ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TIEN-CUONG DINH

Problème du bord dans l'espace projectif complexe

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 5 (1998), p. 1483-1512

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_5_1483_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 5 (1998), 1483–1512

PROBLÈME DU BORD DANS L'ESPACE PROJECTIF COMPLEXE

par Tien-Cuong DINH

---

1. Énoncé du théorème principal.

Soit X une variété complexe de dimension n. Une *p–chaîne holomorphe* de X est une combinaison localement finie à coefficients entiers de sous–ensembles analytiques de dimension pure p de X. Une p–chaîne holomorphe T définit dans X un courant d'intégration $[T]$ de bidimension (p,p). Pour $p>1$, Harvey et Lawson ont prouvé qu'une sous–variété réelle $\mathcal{C}^1$, compacte, orientée Γ de dimension $2p-1$ de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{CP}^n\setminus\mathbb{CP}^{n-p+1}$) est le bord d'une p–chaîne holomorphe de masse finie de $\mathbb{C}^n\setminus\Gamma$ (resp. $\mathbb{CP}^n\setminus\mathbb{CP}^{n-p+1}\cup\Gamma$) si et seulement si Γ est *maximalement complexe* (c'est-à-dire le plan tangent de Γ en chaque point contient un sous–espace complexe de dimension $p-1$) [14], [15].

Pour $p=1$, ce problème du bord est très lié à l'étude des enveloppes polynomiales et des mesures orthogonales publiée dans plusieurs articles comme [24],[25],[2],[23], [1], [19], [5], [6], [20]. Les résultats de ces travaux sont utilisés pour la résolution du problème du bord avec $p>1$ [4], [5]. Ils sont également utilisés par Sarkis pour démontrer un théorème d'extension des fonctions CR–méromorphes [22].

Dans l'espace projectif, «Γ maximalement complexe» est une condition nécessaire mais non suffisante. Dolbeault et Henkin ont défini une fonction vectorielle holomorphe G en intégrant le long de Γ. Ils ont prouvé que ce problème du bord est résoluble dans $\mathbb{CP}^n$ (ou un ouvert $(n-p+1)$–linéairement concave de $\mathbb{CP}^n$) si et seulement si dans un ouvert non vide,

---

Mots-clés : Problème du bord – Chaîne holomorphe – Maximalement complexe – Courant rectifiable.
Classification math. : 32C25.

la fonction G s'écrit en somme finie à coefficients ± 1 de fonctions vérifiant les équations de l'onde de choc [7], [8]. Grâce à ce théorème, ils ont prouvé que sous l'hypothèse «Γ de classe $\mathcal{C}^2$» le problème du bord est résoluble si et seulement si Γ est maximalement complexe et si l'intersection de Γ avec le $(n-p+1)$-plan projectif $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ est le bord d'une surface de Riemann pour tout ν variant dans un ouvert non vide V de la grassmannienne $\mathrm{G}(n-p+2, n+1)$. Un ouvert $X \subset \mathbb{CP}^n$ est appelé *q–(linéairement) concave* s'il est la réunion d'une famille continue de q-plans projectifs de $\mathbb{CP}^n$. Chaque q-plan projectif de $\mathbb{CP}^n$ est paramétré par un point ν de la grassmannienne $\mathrm{G}(q+1, n+1)$. On note $X^* := \{\nu \in \mathrm{G}(q+1, n+1) : \ \mathbb{P}_\nu^q \subset X\}$. Alors X^* est connexe.

Les théorèmes de Harvey–Lawson et de Dolbeault–Henkin [8, théorème II] sont généralisés pour un courant rectifiable Γ dont le support est de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$ (c'est-à-dire le support $(\operatorname{Supp}\Gamma)$ de Γ est $(\mathcal{H}^{2p-1}, 2p-1)$–rectifiable et admét un $(2p-1)$-plan tangent géométrique $\operatorname{Tan}(\Gamma, z)$ en $\mathcal{H}^{2p-1}$–presque tout point $z \in \operatorname{Supp}\Gamma$, où $\mathcal{H}^{2p-1}$ est la mesure de Hausdorff de dimension $2p-1$) [4], [5]. Un tel courant Γ s'appelle également *courant de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$*. On dit que $\mathbb{P}_\nu^q$ intersecte $\operatorname{Supp}\Gamma$ transversalement en z si $\operatorname{Supp}\Gamma$ admet un $(2p-1)$-plan tangent en z et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_\nu^q \cap \operatorname{Tan}(\operatorname{Supp}\Gamma, z) = \max\{0, 2p-1-2(n-q)\}$. Le courant Γ s'appelle *maximalement complexe* si $(\Gamma, \varphi) = 0$ pour toute $(s, 2p-1-s)$-forme φ à support compact et pour tout $s \neq p, p-1$.

Dans ce travail nous cherchons la plus petite famille $V \subset \mathrm{G}(n-p+2, n+1)$ de $(n-p+1)$-plans projectifs telle que le théorème de Dolbeault-Henkin soit encore valable et nous donnons des applications de ce nouveau résultat : le théorème de Hartogs-Levi généralisé, le théorème d'extension des fonctions CR-méromorphes et le théorème de Gruman-Molzon-Shiffman-Sibony généralisé. Ce dernier corollaire donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble analytique de dimension pure $p \geqslant 2$ de $\mathbb{C}^n$ soit algébrique. Pour formuler le théorème principal nous avons besoin des notions suivantes.

Une sous-variété réelle, orientée, de dimension k et *de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geqslant 1$) à singularité négligeable* d'une variété X est un ensemble de la forme $Y \cup S$, où S est un fermé de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle de X et Y une sous-variété $\mathcal{C}^r$ orientée de dimension k de $X \setminus S$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $Y \cup S$ est de mesure $\mathcal{H}^k$ localement finie dans X.

2. Le courant d'intégration sur Y est fermé dans X.

Soit $\Gamma := \sum n_i\Gamma_i$ une combinaison localement finie à coefficients entiers de sous–variétés réelles orientées Γ_i de dimension $2p-1$ de classe $\mathcal{C}^r$ à singularité négligeable. Cette combinaison définit par l'intégration un courant fermé, localement rectifiable. On note encore Γ ce courant d'intégration.

Pour toute variété complexe Z, un sous–ensemble $V \subset Z$ est appelé *k–presque mince* s'il existe des espaces analytiques V_i de dimension k immergés dans Z tels que $V \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Un sous–ensemble 0–presque mince est simplement un ensemble fini ou dénombrable.

Si Z est un ouvert de $\mathrm{G}(n-p+2, n+1)$, un sous–ensemble $V \subset Z$ est appelé *k–générique* s'il n'existe pas de sous–ensemble k–presque mince $S \subset \mathbb{CP}^n$ vérifiant $V \subset \{\nu \in \mathrm{G}(n-p+2, n+1) : \mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \cap S \neq \varnothing\}$. En particulier, un sous–ensemble k–presque mince n'est pas k–générique. La réunion dénombrable de sous–ensembles k–presque minces (resp. non k–génériques) est k–presque mince (resp. non k–générique). Si U est un ouvert de Z, $V \subset U$ est k–presque mince (resp. non k–générique) dans U si et seulement si il l'est dans Z.

Pour $p = 2$ et $k = 0$, un sous–ensemble non dénombrable $V \subset \mathrm{G}(n, n+1) \simeq \mathbb{P}^{n*}$ (par exemple une courbe réelle) qui n'est pas inclus dans une réunion dénombrable d'hyperplans de $\mathbb{P}^{n*}$, est 0–générique.

THÉORÈME 1. — *Soient X un ouvert $(n-p+1)$–concave de $\mathbb{CP}^n$ et Γ une combinaison linéaire, localement finie, à coefficients entiers de sous–variétés réelles, orientées, de dimension $2p-1$, de classe $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ à singularité négligeable (avec $\epsilon > 0$) et maximalement complexe dans X. Soit V un sous–ensemble $(p-2)$–générique de X^* vérifiant les propriétés suivantes pour tout $\nu \in V$:*

i) *$\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ intersecte* $\mathrm{Supp}\,\Gamma$ *transversalement en $\mathcal{H}^1$–presque tout point et cette intersection est de classe $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable.*

ii) *Il existe une 1–chaîne holomorphe T_ν de masse finie de $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \setminus \Gamma$ telle que $d[T_\nu] = \Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ au sens des courants dans $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$.*

Alors il existe une p–chaîne holomorphe T de $X \setminus \Gamma$, de masse localement finie dans X, vérifiant $d[T] = \Gamma$ au sens des courants dans X.

Remarque. — Ce théorème généralise le théorème de Dolbeault–Henkin [8, théorème I] dans deux directions : premièrement, affaiblir la condition $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ de Γ par la condition $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ à singularité négligeable ($\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{A}_{2p-1}$ dans les autres variantes du théorème 1, qui seront appliqués pour résoudre le problème d'extension des fonctions CR–méromorphes) et deuxièmement, remplacer l'ouvert V par un ensemble plus petit (ensemble $(p-2)$–générique). Comme les théorèmes de Dolbeault–Henkin, ce théorème implique les théorèmes de Harvey–Lawson qui donnent les solutions du problème du bord dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-p+1}$ [14], [15]. Dans ces cas, les deux conditions du théorème 1 sont triviales.

L'idée principale de la démonstration est de prouver que la condition de Dolbeault et Henkin [8, théorème II] équivaut à un système implicite d'équations différentielles dépendant holomorphiquement du paramètre ν. D'après le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, la solution de ce système décrit un sous–ensemble analytique d'une certaine variété, qui représente l'espace de variables et de paramètres. Alors il existe une sous–variété Y d'un ouvert de $\mathrm{G}(n - p + 2, n + 1)$ telle que le système d'équations cité ci-dessus admette une solution pour tout $\nu \in Y$ et cette solution dépend holomorphiquement de ν. Supposons que pour tout $\nu \in Y$, $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ intersecte $\operatorname{Supp}\Gamma$ transversalement $\mathcal{H}^1$–presque partout en une combinaison $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable. Alors le problème du bord pour cette intersection est résoluble et on peut choisir une solution dépendante holomorphiquement de $\nu \in Y$, car la solution de notre système d'équations dépend holomorphiquement de ν. L'hypothèse «V est $(p-2)$–générique» montre que $\dim Y \geqslant p - 1$ (on peut supposer que $\dim Y = p - 1$) et $\bigcup_{\nu \in Y} \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ contient un ouvert $(n - p + 1)$–concave $D \subset X$. La réunion des 1–chaînes holomorphes construites pour $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ avec $\nu \in Y$ donne la solution T_D du problème du bord dans D pour $\Gamma \cap D$. Posant $\Gamma' := \Gamma - d[T_D]$, notre problème initial se réduit pour un certain $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \subset D$, au problème du bord dans $X \setminus \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$, où «$\Gamma$ maximalement complexe» est une condition suffisante. Certaines difficultés se posent dans le cas, où on n'a pas d'intersection transversale et ou de finitude de la longueur de l'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ pour $\nu \in Y$. Deux autres variantes du théorème précédent seront données dans le paragraphe 3 pour Γ de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{A}_{2p-1}$.

Nous donnons ici des exemples pour prouver que dans l'espace projectif, «Γ maximalement complexe» n'est pas une condition suffisante pour le problème du bord et pour le théorème précédent, on ne peut pas remplacer l'hypothèse «V est $(p-2)$–générique» par «V est non $(p-2)$–presque mince». En revanche, si V est ni $(p-2)$–presque mince et ni $(p-2)$–générique, certaines hypothèses suplémentaires permettront d'adapter la démonstration. Par exemple, si $p = 2$ et s'il existe un nombre $M \in \mathbb{Z}^+$ tel que $\bigcap_{i=1}^{M} \overline{\operatorname{Supp} T_{\nu_i}} = \varnothing$ pour tous $\nu_1, \ldots, \nu_M \in V$, deux à deux différents, alors le théorème 1 reste valable.

Exemple 1 ($n = 3, p = 2, X = \mathbb{CP}^3$). — On note $(w_0 : w_1 : w_2 : w_3)$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{CP}^3$. Soient $a \in \mathbb{CP}^3$ et $\Pi : \mathbb{CP}^3 \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ la projection linéaire canonique. Soit $\gamma \subset \mathbb{CP}^2$ une courbe réelle, orientée, $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas le bord d'une surface de Riemann. On pose $\Gamma = \{a\} \cup \Pi^{-1}(\gamma)$. Alors Γ est maximalement complexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sauf en a et Γ n'est pas le bord d'une 2–chaîne holomorphe dans $\mathbb{CP}^3$. Pour toute droite $\mathbb{P}^1_\xi \subset \mathbb{CP}^2$ on pose $\mathbb{P}^2_\xi := \Pi^{-1}(\mathbb{P}^1_\xi) \cup \{a\}$. Si $\mathbb{P}^1_\xi \cap \gamma = \varnothing$ on a $\mathbb{P}^2_\xi \cap \Gamma = \{a\}$. On peut dire que le problème du bord est résoluble dans $\mathbb{P}^2_\xi$ au sens des courants. Cette famille de $\mathbb{P}^2_\xi$ n'est pas 0-générique.

