrak{D}}^{q-2} E \otimes T^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{D}}^{q-2} E \otimes T^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Une section de $\overline{\mathfrak{D}}^q E$ est définie dans le domaine d'un système de coordonnées locales par une suite de fonctions : $X^\alpha$, $X^\alpha_j$, ..., $X^\alpha_{j_1 \dots j_q}$ telles que pour tout $s \leqslant q$, les fonctions $X_{j_1 \dots j_s} - \dfrac{\partial X^\alpha_{j_1 \dots j_{s-1}}}{\partial x^{j_s}}$ soient les composantes d'un champ de tenseurs. Par symétrisation on définit une projection de $\overline{\mathfrak{D}}^q E$ sur $\mathfrak{D}^q E$.

On définit les foncteurs $\tilde{\Delta}_q : E \to \tilde{\Delta}_q E = (\tilde{\mathfrak{D}}^q E^*)^*$ et $\overline{\Delta}_q : E \to (\overline{\mathfrak{D}}^q E^*)^*$. On a $\tilde{\Delta}_q = \Delta_1 \tilde{\Delta}_{q-1}$.

Il est à noter que le foncteur $\tilde{\Delta}_q$ ne coïncide pas avec celui noté de la même façon par Pohl [11 *a,b*].

## 2. — Formes différentielles semi-holonomes.

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur $V_n$.

Définition 1. — *Une forme différentielle semi-holonome (resp. holonome) d'ordre $q$, sur* E, *à* valeurs dans F *est une section du fibré vectoriel* Hom $(\overline{\mathfrak{D}}^q E, F)$ (resp. Hom $(\mathfrak{D}^q E, F)$).

L'injection canonique $i^q : \mathfrak{D}^q E \to \overline{\mathfrak{D}}^q E$ associe à toute section $\overline{\Phi}$ de Hom $(\overline{\mathfrak{D}}^q E, F)$ une section $\Phi$ de Hom $(\mathfrak{D}^q E, F)$; $\Phi$ sera appelée *l'associée de* $\overline{\Phi}$. Inversement si l'on se donne $\Phi$, on en déduit une forme semi-holonome $\overline{\Phi}' = \Phi \Sigma^q$ (où $\Sigma^q$ est la projection : $\overline{\mathfrak{D}}^q E \to \mathfrak{D}^q E$ obtenue par symétrisation); une telle forme $\overline{\Phi}'$ sera dite *presque holonome.*

Dans le domaine d'un système de coordonnées locales $\overline{\Phi}$ est définie par les relations :

$$Y^A = \sum a^{Aj_1 \dots j_q}_\alpha X^\alpha_{j_1 \dots j_q} + \dots + \sum a^A_\alpha X^\alpha$$

où $A = 1, \dots, p$ $(p = \dim F_x)$, $\alpha = 1, \dots, m (m = \dim E_x)$, les indices $j$ variant de 1 à $n$ les $Y^A_1$ définissant une section locale de F, les $X^\alpha, \dots, X^\alpha_{j_1 \dots j_q}$ une section locale de $\overline{\mathfrak{D}}^q E$; $\overline{\Phi}$ est presque holonome si et seulement si les $a$ sont symétriques par rapport aux indices $j_1 \dots j_s$ $(s = 2; \dots, q)$.

En se restreignant au noyau de la projection $\overline{\mathfrak{D}}^q E \to \overline{\mathfrak{D}}^{q-1} E$, d'après le diagramme (6) $\overline{\Phi}$ définit en chaque $x \in V_n$ une application linéaire $l_x$: $E_x \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*_x\right) \to F_x$, d'où une application linéaire : $\overset{q}{\otimes} T^*_x \to \text{Hom}\ (E_x,\ F_x)$ ou encore une application multilinéaire de $(T^*_x)^q$ dans Hom $(E_x, F_x)$; en composant l'application diagonale : $V \to (V, \ldots, V)$ (où $V \in T^*_x$) avec cette application multilinéaire, on obtient une application polynôme homogène de degré $q$ de $T^*_x$ dans Hom $(E_x, F_x)$. On définit ainsi le *symbole* $\sigma$ de $\overline{\Phi}$ qui est une application de $T^*$ dans Hom (E, F) dont la restriction à chaque $T_x$ est une fonction polynôme ([2]). Il est à remarquer que *toutes les formes semi-holonomes ayant même forme holonome associée ont même indice.* Au champ d'applications linéaires $x \to l_x$ correspond également une section de $F \otimes E^* \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T\right)$ qui sera appelée la *partie principale* de la forme semi-holonome $\overline{\Phi}$ (dans des articles antérieurs nous l'avions désignée par champ de tenseurs associé à $\overline{\Phi}$[10 *b*, *c*]). Pour les formes holonomes, on a une section de : $F \otimes E^* \otimes \left(\overset{q}{\bigodot} T\right)$.

Soient $\Gamma(E)$ et $\Gamma(F)$ les espaces des sections différentiables de E et F. Toute forme semi-holonome $\overline{\Phi}$ (d'ordre $q$) associe à toute section $X \in \Gamma(E)$ une section $Y \in \Gamma(F)$ telle que : $Y(x) = \overline{\Phi}(j^q_x X)$. Cette section ne dépend que de l'associée $\Phi$ de $\overline{\Phi}$. On en déduit la définition suivante (cf. [3]) :

DÉFINITION 2. — *Un opérateur linéaire* $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *est appelé un opérateur différentiel d'ordre q s'il existe une forme différentielle holonome* $\Phi$, *d'ordre q, sur* E, *à valeurs dans* F *telle que pour tout* $X \in \Gamma(E)$ *et tout* $x \in V_n$, *on ait* :

$$LX(x) = \Phi(j^q_x X)$$

Il résulte de cette définition que L est un *opérateur local* et que d'autre part $\Phi$ est unique : quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous désignerons L(X) par $\Phi(X)$.

Le produit d'un opérateur différentiel d'ordre $q$ et d'un opérateur différentiel d'ordre $q'$ est un opérateur différentiel d'ordre $q + q'$.

Rappelons que L est dit *elliptique* [2 *b*] lorsque le symbole

([2]) Le symbole introduit par Atiyah-Singer n'est pas à valeurs dans Hom (E, F) [2*b*].

applique tout covecteur non nul tangent à $V_n$ sur un élément inversible de Hom (E, F) (E et F doivent donc être de même dimension).

Il résulte de la définition même des formes semi-holonomes d'ordre $q$ qu'une telle forme définit un opérateur différentiel d'ordre 0 sur $\overline{\mathfrak{D}}^q$ E à valeurs dans F.

### 3. — Distributions ponctuelles et vecteurs tangents d'ordre $q$. Connexions semi-holonomes au sens de C. Ehresmann [5 c].

Nous allons définir un foncteur covariant $\overline{\Delta}_q E_0$ de la catégorie $\mathfrak{V}$ des variétés différentiables dans la catégorie $\mathcal{E}$ des fibrés vectoriels en considérant des types particuliers de formes différentielles semi-holonomes.

Si $E_0(V_n)$ désigne le fibré trivial : $R \times V_n \to V_n$, on a $\overline{\mathfrak{D}}^q E_0(V_n) = \overline{J}^q(V_n, R)$, espace des jets semi-holonomes de $V_n$ dans R. On vérifie les relations :

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{D}^1 E &= T^* \oplus E_0 \\
\overline{\mathfrak{D}}^2 E &= \mathfrak{D}^1 T^* \oplus E_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{\mathfrak{D}}^q E &= \overline{\mathfrak{D}}^{q-1} T^* \oplus E_0
\end{aligned}
$$

Comme $E_0(V_n) = E_0^*(V_n)$, le fibré $\overline{\Delta}_q E_0(V_n)$ (cf. § 1) est identique à $(\overline{D}^q E_0(V_n))^*$; ce fibré $\overline{\Delta}_q E_0(V_n)$ peut être appelé espace des *distributions ponctuelles semi-holonomes d'ordre q* sur $V_n$ : en effet en se restreignant à $\Delta_q E_0(V_n)$, on obtient les distributions ponctuelles au sens de Cartier [4]. Une section de $\Delta_q E_0(V_n)$ définit un *opérateur différentiel d'ordre q* au sens usuel.