Exemple 2 ($n = 3, p = 2, X = \mathbb{CP}^3$). — Soit $\gamma := \{|w_0| = |w_1|, w_2 = w_3 = 0\}$ un cercle dans $\mathbb{CP}^3$. Soient $b(t)$ et $d(t)$ les fonctions lisses, définies sur γ à valeurs réelles positives. On pose $\Gamma := \bigcup_{t \in \gamma} \mathbb{P}^1_t$ où

$$\mathbb{P}^1_t := \{w_0, w_1, -b(t)tw_0 + b(t)w_1, -d(t)tw_0 + d(t)w_1\}.$$

On choisit $b(t)$ et $d(t)$ telles que Γ soit une sous–variété réelle lisse de dimension 3 de $\mathbb{CP}^3$ et que Γ ne soit pas le bord d'une variété complexe. Γ est maximalement complexe car elle est la réunion de droites projectives.

Soit $\mathbb{P}^2$ un hyperplan projectif de $\mathbb{CP}^3$, passé par γ et non contenant aucune droite projective $\mathbb{P}^1_t$. Alors l'intersection de Γ avec $\mathbb{P}^2$ est la courbe γ qui est le bord d'une surface de Riemann. La famille de ces hyperplans projectifs n'est pas 0-générique.

Exemple 3 ($n = 3$ et $p = 2$). — On note D_r le disque de centre 0, de rayon r de $\mathbb{C}$. Soient $f(t)$ et $g(t,s)$ des fonctions holomorphes non nulles sur D_1 et $\overline{D}_1 \times \overline{D}_1$. On considère la famille suivante d'hyperplans projectifs de $\mathbb{CP}^3$ passés par $(0 : 0 : 0 : 1)$:

$$\mathbb{P}^2_t := \{w_0 - tw_1 - tf(t)w_2 = 0\} \text{ avec } t \in D_1$$

et la famille de courbes réelles analytiques

$$\gamma_t := \left\{ w \in \mathbb{P}^2_t : \left| \frac{w_2}{w_3} \right| = 1, \ \frac{w_1}{w_3} = g\Big(t, \frac{w_2}{w_3}\Big) \frac{w_2}{w_3} \right\}.$$

Chaque courbe γ_t est le bord de la surface de Riemann

$$T_t := \left\{ w \in \mathbb{P}_t^2 : \left|\frac{w_2}{w_3}\right| < 1,\ \frac{w_1}{w_3} = g\Big(t, \frac{w_2}{w_3}\Big)\frac{w_2}{w_3} \right\}.$$

On choisit f et g de sorte que dans un petit voisinage 2–concave X de $\{w_0 = 0\}$, $\Gamma := \bigcup_{t \in D_\epsilon} \gamma_t \cap X$ soit une sous–variété réelle de X pour un ϵ assez petit. Alors Γ est maximalement complexe car elle est localement le bord d'une variété complexe et pour t assez petit $\mathbb{P}_t^2 \cap \Gamma = \gamma_t$ est le bord d'une surface de Riemann.

Supposons que Γ est le bord d'un sous-ensemble analytique T de $X \setminus \Gamma$. On considère $\Pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ l'éclatement de X en $a := (0:0:0:1)$. Soit $\tilde{T}$ le prolongement de $\Pi^{-1}(T \setminus \{a\})$ en un sous–ensemble analytique de $\tilde{X} \setminus \Pi^{-1}(\Gamma)$. Alors $\tilde{T} \cap \Pi^{-1}(a)$ est un sous–ensemble analytique de dimension 1 de $\Pi^{-1}(a) \simeq \mathbb{CP}^2$. Il est donc algébrique.

Par conséquent, si l'on choisit f, g telles que $g(t,s)$ ne soit pas algébrique par rapport à s et $(tg(t,0) + tf(t), g(t,0))$ ne décrit pas un morceau d'une courbe algébrique dans $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, alors Γ ne peut pas être le bord d'un sous–ensemble analytique de $X \setminus \Gamma$.

Je tiens à remercier Gennadi M. Henkin de m'avoir proposé ce problème.

2. Démonstration du théorème principal.

Tous les lemmes et propositions qui suivent, sont formulés pour Γ de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$ sauf s'il y a une mention expresse du contraire. Désormais, on pose $q := n - p + 1$. On note $w = (w_0 : \cdots : w_n)$ le système de coordonnées homogènes, $Q = \{w_0 = 0\}$ l'hyperplan à l'infini, $z_j = w_j/w_0$ les coordonnées affinies de $\mathbb{CP}^n$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_q \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne et $\eta = \begin{pmatrix} \eta_q^1 & \cdots & \eta_q^{n-p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n^1 & \cdots & \eta_n^{n-p} \end{pmatrix}$ une matrice $p \times (n-p)$. Un point générique de la grassmannienne $\mathrm{G}(n-p+1, n+1)$ est défini par la matrice $\underline{\nu} = (\xi, \eta)$ et le $(n-p)$-plan projectif $\mathbb{P}^{n-p}_{\underline{\nu}}$ associé à $\underline{\nu}$ est défini par l'équation $w'' = \underline{\nu}w'$, où $w'' = \begin{pmatrix} w_q \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ et $w' = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{n-p} \end{pmatrix}$.

On considère les fonctions

$$\tilde{g}_j(w) = w_j - \xi_j w_0 - \eta_j^1 w_1 - \ldots - \eta_j^{n-p} w_{n-p}$$

et la matrice $\underline{\nu}'$ déduite de $\underline{\nu}$ par suppression de la première ligne. On pose $g_j(z) := \tilde{g}_j(w)/w_0$. On note $\mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'}$ le q-plan projectif défini par $p-1$ dernières lignes de l'équation $w'' = \underline{\nu}w'$. Pour un $\underline{\nu}'$ générique de $\mathrm{G}(q+1, n+1)$, $\Gamma_{\underline{\nu}'} := \Gamma \cap \mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'}$ est de classe C^1 à singularité négligeable. On pose $\zeta^k = {}^t(z_1^k, \ldots, z_{n-p}^k)$ et $\underline{G}_k(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{\underline{\nu}}} \zeta^k \frac{dg_q}{g_q}$ des fonctions vectorielles. Comme Γ est maximalement complexe, cette fonction est holomorphe [8], [5]. Plus généralement, on considère les fonctions χ_{ϵ_j} définies dans $\mathbb{CP}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulles au voisinage de $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \{\tilde{g}_j = 0\}$ et égales $\dfrac{1}{2\pi i}$ en dehors d'un ϵ_j–voisinage W_{ϵ_j} de $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \{\tilde{g}_j = 0\}$. On peut supposer que $Q \cap \operatorname{Supp}\Gamma$ est de mesure $\mathcal{H}^{2p-3}$ localement finie dans X et que $Q \cap \bigcap_{j=q+1}^{n} \{\tilde{g}_j = 0\} \cap \operatorname{Supp}\Gamma = \varnothing$.

Lemme 1 (Formule de Cauchy) . — *Si φ une $(1,0)$–forme holomorphe au voisinage de* $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \bigcap_{j=q+1}^{n} \overline{W}_{\epsilon_j}$, $\left(\Gamma, \varphi \bigwedge_{j=q+1}^{n} d\chi_{\epsilon_j} \dfrac{dg_j}{g_j}\right)$ *est indépendant de χ_{ϵ_j} pour les ϵ_j assez petits. Si la tranche $\langle \Gamma, \{g_j\}_{j=q+1}^n, 0\rangle$ existe, alors* $\left(\Gamma, \varphi \bigwedge_{j=q+1}^{n} d\chi_{\epsilon_j} \dfrac{dg_j}{g_j}\right) = \left(\langle \Gamma, \{g_j\}_{j=q+1}^n, 0\rangle, \varphi\right)$. *Plus généralement, si pour un compact $K \subset \mathbb{CP}^n$, $\langle \Gamma \setminus K, \{g_j\}_{j=q+1}^n, 0\rangle$ existe dans $X \setminus K$, alors pour tout voisinage $U \supset K$ il existe des mesures μ_i à support dans U pour $i := 1, 2, \ldots, n$ telles que pour toute $(1,0)$–forme $\varphi = f dz_i$ holomorphe au voisinage de* $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \bigcap_{j=q+1}^{n} \{\tilde{g}_j = 0\}$ *on ait*

$$\left(\Gamma, \varphi \bigwedge_{j=q+1}^{n} d\chi_{\epsilon_j} \frac{dg_j}{g_j}\right) = \left(\langle \Gamma \setminus \overline{U}, \{g_j\}_{j=q+1}^n, 0\rangle, \varphi\right) + (\mu_i, f)$$

où la notation $\Gamma \setminus K$ *(resp.* $\Gamma \setminus \overline{U}$*) signifie la restriction de* Γ *dans* $X \setminus K$ *(resp.* $X \setminus \overline{U}$*).*

La première égalité est prouvée dans [5] en utilisant la formule de Cauchy et la formule de Stokes pour le courant fermé Γ. Pour la seconde, on choisit $U' \subset U$ un ouvert à bord lisse, contenant K et on fait les mêmes calculs pour $\Gamma \setminus \overline{U}'$, le bord de ce courant cause l'existence des mesures μ_i.

D'après le lemme précédent, on a

$$\underline{G}_k(\xi, \eta) = \left\{ \left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i} z_m^k \frac{dg_q}{g_q} \bigwedge_{j=q+1}^{n} d\chi_{\epsilon_j} \frac{dg_j}{g_j} \right) \right\}_{m=1}^{n-p}.$$

Ces fonctions sont holomorphes dans leurs domaines de définition.

Rappelons la théorie de tranchage pour un courant plat Γ (en particulier, pour un courant rectifiable) de dimension s dans une variété réelle Y de dimension m et pour une application Π de classe $\mathcal{C}^1$ de Y dans $\mathbb{R}^k$ avec $k \leqslant s$. Pour $\mathcal{H}^k$–presque tout $z \in \mathbb{R}^k$, il existe un courant $\langle \Gamma, \Pi, z \rangle$ de Y , de dimension $s - k$ à support dans $\Pi^{-1}(z)$ tel que pour toute fonction φ à support compact dans $\mathbb{R}^k$ et toute $(s-k)$–forme f à support compact dans Y, on ait

$$(\Gamma, \Pi^*(\varphi \wedge \Phi) \wedge f) = \int_{\mathbb{R}^k} (\langle \Gamma, \Pi, z \rangle, f)\, \varphi d\mathcal{H}^k$$

où Φ est la forme de volume de $\mathbb{R}^k$ [10].

Si Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable, si l'intersection $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'}$ est $\mathcal{C}^1$ à singularité négligéable et si cette intersection est transversale en $\mathcal{H}^1$–presque tout point, alors $\Gamma \cap \mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'} = \left\langle \Gamma, \{g_j\}_{j=q+1}^n, 0 \right\rangle$. Cette représentation de $\Gamma \cap \mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'}$ est indépendante du système des coordonnées. Dans le cas général, si $\langle \Gamma, \{\tilde{g}_j\}_{j=q+1}^n, 0 \rangle$ existe, on note $\Gamma \cap \mathbb{P}^q_{\underline{\nu}'} := \langle \Gamma, \{\tilde{g}_j\}_{j=q+1}^n, 0 \rangle$.

On pose

$$\underline{X}^* := \{(\xi_q, \eta_q, \nu) \in \mathbb{C}^q \times X^* : \ \dim \{\tilde{g}_q = 0\} \cap \mathbb{P}^q_\nu = n-p\}$$
$$\underline{X}^*_\Gamma := \underline{X}^* \cap \{(\xi_q, \eta_q, \nu) : \mathbb{P}^q_\nu \cap \{\tilde{g}_q = 0\} \cap \operatorname{Supp}\Gamma \neq \varnothing\}$$
$$\underline{X}^*_\infty := \underline{X}^* \cap \{(\xi_q, \eta_q, \nu) : \mathbb{P}^q_\nu \cap \operatorname{Supp}\Gamma \cap Q \neq \varnothing\}.$$

Alors $\underline{X}^* \setminus (\underline{X}^*_\Gamma \cup \underline{X}^*_\infty)$ est une réunion finie ou dénombrable d'ouverts connexes Ω_i.

D'après le lemme précédent, on peut définir sur $\underline{X}^* \setminus (\underline{X}^*_\Gamma \cup \underline{X}^*_\infty)$ les fonctions vectorielles holomorphes $G_k(\xi_q, \eta_q, \nu) = \{G_{k,m}\}_{m=1}^{n-p}$ qui égalent presque partout à $\left\{\left(\Gamma\cap\mathbb{P}^q_\nu, \dfrac{1}{2\pi i}z^k_m\dfrac{dg_q}{g_q}\right)\right\}_{m=1}^{n-p}$. La fonction $G_{0,m}$ est à valeurs entières et indépendante de m. On pose $R(w,\xi_q,\eta_q,\nu)=\{R_m\}_{m=1}^{n-p}$ où $R_m(w,\xi_q,\eta_q,\nu) := w^{G_0(\xi_q,\eta_q,\nu)}\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}G_{k,m}(\xi_q,\eta_q,\nu)w^{-k}\right)$ sont des séries en w. Pour (ξ_q,η_q,ν) dans un compact K de $\underline{X}^*\setminus(\underline{X}^*_\Gamma\cup\underline{X}^*_\infty)$ et pour $|w|$ assez grand, les séries R_m définissent des fonctions holomorphes car $|G_k|\leqslant M_K^k$ pour une certaine constante M_K dépendant du compact K. Les fonctions $G_{k,m}$ sont les fonctions symétriques des coordonnées des points d'intersection de $\mathbb{P}^{n-p+1}_\nu$ avec la p-chaîne holomorphe T celle qu'il faut construire. La construction due à Harvey-Lawson et Dolbeault-Henkin donne la chaîne T comme un résidu des fonctions méromorphes R_m.

Soient

$$B := \{(z,\nu)\in X\times X^* :\ z\in\mathbb{P}^q_\nu\}$$

$$F := \{(z,\xi_q,\eta_q,\nu)\in X\times\underline{X}^* :\ (z,\nu)\in B,\ z\in\{\tilde g_q=0\}\}$$

$$B_\Gamma := B\cap\{(z,\nu) : z\in\operatorname{Supp}\Gamma\}$$

$$B_\infty := B\cap\{(z,\nu) : z\in Q\}.$$

Soient $(a,\nu_0)\in B_\Gamma\setminus B_\infty$ et $(\xi_{q,0},\eta_{q,0})\in\mathbb{C}^{q+1}$ tels que dans un voisinage de a, le q-plan $\mathbb{P}^q_{\nu_0}$ intersecte $\operatorname{Supp}\Gamma$ transversalement $\mathcal{H}^1$–presque partout et $\{w_q-\xi_{q,0}w_0-\eta^1_{q,0}w_1-\cdots-\eta^{n-p}_{q,0}w_{n-p}=0\}$ intersecte $\operatorname{Supp}\Gamma\cap\mathbb{P}^q_{\nu_0}$ uniquement et transversalement en a. Supposons que Ω_i et Ω_j sont deux composantes connexes de $\underline{X}^*\setminus(\underline{X}^*_\Gamma\cup\underline{X}^*_\infty)$ telles que $b\Omega_i\cap\{\eta_q=\eta_{q,0},\nu=\nu_0\}$ et $b\Omega_j\cap\{\eta_q=\eta_{q,0},\nu=\nu_0\}$ admettent la même droite tangente en $(\xi_{q,0},\eta_{q,0},\nu_0)$. Ceci est valable $\mathcal{H}^{\dim\underline{X}^*-1}$-presque partout sur $b\Omega_i\cap b\Omega_j$. Les composantes Ω_i et Ω_j sont appelées *adjacentes* si $\mathcal{H}^{\dim\underline{X}^*-1}(b\Omega_i\cap b\Omega_j)>0$. On appelle $\underline{\Omega}_i$ et $\underline{\Omega}_j$ les ouverts connexes de $\Omega_i\cap\{\eta_q=\eta_{q,0},\ \nu=\nu_0\}$ et de $\Omega_j\cap\{\eta_q=\eta_{q,0},\ \nu=\nu_0\}$ dont les droites tangentes en (a,ν_0) existent et coïncident. Le lemme suivant, prouvé comme dans [5, lemme 4.2] par les estimations simples, est valable pour $\mathcal{H}^{\dim\underline{X}^*-1}$-presque tout $(a,\xi_{q,0},\eta_{q,0},\nu_0)$

LEMME 2 (Études des sauts). — *Il existe un nombre réel M assez grand tel que*

i) *$G_{0,m}(\Omega_i)-G_{0,m}(\Omega_j)$ est égal à la multiplicité de Γ en a.*

ii) $\lim\limits_{\substack{\xi_q^+ \xrightarrow{\measuredangle} \xi_{q,0} \\ (\xi_q^+,\eta_{q,0},\nu_0)\in\underline{\Omega}_i}} G_{k,m}(\xi_q^+,\eta_{q,0},\nu_0)$ *et* $\lim\limits_{\substack{\xi_q^- \xrightarrow{\measuredangle} \xi_{q,0} \\ (\xi_q^-,\eta_{q,0},\nu_0)\in\underline{\Omega}_j}} G_{k,m}(\xi_q^-,\eta_{q,0},\nu_0)$ *existent et sont bornées par M^k.*

iii) $$\lim_{\substack{\xi_q^\pm \xrightarrow{\measuredangle} \xi_{q,0} \\ (\xi_q^\pm,\eta_{q,0},\nu_0)\in\underline{\Omega}_i,\underline{\Omega}_j}} \left\{G_{k,m}(\xi_q^+,\eta_{q,0},\nu_0) - G_{k,m}(\xi_q^-,\eta_{q,0},\nu_0)\right\} = (G_0(\Omega_i) - G_0(\Omega_j))a_m^k.$$

iv) $$\lim_{\substack{\xi_q^\pm \xrightarrow{\measuredangle} \xi_{q,0} \\ (\xi_q^\pm,\eta_{q,0},\nu_0)\in\underline{\Omega}_i,\underline{\Omega}_j}} \frac{R_m(w,\xi_q^+,\eta_{q,0},\nu_0)}{R_m(w,\xi_q^-,\eta_{q,0},\nu_0)} = (w-a_m)^{G_0(\Omega_i)-G_0(\Omega_j)}.$$

v) *S'il existe un sous-ensemble E de mesure $\mathcal{H}^1$-positive de $b\underline{\Omega}_i \cap b\underline{\Omega}_j$ tel que $b\underline{\Omega}_i$ et $b\underline{\Omega}_j$ admettent la même droite tangente en chaque point de E et si pour $\xi_q \in \underline{\Omega}_i$, $R_m(w,\xi_q,\eta_{q,0},\nu_0)$ définit une fraction rationnelle des polynômes en w à coefficients dans $\mathcal{O}(\underline{\Omega}_i)$, alors elle définit aussi pour $\xi_q \in \underline{\Omega}_j$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathcal{O}(\underline{\Omega}_j)$.*

La notation $\xrightarrow{\measuredangle}$ signifie une limite quand $\xi_q^\pm$ tend vers $\xi_{q,0}$ le long des arcs non tangentiels. Le lemme 2 peut être formulé pour les fonctions définies d'une manière analogue que pour G en remplaçant l'hyperplan $\mathbb{P}_\nu^q \cap \{\tilde{g}_q = 0\}$ par une hypersurface algébrique de degré fixé de $\mathbb{P}_\nu^q$.

LEMME 3. — *Soient Z une variété réelle de dimension n, Γ un fermé $(\mathcal{H}^{n-1},1)$-rectifiable de Z et Ω_j les composantes connexes de $Z \setminus \Gamma$. Soit $T = \sum n_j\Omega_j$ avec les n_j entiers. Supposons que la limite $\lim\limits_{s\longrightarrow\infty} \sum \min(|n_j|,s)d[\Omega_j]$ pour la topologie engendrée par la masse (notée $\mathcal{M}$) est un courant localement rectifiable de Z. Alors $\sum |n_j|\mathcal{H}^n(\Omega_j \cap K) < +\infty$ pour tout compact K de Z. Par conséquent, T définit un courant d'intégration $[T]$ de masse localement finie de Z.*

Preuve. — Lawrence a démontré ce lemme pour $p = 1$ et pour Γ compact [19]. Il s'agit ici d'un problème local. On peut donc supposer, à un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ près, que $Z = \mathbb{R}^n$ et $K = \overline{B}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1, x_1 \geqslant 0\}$ la demi-boule unité fermée et que Γ ne rencontre pas la demi-sphère $S^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_1 \geqslant 0\}$.

Posons $\Omega_j' := \Omega_j \cap K$, $T_s := \sum \min(|n_j|,s)[\Omega_j']$. Supposons que Ω_0' est la composante dont le bord contient S^+. Pour un point générique $x \in \Gamma$ on note Ω_{j_x} et $\Omega_{j_x'}$ les deux composantes connexes dont les bords admettent le même plan tangent approximatif en x. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}([T_s]) &= \min(|n_0|, s)\mathcal{H}^n(\Omega'_0) + \sum_{j\neq 0}\min(|n_j|, s)\mathcal{H}^n(\Omega'_j) \\
&= \min(|n_0|, s)\int_{\Omega'_0} dx + \sum_{j\neq 0}\min(|n_j|, s)\int_{\Omega'_j} dx \\
&= \min(|n_0|, s)\int_{b\Omega'_0} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n \\
&\quad + \sum_{j\neq 0}\min(|n_j|, s)\int_{b\Omega'_j} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n \\
&= \min(|n_0|, s)\int_{S^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n \\
&\quad + \sum\min(|n_j|, s)\int_{b\Omega'_j\cap B^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n \\
&\quad (\text{car } b\Omega'_j\setminus B^+\subset\{x_1=0\}) \\
&\leqslant |n_0|\int_{S^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n + \int_{x\in\Gamma\cap K} |\min(|n_{j_x}|, s)-\min(|n_{j'_x}|, s)| \\
&\quad \|x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n\| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
&\leqslant |n_0|\int_{S^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n + \text{const}\int_{x\in\Gamma\cap K} |n_{j_x}-n_{j'_x}| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
&\leqslant |n_0|\int_{S^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n + \text{const}\int_{x\in\Gamma\cap K} \operatorname{mult}(d[T_s], x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
&\leqslant |n_0|\int_{S^+} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n + \text{const}\mathcal{M}(d[T_s]).
\end{aligned}$$

Par hypothèse $\sum |n_j|\mathcal{H}^n(\Omega_j\cap K) \lesssim 1 + \lim_{s\longrightarrow\infty}\mathcal{M}([T_s]) < +\infty$. □

PROPOSITION 1. — *Soit Γ un fermé de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$ (ou un courant rectifiable de dimension $2p-1$ et de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$ pour iii)) d'une variété complexe X. Alors*

i) *Tout sous-ensemble analytique T de dimension pure p de $X\setminus\Gamma$ définit un courant d'intégration dans X de masse localement finie dont le bord est localement rectifiable et à multiplicités 0 ou 1 en $\mathcal{H}^{2p-1}$-presque tout point de Γ.*

ii) *Si $T = \sum n_i T_i$ une p-chaîne holomorphe de $X\setminus \operatorname{Supp}\Gamma$ et si $\sum_{n_i>0}\min(n_i, k)d[T_i] + \sum_{n_i<0}\max(n_i, -k)d[T_i]$ tend vers un courant localement* *rectifiable dans X pour la topologie engendrée par la masse, alors $[T]$ est de masse localement finie et à bord localement rectifiable.*

iii) *Soient X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\Pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^{p-1}$ une projection linéaire et T une p-chaîne holomorphe de $X \setminus \operatorname{Supp}\Gamma$. Supposons que pour $\mathcal{H}^{2p-2}$-presque tout $\nu \in \mathbb{C}^{p-1}$, $T \cap \Pi^{-1}(\nu)$ est une 1-chaîne holomorphe de $X \setminus (\operatorname{Supp}\Gamma \cap \Pi^{-1}(\nu))$ de masse localement finie dans X et à bord $\langle \Gamma, \Pi, \nu\rangle$ au sens des courants. Supposons en plus que pour toute composante irréductible T_j de T, $\dim \Pi(T_j) = p-1$ et pour $\mathcal{H}^{2p-2}$-presque tout $\nu \in \mathbb{C}^{p-1}$, $\operatorname{Supp}\Gamma \cap \Pi^{-1}(\nu)$ est de classe $\mathcal{A}_1$. Alors T est de masse localement finie dans X et à bord localement rectifiable.*

Preuve. — Il s'agit d'un problème local. On peut donc supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et le polydisque $\overline{D} := \{|z_1| \leqslant 1, \ldots, |z_n| \leqslant 1\}$ de $\mathbb{C}^n$ est un compact de X. On peut supposer que toute projection linéaire $L = (L_1, \ldots, L_k)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^k$ avec $L_j = z_s, z_s \pm z_l$ ou $z_s \pm iz_l$, est générique (c'est-à-dire $L(\Gamma)$ est de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$ si $k \geqslant p$ et $\Gamma \cap L^{-1}(\zeta)$ est de classe $\mathcal{A}_{2p-1-2k}$ pour $\mathcal{H}^{2k}$-preque tout $\zeta \in \mathbb{C}^k$ si $k < p$). On note Π^I la projection linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{|I|}$ avec $\Pi^I(z) := (z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{|I|}})$ pour tout $I = (i_1, i_2, \ldots, i_{|I|}) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Il suffit de prouver notre lemme dans D.

i) On démontre d'abord que $T \cap D$ est de volume $\mathcal{H}^{2p}$ finie. Soit $I = (1, 2, \ldots, p)$. Soient Ω_j les composantes connexes de $D_I \setminus \Pi^I(\Gamma)$, où D_I est le polydisque unité de $\mathbb{C}^p$. Alors T est un revêtement ramifié de n_j feuillets au-dessus de chaque Ω_j. Il faut prouver que $\sum n_j \mathcal{H}^{2p}(\Omega_j) < +\infty$. On peut choisir D de sorte que $\Pi^I|_\Gamma$ soit injective en dehors d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^{2p-1}$ nulle. D'après le théorème d'unicité, si Ω_j et Ω_l sont des composantes adjacentes, (c'est-à-dire $\mathcal{H}^{2p-1}(b\Omega_j \cap b\Omega_l) > 0$) on a $|n_l - n_j| \leqslant 1$. En général, si Γ n'est pas de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$, ce théorème d'unicité n'est pas toujours valable [5]. On pose $T_s^I := \sum \min(n_j, s)\Omega_j$. Alors T_s^I définit un courant d'intégration dans $\mathbb{C}^p$. Le bord de ce courant est rectifiable et à support dans $\Pi^I(\Gamma) \cap D_I$. Soit x un point générique de $\Pi^I(\Gamma) \cap D_I$. La multiplicité de $d[T_s^I]$ en x est $|\min(n_{j_x}, s) - \min(n_{j'_x}, s)| \leqslant |n_{j_x} - n_{j'_x}| \leqslant 1$. L'hypothèse du lemme précédent est donc satisfaite. Par conséquent, T^I définit un courant d'intégration de masse finie de D_I.