Toute application différentiable $f : V_n \to V_m$ se prolonge en une application $\overline{\Delta}_q E_0(f) : \overline{\Delta}_q E_0(V_n) \to \overline{\Delta}_q E_0(V_m)$ qui est un morphisme de fibrés vectoriels et dont la restriction à chaque fibre $(\overline{\Delta}_q E_0(V_n))_x$ est définie par :

$$
(8) \qquad \langle \overline{\Delta}_q E_0 f(\overline{T}), \overline{X} \rangle = \langle T, \overline{X} \, . \, j_x^q f \rangle
$$

pour tout $\overline{T} \in (\overline{\Delta}_q E_0(V_n))_x$ et tout $\overline{X} \in (\overline{\mathfrak{D}}^q E_0(V_m))_{f(x)}$. On vérifie que $\overline{\Delta}_q E_0$ est un foncteur covariant de $\mathfrak{V}$ dans $\mathcal{E}$. Si G est un groupe de Lie, $\overline{\Delta}_q E_0(G)$ est alors muni d'une structure de groupe de Lie.

Soit $\overline{\mathfrak{D}}^\infty E_0(V_n)$ la limite projective des $\overline{\mathfrak{D}}^q E_0(V_n)$ et soit $\overline{\Delta}_q^\infty E(V_n)$ son dual : $f$ se prolonge en un morphisme $\Delta_q^\infty E_0(f)$. Comme d'après C. Ehresmann [5*b*] les lois de composition dans R se prolonge aux jets semi-holonomes de $V_n$ dans R, si G est un groupe de Lie, $\overline{\Delta}_q^\infty E_0(G)$ est muni d'une structure d'algèbre et $\overline{\Delta}_q^\infty E_0(e)$, espace des distributions semi-holonomes d'origine l'élément neutre $e$ de G est muni d'une structure d'*hyperalgèbre de Lie*; on étend ainsi au cas semi-holonome les résultats de Cartier [4].

Si l'on se limite aux jets de $V_n$ dans R de but O, c'est-à-dire aux covitesses, on obtient par dualité les *vecteurs tangents semi-holonomes* d'ordre $q$ : l'espace $\overline{T}_q(V_n)$ de ces vecteurs vérifie donc la relation :

$$\overline{T}_q(V_n) = (\overline{\mathfrak{D}}^{q-1}T^*(V_n))^*; \tag{9}$$

en particulier pour $q = 1$, on retrouve les vecteurs tangents au sens usuel. Pour l'espace $T_q(V_n)$ des vecteurs tangents (holonomes) d'ordre $q$, on a :

$$T_q(V_n) = (T^{q*}(V_n))^*, \tag{9a}$$

où $T^{q*}(V_n)$ est l'espace des covitesses holonomes d'ordre $q$. Il est à noter que $T_q(V_n)$ est différent de $(\mathfrak{D}^{q-1}T^*(V_n))^*$, puisque $\overline{T}_2(V_n) = (\mathfrak{D}^1 T^*(V_n))^*$.

On vérifie que $\overline{T}_q$ (ou $T_q$) est un foncteur covariant de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{E}$ (on désignera par $\overline{T}_q f$ ou $T_q f$ le prolongement aux vecteurs d'ordre $q$ de l'application $f\colon V_n \to V_m$).

Toute vitesse holonome X d'ordre $q$, de dimension $p$, d'origine $x$ définit une application du dual $\overline{L}^q_{1,p}$, espace des $q$-jets semi-holonomes de $R^p$ dans R, de source et but O dans un sous-espace vectoriel $\overline{P}^q$ de $(\overline{T}_q(V_n))_x$ que l'on pourrait appeler *élément de contact semi-holonome d'ordre q, de deuxième espèce*, car toutes les vitesses correspondant à un même élément de contact au sens de C. Ehresmann c'est-à-dire l'ensemble des vitesses $X\overline{L}^q_p$ définissent le même élément de contact de deuxième espèce.

Soit $K(V_n, F, G, H)$ un espace fibré quelconque sur $V_n$; si $s \in G$, $s$ désigne aussi la translation à droite $h \to hs$ du fibré principal H sur lui-même. On désignera par $\overline{T}_q(H)/G$ le fibré vectoriel obtenu à partir de $\overline{T}_q(H)$ en identifiant les vecteurs transformés les uns des autres par les translations de G. Soit $\psi$ l'application: $H \times H \rightarrow HH^{-1}$ définie par $\psi(h, h') = h'h^{-1}$; un *déplacement infinitésimal semi-holonome d'ordre $q$* [5c] de la fibre $F_x$ est un vecteur $\delta_x = \overline{T}_q\psi(0_h, X_h)$ où $X_h$ et $0_h$ sont des vecteurs semi-holonomes d'ordre $q$ tangents à H en $h \in H_x$ ($X_h$ étant quelconque et $0_h$ étant le vecteur nul); l'origine de $\delta_x$ dans le groupoïde $HH^{-1}$ est l'application identique de la fibre $F_x$. Comme $\overline{T}_q\psi(0_h, X_h) = \overline{T}_q({}_h0_s, \overline{T}_qs(X_h))$ l'espace des déplacements infinitésimaux de $F_x$ s'identifie à la fibre $(\overline{T}_q(H)/G)_x$.

DÉFINITION 3. — *Sur le fibré* K, *un élément de connexion semi-holonome d'ordre $q$ au sens de C. Ehresmann* [5c] *peut se définir comme un relèvement de l'espace tangent* $(\overline{T}_q(V_n))_x$ *dans l'espace* $(\overline{T}_q(H)/G)_x$ *des déplacements infinitésimaux de la fibre* $F_x$.

Une connexion sur $V_n$ est un champ différentiable d'éléments de connexion; elle définit sur le fibré principal H *un champ d'éléments de contact d'ordre $q$ de deuxième espèce invariant par* G. On en déduit une application de $\overline{T}_q(H)$ dans l'espace des vecteurs semi-holonomes d'ordre $q$ tangents à G en $e$ (élément neutre de G). *Une connexion d'ordre infini définit une application* de $\overline{\Delta}_q^\infty E$ (H) *dans l'hyperalgèbre de Lie de* G.

Il est à noter que dans ce paragraphe nos notations sont différentes de celle de Cartier [4] et de celles utilisées dans un article antérieur [10 *b*] où les distributions semi-holonomes ont été introduites.

## 4. — Connexions semi-holonomes d'ordre $q$ sur un fibré vectoriel.

DÉFINITION 4. — *Une connexion semi-holonome* $\overline{C}_q$ *sur un fibré vectoriel* $E \rightarrow V_n$ *est une « scission » de la suite exacte:*

$$(10) \qquad 0 \rightarrow E \otimes \left(\overset{q}{\bigotimes} T^*\right) \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}^q E \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}^{q-1} E \rightarrow 0.$$

La variété étant paracompacte une telle scission existe toujours si $G = L_m$.

Il résulte immédiatement de la définition et de l'étude du diagramme (6) :

Proposition 2 : la définition 4 est équivalente aux suivantes :

1°) $\overline{C}_q$ est un relèvement $\sigma_q$ du fibré vectoriel $\overline{\mathcal{D}}^{q-1}E$ dans $\overline{\mathcal{D}}^q E$.

2°) $\overline{C}_q$ est une forme différentielle semi-holonome $\overline{\Phi}$, d'ordre $q$, sur E à valeurs dans $E \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*\right)$ telle que la partie principale définisse l'application identique de $E \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*\right)$.

3°) $\overline{C}_q$ est une connexion du premier ordre sur $\overline{\mathcal{D}}^{q-1}E$ telle que l'image de $\overline{\mathcal{D}}^{q-1}E$ par son relèvement dans $\overline{\mathcal{D}}^1(\mathcal{D}^{q-1}E)$ ait une projection nulle sur $\overline{\mathcal{D}}^{q-2}E \otimes T^*$.