Les mêmes inégalités pour les autres projections Π de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ et le théorème de Wirtinger montrent que $\mathcal{H}^{2p}(T \cap D) < +\infty$.

Alors, $[T]$ est un courant plat de D. Soit $L = (L_1, \ldots, L_p)$ une projection linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ avec $L_j = z_s, z_s \pm z_l$ ou $z_s \pm iz_l$. Soit $\tilde{L}$ une projection de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{p-1}$ avec $\tilde{L}_j = L_j$ pour $j \geqslant 2$ et $\tilde{L}_1 = \operatorname{Re} L_1$ ou

$\mathrm{Im} L_1$. Alors $\langle T, \tilde{L}, y\rangle$ est un courant d'intégration sur une réunion finie de courbes réelles orientées de longueur finie pour un y générique de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{p-1}$. Le bord de ce courant est une somme finie de masses de Dirac car chaque point de $bT \cap \tilde{L}^{-1}(y)$ est le sommet d'une seule courbe ou de deux courbes de directions opposées. D'où

$$\mathcal{M}(d[T]\cap D \llcorner d\tilde{L}_1\wedge d\tilde{L}_2\wedge d\bar{\tilde{L}}_2\ldots\wedge d\bar{\tilde{L}}_p) \leqslant \int_{x\in\Gamma\cap D} d\mathcal{H}^{2p-1}(\tilde{L}(x)) \leqslant \mathcal{H}^{2p-1}(\Gamma\cap D).$$

En utilisant cette inégalité pour les projections $\tilde{L}$ différentes, on montre que $\mathcal{M}(d[T]\cap D) < +\infty$ car les formes $d\tilde{L}_1\wedge d\tilde{L}_2\wedge d\bar{\tilde{L}}_2\wedge\ldots\wedge d\bar{\tilde{L}}_p$ forment une base de l'espace des $(2p-1)$-formes maximalement complexes.

D'après le théorème du support de King [18, p.218], il existe un $(2p-1)$-champ de vecteurs localement intégrable η défini $\mathcal{H}^{2p-1}$-presque partout sur Γ tel que $d[T] = \mathcal{H}^{2p-1}\llcorner\Gamma\wedge\eta$. Comme $\langle d[T], \tilde{L}, y\rangle$ est une somme finie de masses de Dirac, $|\eta(x)| = 0$ ou 1 pour $\mathcal{H}^{2p-1}$-presque tout $x\in\Gamma$.

ii) On remarque que $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\sum\min(|n_i|,k)d[T_i]$, pour la topologie engendrée par la masse, est aussi un courant localement rectifiable dans X. En appliquant le lemme précédent exactement de la même manière que dans i), on montre que $|T| := \sum|n_j|[T_j]$ définit un courant d'intégration de masse localement finie. Il est donc de même de T. On démontre tout comme dans i) que $d[T]$ est localement rectifiable.

iii) Sans perdre en généralité, on suppose que $\Pi(z) = (z_1,\ldots,z_{p-1})$. D'après l'hypothèse et les estimations obtenues dans la démonstration du lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{2p}([T]\cap D) &= \int_{\Pi(D)}\mathcal{M}(\langle[T]\cap D,\Pi,x\rangle)d\mathcal{H}^{2p-2}(x)\\ &\leqslant \mathrm{const}\int_{\Pi(D)}(\mathcal{M}(\langle\Gamma\cap D,\Pi,x\rangle)+\mathrm{const})d\mathcal{H}^{2p-2}(x)\\ &\leqslant \mathrm{const}(\mathcal{M}(\Gamma\cap D)+\mathrm{const})\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

D'où $[T]$ est de masse localement finie. Posons

$$T_s := \sum_{n_i>0}\min(n_i,s)T_i + \sum_{n_i<0}\max(n_i,-s)T_i.$$

La multiplicité de $d[T_s]$ en x est majorée par la multiplicité de Γ en x pour un x générique de $\operatorname{Supp}\Gamma$. D'après ii), $d[T]$ est localement rectifiable. $\square$

LEMME 4. — *Soit Y une sous-variété complexe de dimension pure $m \geqslant p-1$ d'un ouvert $U \subset \mathrm{G}(q+1, n+1)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Y est $(p-2)$-générique.*

ii) *Il existe $\nu \in Y$ tel que $\mathbb{P}^q_\nu \cap S = \varnothing$, où*

$$S := \{z \in \mathbb{CP}^n : \dim\{\nu \in Y : z \in \mathbb{P}^q_\nu\} \geqslant m-p+2\}.$$

iii) *Il existe un sous-espace analytique $(p-2)$-générique $Y_1 \subset Y$ de dimension $p-1$.*

Preuve. — ii)$\Longrightarrow$i) et iii)$\Longrightarrow$i) sont évidents.

i)$\Longrightarrow$ ii) Soient

$S_k := \{z \in \mathbb{CP}^n : \dim\{\nu \in Y : z \in \mathbb{P}^q_\nu\} = k\}$

$Y_k := \{\nu \in Y : \mathbb{P}^q_\nu \cap S_k \neq \varnothing\}$ pour $k \leqslant m$.

Alors S_k est une réunion finie ou dénombrable d'espaces analytiques. Il existe $S'_k \subset S_k$ une réunion dénombrable d'espaces analytiques de dimension $\leqslant m-k$ tels que $Y_k \subset \bigcup_{z \in S'_k} \{\nu \in Y : z \in \mathbb{P}^q_\nu\}$. Donc Y_k n'est pas $(p-2)$-générique pour tout $k \geqslant m-p+2$. D'où ii).

i) et ii) $\Longrightarrow$ iii) Montrons que pour tout $0 \leqslant s \leqslant m-p+1$, il existe $Y_{m-p+2-s} \subset Y$ de dimension $m-s$ et $(p-2)$-générique. Il suffit de le prouver pour $s=1$.

Soit $S' := \{z \in \mathbb{CP}^n : \dim\{\nu \in Y : z \in \mathbb{P}^q_\nu\} \geqslant m-p+1\}$. S'il existe $\nu \in Y$ tel que $\mathbb{P}^q_\nu \cap S' = \varnothing$, d'après ii), il suffit de choisir Y_{m-p+1} contenant ν. Sinon $\dim S' \geqslant p-1$. D'après ii), il existe $\nu_0 \in Y$ tel que $\mathbb{P}^q_{\nu_0} \cap S = \varnothing$. Posons $Z := \{(z,\nu) \in S' \times Y : z \in \mathbb{P}^q_\nu\}$ et $\Pi_1 : Z \longrightarrow S'$ et $\Pi_2 : Z \longrightarrow Y$ les projections canoniques. Soient $Y' \subset Z$ un sous-espace analytique lisse, irréductible de dimension $m-1$ contenant ν_0 tel que $\Pi_1|_{Y'}$ soit de rang maximal et $\Pi_2|_{Y'}$ soit injective. En particulier, $\dim \Pi_1(Y') \geqslant p-1$ et $\dim \Pi_2(Y') = m-1$. Soit $Y_{m-p+1} := \Pi_2(Y')$. Alors pour tout ensemble $(p-2)$-mince $\tilde{S} \subset \mathbb{CP}^n$, l'ensemble $\{\nu \in Y_{m-p+1} : \mathbb{P}^q_\nu \cap \tilde{S} \cap S' \neq \varnothing\}$ ne peut être qu'une réunion dénombrable d'espaces analytiques de dimension $\leqslant m-2$. Par définition de S', l'ensemble $\{\nu \in Y_{m-p+1} : \mathbb{P}^q_\nu \cap \tilde{S} \setminus S' \neq \varnothing\}$

est également une réunion dénombrable d'espaces analytiques de dimension $\leqslant m-2$. Ceci implique que Y_{m-p+1} est $(p-2)$–générique. □

PROPOSITION 2. — *Pour $p=1, n=2$ (alors $X=\mathbb{CP}^2$) et Γ de classe $\mathcal{A}_1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe une 1–chaîne holomorphe T de masse finie de $\mathbb{CP}^2 \setminus \Gamma$ telle que $d[T]=\Gamma$.*

ii) *Il existe des entiers positifs N^+, N^-, $N=N^+ + N^-$ et des fonctions holomorphes $C_k(\eta)$ pour $k=1,2,\ldots,N+1$, définies dans un ouvert $U\subset\mathbb{C}$ tels que pour ξ variant dans un voisinage de $\alpha\in\mathbb{C}$, le système d'équations suivant admette une solution*

$$\text{(I)}\left\{\begin{aligned} x_1^k+\cdots+x_{N^+}^k-y_1^k-\cdots-y_{N^-}^k = G_k(\xi,\eta)&+\frac{C_0^{(k-1)}(\eta)}{(k-1)!}(\xi-\alpha)^k\\ &+\sum_{m=1}^{k}\frac{kC_m^{(k-m)}(\eta)}{(k-m)!}(\xi-\alpha)^{k-m}\\ \text{pour } k=1,2,\ldots,N+1.& \end{aligned}\right.$$

Remarque 2. — $(x_i,\eta x_i+\xi)$ et $(y_j,\eta y_j+\xi)$ avec les coefficients 1 et -1 décrivent la chaîne holomorphe T dans un voisinage de la droite $\{w_2-\alpha w_0-\eta_0 w_1=0\}$ pour tout $\eta_0\in U$. La condition ii) est invariante par rapport à $\alpha\in\mathbb{C}$.

Preuve. — *Condition nécessaire* : Soient $\{z^{(i)}\}_{i=1}^{N^+}$ (resp. $\{z^{*(j)}\}_{j=1}^{N^-}$) les points de l'intersection $T\cap\{w_2-\xi w_0-\eta w_1=0\}$ avec la multiplicité 1 (resp. -1). Les $z^{(i)}$ (resp. $z^{*(j)}$) ne sont pas obligatoirement différents. Soient x_i (resp. y_j) les premières coordonnées affines de $z^{(i)}$ (resp. de $z^{*(j)}$). On appelle $\{a^{(i)}\}_{i=1}^{M}$ les points de l'intersection $T\cap\{w_0=0\}$ avec la multiplicité ±1. Alors

$$\begin{aligned} G_k(\xi,\eta) &= \left(\Gamma,\frac{1}{2\pi i}z_1^k\frac{d(z_2-\xi-\eta z_1)}{z_2-\xi-\eta z_1}\right)\\ &= \left(d[T],\frac{1}{2\pi i}z_1^k\frac{d(z_2-\xi-\eta z_1)}{z_2-\xi-\eta z_1}\right)\\ &= \sum \operatorname{Res}_{z^{(i)}}\frac{z_1^k d(z_2-\xi-\eta z_1)}{z_2-\xi-\eta z_1}-\sum \operatorname{Res}_{z^{*(j)}}\frac{z_1^k d(z_2-\xi-\eta z_1)}{z_2-\xi-\eta z_1}\\ &\quad -\sum \pm\operatorname{Res}_{a^{(i)}}\frac{z_1^k d(z_2-\xi-\eta z_1)}{z_2-\xi-\eta z_1}\\ &= \sum x_i^k-\sum y_j^k-\mathrm{rest}_k \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{rest}_k := \sum \pm \mathrm{Res}_{a^{(i)}} \frac{z_1^k d(z_2 - \xi - \eta z_1)}{z_2 - \xi - \eta z_1}$$

et la notation Res signifie le résidu de fonction méromorphe.