La connexion $\overline{C}_q$ sera dite *holonome* si elle relève $\mathcal{D}^{q-1}E$ dans $\mathcal{D}^q E$ c'est-à-dire si elle induit une scission de la suite exacte :

$$(10\,a) \qquad 0 \to E \otimes \left(\overset{q}{\bigcirc} T^*\right) \to \mathcal{D}^q E \to \mathcal{D}^{q-1} E \to 0,$$

ou encore si la forme différentielle holonome $\Phi$ associée à $\overline{\Phi}$ prend ses valeurs dans $E \otimes \left(\overset{q}{\bigcirc} T^*\right)$.

Si $\overline{C}_q$ n'est pas holonome, la partie principale de $\Phi$ définit cependant l'isomorphisme identique de $E \otimes \left(\overset{q}{\bigcirc} T^*\right)$; par suite *en composant* $\Phi$ *avec la projection* de $E \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T\right)$ *sur* $E \otimes \left(\overset{q}{\bigcirc} T^*\right)$ *obtenue par symétrisation, on obtient une connexion holonome qui sera dite la presque symétrisée de* $\overline{C}_q$.

La connexion $\overline{C}_q$ définit un opérateur différentiel sur E d'ordre $q$ transformant toute section X de E en une section $\Phi(X)$ de $E \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*\right)$.

L'étude précédente s'exprime de la façon suivante en coordonnées locales; la connexion $\overline{C}_q$ est définie par les relations :

$$(11) \qquad \Phi^{\alpha}_{j_1\dots j_q} = X^{\alpha}_{j_1\dots j_q} + \sum A^{\alpha k_1\dots k_{q-1}}_{\beta j_1\dots j_q} X^{\beta}_{k_1\dots k_{q-1}} + \cdots + \sum A^{\alpha}_{\beta j_1\dots j_q} X^{\beta}$$

où les $\Phi^{\alpha}_{j_1\dots j_q}$ définissent une section locale de $E \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*\right)$.

On a :

$$(11\,a)\quad [\Phi(X)]^{\alpha}_{j_1\cdots j_q} = \frac{\partial^q X^\alpha}{\partial x^{j_1}\ldots\partial x^{j_q}} + \Sigma\Gamma^{\alpha k_1\cdots k_{q-1}}_{\beta j_1\cdots j_q}\frac{\partial^{q-1}X^\beta}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_{q-1}}} + \cdots + \Sigma\Gamma^{\alpha}_{\beta j_1\cdots j_q}X^\beta$$

où les $\Gamma$ s'obtiennent à partir des A par symétrisation des indices latins supérieurs (et $A^{\alpha}_{\beta j_1\cdots j_q} = \Gamma^{\alpha}_{\beta j_1\cdots j_q}$); on définit ainsi les *symboles de Christoffel* d'ordre supérieur. La connexion est holonome si et seulement si les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices latins inférieurs.

Avec les conventions du § 1, on peut écrire localement :

$$\Phi(X) = D^q X + \Gamma_1 D^{q-1}X + \cdots + \Gamma_q D^0 X.$$

Proposition 3. — *Une connexion d'ordre* 1 *sur* E *est une connexion au sens usuel.*

En effet une connexion infinitésimale au sens usuel peut, d'après C. Ehresmann [5*a*], être définie comme un champ $x \to s_x$ où $s_x$ est un relèvement de l'espace tangent $T_x$ dans l'espace des déplacements infinitésimaux du 1er ordre de la fibre $E_x$; un déplacement infinitésimal relève $\chi \in E_x$ dans TE, d'où une application : $T \oplus E \to T(E)$ et l'on retrouve les connecteurs de Smale [12]; dans le domaine d'un système de coordonnées locales la connexion associe au couple $(\nu, \chi)$ (où $\nu \in T_x$) le couple $\left(\chi, \frac{d\chi}{dt}\right)$ tel que $\frac{d\chi}{dt} = \varphi(\nu, \chi)$, où $\varphi$ est bilinéaire; on retrouve les symboles de Christoffel introduits précédemment.

*Toute connexion d'ordre* 1 *sur* E *détermine une connexion d'ordre* 1 *sur son dual* $E^*$ : si $\Phi$ et $\Phi'$ sont les opérateurs différentiels correspondants, $\Phi'$ est déterminée par la condition : pour toute section X de E et toute section X′ de $E^*$, on a :

$$(12)\qquad d\langle X, X'\rangle = \langle \Phi(X), X'\rangle + \langle X, \Phi'(X')\rangle,$$

où $\langle\ \rangle$ signifie la multiplication tensorielle contractée et $d$ la différentiation. Localement les deux connexions ont, au signe près, mêmes symboles de Christoffel.

Une connexion d'ordre $q$ sur E peut être définie par une scission de la suite exacte :

$$(13) \qquad 0 \to \overline{\Delta}_{q-1}\, E \to \overline{\Delta}_q E \to E \otimes \left( \overset{q}{\bigotimes} T \right) \to 0.$$

Pohl [11 *b*] a démontré la proposition 3 en considérant le foncteur $\Delta_1$.

## 5. — Connexions sur $T^*(V_n)$ et $E_0(V_n)$.

Une connexion d'ordre 1 sur $T^*$ est une connexion affine au sens usuel : *l'opérateur différentiel correspondant est la dérivation covariante.*

Proposition 4 [10 *b*] : *Si* $\nabla$ *est la dérivation covariante correspondant à une connexion d'ordre* 1 *sur* $T^*$, *l'opérateur* $\nabla^q$ *définit une connexion semi-holonome d'ordre q appelée prolongement d'ordre q de* $\nabla$.

La démonstration est immédiate (on considère la partie principale). C'est la considération de ces prolongements qui est à l'origine des connexions d'ordre supérieur introduites par l'auteur.

Comme $E_0(V_n)$ est le fibré trivial $R \times V_n$, la connexion naturelle correspondante associe à toute section $f$ (c'est-à-dire à toute application $f\colon V_n \to R$) sa différentielle $df$.

Comme $\overline{\mathfrak{D}}^{q+1}E = \mathfrak{D}^q T^* \oplus E^0$, on a : $\overline{\Delta}_{q+1}\, E_0 = \overline{\Delta}_q T \oplus E_0$ et $\Delta_q \overline{T} = \overline{T}_{q+1}$ ; *par suite il y a une correspondance biunivoque entre connexions semi-holonomes d'ordre q sur* T *et connexions semi-holonomes d'ordre* $q+1$ *sur* $E_0$. Les secondes correspondent aux scissions de la suite exacte :

$$0 \to \overline{\Delta}_q\, E_0 \to \overline{\Delta}_{q+1}\, E_0 \to E_0 \otimes \left( \overset{q+1}{\bigotimes} T \right) \to 0.$$

les premières aux scissions de :

$$(14) \qquad 0 \to \overline{\Delta}_{q-1}\, T \to \overline{\Delta}_q\, T \to \overset{q+1}{\bigotimes} T \to 0$$

c'est-à-dire de :

$$0 \to \overline{T}_q \to \overline{T}_{q+1} \to \overset{q+1}{\bigotimes} T \to 0.$$

Une connexion *symétrique* d'ordre $q$ au sens de Feldman [6] c'est-à-dire une scission de :

$$(15) \qquad 0 \to T_q \to T_{q+1} \to \overset{q+1}{\bigcirc} T \to 0$$

correspond à une *connexion holonome d'ordre* $q+1$ sur $E_0$. Remarquons qu'une connexion holonome d'ordre $q$ sur $T^*$ n'est pas nécessairement symétrique. Par suite la presque symétrisée au sens du § 4 d'une connexion $\overline{C}^q$ n'est pas nécessairement symétrique : elle est définie par la projection de $\overset{q}{\otimes} T^*$ sur $T^* \otimes \left(\overset{q-1}{\bigcirc} T^*\right)$; la projection symétrique obtenue par projection de $\overset{q}{\otimes} T^*$ sur $\overset{q}{\bigcirc} T^*$ sera appelée la *symétrisée* de $\overline{C}^q$

Localement la connexion $\overline{C}^q$ est définie par les relations :

$$b_{j_1 \cdots j_q} = a_{j_1 \cdots j_q} + \sum \gamma_{j_1 \cdots j_q}^{k_1 \cdots k_{q-1}} a_{k_1 \cdots k_{q-1}} + \cdots + \sum \gamma_{j_1 \cdots j_q}^{k} a_k$$

où les $b_{j_1 \cdots j_q}$ définissent une section de $\overset{q}{\otimes} T^*$, les $a_k, \ldots, a_{j_1 \cdots j_q}$ une section de $\overline{\mathfrak{D}}^q T^*$.

La symétrisée s'obtient par symétrisation des indices inférieurs des symboles de Christoffel, la presque symétrisée en symétrisant seulement les $q-1$ derniers indices.

En particulier pour le premier ordre, les connexions symétriques sont les connexions affines symétriques au sens usuel (c'est-à-dire sans torsion). A une connexion affine symétrique correspond une connexion holonome d'ordre 2 sur $E_0$; cette connexion sur $E_0$ définit un *opérateur différentiel d'ordre* 2 *sur* $E_0$, *à valeurs dans* $\overset{2}{\bigcirc} T^*$ que l'on peut appeler le *hessien* H; c'est l'application : $f \to \nabla\, df$, où $\nabla$ est la dérivation covariante de la connexion symétrique. Le hessien $H(f)$ coïncide avec le hessien au sens usuel aux points critiques de $f$. Si la connexion n'est pas symétrique, on définit le hessien par :

$$Hf = S\nabla df,$$

où $S\nabla$ est la symétrisée de la connexion $\nabla$.

Proposition 5. — *Soit* $\overline{C}^q$ *une connexion semi-holonome d'ordre* $q$ *sur* $T^*$ *et soit* $p_q$ *la projection correspondante :* $\overline{\Delta}_{q+1} E_0 \to \overline{\Delta}_q E_0$ *des distributions semi-holonomes d'ordre* $q+1$ *sur celles d'ordre* $q$. *Alors la restriction de* $p_q$ *aux distributions* *holonomes (et en particulier aux vecteurs tangents holonomes d'ordre $q$) est la même pour toutes les connexions ayant même symétrisée.*

Démonstration; du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathfrak{D}}^{q} E_0 \arrow[r, "\overline{C}^{q}"] \arrow[dr, "\text{symétrisée de } \overline{C}^{q}"'] & \overline{\mathfrak{D}}^{q+1} E_0 \arrow[d, "\text{symétrisation}"] \\
 & \mathfrak{D}^{q+1} E_0
\end{tikzcd}$$

on déduit par dualité le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\Delta}_{q} E_0 & \overline{\Delta}_{q+1} E_0 \arrow[l] \\
 & \Delta_{q+1} E_0 \arrow[ul] \arrow[u, "\text{injection canonique}"']
\end{tikzcd}$$

La proposition a été démontrée dans [10 *b*] et [10 *c*] pour $q = 1$. En coordonnées locales, la projection $\overline{T}_{q+1} \to \overline{T}_q$ s'écrit :

$$a'^{k} = a^{k} - \Sigma\gamma^{k}_{j_1\cdots j_{q+1}} a^{j_1\cdots j_{q+1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a'^{k_1\cdots k_q} = a^{k_1\cdots k_q} - \Sigma\gamma^{k_1\cdots k_q}_{j_1\cdots j_{q+1}} a^{j_1\cdots j_{q+1}}$$

et la proposition se démontre également de cette façon.

Il est à noter que si les symboles de Christoffel ne sont pas symétriques par rapport aux indices supérieurs (c'est-à-dire si la forme différentielle n'est pas presque holonome au sens du § 2), alors l'image de $T_{q+1}$ n'est pas $T_q$.

Une suite de connexions d'ordre $q$, $q-1, \ldots, 1$ sur $T^*$ définit une suite de projections :

$$\overline{T}_{q+1} \to \overline{T}_q \to \overline{T}_{q-1} \to \overline{T}_{q-2} \to \cdots \to T \tag{16}$$

et en particulier :

$$T_{q+1} \to \overline{T}_q \to \cdots \to T.$$

Pohl [11 *a*] et Feldman [6] ont défini les *singularités d'ordre* $q+1$ d'une application $f\colon V_m \to V_n$ relativement à une suite de connexions symétriques sur $V_m$ en considérant le rang de $\delta_{q+1}T_{q+1}(f)\colon T_{q+1}(V_m) \to T_1(V_n)$ où $\delta_{q+1}$ est la projection: $T_{q+1}(V_n) \to T(V_n)$ correspondant à la suite de connexions. *De telles singulariés peuvent se définir à l'aide d'une suite de connexions semi-holonomes, en particulier à l'aide des prolongements successifs d'une connexion du premier ordre sur* $T^*$. La projection $\overline{\Delta}_{q+1}E_0 \to \overline{\Delta}_1 E_0$ associée à une telle suite de prolongements a été définie dans [10 *b*].

Plus généralement on peut définir les singularités d'ordre $q+1$ relativement aux *surconnexions d'ordre* $q$ sur $V_n$; une surconnexion d'ordre $q$ étant par définition un morphisme $\varphi_{q+1}\colon T_{q+1}(V_n) \to T(V_n)$ de fibrés vectoriels satisfaisant la condition: $\varphi_{q+1}i_{q+1}$ est l'application identique de $T(V_n)$ (où $i_{q+1}$ est l'injection canonique $T(V_n) \to T_{q+1}(V_n)$); notamment $\delta_{q+1}$ est une surconnexion.

De l'étude du § 3 résulte que toute vitesse holonome de dimension 1, d'ordre $q$, d'origine $x \in V_n$ définit une application linéaire du dual de $L^q_{1,1}$ sur un sous-espace vectoriel de $(T_q(V_n))_x$. En particulier si l'on considère sur R l'opérateur $\dfrac{d^q}{dt^q}$ et son image par les applications linéaires correspondant à l'ensemble $T^q_x(V_n)$ de toutes les vitesses d'ordre $q$, de dimension 1, on définit une application $\psi^q_x\colon T^q_x(V_n) \to (T_q(V_n))_x$. Donc si l'on se donne une surconnexion $\varphi_{q+1}$ d'ordre $q$ sur $T^*(V_n)$, on définit ainsi une application: $\varphi_{q+1}\psi_{q+1}\colon T^{q+1}(V_n) \to T(V_n)$; l'image d'une $(q+1)$-vitesse par cette application sera appelée son *accélération.*

Définition 4. — *Une courbe* $\mathcal{C}$ *sur* $V_n$ *sera appelée géodésique d'ordre q relativement à une surconnexion d'ordre q sur* $T^*(V_n)$ *si en chaque point son accélération est nulle* (c'est-à-dire si tous ses points sont singuliers d'ordre $q+1$).

Pour $q=1$, on retrouve les connexions et les géodésiques au sens usuel. De la proposition 5, on déduit immédiatement un résultat dû à Ambrose-Palais-Singer [1]: *toutes les connexions affines ayant même symétrisée (et par suite même hessien) ont mêmes géodésiques.*

## 6. — Systèmes différentiels isobares.

Si $\lambda$ est une constante réelle non nulle, nous désignerons également par $\lambda$ l'application : $T^s(V_n) \to T^s(V_n)$ qui à toute vitesse $v$ d'ordre $s$ ($s$ étant un entier quelconque) associe le $s$-jet composé $v' = v.j_0^s h_\lambda$, où $h_\lambda$ est l'homothétie de R : $t \to \frac{1}{\lambda} t$.

Si par rapport à des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, la vitesse $v$ à des composantes $\left(\frac{dx^i}{dt}, \ldots, \frac{d^s x^i}{dt^s}\right)$, alors $v'$ a pour composantes $\left(\lambda \frac{dx^i}{dt}, \ldots, \lambda^k \frac{d^k x^i}{dt^k}, \ldots, \lambda^s \frac{d^s x^i}{dt^s}\right)$, ce qui conduit à associer à chaque composante de $v$ un *poids* égal à son ordre. Il résulte des formules de dérivation d'une fonction composée que si l'on effectue le changement de carte locale : $x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, les $\frac{d^k x'^i}{dt^k}$ sont des polynomes de poids $k$ par rapport à $\frac{dx^i}{dt}, \ldots, \frac{d^k x^i}{dt^k}$. De tels polynomes seront appelés *isobares de poids k*.