Utilisant le nouveau système de coordonnées $\tilde{z}_0 := w_0/w_1$, $\tilde{z}_2 := w_2/w_1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rest}_k &= \sum \pm \mathrm{Res}_{a^{(i)}} \frac{1}{\tilde{z}_0^k} \frac{d(\tilde{z}_2/\tilde{z}_0 - \xi - \eta/\tilde{z}_0)}{\tilde{z}_2/\tilde{z}_0 - \xi - \eta/\tilde{z}_0} \\
&= \sum \pm \mathrm{Res}_{a^{(i)}} \frac{1}{\tilde{z}_0^{k+1}} \frac{\tilde{z}_0 d\tilde{z}_2 - (\tilde{z}_2 - \eta) d\tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 - \xi\tilde{z}_0 - \eta} \\
&= \sum \pm \mathrm{Res}_{a^{(i)}} \frac{1}{\tilde{z}_0^{k+1}} \frac{d\tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 - \eta} \left\{ \frac{\partial \tilde{z}_2}{\partial \tilde{z}_0} \tilde{z}_0 - (\tilde{z}_2 - \eta) \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\xi \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 - \eta} \right)^m \\
&= \sum \pm \mathrm{Res}_{a^{(i)}} \frac{1}{\tilde{z}_0^{k+1}} \frac{d\tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 - \eta} \left\{ \frac{\partial \tilde{z}_2}{\partial \tilde{z}_0} \tilde{z}_0 - (\tilde{z}_2 - \eta) \right\} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{\xi \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 - \eta} \right)^m .
\end{aligned}$$

Il est clair que rest_k est un polynôme de dégré $\leqslant k$ en ξ. Pour tout $x = x_i$ ou $x = y_j$, on appelle y la deuxième coordonnée du point d'intersection de T avec $\{w_2 - \xi w_0 - \eta w_1 = 0\}$ correspondant. On a $y = \xi + \eta x$. D'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = x + \eta \frac{\partial x}{\partial \eta}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = x \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^k}{\partial \eta} = \frac{k}{k+1} \frac{\partial x^{k+1}}{\partial \xi}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\pi i} \left(\Gamma, z_1^{k+1} \frac{d(z_2 - \xi - \eta z_1)}{(z_2 - \xi - \eta z_1)^2} - z_1^k \frac{dz_1}{z_2 - \xi - \eta z_1} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\Gamma, \frac{k}{k+1} z_1^{k+1} \frac{d(z_2 - \xi - \eta z_1)}{(z_2 - \xi - \eta z_1)^2} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{k+1} d \left\{ z_1^{k+1} \frac{1}{z_2 - \xi - \eta z_1} \right\} \right) \\
&= \frac{k}{k+1} \frac{\partial G_{k+1}}{\partial \xi} \quad \text{(car } \Gamma \text{ est fermé).}
\end{aligned}$$

Les deux égalités précédentes impliquent l'existence des C_k vérifiant la relation (I).

Condition suffisante : Supposons que le système (I) admet une solution. Alors la solution dépend holomorphiquement de (ξ,η). On choisit N minimal tel que le système (I) admette une solution. On utilise les relations

$$\frac{\partial G_k(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{k}{k+1}\frac{\partial G_{k+1}(\xi,\eta)}{\partial\xi}$$

pour tout couple de k–ième et $(k+1)$–ième lignes du système (I), on obtiendra

$$\begin{cases}\sum x_i^{k-1}(x_i\dfrac{\partial x_i}{\partial\xi}-\dfrac{\partial x_i}{\partial\eta})-\sum y_j^{k-1}(y_j\dfrac{\partial y_j}{\partial\xi}-\dfrac{\partial y_j}{\partial\eta})=0\\ \qquad\text{pour } k=1,\ldots,N.\end{cases}$$

Comme N est minimal, $x_i\neq y_j$ pour tout (i,j). Le système précédent nous donne

$$x_i\frac{\partial x_i}{\partial\xi}-\frac{\partial x_i}{\partial\eta}=0\quad\text{et}\quad y_j\frac{\partial y_j}{\partial\xi}-\frac{\partial y_j}{\partial\eta}=0.$$

Les fonctions x_i et y_j vérifient les équations de l'onde de choc du théorème de Dolbeault–Henkin [8, théorème II]. D'où i) □

Remarque 3. — Pour $p=1$, la démonstration du théorème de Dolbeault–Henkin est simplifiée par Dolbeault et Poly par la réduction au cas dans $\mathbb{C}^n$ [9]. En effet, $(x_i,\eta x_i+\xi)$ et $(y_j,\eta y_j+\xi)$ décrivent une 1–chaîne holomorphe T' d'un voisinage d'une droite projective $\{w_2-\xi_0w_0-\eta_0w_1=0\}$ de $\mathbb{CP}^2$. Choisissons la chaîne T' de bord lisse. Soit $\Gamma':=\Gamma-d[T']$. On définit (de même manière que $\underline{G}$ pour Γ) les fonctions $\tilde{G}_k(\xi,\eta)$ pour Γ'. On a $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\tilde{G}_k=0$ dans un voisinage d'un point (ξ_0,η_0) de $\mathbb{C}^2$. Ceci implique la condition des moments (c'est-à-dire $(\Gamma',\varphi)=0$ pour toute $(1,0)$–forme holomorphe φ de $\mathbb{C}^2\simeq\mathbb{CP}^2\setminus\{w_2-\xi_0w_0-\eta_0w_1=0\}$ [9], [5]). D'après le théorème de Wermer–Harvey–Lawson généralisé [14], [5], Γ' est le bord d'une 1–chaîne holomorphe T'' de $\mathbb{C}^2\setminus\operatorname{Supp}\Gamma'$. La chaîne $T:=T'+T''$ est une 1–chaîne holomorphe à bord Γ dans $\mathbb{CP}^2$.

Nous considérons le cas $n=p+1$. Il existe $\nu_0\in X^*$ tel que $V\cap\Omega$ est $(n-3)$–générique pour tout voisinage Ω de ν_0. On choisit un polydisque Ω assez petit centré en ν_0. On choisit le système de coordonnées de $\mathbb{CP}^n$, Ω, $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^2\subset\mathbb{C}$, $r,\delta\in\mathbb{Q}^+$ tels que pour tout $(\xi_2,\eta_2,\nu)\in D(\alpha,r)\times D(\beta,\delta)\times\Omega$ on ait $\mathbb{P}^2_\nu\cap\{\tilde{g}_2=0\}\cap\operatorname{Supp}\Gamma=\varnothing$ et $\mathbb{P}^2_\nu\cap Q\cap\operatorname{Supp}\Gamma=\varnothing$, où $D(\alpha,r)$ et $D(\beta,\delta)$ désignent les disques dans $\mathbb{C}$ de centres α,β et de rayons r,δ.

D'après la proposition 2, pour tout $\nu \in V \cap \Omega$, il existe N_ν^+, N_ν^-, $N_\nu = N_\nu^+ + N_\nu^-$, $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{C}$, $r_\nu, \delta_\nu \in \mathbb{Q}^+$ et $M_\nu \in \mathbb{Z}^+$ satisfaisant

1. $D(\alpha_\nu, r_\nu) \subset D(\alpha, r)$ et $D(\beta_\nu, \delta_\nu) \subset D(\beta, \delta)$.

2. Le système

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} x_1^k + \cdots + x_{N_\nu^+}^k - y_1^k - \cdots - y_{N_\nu^-}^k = G_k(\xi_2, \eta_2, \nu) \\ + \dfrac{C_0^{(k-1)}(\eta_2)}{(k-1)!}(\xi_2 - \alpha_\nu)^k + \displaystyle\sum_{m=1}^{k} \dfrac{kC_m^{(k-m)}(\eta_2)}{(k-m)!}(\xi_2 - \alpha_\nu)^{k-m} \\ \qquad\qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, N_\nu + 1 \end{cases}$$

admet une solution $\{x_i(\xi_2, \eta_2)\}_{i=1}^{N_\nu^+}$, $\{y_j(\xi_2, \eta_2)\}_{j=1}^{N_\nu^-}$ et $\{C_k(\eta_2)\}_{k=0}^{N_\nu+1}$ holomorphe dans $D(\alpha_\nu, r_\nu) \times D(\beta_\nu, \delta_\nu)$.

3. Cette solution vérifie $|x_i(\xi_2, \eta_2)| < M_\nu$ et $|y_j(\xi_2, \eta_2)| < M_\nu$ pour tout $(\xi_2, \eta_2) \in D(\alpha_\nu, r_\nu) \times D(\beta_\nu, \delta_\nu)$.

On choisit pour tout ν le nombre N_ν^- minimal et parmi les choix avec N_ν^- minimal, on choisit celui avec N_ν^+ minimal. Il existe N^+, N^-, $N = N^+ + N^-$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{C}$, $r_1, \delta_1 \in \mathbb{Q}^+$, $M \in \mathbb{Z}^+$ tels que $V_1 := \{\nu \in V \cap \Omega : N_\nu^+ = N^+, N_\nu^- = N^-, N_\nu = N, \alpha_\nu = \alpha_1, \beta_\nu = \beta_1, r_\nu = r_1, \delta_\nu = \delta_1, M_\nu = M\}$ soit $(n-3)$–générique, car la réunion dénombrable d'ensembles non $(n-3)$–génériques n'est pas $(n-3)$–générique.

LEMME 5. — *Il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ et une sous–variété irréductible Y de Ω', $(n-3)$–générique et de dimension $m \geqslant n-2$, tels que $V_1 \cap Y$ soit $(n-3)$-générique et pour tout $\nu \in Y$ le système* (II) *admet une solution $\{x_i(\xi_2, \eta_2, \nu)\}_{i=1}^{N^+}$, $\{y_j(\xi_2, \eta_2, \nu)\}_{j=1}^{N^-}$, $\{C_k(\eta_2, \nu)\}_{k=0}^{N+1}$ holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et dépendante holomorphiquement de $\nu \in Y$.*

Preuve. — On pose $S_k(\xi_2, \eta_2, \nu) := x_1^k + \cdots + x_{N^+}^k - y_1^k - \cdots - y_{N^-}^k$. Il existe un polynôme unité $P(t_1, t_2, \ldots, t_{N+1})$ de t_{N+1} à coefficients holomorphes par rapport à $t_1, \ldots, t_N$ vérifiant $P(S_1, S_2, \ldots, S_{N+1}) = 0$. Posons

$$M_0 := \mathbb{C}^{N+1} \text{ et } M_k := \left\{ t \in \mathbb{C}^{N+1} : \frac{\partial^j P(t)}{\partial t_{N+1}^j} = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

Alors il existe $k_0 \geqslant 0$, $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{C}$, $r_2, \delta_2 \in \mathbb{Q}^+$ et $U_0 \subset \mathbb{C}^{N+1}$ une boule ouverte vérifiant

1. $D(\alpha_2, r_2) \subset D(\alpha_1, r_1)$ et $D(\beta_2, \delta_2) \subset D(\beta_1, \delta_1)$.

2. Dans $U_0 \cap \left\{ \dfrac{\partial^{k_0} P}{\partial t_{N+1}^{k_0}} = 0 \right\}$, t_{N+1} s'écrit en une fonction univalente $A(t_1, \dots, t_N)$ à N variables.

3. $V_2 := \{\nu \in V_1 : (S_1, \dots, S_{N+1}) \in U_0 \cap M_{k_0} \setminus M_{k_0+1}$ pour tout $(\xi_2, \eta_2) \in D(\alpha_2, r_2) \times D(\beta_2, \delta_2)\}$ est $(n-3)$–générique.

Ceci est vrai car la réunion dénombrable d'ensembles non $(n-3)$–génériques n'est pas $(n-3)$–générique. De même raison, il existe $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{C}$, $r_3, \delta_3 \in \mathbb{Q}^+$ et $W \subset \mathbb{C}^{N+\frac{N(N+1)}{2}}$ une boule (de centre de coordonnées rationnelles et de rayon rationnel) vérifiant

1. $D(\alpha_3, r_3) \subset D(\alpha_2, r_2)$ et $D(\beta_3, \delta_3) \subset D(\beta_2, \delta_2)$.

2. Si $(\xi_2, \eta_2) \in D(\alpha_3, r_3) \times D(\beta_3, \delta_3)$ et si $\big(C_0(\eta_2), \dots, C_0^{(N-1)}(\eta_2), C_1(\eta_2), \dots, C_1^{(N-1)}(\eta_2), \dots C_{N-1}^{(1)}(\eta_2), C_N(\eta_2)\big)$ prend la valeur dans W on aura $\{t_1 = S_1, \dots, t_N = S_N\} \cap U_0 \neq \varnothing$.

3. $V_3 := \{\nu \in V_2 : \big(C_0(\eta_2), \dots, C_0^{(N-1)}(\eta_2), \dots, C_N(\eta_2)\big) \in W$ pour tout $\eta_2 \in D(\beta_3, \delta_3)\}$ est $(n-3)$–générique.

Alors pour tout $\nu \in V_3$ le système

$$
\text{(III)} \begin{cases}
S_k = G_k(\xi_2, \eta_2, \nu) + \dfrac{C_0^{(k-1)}(\eta_2, \nu)}{(k-1)!} (\xi_2 - \alpha_3)^k \\[2ex]
+ \displaystyle\sum_{m=1}^{k} \dfrac{k C_m^{(k-m)}(\eta_2, \nu)}{(k-m)!} (\xi_2 - \alpha_3)^{k-m} \\[2ex]
\qquad\qquad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N+1 \\[1ex]
S_{N+1} = A(S_1, S_2, \dots, S_N) \\[1ex]
P(S_1, S_2, \dots, S_{N+1}) = 0
\end{cases}
$$

admet une solution $\{x_i(\xi_2, \eta_2, \nu)\}_{i=1}^{N^+}$, $\{y_j(\xi_2, \eta_2, \nu)\}_{j=1}^{N^-}$ et $\{C_k(\eta_2, \nu)\}_{k=0}^{N+1}$ holomorphe par rapport à $(\xi_2, \eta_2) \in D(\alpha_3, r_3) \times D(\beta_3, \delta_3)$.