Définition 5. — *Une projection isobare de poids q est une application* $\varpi^q$ : $T^q(V_n) \to T(V_n)$ *telle que* :

$$\varpi^q(\lambda v) = \lambda^q \varpi^q(v). \tag{17}$$

*et satisfaisant la condition : en chaque* $x \in V_n$ *la restriction de* $\varpi_x^q$ *au noyau* $\mathcal{T}_x^q$ *de la projection* $T_x^q \to T_x^{q-1}$ *est l'isomorphisme identique de* $\mathcal{T}_x^q$ *sur* $T_x$.

Dans le domaine U d'un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, $\varpi^q$ s'exprime de manière unique par les équations :

$$A^i = \frac{d^q x^i}{dt} + \psi^i\left(x, \frac{dx^j}{dt}, \ldots, \frac{d^{q-1} x^j}{dt^{q-1}}\right), \tag{18}$$

où les $A^i$ sont en chaque point $x$ les composantes d'un élément de $T_x$, et où les $\psi^i$ sont des polynomes isobares de poids $q$ par rapport aux $\frac{dx^j}{dt}, \ldots, \frac{d^{q-1} x^j}{dt^{q-1}}$.

Les projections $T^q \to T$ définies dans § 5 à l'aide d'une suite de connexions des surconnexions sont des projections isobares.

Le noyau d'une projection isobare $\varpi^q$ est l'image d'un relèvement $\Sigma^q : T^{q-1} \to T^q$ tel que : $\Sigma^q\lambda = \lambda\Sigma^q$, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 6. — *Un système différentiel isobare de poids $q$ est un relèvement $\Sigma^q : T^{q-1}(V_n) \to T^q(V_n)$ tel que :*

$$\Sigma^q\lambda = \lambda\Sigma^q. \tag{19}$$

Un système isobare de poids $q$ est d'ordre $q$. En particulier pour $q = 2$ on a une *douche* (« spray ») et l'on rejoint la définition de Smale [12].

Théorème 1. — *Il y a correspondance biunivoque entre projections isobares $\varpi^q$ et systèmes différentiels isobares $\Sigma^q$ (de même poids $q$), la relation entre $\varpi^q$ et $\Sigma^q$ étant définie par l'exactitude de la suite :*

$$T^{q-1} \xrightarrow{\Sigma^q} T^q \xrightarrow{\varpi^q} T. \tag{20}$$

Naturellement comme $T^q$ n'est pas pour $q > 1$ un fibré vectoriel, on a des morphismes de la catégorie des fibrés différentiables (non nécessairement vectoriels) sur $V_n$.

*Démonstration.* — D'après l'étude précédente, $\varpi^q$ détermine $\Sigma^q$. Inversement donnons-nous $\Sigma^q$. A l'aide de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ dans un ouvert $U \subset V_n$, le système $\Sigma^q$ s'écrit de *manière unique* :

$$K^i = \frac{d^q x^i}{dt^q} + \varphi^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}, \ldots, \frac{d^{q-1}x^j}{dt^{q-1}}\right) = 0, \tag{21}$$

où les $\varphi^i$ sont isobares de poids $q$. Comme $\mathcal{C}^q_x$ est isomorphe à $T_x$, si $(x'^1, \ldots, x'^n)$ sont des coordonnées locales dans $U'$, alors dans $U \cap U'$ le système $\Sigma^q$ s'exprime au moyen des coordonnées $x'^1, \ldots, x'^n$ par les équations $a^j_i(x)\, K^i = 0$, où $a^j_i(x)$ est la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)$. Comme $V_n$ est paracompacte, on en déduit une projection isobare $\varpi^q$.

Soit $\Sigma^q$ un système différentiel isobare. Si l'on se donne $v \in T^{q-1}_x$, il existe une solution $f_v(t)$ et une seule du système

$\Sigma^q$ correspondant aux conditions initiales : $j_0^{q-1} f_v(t) = v$. On en déduit la relation :

$$f_{\lambda v}(t) = f_v(\lambda t) \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathrm{R} \ (\lambda \neq 0) \tag{22}$$

toutes les fois les deux membres de cette relation sont définis.

Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des vitesses $v \in \mathrm{T}_x^{q-1}$ telles que $f_v(t_q)$ soit défini (où $t_q = \sqrt[q-1]{(q-1)\,!}$) ; $\mathfrak{U}$ est un voisinage ouvert de la vitesse nulle notée $0_x$. On définit alors l'application « *pseudoexponentielle* » $\mathrm{Exp}_x : \mathfrak{U} \rightarrow \mathrm{V}_n$ par :

$$\mathrm{Exp}_x(v) = f_v(t_q). \tag{23}$$

Pour $q = 2$, on retrouve l'application exponentielle [9].

Théorème 2. — *Soit $\varphi_x$ la restriction de* $\mathrm{Exp}_x$ *aux vitesses appartenant au noyau $\mathcal{C}_x^q$ de la projection $\mathrm{T}_x^q \rightarrow \mathrm{T}_x^{q-1}$ ; alors le jet $j_{0x}^1\, \varphi_x$ est le jet de l'application identique de $\mathcal{C}_x^q$.*

Démonstration. — Si le sytème $\Sigma^q$ s'écrit en coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ sous la forme (21), alors en désignant par $(v_1^i, \ldots, v_{q-1}^i)$ les composantes de la $q$-vitesse $v$ donnée, on a :

$$\begin{aligned} f_v^i(t) = v_1^i t + v_2^i \frac{t^2}{2\,!} + \cdots + v_{q-1}^i \frac{t^{q-1}}{(q-1)\,!} \\ - (\varphi^i(v))_x \frac{t^q}{q\,!} - \cdots - \left(\frac{d^k\varphi^i}{dt^k}\right)_x \frac{t^{q+k}}{(q+k)\,!} - \cdots ; \end{aligned} \tag{24}$$

$\varphi^i$ étant isobare de poids $q$, $\dfrac{d^k\varphi^i}{dt^k}$ est isobare de poids $q + k$; donc si $v \in \mathcal{C}_x$, on a : $f_v^i(t_q) = v_{q-1}^i + o(v)$.

Pour $q = 2$, on retrouve un théorème connu [9], [12].

Corollaire. — *Il existe un voisinage $\mathfrak{U}'$ de $0_x$ dans $\mathrm{T}_x^{q-1}$ tel que $\varphi_x|\mathfrak{U}' \cap \mathcal{C}_x^q$ soit un difféomorphisme et par suite tel que* $\mathrm{Exp}_x|\mathfrak{U}'$ *soit de rang $n$.*

Proposition 6. *Le jet $j_{0x}^2$* $\mathrm{Exp}_x$ *est déterminé par le jet $j_x\Sigma^q$. Pour $q = 2$, inversement le jet $j_x^0\Sigma^q$ est déterminé par $j^0{}_x$* $\mathrm{Exp}_x$.

Cette proposition a été énoncée dans [10 *c*] pour $q = 2$.

*Démonstration.* — Les considérations de poids montrent d'abord que les polynomes $\varphi^i$ contiennent des monomes de degré (au sens usuel) au moins égal à 2 par rapport à $\frac{dx^j}{dt}, \ldots, \frac{d^{q-1}x^j}{dt^{q-1}}$, ensuite que les monomes de degré 2 dans $\frac{d^{q+k}\varphi^i}{dt^{q+k}}$ ont pour coefficients les coefficients des monomes de degré 2 dans $\varphi^i$.

Pour $q = 2$, le système $\Sigma^q$ s'écrit : $\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Sigma\gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$, d'où $f^i_v(1) = a^i + \Sigma\gamma^i_{jk}\, a^j a^k +$ termes de degré $> 2$.