On remplace les membres à droite des $N+1$ premières équations dans les deux autres équations et on développe les deux membres de ces nouvelles équations en série de Taylor de $(\xi_2 - \alpha_3)$, puis on identifie les coefficients de $(\xi_2 - \alpha_3)^m$, on obtiendra un système d'équations du type

$$
(\mathrm{IV})\begin{cases}
C_k^{(N+1-k)}(\eta_2,\nu)=F_k(\eta_2,C_0,C_0^{(1)},\dots,C_0^{(N-1)},C_1,C_1^{(1)},\dots,C_N,\nu)\\
\qquad\text{pour } k=N+1,N,\dots,1\\
C_0^{(N)}(\eta_2,\nu)=F_0(\eta_2,C_0,C_0^{(1)},\dots,C_0^{(N-1)},C_1,C_1^{(1)},\dots,C_N,\nu)\\
\qquad H_s(\eta_2,C_0,\dots,C_0^{(N-1)},\dots,C_N,\nu)=0\\
\qquad\text{pour } s=1,2,\dots,
\end{cases}
$$

où F_k et H_s sont des fonctions holomorphes.

D'après le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, les $N+2$ premières équations de ce système admettent une solution unique pour chaque condition initiale donnée en $\eta_2=\beta_3$ par un paramètre vectoriel $b\in W$. De plus, cette solution dépend holomorphiquement de b et de ν.

Remplaçant la solution dépendant de b dans la partie qui reste du système, on obtiendra un système du type

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}
\tilde{H}_s(\eta_2,\nu,b)=0\\
\text{pour } s=1,2,\dots,
\end{cases}
$$

où $\tilde{H}_s$ sont des fonctions holomorphes.

Les solutions de ce système décrivent un sous–ensemble analytique Y' de $D(\beta_3,\delta_3)\times\Omega\times W$. D'après la proposition 2 et d'après l'hypothèse du théorème 1, la projection dans Ω de Y' contient l'ensemble $(n-3)$–générique V_3 et l'image réciproque de chaque point $\nu\in V_3$ est de la forme $D(\beta_3,\delta_3)\times\{\nu\}\times\{b\}$ pour un $b\in W$. Par conséquent, Y' contient un sous–ensemble analytique Y'' de dimension $\geqslant n-1$, qui est la réunion de sous–ensembles analytiques du type $D(\beta_3,\delta_3)\times\{\nu\}\times\{b\}$. Dans l'espace projectif, deux solutions du problème du bord diffèrent d'une chaîne algébrique [13], [8]. Comme nous avons choisi N^- et N^+ minimaux, la solution du système (III) est unique. Autrement dit, la projection de Y'' dans $D(\beta_3,\delta_3)\times\Omega$ est injective. On pose $\tilde{Y}$ la projection de Y'' dans Ω et on choisit Y'' de sorte que $\tilde{Y}$ soit $(n-3)$–générique. Alors $\tilde{Y}$ est un espace analytique $(n-3)$–générique de dimension $\geqslant n-2$. Il existe $\Omega'\subset\Omega$ et $Y\subset\Omega'\cap\tilde{Y}$ une sous–variété irréductible $(n-3)$–générique, de dimension $m\geqslant n-2$ de Ω'. Cet ensemble Y vérifie notre lemme. □

D'après le lemme 4, on choisit $Y_0\subset Y$ une sous–variété irréductible $(n-3)$–générique, de dimension $n-2$ d'un ouvert $\Omega''\subset\Omega$.

Soit $D := \bigcup_{\nu \in Y_0} \mathbb{P}^2_\nu$. On pose

$$B_{Y_0} := B \cap \{(z,\nu) \in B : \nu \in Y_0\}$$

et l'application $\Pi : B_{Y_0} \longrightarrow D$ avec $\Pi(z,\nu) := z$, l'application $\Phi : B_{Y_0} \longrightarrow Y_0$ avec $\Phi(z,\nu) := \nu$. Soient $S_1 := \{z \in D : \dim \Pi^{-1}(z) \geqslant 1\}$ et $S_2 := \Phi(\Pi^{-1}(S_1)) \subset Y_0$. D'après le lemme 4, $S_2 \neq Y_0$. Remplaçant Y_0 par un ouvert convenable, on peut supposer que $S_2 = \varnothing$. En particulier, D est un ouvert.

On pose $T_0 := \sum_{i=1}^{N^+} T_i^+ - \sum_{j=1}^{N^-} T_j^-$ où

$$\begin{aligned} T_i^+ := \{(z,\nu) \in B_{Y_0} :\ & z_1 = x_i(\xi_2,\eta_2,\nu), z_2 = \eta_2 z_1 + \xi_2 \\ & \text{avec } (\xi_2,\eta_2) \in D(\alpha_3,r_3) \times D(\beta_3,\delta_3)\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_j^- := \{(z,\nu) \in B_{Y_0} :\ & z_1 = y_j(\xi_2,\eta_2,\nu), z_2 = \eta_2 z_1 + \xi_2 \\ & \text{avec } (\xi_2,\eta_2) \in D(\alpha_3,r_3) \times D(\beta_3,\delta_3)\} \end{aligned}$$

sont des espaces analytiques de dimension pure $n-1$. Il existe $Y_1 \subset Y_0$ un ouvert $(n-3)$–générique et $\alpha_4, \beta_4 \in \mathbb{C}$, $r_4, \delta_4 \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant

1. $D(\alpha_4,r_4) \subset D(\alpha_3,r_3)$ et $D(\beta_4,\delta_4) \subset D(\beta_3,\delta_3)$.

2. Il existe $T_1 \subset T_0 \cap U$ une $(n-1)$–chaîne holomorphe de U représentant la solution du système (II) telle que $\Pi(T_1)$ soit une $(n-1)$–chaîne holomorphe de $\Pi(U)$, où $U := B_{Y_0} \cap \{|z_1| < M, z_2 = \eta_2 z_1 + \xi_2, (\xi_2,\eta_2,\nu) \in D(\alpha_4,r_4) \times D(\beta_4,\delta_4) \times Y_1\}$.

3. Les bords de T_1 et de $T^{(0)} := \Pi(T_1)$ sont réels analytiques.

On pose $B_1 := B_{Y_0} \cap \{\nu \in Y_1\}$ et $D_1 := \Pi(B_1)$. On choisit Y_1 de sorte que D_1^* soit connexe. Soient $\Gamma_0 := \Pi^{-1}(\Gamma) \cap B_1 - d[T_1]$, $\Gamma_1 := \Gamma \cap D_1 - d[T^{(0)}]$ et $L := \{(z,\nu) \in B_1 : w_2 = \beta_4 w_1 + \alpha_4 w_0\}$, $\Sigma \subset B$ l'ensemble de ramification de Π, $\Sigma_1 \subset \Sigma$ l'ensemble des points singuliers de Σ et des points de ramification de $\Pi|_\Sigma$.

On pose $F_1 := F \cap \{\nu \in Y_1\}$, $F_2 := F_1 \cap \{(z,\nu) \in \Gamma_0\}$, $F_3 := F_1 \cap \{z \in \{w_2 - \beta_4 w_1 - \alpha_4 w_0 = 0\}\}$ et les applications $\Psi : F_1 \longrightarrow Y_1$ avec $\Psi(z,\xi_2,\eta_2,\nu) := \nu$ et $\Lambda : F_1 \longrightarrow D_1$ avec $\Lambda(z,.) := z$. L'ensemble $S_3 := \{\nu \in Y_1$ tel que $\dim \Psi^{-1}(\nu) \cap \Sigma = 2$ ou $\dim \Psi^{-1}(\nu) \cap \Sigma_1 = 1\}$ est un sous–ensemble analytique propre de Y_1. Remplaçant Y_1 par son ouvert convenable, on peut supposer que cet ensemble S_3 est vide et en plus $\Pi(\Sigma)$ (resp. $\Pi(\Sigma_1)$) est inclus et dans un sous–ensemble analytique Σ'

de codimension 1 (resp. Σ_1' de codimension 2) de D_1. On peut choisir Y_1 de sorte que le degré de la courbe algébrique $\Psi^{-1}(\nu) \cap \Sigma$ soit indépendant de $\nu \in Y_1$.

L'ensemble $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3)$ est une réunion finie ou dénombrable d'ouverts. On note $\tilde{\Omega}_i$ ces ouverts dont $\overline{\tilde{\Omega}}_0$ contient $F \cap \{\xi_2 = \alpha_4, \eta_2 = \beta_4\}$.

LEMME 6. — i) $\Gamma_0 \setminus \Sigma$ *est localement de classe* $\mathcal{A}_{2n-3}$ *(ou de classe* $\mathcal{C}^r$ *à singularité négligeable si* Γ *l'est) dans* $B_1 \setminus \Sigma$.

ii) *Si* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ *à singularité négligeable, pour* $\mathcal{H}^{2n-4}$*-presque tout* $\nu \in Y_1$, $\mathbb{P}^2_\nu$ *intersecte* $\operatorname{Supp}\Gamma_1 \setminus \Sigma'$ *transversalement en* $\mathcal{H}^1$*-presque tout point. De plus, cette intersection est de classe* $\mathcal{C}^1$ *à singularité négligeable et de mesure* $\mathcal{H}^1$ *localement finie dans* $D_1 \setminus \Sigma'$.

Preuve. — Pour tout $x \in B_1 \setminus \Sigma$, l'application Π est un biholomorphisme d'un voisinage de x dans son image. D'où i). Par conséquent $\mathcal{H}^{2n-3}(\Pi^{-1}(\mathrm{Sing}\Gamma) \setminus \Sigma) = 0$. Le théorème de Sard appliqué pour la restriction de l'application Φ sur $\Gamma_0 \setminus \Sigma$ nous donne ii).

PROPOSITION 3. — *Sous l'hypothèse du théorème 1, il existe une* $(n-1)$*-chaîne holomorphe* $T^{(1)}$ *de* $D_1 \setminus (\operatorname{Supp}\Gamma_1 \cup K)$ *de masse localement finie et à bord localement rectifiable dans* $D_1 \setminus K$ *telle que* $(d\Pi^*([T^{(1)}]) - \Gamma_0) \llcorner \Phi^*(\varphi) = 0$ *dans* $B_1 \setminus \Pi^{-1}(K)$ *pour tout* $(n-2, n-2)$*-forme* φ *de* Y_1, *où* K *est un certain fermé de* Σ', *contenant* $\operatorname{Supp}\Gamma_1 \cap \Sigma'$ *et* K *ne rencontre pas* $\{w_2 - \beta_4 w_1 - \alpha_4 w_0 = 0\}$.

Preuve. — On appelle $G_{1,k}(\xi_2, \eta_2, \nu)$, les fonctions définies pour Γ_1 comme les fonctions G_k définies pour Γ. Ces fonctions sont holomorphes. D'après la proposition 2, le lemme précédent et la construction, $\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} G_{1,k} = 0$ pour tout $(\xi_2, \eta_2, \nu) \in D(\alpha_4, r_4) \times D(\beta_4, \delta_4) \times Y_1$. On définit les fonctions $\tilde{G}_{1,k}(\xi_2, \eta_2, \nu)$ de même manière mais pour le système des coordonnées $\left\{ \tilde{z}_i := \dfrac{w_i}{w_2 - \alpha_4 w_0 - \beta_4 w_1} \right\}$. Alors $\tilde{G}_{1,k}(\xi_2, \eta_2, \nu) = 0$ pour tout $(\alpha_2, \eta_2, \nu) \in D(\alpha_4, r_4) \times D(\beta_4, \delta_4) \times Y_1$ satisfaisant $\mathbb{P}^2_\nu \cap \operatorname{Supp}\Gamma \cap \{w_2 - \beta_4 w_1 - \alpha_4 w_0 = 0\} = \varnothing$. Ceci est la condition des moments [5]. Les fonctions $\tilde{G}_{1,k}$ ne dépendent que de z et de la droite projective $\{\tilde{g}_2 = 0\} \cap \mathbb{P}^2_\nu$ [5].

On pose $\tilde{R}_1(z, \xi_2, \eta_2, \nu) := \tilde{z}_1^{\tilde{G}_{1,0}} \exp\left(- \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \tilde{G}_{1,k} \tilde{z}_1^{-k} \right)$ une série définie sur $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3)$. Pour tout point (ξ, η, ν) d'un compact H de $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3)$, cette série définit une fonction holomorphe pour $|\tilde{z}_1| >> 0$. Dans cette démonstration nous limitons au cas où le dégré s de $\Psi^{-1}(\nu) \cap \Sigma$

est égal à 1. Dans le cas général, on définit les fonctions $\tilde{G}_{1,k}$ de manière analogue en remplaçant la droite $\{\tilde{g}_2 = 0\} \cap \mathbb{P}^2_\nu$ par une courbe algébrique de dégré s de $\mathbb{P}^2_\nu$.

D'après le lemme précédent, pour $\mathcal{H}^{2n-4}$–presque tout $\nu \in Y_1$, $\mathbb{P}^2_\nu$ intersecte $\operatorname{Supp}\Gamma_1 \setminus \Sigma'$ transversalement en $\mathcal{H}^1$–presque tout point en une combinaison $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable dans $D_1 \setminus \Sigma'$. Pour tout $\nu \in Y_1$, on considère $H_\nu := \mathbb{P}^2_\nu \cap \operatorname{Supp}\Gamma_1 \cap \Sigma'$ et $K_\nu := \widehat{H}_\nu$ l'enveloppe polynomiale de H_ν dans $\mathbb{C}^2_\nu \simeq \mathbb{P}^2_\nu \setminus \{w_2 - \beta_4 w_1 - \alpha_4 w_0 = 0\}$. Alors $K_\nu = \Sigma'_\nu \setminus \Sigma'_{\nu,0}$, où $\Sigma'_\nu := \mathbb{C}^2_\nu \cap \Sigma'$ et $\Sigma'_{\nu,0}$ est la composante connexe non bornée de $\Sigma' \setminus \Gamma_1$ dans $\mathbb{C}^2_\nu$. Comme le dégré de $\mathbb{P}^2_\nu \cap \Sigma'$ est égale à 1, l'ouvert $\mathbb{P}^2_\nu \setminus K_\nu$ est 1-concave. On pose $K := \bigcup_{\nu \in Y_1} K_\nu$ et $F_K := F_1 \cap \{\mathbb{P}^2_\nu \cap \{\tilde{g}_2 = 0\} \cap K \neq \varnothing\}$. Il est clair que K est un fermé de D_1 et F_K est un fermé de F_1. D'après le lemme 1, pour tout voisinage U_ν de K_ν d'un $\nu \in Y_1$ générique, il existe une mesure μ satisfaisant

$$\tilde{G}_{1,k} = \left(\Gamma \cap \mathbb{P}^2_\nu \setminus U_\nu, \frac{1}{2\pi i} \frac{\tilde{z}_1^k dg_{1,2}}{g_{1,2}}\right) + \left(\mu, \frac{1}{2\pi i} \frac{\tilde{z}_1^k}{g_{1,2}}\right)$$

où $g_{1,2} := \dfrac{\tilde{g}_2}{w_2 - \alpha_4 w_0 - \beta_4 w_1}$.

L'égalité $\tilde{G}_{1,k} = 0$ dans $D(\alpha_4, r_4) \times D(\beta_4, \delta_4) \times Y_1$ implique que la mesure $\mu' := \Gamma_1 \cap \mathbb{P}^2_\nu \setminus U_\nu \llcorner dg_{1,2} + \mu$ est une mesure orthogonale de $\mathbb{C}^2_\nu$ (c'est-à-dire elle annule des polynômes). Comme ceci est valable pour tout $U_\nu \supset K_\nu$, d'après [6, proposition 1,2] il existe une 1–chaîne holomorphe T_ν de $\mathbb{C}^2_\nu \setminus K_\nu$, bornée dans $\mathbb{C}^2_\nu$, de masse localement finie dans $\mathbb{C}^2_\nu \setminus K_\nu$ et de bord $\Gamma_1 \cap \mathbb{P}^2_\nu \setminus K_\nu$ au sens des courants.

Comme $\tilde{G}_{1,k} = 0$ sur $\tilde{\Omega}_0$, la série $\tilde{R}_1$ définit une fonction identiquement égale à 1 sur $\tilde{\Omega}_0$. D'après le lemme 2, une récurrence sur les composantes connexes de $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3 \cup F_K)$ nous montre que $\tilde{R}_1$ définit une fonction méromorphe dans $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3 \cup F_K)$. Soit $T^{(1*)} := i\pi d'd'' \log|\tilde{R}_1|$ une n–chaîne holomorphe de $F_1 \setminus (F_2 \cup F_3 \cup F_K)$. Alors si $z \in T_\nu$, on a $(z, \xi_2, \eta_2, \nu) \in T^{(1*)}$ avec la même multiplicité pour tout (z, ξ_2, η_2) vérifiant $z \in \{\tilde{g}_2 = 0\}$ et $\operatorname{Supp}\Gamma_1 \cap \mathbb{P}^2_\nu \cap \{\tilde{g}_2 = 0\} = \varnothing$ [5, lemme 4.3]. En plus, la fonction $\tilde{R}_1$ ne dépend que de z et de la droite $\{\tilde{g}_2 = 0\} \cap \mathbb{P}^2_\nu$ [5]. Par conséquent, on peut définir la $(n-1)$–chaîne holomorphe $T^{(1)}$ de $D_1 \setminus (\operatorname{Supp}\Gamma_1 \cup K)$ telle que $\Lambda^{-1}(T^{(1)}) = T^{(1*)} \setminus \Lambda^{-1}(K)$. D'après la proposition 1ii), $T^{(1)}$ est de masse localement finie et à bord localement rectifiable dans $D_1 \setminus K$. L'égalité dans la proposition est un corollaire du lemme 2i). □

LEMME 7. — *Il existe $Y_2 \subset Y_1$ un ouvert tel que $d\Pi^*([T^{(1)}]) = \Gamma_0$ dans $\Phi^{-1}(Y_2) \setminus \Sigma$.*

Preuve. — Soit $l : Y_1 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-3}$ une CR–application $\mathcal{C}^\infty$. L'égalité dans la proposition précédente prouve que $\langle (d\Pi^*([T^{(1)}]) - \Gamma_0) \setminus \Sigma, l \circ \Phi, x\rangle$ est un courant localement rectifiable de bidimension $(1,1)$ dans $B_1 \setminus \Sigma$ pour tout $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-3}$ générique. Ce courant est à support $(\mathcal{H}^2, 2)$–rectifiable et fermé. D'après le théorème de King–Harvey–Shiffman [16], c'est une 1–chaîne holomorphe de $B_1 \setminus \Sigma$. Alors il existe un sous–ensemble discret $Y_x \subset l^{-1}(x)$ tel que cette chaîne est une chaîne holomorphe de $\Phi^{-1}(Y_x) \setminus \Sigma$. Alors d'après le théorème de Casorati–Weierstrass–Sokhotskiĭ généralisé [3, p.243], pour chaque $y \in Y_x$ tel que la 1-chaîne holomorphe $\Gamma_0 \cap \Phi^{-1}(y) \setminus \Sigma$ ne soit pas nulle, $\overline{\mathrm{Supp}\Gamma_0 \cap \Phi^{-1}(y) \setminus \Sigma}$ rencontre toute droite projective de $\Phi^{-1}(y) \simeq \mathbb{P}^2$. On appelle $Z \subset Y_1$ l'ensemble de tous les y tels que soit $\overline{\mathrm{Supp}\Gamma_0 \cap \Phi^{-1}(y) \setminus \Sigma}$ soit $\mathrm{Supp}\Gamma_0 \cap \Sigma \cap \Phi^{-1}(y)$ rencontre toute droite projective de $\Phi^{-1}(y)$. Alors Z est un fermé de Y_1. Comme $\mathrm{Supp}\,\Gamma_0 \setminus \Sigma$ est localement $(\mathcal{H}^{2n-3}, 2n-3)$-rectifiable, d'après [10, 3.2.31], Z est $(\mathcal{H}^{2n-5}, 2n-5)$–rectifiable. Donc $Z \neq Y_1$. On choisit Y_2 un ouvert de $Y_1 \setminus Z$. On a $(d\Pi^*([T^{(1)}]) - \Gamma_0) \cap \Phi^{-1}(Y_2) \setminus \Sigma = 0$. □

On pose $D_2 := \bigcup_{\nu \in Y_2} \mathbb{P}^2_\nu$.

LEMME 8. — *Sous l'hypothèse du théorème 1, $T^{(1)}$ se prolonge holomorphiquement en une $(n-1)$–chaîne holomorphe $T^{(2)}$ de $D_2 \setminus \mathrm{Supp}\Gamma_1$, de masse localement finie et à bord rectifiable dans D_2.*

Preuve. — Soient $\Gamma^* := \mathrm{Supp}\Gamma \cap \Sigma'$ et Θ_j les composantes connexes de $\Sigma' \setminus \Gamma^*$ avec $\Theta_0 \supset L \cap \Sigma'$. On numérote les Θ_j de sorte que pour tout $j \geqslant 1$, il existe $\Theta_{s(j)}$ adjacente à Θ_j avec $0 \leqslant s(j) < j$. Dans un certain ouvert de $b\Omega_1$, la multiplicité de Γ est une constante n_1. Si on remplace Γ_1 par $\Gamma_1' := \Gamma_1 - n_1 d[\Omega_1]$, les lemmes précédents seront encore valables. D'après le théorème d'unicité, la chaîne $T^{(1)}$ construite pour ce nouveau courant coïncide à celle de Γ_1. Dans $D_2 \setminus \Sigma'$ l'adhérence de chaque composante de $T^{(1)}$ ne contient pas $\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1} \setminus \Gamma_1'$ car elle est analytique au voisinage de $\Sigma' \setminus K \neq \varnothing$. D'après le théorème de Casorati-Weierstrass-Sokhotskiĭ généralisé [3, p.243], elle se prolonge holomorphiquement à travers $\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1} \setminus \Gamma_1'$. Par récurrence, elle se prolonge holomorphiquement à $\Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_i$ pour tout i. D'après la proposition 2, cette chaîne est de masse localement finie et à bord rectifiable dans D_2. □

Soit $T^{(3)} := T^{(0)} + T^{(2)}$ une $(n-1)$-chaîne holomorphe de $D_2 \setminus \mathrm{Supp}\Gamma$ à bord rectifiable au sens des courants.

Soit $\Gamma_\Sigma := \Gamma \cap D - d[T^{(3)}]$ un courant rectifiable fermé maximalement complexe de D_2 à support dans Σ'. Comme $\dim\Sigma' = n-1$ il existe donc une $(n-1)$-chaîne d'ouverts $T^{(4)}$ de Σ' à bord Γ_Σ. Soit $T^{(5)} := T^{(3)} + T^{(4)}$ une $(n-1)$-chaîne holomorphe à bord $\Gamma \cap D_2$ au sens des courants.

Soit $D_3 \subset D_2$ un voisinage d'un certain $\mathbb{P}^2_\nu$ tel que le bord de $T^{(6)} := T^{(5)} \cap D_3$ soit à singularité négligeable. Posons $\Gamma'' := \Gamma - d[T^{(6)}]$. Il est de classe $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable de $X \setminus \mathbb{P}^2_\nu$, nul au voisinage de $\mathbb{P}^2_\nu$. D'après le théorème de Harvey-Lawson généralisé, il existe une $(n-1)$-chaîne holomorphe $T^{(7)}$ de masse localement finie de $X \setminus \operatorname{Supp}\Gamma''$ vérifiant $d[T^{(7)}] = \Gamma''$ et $\operatorname{Supp} T^{(7)} \cap \mathbb{P}^2_\nu = \varnothing$. La chaîne $T := T^{(6)} + T^{(7)}$ vérifie $d[T] = d[T^{(4)}] + d[T^{(5)}] = \Gamma$. D'après le théorème de King-Harvey-Shiffman [16], T est une $(n-1)$-chaîne holomorphe de $X \setminus \operatorname{Supp}\Gamma$.

Pour le cas $n > p+1$, il nous suffit de faire le même travail pour plusieurs coordonnées. □

3. Remarques et applications.

L'hypothèse $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ du thérème 1 est utilisée essentiellement à la fin de la démonstration de la proposition 3. Nous donnons ici les autres variantes de ce théorème pour les classes $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{A}_{2p-1}$ et des applications de ces théorèmes.

THÉORÈME 2. — *Soient X un ouvert $(n-p+1)$-concave de $\mathbb{CP}^n$ et Γ une combinaison linéaire, localement finie, à coefficients entiers de sous-variétés réelles Γ_i, orientées, de classe $\mathcal{C}^1$, de dimension $2p-1$ et maximalement complexe dans X. Soit V un sous-ensemble $(p-2)$-générique de X^*. Supposons que pour tout $\nu \in V$*

i) *$\mathbb{P}^{n-p+1}_\nu$ intersecte Γ_i transversalement en tout point.*

ii) *Il existe une 1-chaîne holomorphe T_ν de masse finie de $\mathbb{P}^{n-p+1}_\nu \setminus \Gamma$ telle que $d[T_\nu] = \Gamma \cap \mathbb{P}^{n-p+1}_\nu$ au sens des courants dans $\mathbb{P}^{n-p+1}_\nu$.*

Alors il existe une p-chaîne holomorphe T de $X \setminus \Gamma$, de masse localement finie dans X, vérifiant $d[T] = \Gamma$ au sens des courants dans X.

THÉORÈME 3. — *Soient X un ouvert $(n-p+1)$-concave de $\mathbb{CP}^n$ et Γ un courant rectifiable de dimension $2p-1$, de classe $\mathcal{A}_{2p-1}$, fermé et maximalement complexe dans X. Soit V un sous-ensemble non $(p-2)$-presque mince d'une sous-variété $(p-2)$-générique Y de dimension $p-1$ d'un ouvert de X^*. Supposons que*

i) *Pour* $\mathcal{H}^{2p-2}$*–presque tout* $\nu \in Y$ *et pour tout* $\nu \in V$*, le courant d'intersection* $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \cap \Gamma$ *existe et de classe* $\mathcal{A}_1$*.*

ii) *Pour tout* $\nu \in V$*, il existe une* 1*–chaîne holomorphe* T_ν *de masse finie de* $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \setminus \Gamma$ *telle que* $d[T_\nu] = \Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ *au sens des courants dans* $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$*.*

Alors il existe une p*–chaîne holomorphe* T *de* $X \setminus \Gamma$*, de masse localement finie dans* X*, vérifiant* $d[T] = \Gamma$ *au sens des courants dans* X*.*

On note $C(1-\epsilon, 1)$ et D la couronne des rayons $1-\epsilon$, 1 et le disque unité de $\mathbb{C}$.