Si $q > 2$, on n'a plus la réciproque car $\varphi^i$ contient des monomes de degré $> 2$.

Remarque. — *Si $v \in \mathcal{C}^{q-1}_x$, $f_v(t)$ admet un développement limité par rapport aux puissances de $t^{q-1}$.*

En effet d'après (24), on a :

$$f_v\left(e^{\frac{2\pi i}{q-1}}t\right) = f_{e^{\frac{2\pi i}{q-1}}v}(t) = f_v(t). \tag{25}$$

Par suite la courbe intégrale ne présente pas de « singularité géométrique » en $x$.

## 7. — Application aux connexions et surconnexions.

Nous allons étudier plus en détail l'application $\psi^q$ de l'espace $T^q(V_n)$ des $q$-vitesses dans l'espace $T_q(V_n)$ des vecteurs tangents d'ordre $q$ (cf. § 5). Soit $V_q \in T^q_x(V_n)$ et $X_q = \psi^q_x(V_q)$.

Relativement à des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, on a :

$$X_q = \Sigma a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \cdots + \Sigma a^{i_1\cdots i_q}\frac{\partial^q}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_q}},$$

où le coefficient $a^{i_1\cdots i_k}$ $(k \leqslant q)$ est (à un facteur entier près) égal à : $\frac{d^{q-k}}{dt^{q-k}}\left(\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_k}}{dt}\right)$; de tels polynomes seront appelés *polynomes isobares symétriques élémentaires de poids $q$*. On démontre que ces polynomes élémentaires sont linéairement indépendants et qu'ils engendrent un espace vectoriel dont la dimension est égale à dim $(T_q(V_n))_x$; (une démonstration plus détaillée sera publiée ultérieurement); on en déduit la proposition suivante, précisant un résultat de Pohl [11 *a*] :

PROPOSITION 7. — *L'espace* $(T_q(V_n))_x$ *des vecteurs tangents d'ordre q est engendré (en tant qu'espace vectoriel) par l'image* $\psi_x^q(T_x^q(V_n))$ *de l'espace des q-vitesses d'origine x;* $(T_q(V_n))_x$ *s'identifie à l'espace des combinaisons linéaires à coefficients réels des polynomes isobares symétriques élémentaires* (de poids $q$). On en déduit :

COROLLAIRE. — *Soit* $E(V_n)$ *un fibré vectoriel sur* $V_n$. *Tout morphisme f d'espaces fibrés* $T^q(V_n) \to E(V_n)$ *s'exprimant localement par des combinaisons linéaires de polynomes isobares symétriques élémentaires se prolonge en un morphisme* $\bar{f}$ *de fibrés vectoriels :* $T_q(V_n) \to E(V_n)$.

En effet $f$ se factorise alors en : $\hat{f} = f\psi^q$ et $\bar{f}$ est le prolongement de $\hat{f}$ à $T_q(V_n)$.

En particulier si l'on désigne par *symétrique* toute projection isobare $T_q \to T$ ou tout système différentiel isobare de poids $q$, s'exprimant localement par des combinaisons linéaires de polynomes isobares symétriques élémentaires, les géodésiques d'une surconnexion sont les solutions d'un système différentiel isobare symétrique. Du corollaire de la proposition 7 et du théorème 1, on déduit :

THÉORÈME 3. — *Il y a correspondance biunivoque entre systèmes différentiels isobares d'ordre q symétriques et surconnexions d'ordre q — 1. Si l'on se donne le système* $\Sigma^q$, *il détermine une surconnexion dont les géodésiques sont solutions du système* $\Sigma^q$.

Pour $q = 2$, tout système différentiel isobare est symétrique; la projection $T_2(V_n) \to T(V_n)$ est une connexion affine symétrique et l'on retrouve un résultat dû à Ambrose-Palais-Singer [1] :

THÉORÈME 3*a*. — *Il y a correspondance biunivoque entre douches* $\Sigma$ *et connexions affines symétriques* C. *Les géodésiques de la connexion* C *coincident avec les trajectoires de la douche* $\Sigma$.

En utilisant la proposition 6, à partir des courbes intégrales d'une douche $\Sigma$, on reconstruit la douche et par suite la connexion affine symétrique correspondante.

La notion de *sous-variété totalement géodésique* s'étend aux surconnexions d'ordre $> 2$; on obtient ainsi des *feuilletages* *d'ordre* $q$ au sens de C. Ehresmann [5 *d*]; les systèmes différentiels isobares (en particulier les douches) définissent des feuilletages d'ordre supérieur, de dimension 1.

Pour $q = 2$, on peut également introduire la notion d'hypersurface *cogéodésique*: ce sont les hypersurfaces de niveau des fonctions $f$: $V_n \to R$, dont le hessien est nul; ces hypersurfaces, si elles existent, sont totalement géodésiques, car le long d'une géodésique on a: $\dfrac{d^2f}{dt^2} = \left\langle H(f), \dfrac{dx}{dt} \otimes \dfrac{dx}{dt} \right\rangle$ et sur une cogéodésique, on a $\dfrac{d^2f}{dt^2} = \left\langle \Gamma\left(\dfrac{dx}{dt}\right), df \right\rangle$, où $\Gamma\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ est l'accélération définie par la connexion. Les conditions de compatibilité montrent que les cogéodésiques existent notamment si la connexion symétrique est à courbure nulle, c'est-à-dire intégrable; si $V_n$ est en particulier localement affine, les cogéodésiques sont les hyperplans.

Pour $q > 2$, on peut étendre la notion de hessien (d'où de cogéodésique). Il est à noter qu'une surconnexion détermine une connexion affine symétrique par restriction à $T_2$ de la projection : $T_{q+1} \to T$.

## 8. — Connexions sur $T(V_n)$.

Ce sont les connexions étudiées dans des articles antérieurs [10 *a*, *b*, *c*]; dans ces articles $\overline{\mathfrak{D}}^q T(V_n)$ était désigné par $\overline{S}^q(V_n)$. Dans [10, *a*, *b*] la définition d'une connexion d'ordre $q$ était équivalente à la donnée d'un relèvement de $\mathfrak{D}^{q-1} T$ dans $\overline{\mathfrak{D}}^q T$.

Une connexion d'ordre $q$ sur $T(V_n)$ est donc d'après § 4 une scission de la suite exacte :

$$(26) \qquad 0 \to T \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*\right) \to \overline{\mathfrak{D}}^q T \to \overline{\mathfrak{D}}^{q-1} T \to 0.$$

Pour $q = 1$, on a les connexions affines au sens usuel.

Théorème 4. — *Le fibré* $\overline{\mathfrak{D}}^q T$ *est canoniquement isomorphe au fibré* $T(\overline{H}^q)/\overline{L}_n^q$ *(où* $\overline{H}^q$ *est le fibré des repères semi-holonomes d'ordre* $q$ *sur* $V_n$*).*

Si l'on se restreint à $\mathfrak{D}^{q-1} T$, (isomorphe à $T(H^q)/L_n^q$) cet isomorphisme a été démontré dans [10 *b*] (voir également

[10 *a*]) : par la considération de groupes locaux à un paramètre on démontre (en utilisant la permutabilité des dérivations par rapport aux coordonnées et au paramètre $t$) que tout champ de vecteurs X (local ou global) sur $V_n$ se relève en un champ de vecteurs $X^{(q+1)}$ sur $H^q(V_n)$ tel que $X^{q+1}(h)$ est déterminé par le jet $j_x^q X$ (où $x$ est la projection de $h$). On en déduit un isomorphisme de $(\mathfrak{D}^q T)_x$ sur l'espace tangent $T_h(H^q)$; comme le champ $X^{q+1}$ est invariant par les translations à droite de $L_n^q$, on en déduit un isomorphisme de $(\mathfrak{D}^q T)_x$ sur $(T(H^q)/L_n^q)_x$. Il a été démontré dans [10 *a*] que le groupe structural est $L_n^{q+1}$ est par suite le fibré principal associé est $H^{q+1}$.

On démontre également que le champ X se prolonge en un champ $\overline{X}^{(q+1)}$ sur $\overline{H}_q$, d'où une injection linéaire I de $(\mathfrak{D}^q T)_x$ dans $T(\overline{H}^q)/\overline{L}_n^q$; l'application I se prolonge en une application linéaire : $(\overline{\mathfrak{D}}^q T)_x \to (T(\overline{H}^q)/\overline{L}_n^q)_x$ qui est un isomorphisme.

Le fibré $\overline{\mathfrak{D}}^q T$ a pour fibré type

$$R^n \oplus L_{n,n} \oplus \overline{M}_{n,n}^2 \oplus \cdots \oplus \overline{M}_{n,n}^q = R^n \oplus \overline{\mathfrak{L}}_n^q,$$

où $\overline{\mathfrak{L}}_n^q$ est l'algèbre de Lie du groupe $\overline{L}_n^q$; $L_{n,n} = \mathrm{Hom}\,(R^n, R^n)$ et $\overline{M}_{n,n}^k$ $\left(\text{isomorphe à } R^n \otimes \left(\overset{k}{\otimes} R^{n*}\right)\right)$ est l'algèbre de Lie du groupe abélien $\overline{M}_n^k$, noyau de la projection : $\overline{L}_n^k \to \overline{L}_n^{k-1}$.

Pour $q = 1$, en raison du théorème 4, la suite exacte (26) devient la suite exacte indiquée par Atiyah pour définir une connexion [2 *a*].

**Proposition** 8. — *Une connexion du premier ordre sur* $T(V_n)$ *est une section de l'espace fibré* $\overline{H}^2/L_n$.

Cette proposition étend au cas semi-holonome un résultat de Kobayashi : toute connexion affine symétrique est une section de $H^2/L_n$ [8].

*Démonstration.* — La proposition est une conséquence directe d'une propriété démontrée par C. Ehresmann [5 *c*] : une connexion affine est une section d'un espace fibré associé au groupoïde $HH^{-1}$, de fibre type $T_n(L_n)$ c'est-à-dire $\overline{M}_n^2$.

**Théorème** 5. — *Toute connexion semi-holonome* $\overline{C}^q$ *d'ordre* $q$ *sur* $T(V_n)$ *détermine une connexion* C, *au sens usuel, dans le* *fibré principal* $\overline{\mathrm{H}}^q \rightarrow \overline{\mathrm{H}}^{q-1}$ *(de groupe structural* $\overline{\mathrm{M}}_n^q$*), telle que le champ d'éléments de contact horizontaux soit invariant par les translations à droite du groupe* $\overline{\mathrm{L}}_n^q$*; inversement une telle connexion* C *(qui est d'ailleurs une connexion affine) détermine une connexion semi-holonome d'ordre* $q$.

*Démonstration.* — La connexion $\overline{\mathrm{C}}^q$ relève $\mathrm{T}(\overline{\mathrm{H}}^{q-1})/\overline{\mathrm{L}}_n^{q-1}$ dans $\mathrm{T}(\overline{\mathrm{H}}^q)/\overline{\mathrm{L}}_n^q$ d'après le théorème 4; donc toute classe de vecteurs tangents à $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$ mod. les translations à droite de $\overline{\mathrm{L}}_n^{q-1}$ est relevée en une classe de vecteurs tangents à $\overline{\mathrm{H}}^q$ mod. les translations à droite de $\mathrm{L}_n^q$, d'où la connexion C. Inversement si C est invariante par les translations de $\overline{\mathrm{L}}_n^q$ elle relève toute classe de vecteurs tangents à $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$ mod. $\overline{\mathrm{L}}_n^{q-1}$ en une classe de vecteurs tangents mod. $\overline{\mathrm{L}}_n^q$. La connexion C est affine car le fibré principal $\overline{\mathrm{H}}^q \rightarrow \overline{\mathrm{H}}^{q-1}$ s'obtient à partir de $\mathrm{H}^1(\overline{\mathrm{H}}^{q-1})$ par réduction du groupe structural à $\overline{\mathrm{M}}_n^q$.

Corollaire. — *Toute connexion semi-holonome d'ordre* $q$ *sur* $\mathrm{T}(\mathrm{V}_n)$ *détermine un parallélisme global sur* $\overline{\mathrm{H}}^q(\mathrm{V}_n)$.

Remarque. — Si la connexion est holonome elle relève $\mathrm{T}(\mathrm{H}^{q-1})/\mathrm{L}_n^{q-1}$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{H}^q)/\mathrm{L}_n^q$, d'où une connexion C sur $\mathrm{H}^q \rightarrow \mathrm{H}^{q-1}$.

Il résulte du théorème 5 que l'on peut définir le *déplacement par parallélisme* le long d'une courbe de $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$; en particulier on définit les *géodésiques de prolongement d'ordre* $q$ (appelées géodésiques d'ordre $q$ dans [10 *b*]) : ce sont les *géodésiques de la connexion* C; l'ensemble de ces géodésiques est invariant par les translations à droite de $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$.

Une *douche de prolongement* d'ordre $q$ sur $\mathrm{V}_n$ est par définition une douche $\Sigma$ sur $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$ telle que l'application exponentielle associée satisfasse la condition

$$\exp_h(v).s = \exp_{hs}\ (\mathrm{T}s(v))$$

pour tous les $h \in \overline{\mathrm{H}}^{q-1}$, $s \in \overline{\mathrm{L}}_n^{q-1}$, $v \in \mathrm{T}_h(\overline{\mathrm{H}}^{q-1})$ (espace tangent en $h$ à $\overline{\mathrm{H}}^{q-1}$) tels que la relation ait un sens. On rappelle que $\mathrm{T}s$ est le prolongement aux vecteurs tangents de la translation $s$ : $h \rightarrow hs$.

Par passage au quotient, on déduit de l'application exponentielle une application $\psi_x$ : $\mathfrak{U} \rightarrow \mathrm{V}_n$, où $\mathfrak{U}$ est un voisinage ouvert de $0_x$ dans $(\overline{\mathfrak{D}}^{q-1}\mathrm{T})_x$ et il existe $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ tel que $\psi_x|\mathfrak{U}'$ soit une surjection.

Les géodésiques de prolongement d'une connexion $\overline{\mathrm{C}}^q$ déterminent des douches de prolongement. Inversement *si l'on se donne les trajectoires d'une douche de prolongement et leurs projections sur* $\mathrm{V}_n$, *le jet* $j_{0_x}^{q+1}\psi_x$ *détermine en chaque* $x \in \mathrm{V}_n$ *un élément de connexion d'ordre* $q$. On obtient ainsi sur $\mathrm{V}_n$ une connexion d'ordre $q$ qui est *holonome* (en chaque $x$, ses symboles de Christoffel sont les dérivées d'ordre $q+1$ des $x^i$ par rapport à certaines coordonnées dans $(\overline{\mathfrak{D}}^{q-1}\mathrm{T})_x$), et dont les géodésiques de prolongement coïncident avec les trajectoires de la douche donnée.

On peut définir les champs de Jacobi de prolongement.

## 9. — Connexions d'ordre 2 sur $\mathrm{T}(\mathrm{V}_n)$.

THÉORÈME 6. — *Toute connexion* $\overline{\mathrm{C}}^2$ *d'ordre* 2 *sur* $\mathrm{T}(\mathrm{V}_n)$ *induit une connexion* C *d'ordre* 1 sur $\mathrm{T}(\mathrm{V}_n)$ [10 *b*, *c*].

En effet la connexion $\overline{\mathrm{C}}^2$ relève dans $\overline{\mathfrak{D}}^2\mathrm{T}$ le noyau de la projection $\mathfrak{D}^1\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{T}$ c'est-à-dire $\mathrm{T}\otimes\mathrm{T}^*$; en particulier en chaque $x \in \mathrm{V}_n$, l'application identique de $\mathrm{T}_x$ est relevée, d'où une section de $\overline{\mathrm{H}}^2/\mathrm{L}_n \rightarrow \mathrm{V}_n$. En coordonnées locales, on obtient les symboles de Christoffel de la connexion affine par contraction des symboles de Christoffel de $\overline{\mathrm{C}}^2$[10 *b*].

Nous dirons que C est *induite* par $\overline{\mathrm{C}}^2$ et que $\overline{\mathrm{C}}^2$ est une *extension* de C. Parmi les extensions de C, le *prolongement* est défini par 2 dérivations successives. Si $\Phi$ et $\nabla$ sont les opérateurs différentiels correspondant à $\overline{\mathrm{C}}^2$ et $\mathrm{C}^1$, $\Phi - \nabla^2$ est un opérateur différentiel du premier ordre dont la partie principale sera appelé *torsion de prolongement*; on a alors pour tout champ de vecteurs X sur $\mathrm{V}_n$:

$$\Phi(\mathrm{X}) - \nabla^2(\mathrm{X}) = \gamma_1.\nabla\mathrm{X} + \gamma_0.\mathrm{X}$$

où $\gamma_1$ est la torsion et les éléments de la matrice $\gamma_0$ représentent un champ de tenseurs sur $\mathrm{V}_n$ appelée *courbure de prolongement.*

Par antisymétrisation de $\Phi$, on obtient un autre opérateur différentiel du premier ordre d'où des champs de tenseurs appelés *courbure et torsion d'holonomie.* D'où [10 *b*] :

THÉORÈME 7. — *A toute connexion* $\overline{C}^2$ *sur* $T(V_n)$ *sont associés quatre champs de tenseurs sur* $V_n$ : *courbure et torsion de prolongement*; *courbure et torsion d'holonomie*; *pour que* $\overline{C}^2$ *soit le prolongement d'une connexion du premier ordre (resp. soit holonome), il faut et il suffit que la courbure et la torsion de prolongement (resp. d'holonomie) soient nulles. Si* $\overline{C}^2$ *est le prolongement de* C, *alors la courbure et la torsion d'holonomie de* $\overline{C}^2$ *coïncident avec la courbure et la torsion de* C, *d'après l'identité de Ricci.*

Une connexion $\overline{C}^2$ est dite *intégrable* s'il existe un système de coordonnées pour lequel les symboles de Christoffel sont nuls; C est alors intégrable aussi, d'où :

PROPOSITION 8. — *Pour que* $\overline{C}^2$ *soit intégrable, il faut et il suffit que les quatre champs de tenseurs soient nuls.*

Parmi les extensions de C, on distingue aussi *l'extension par parallélisme* $\mathcal{C}^2$ définie de la manière suivante : la connexion C définit sur $H(V_n)$ un parallélisme global, d'où sur cet espace des repères une connexion à courbure nulle dont les géodésiques sont les trajectoires des champs de vecteurs invariants par parallélisme (en particulier les géodésiques de la connexion C se relèvent dans H suivant des géodésiques de cette connexion à courbure nulle); d'après le théorème 5, on obtient une connexion d'ordre 2 sur $T(V_n)$; c'est la connexion $\mathcal{C}^2$.

Si la connexion C est symétrique, son extension par parallélisme $\mathcal{C}^2$ et son prolongement $\overline{C}^2$ ont mêmes géodésiques de prolongement; $\mathcal{C}^2$ est la presque symétrisée de $\overline{C}^2$; par suite, en utilisant l'identité de Ricci, on déduit que la torsion de prolongement de $\mathcal{C}^2$ est nulle et sa courbure de prolongement est la courbure de C (au coefficient 1/2 près). On démontre que $\mathcal{C}^2$ est la seule connexion holonome ayant mêmes géodésiques de prolongement que le prolongement $\overline{C}^2$. Si l'on considère la connexion $\overline{C}'^2$ sur $T^*(V_n)$ obtenue à partir de C par dérivation covariantes successives, il résulte de l'étude faite au § 5 que $\overline{C}'^2$ et sa presque symétrisée $\mathcal{C}'^2$ ont mêmes géodésiques d'ordre 3. Si $\nabla$ est la dérivation covariante associée à C, $\Phi'$ l'opérateur différentiel associé à $\mathcal{C}'^2$, $\nabla^2 - \Phi'$ est un opérateur d'ordre 0 : il définit un champ de tenseurs qui est l'opposée de la courbure de C (au facteur 1/2 près). Plus généralement étant donnée une connexion $\overline{C}^2$ induisant une connexion C du premier ordre, pour qu'une géodésique de prolongement tangente à un vecteur horizontal (relativement à C) de $H(V_n)$ soit une courbe horizontale, il faut et il suffit que la torsion de prolongement de $\overline{C}^2$ soit nulle.

Les connexions d'ordre supérieur sur $T(V_n)$ *associées aux G-structures* c'est-à-dire obtenues en réduisant le groupe structural $L_n$ à un sous-groupe G seront étudiées ultérieurement (on retrouve alors les opérateurs associés à une G-structure définis par Atiyah-Singer [2*b*]). Si $\overline{H}'^q$ est le fibré des $q$-repères semi-holonomes associé à la G-structure, de groupe structural $\overline{G}^q$ (prolongement de G), alors une connexion d'ordre $q$ associée à la G-structure est un relèvement de $T(\overline{H}'^{q-1})/\overline{G}^{q-1}$ dans $T(\overline{H}^q)/\overline{G}^q$.

En particulier si $V_n$ est un espace homogène réductif $\mathcal{G}/H$ (par exemple $S_n = O_{n+1}/O_n$, $S_{n+1} = U_{n+1}/U_n$) les trois connexions affines de E. Cartan sur $\mathcal{G}$ (voir Nomizu, Amer. Journ. of Mathem. LXXVI, 1954 p. 33-65) (dont les géodésiques sont les sous-groupes à un paramètre) sont les extensions d'une connexion affine invariante sur $\mathcal{G}/H$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Ambrose, R. S. Palais, I. M. Singer, Sprays, *Ann. Acad. Bras. Sci.*, 32 (1960), p. 163-178.

[2] M. E. Atiyah,

*a*) Complex analytic connections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), p. 181-207.

*b*) I. M. Singer, The index of elliptic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69, (1963), p. 422-433.

[3] Breuer-Cordes, *Seminar on elliptic operators*, Berkeley, 1963, (multigraphié).

[4] P. Cartier, Hyperalgèbres des variétés de groupes, *Séminaire Sophus Lie*, 2e année, 1955-56, Secrétariat Mathématiques, Paris, 1957.

[5] C. Ehresmann,

*a*) Connexions infinitésimales, *Colloq. Topol. Alg.* Bruxelles, 1950, p. 29-55.

*b*) C.*R. Acad. Sc. Paris*, t. 240, 1954, p. 1762, t. 240, 1955, p. 397 et p. 1755.

*c*) Connexions d'ordre supérieur, *Atti del* 5° *Cong. del Unione math. Italiana*, 1955; Cremonese, Roma, 1956.

*d*) Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rendiconti di Matematica V*, vol. 10 Fasc. 1, 2, Roma, 1951.

[6] E. Feldman, The geometry of immersions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69, (1963) p. 693-698.

[7] G. Glaeser, Étude de quelques champs tayloriens, *Thèse*, *Nancy*, 1957.

[8] S. Kobayashi, Canonical forms on frame bundles of higher order, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (*Amer. Math. Soc.*, 1961), vol. 3, p. 186-193.

[9] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience, New York, 1962.

[10] P. Libermann,

*a*) « Pseudogroupes infinitésimaux », *Colloq. Int. C.N.R.S.*, Lille 1959, *Bull. Soc. Math. France*, 87, 1959, pp. 409-425.

*b*) Connexions d'ordre supérieur, 3° *Coloquio Brasileiro de Matematica Fortaleza* (Brésil), 1961.

*c*) *Sprays and higher order connections*, *Procced. Nat. Acad. of Science U.S.A.*, 49, 1963, p. 459-462.

[11] W. Pohl,

*a*) Differential geometry of higher order, *Topology*, t. 1, 1962, p. 169-211.

*b*) Connexions in diff. geom. of higher order (multigraphié) Stanford University 1963.

[12] S. Smale, Lectures on differential topology, *Notes multigraphiées rédigées par* R. Abraham, Columbia University, New York, 1963.