Corollaire 1 (Théorème de Hartogs–Levi généralisé). — *Soit* f *une fonction méromorphe de* $C(1-\epsilon,1) \times D$*. Soit* $\{l_\nu\}_{\nu \in V}$ *une famille non dénombrable de droites complexes dans* $\mathbb{C}^2$ *telle que pour tout* $\nu \in V$*,* $l_\nu \cap (C(1-\epsilon,1) \times D) \neq \varnothing$*,* $l_\nu \cap (D \times bD) = \varnothing$ *et pour tous* $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in V$ *deux à deux différents,* $l_{\nu_1} \cap l_{\nu_2} \cap l_{\nu_3} \cap (D \times D) = \varnothing$*. Supposons que* f *se prolonge méromorphiquement dans* $l_\nu \cap (D \times D)$ *pour tout* $\nu \in V$*. Alors* f *se prolonge méromorphiquement dans* $D \times D$*.*

Remarque. — Le théorème de Hartogs–Levi clasique est formulé pour une famille de droites complexes paralèlles.

Preuve. — D'après le théorème de Hartogs–Levi classique, il suffit de prouver un prolongement dans un voisinage de $D \times D \cap \mathbb{C}_\nu$ pour un $\nu \in V$. Alors sans perdre en généralité, on peut supposer que notre fonction est définie et holomorphe au voisinage de $C(1-\epsilon,1) \times D$. On considère le plongement de Serge $\Phi:\ \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^5$ avec $\Phi((w_0 : w_1 : w_2) \times (v_0 : v_1)) := (w_0v_0 : w_0v_1 : w_1v_0 : w_1v_1 : w_2v_0 : w_2v_1)$. Soit X un ouvert 4–concave de $\mathbb{CP}^5$ défini par

$$X := \{(t_0 : t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5) \in \mathbb{CP}^5 :\ |t_4| < |t_2| \text{ ou } |t_4| < |t_0|\}.$$

Alors $X = \bigcup_{|c|>|b|+1} \{ct_4 + bt_2 + t_0 = 0\}$. Soient Γ' le graphe de f dans $bD \times D \times \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^1$ et $\Gamma := \Phi(\Gamma')$. Il est clair que Γ est fermé, maximalement complexe dans X. Soit $V' \subset V$ l'ensemble de droites non contenant $(1:0:0)$. Cet ensemble vérifie encore l'hypothèse du corollaire. Par hypothèse chaque droite l_ν avec $\nu \in V'$ est définie par l'équation $\{c_\nu w_2 + b_\nu w_1 + w_0 = 0\}$ avec $|c_\nu| > |b_\nu| + 1$. Comme la fonction f se prolonge méromorphiquement dans $l_\nu \cap D \times D$, l'intersection de Γ avec $\tilde{l}_\nu := \{c_\nu t_4 + b_\nu t_2 + t_0 = 0\}$ est le bord d'une surface de Riemann S_ν. L'ensemble de ces hyperplans est ni 0–presque mince et ni 0–générique mais, par hypothèse, pour tous $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in V'$ deux à deux différents $\overline{S}_{\nu_1} \cap \overline{S}_{\nu_2} \cap \overline{S}_{\nu_3} = \varnothing$. Si dans ce cas, on fait la même démonstration que celle du théorème 1, l'ensemble D_1 (défini dans le paragraphe 2) ne sera pas un ouvert mais les S_ν seront inclus dans l'intérieur de D_1. Alors le théorème 1 est encore valide dans ce cas (voir le paragraphe 1). D'où Γ est le bord d'une 2–chaîne holomorphe T, qui égale à S_ν pour un sous–ensemble non 0–presque mince de V'. En plus Γ est irréductible, donc T est irréductible et contient le graphe de f au-dessus de $C(1-\epsilon, 1) \times D$. Par conséquent, T est le graphe d'une fonction méromorphe au-dessus de $D \times D$. Cette fonction est le prolongement de f. □

Soit M une hypersurface réelle $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Une fonction f définie sur M est appelée *CR–méromorphe au sens de Harvey–Lawson* [15] si f est définie à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur un ouvert dense de M et l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ du graphe de f dans $U \times \mathbb{CP}^1$ est une sous–variété réelle de dimension $2n-1$, de classe $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable et maximalement complexe.

Plus généralement, si M est rectifiable, f est dit *CR–méromorphe* si $\overline{\Gamma}_f$ définit dans $U \times \mathbb{CP}^1$ un courant d'intégration fermé de classe $\mathcal{A}_{2n-1}$ et maximalement complexe.

COROLLAIRE 2. — *Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, à bord lipschitzien, irréductible et f une fonction CR–méromorphe sur bD. Alors f se prolonge en une fonction méromorphe dans D.*

Ce théorème pour f CR–méromorphe au sens de Harvey–Lawson est démontré par Harvey–Lawson pour $n \geqslant 3$ et King l'a annoncé pour $n = 2$ [15]. Pour $n \geqslant 2$ et pour $f : bD \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, ce résultat est prouvé par Dolbeault–Henkin et Porten [8]. Pour f une fonction CR–méromorphe au sens rectifiable, ce théorème est prouvé par Sarkis [22]. Pour le prouver, Dolbeault–Henkin ont utilisé leur théorème sur le problème du bord dans l'espace projectif. Le théorème 3 permet d'adapter cette démonstration pour le cas où f est CR–méromorphe au sens rectifiable [8]. L'idée est la suivante. Pour $n = 2$, d'après la formule de Stokes, on peut montrer que $bD \cap \{f = az_1 + bz_2 + c\} - bD \cap \{f = \infty\}$ vérifie la condition des moments pour un $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ générique. Il est donc le bord d'une surface de Riemann (non nécessairement irréductible). Comme ceci est valable pour un (a, b, c) générique, $bD \cap \{f = az_1 + bz_2 + c\}$ est le bord d'une surface de Riemann. Par conséquent, on peut appliquer nos théorèmes pour le graphe de la fonction f. La solution du problème du bord sera le graphe du F au-dessus de D.

COROLLAIRE 3 (Théorème de Gruman-Molzon-Shiffman-Sibony généralisé). — *Soit T un sous-ensemble analytique de dimension pure $p \geqslant 2$ de $\mathbb{C}^n$. Considérons $\mathbb{C}^n$ comme un ouvert affine de $\mathbb{CP}^n$, notons Q l'hyperplan à l'infini. Soit $\{\mathbb{P}_\nu^{n-1}\}_{\nu \in V}$ une famille d'hyperplans projectifs. Supposons que pour tout sous-ensemble dénombrable $S \subset Q$, il existe $\nu \in V$ satisfaisant $\mathbb{P}_\nu^{n-1} \cap S = \varnothing$. Alors T est algébrique si et seulement si $T \cap \mathbb{P}_\nu^{n-1}$ est algébrique pour tout $\nu \in V$.*

Remarque 5. — Le théorème de Gruman-Molzon-Shiffman-Sibony est formulé pour $V \subset \mathbb{CP}^{n*}$ de capacité logarithmique positive ou pour une famille d'hyperplans qui passent par l'origine et avec $V \subset \mathbb{P}^{n-1*} \subset \mathbb{CP}^{n*}$ un sous-ensemble de capacité logarithmique positive de $\mathbb{P}^{n-1*}$. Cette condition implique l'hypothèse du corollaire 3. En revanche, leur théorème est valable aussi pour $p = 1$ [21].

Preuve. — On peut supposer que Y est irréductible. On peut également supposer que Y n'est inclus dans aucun hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Dans le cas contraire, il suffit de remplacer $\mathbb{C}^n$ par l'hyperplan $\mathbb{C}^{n-1}$ contenant Y. Par conséquent, $\dim T \cap \mathbb{P}_\nu^{n-1} < p$ pour tout $\nu \in V$.

D'après le théorème de Gruman-Molzon-Shiffman-Sibony, il suffit de prouver que $T \cap \mathbb{P}_\nu^{n-1}$ est algébrique pour ν générique de $\mathbb{CP}^{n*}$. Par conséquent, il suffit de considérer le cas $p = 2$.

Soit $R > 0$ assez grand tel que $T \cap \{|z| = R\}$ soit une variété réelle analytique et tel que pour tout ensemble dénombrable $S \subset \mathbb{CP}^n \setminus \{|z| < R\}$ on ait $V \not\subset \{\nu \in \mathbb{CP}^{n*} : \mathbb{P}_\nu^{n-1} \cap S \neq \varnothing\}$. On applique le théorème 1 pour $\Gamma := -T \cap \{|z| = R\}$ et pour V. Bien que l'intersection $T \cap \mathbb{P}_\nu^{n-1}$ ne soit pas toujours transversale, mais la multiplicité de cette intersection est positive. Par conséquent, notre résultat peut encore s'appliquer (pour R assez grand). Il existe donc une 2-chaîne holomorphe T' de $\mathbb{CP}^n \setminus \mathrm{Supp}\Gamma$ à bord Γ et à support dans $\mathbb{CP}^n \setminus \{|z| < R\}$. La chaîne $T \cap \{|z| \leqslant R\} + T'$ est donc algébrique et non nulle. D'où T est algébrique. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ALEXANDER, Polynomial approximation and hulls in sets of finite linear measure in $\mathbb{C}^n$, Amer. J. Math., 93 (1971), 65–74.

[2] E. BISHOP, Subalgebras of functions on a Riemann surface, Pacific J. Math., 8 (1958), 29–50.

[3] E. M. CHIRKA, Complex Analytic Sets, Kluwer Academic Publishers, 1986.

[4] T. C. DINH, Chaînes holomorphes à bord rectifiable, C. R. Acad. Sci. Paris, 322, Série I (1996), 1135–1140.

[5] T. C. DINH, Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable, Acta Mathematica, 180-1 (1998), 31-67.

[6] T. C DINH, Orthogonal measures on the boundary of a Riemann surface and polynomial hull of compacts of finite length, J. Funct. Analysis, 157 (1998), 624-649.

[7] P. DOLBEAULT et G. HENKIN, Surfaces de Riemann de bord donné dans $\mathbb{CP}^n$, Aspects of Mathematics, 26, Vieweg (1994), 163–187.

[8] P. DOLBEAULT et G. HENKIN, Chaînes holomorphes de bord donné dans $\mathbb{CP}^n$, Bull. Soc. Math. de France, 125 (1997), 383-445.

[9] P. DOLBEAULT et J. B. POLY, Variations sur le problème des bords dans $\mathbb{CP}^n$, Prépublication, (1995).

[10] F. FEDERER, Geometric Measure Theory, Grundlenhren der Math. Wiss, 285, Springer, Berlin–Heidelberg–NewYork, 1988.

[11] L. GRUMAN, The area of analytic varieties in $\mathbb{C}^n$, Math. Scand., 41 (1977), 365-379.

[12] L. GRUMAN, La géométrie globale des ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$, Séminaire Lelong-Skoda 1978/79.

[13] R. HARVEY, Holomorphic chains and their boundaries, Proc. Symp. Pure Math., 30, vol. 1 (1977), 309–382.

[14] R. HARVEY and B. LAWSON, On boundaries of complex analytic varieties I, Ann. of Math., 102 (1975), 233–290.

[15] R. HARVEY and B. LAWSON, On boundaries of complex analytic varieties II, Ann. of Math., 106 (1977), 213–238.

[16] R. HARVEY and B. SHIFFMAN A characterization of holomorphic chains, Ann. of Math. (2), 99 (1974), 553–587.

[17] G. HENKIN, The Abel–Radon transform and several complex variables, Ann. of Math. Stud., 7 (1995), 223–275.

[18] J. KING, The currents defined by analytic varieties, Acta Math., 127 (1971), 185–220.

[19] M. G. LAWRENCE, Polynomial hulls of rectifiable curves, Amer. J. Math., 117 (1995), 405–417.

[20] M. G. LAWRENCE, Polynomial hulls of sets of finite length in strictly convex boundaries, Manuscript (1997).

[21] R. E. MOLZON, B. SHIFFMAN and N. SIBONY, Average growth estimates for hyperplane sections of entire analytic sets, Math. Ann., 257 (1981), 43-59.

[22] F. SARKIS, CR-meromorphic extension and the non-embedding of the Andreotti-Rossi CR structure in the projective space, Prépublication de Paris VI, 116 (1997).

[23] G. STOLZENBERG, Uniform approximation on smooth curves, Acta Math., 115 (1966), 185–198.

[24] J. WERMER, The hull of a curve in $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math., 68 (1958), 550–561.

[25] J. WERMER, Function rings and Riemann surfaces, Ann. of Math., 67 (1958), 45–71.

Manuscrit reçu le 24 novembre 1997,
accepté le 24 juillet 1998.

Tien-Cuong DINH,
Université Paris-Sud
Bât. 425 - Mathématique
91405 Orsay Cedex (France).
TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr