

JEAN-MARC SCHLENKER

**Réalisations de surfaces hyperboliques  
complètes dans  $H^3$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 48, n° 3 (1998), p. 837-860

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1998\\_\\_48\\_3\\_837\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_837_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# RÉALISATIONS DE SURFACES HYPERBOLIQUES COMPLÈTES DANS $H^3$

par Jean-Marc SCHLENKER

---

## 1. Introduction.

Soit  $K_0 \in ]-1, 0[$ . On va s'intéresser aux métriques complètes à courbure  $K_0$  sur une surface  $\Sigma$  difféomorphe à  $S^2$  privée de  $N$  points ( $N \geq 3$ ).

Rosenberg et Spruck [RS94] ont montré que, si  $C \subset \partial_\infty H^3$  est la réunion disjointe de  $N$  courbes de Jordan, il existe une surface à courbure constante  $K_0$  dans  $H^3$  dont le bord à l'infini est  $C$ . Les surfaces qu'ils construisent sont des graphes sur des ouverts d'horosphères, et sont donc difféomorphes à  $S^2$  privée de  $N$  points. Chacun des choix de  $C$  fournit ainsi au moins une métrique à courbure constante  $K_0$  sur  $\Sigma$ . Comme l'espace de Teichmüller de ces métriques est de dimension finie, on en déduit que certains de ses éléments ont "beaucoup" de réalisations comme métriques induites sur des surfaces de  $H^3$ .

Une manière naturelle de réduire cette profusion est de demander que le bord à l'infini des surfaces considérées soit constitué de cercles de  $S^2 = \partial_\infty H^3$  (i.e. d'ensembles équidistants d'un point pour la métrique canonique de  $S^2$ , ou, ce qui est équivalent, de bords à l'infini de plans totalement géodésiques de  $H^3$ ). La notion de cercle de  $\partial_\infty H^3$  est en effet "intrinsèque" dans la mesure où les isométries de  $H^3$  agissent sur  $\partial_\infty H^3$  par des transformations de Möbius qui préservent ces cercles.

On dira qu'une métrique sur  $\Sigma$  est "ouverte" si elle est complète et si l'aire de chacun de ses bouts est infinie. On va obtenir le

THÉORÈME A. — *Pour chaque métrique ouverte  $\sigma$  à courbure constante  $K_0$  sur  $\Sigma$ , il existe un plongement  $\phi : \Sigma \rightarrow H^3$  qui induit  $\sigma$  et dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles de  $\partial_\infty H^3$ . De plus,  $\phi$  est unique modulo les isométries de  $H^3$ .*

En fait, on a un résultat plus technique, mais aussi plus précis. Notons  $\mathcal{M}$  l'espace de Teichmüller des métriques ouvertes à courbure constante  $K_0$  sur  $\Sigma$ , et  $\mathcal{M}_0$  l'espace des métriques ouvertes à courbure  $-1$  sur  $\Sigma$ , qui ressemble beaucoup à  $\mathcal{M}$ . Pour comprendre la structure de  $\mathcal{M}_0$ , on peut utiliser le résultat suivant dû à Igor Rivin (voir [Sch] pour une preuve) concernant les surfaces à courbure  $-1$  dans  $H^3$  :

THÉORÈME (Igor Rivin). — *Pour chaque  $m \in \mathcal{M}_0$ , il existe une unique (modulo  $\text{Isom}(H^3)$ ) surface polyédrale convexe plongée dans  $H^3$  dont la métrique induite est  $m$  et telle que, pour chaque bout de  $\Sigma$ , il existe un plan totalement géodésique de  $H^3$  qui est orthogonal à toutes les faces au bout.*

Réciproquement, si  $P_1, \dots, P_N$  sont des plans hyperboliques disjoints et dont les bords à l'infini sont disjoints, il existe une surface polyédrale convexe sans sommet qui est orthogonale aux  $P_i$ , et que chaque  $P_i$  coupe en deux parties, dont une homéomorphe à un anneau. Pour le voir, on considère, pour chaque paire  $\{P_i, P_j\}$  (avec  $i \neq j$ ), l'unique géodésique orthogonale à  $P_i$  et à  $P_j$ ; puis on prend comme surface le bord de l'enveloppe convexe de ces géodésiques.  $\mathcal{M}_0$  est donc en bijection avec les configurations de  $N$  plans disjoints dont les bords à l'infini sont disjoints dans  $H^3$ ; on en déduit sur  $\mathcal{M}_0$  une structure de variété connexe de dimension  $3N - 6$  à bord.

Il est bien connu que l'espace des modules des métriques hyperboliques complètes sur  $S^2$  privé de  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$  (l'espace de ces métriques, quotienté par l'espace des difféomorphismes isotopes à l'identité) est simplement connexe. Ainsi,  $\pi_1(\mathcal{M}) = \text{Diff}^0(S^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}) / \text{Diff}^0(S^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\})$ , où  $\text{Diff}^0$  désigne l'espace des difféomorphismes isotopes à l'identité.

Notons aussi  $\mathcal{I}$  l'ensemble des surfaces complètes à courbure  $K_0$  dans  $H^3$  dont le bord à l'infini est constitué de  $N$  cercles, quotienté par  $\text{Isom}(H^3)$ ; enfin, appelons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des réunions disjointes de  $N$  cercles de  $S^2$  qui bordent des disques disjoints, quotienté par l'action de  $\text{Isom}(H^3)$  par les transformations conformes.  $\mathcal{B}$  a une structure naturelle de variété à bord.

On peut décrire  $\pi_1(\mathcal{B})$  comme pour  $\mathcal{M}$  ci-dessus : si  $D_1, \dots, D_N$  sont  $N$  disques disjoints de  $S^2$  bordés par des cercles, alors  $\pi_1(\mathcal{B})$  est le quotient  $\text{Diff}(S^2 \setminus D_1 \cup \dots \cup D_N) / \text{Diff}^0(S^2 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_N))$  du groupe des difféomorphismes de  $S^2$  privé des  $D_i$  par le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité.

On a une application naturelle  $\Phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$  qui associe à un plongement la métrique induite, et une application  $\Psi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$  qui associe à un plongement son bord à l'infini. Alors

LEMME A. —  $\mathcal{B}$  est une variété de dimension  $3N - 6$ ;  $\Psi$  est une bijection, et  $\Pi := \Phi \circ \Psi^{-1}$  est un difféomorphisme.

On en déduit (pour chaque valeur de  $K_0$ ) une paramétrisation de l'espace "de Teichmüller"  $\mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{M}_0$ ) par l'espace (plus simple)  $\mathcal{B}$ .

On peut se poser le même type de questions en remplaçant les métriques induites sur les surfaces par les troisièmes formes fondamentales. Grâce à une dualité bien connue (mais rappelée dans la section 3) entre  $H^3$  et l'espace de Sitter de dimension 3, noté  $S_1^3$ , cela revient d'ailleurs à se poser les mêmes questions que dans le théorème A (concernant les métriques induites) mais pour les surfaces de type espace dans  $S_1^3$ . On choisit  $\tilde{K}_0 \in ]-\infty, 0[$  et on obtient le

THÉORÈME B. — Soit  $\tilde{\sigma}$  une métrique ouverte à courbure constante  $\tilde{K}_0$  sur  $\Sigma$ . Supposons que les géodésiques fermées de  $\tilde{\sigma}$  sont de longueur strictement supérieure à  $2\pi$ . Alors il existe un plongement  $\tilde{\phi} : \Sigma \rightarrow H^3$  dont  $\tilde{\sigma}$  est la troisième forme fondamentale, et dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles de  $\partial_\infty H^3$ . De plus,  $\tilde{\phi}$  est unique modulo les isométries de  $H^3$ .

Si  $\tilde{\sigma}$  admet une géodésique de longueur  $L \leq 2\pi$ , alors  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  ne peut pas être la troisième forme fondamentale d'une surface de  $H^3$ ; on rappellera pourquoi dans la section 3.

Là encore, on a en fait un résultat plus précis. On note  $\tilde{\mathcal{M}}$  l'ensemble des couples  $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})$ , où  $\tilde{\sigma}$  est une métrique ouverte à courbure constante  $\tilde{K}_0 \in ]-\infty, 0[$  sur  $\Sigma$  dont les géodésiques fermées sont de longueur  $L > 2\pi$ . On note aussi  $\tilde{\mathcal{I}}$  l'ensemble des couples  $(\tilde{K}_0, g)$ , où  $g$  est un plongement complet de  $\Sigma$  dans  $H^3$  dont la troisième forme fondamentale est à courbure constante  $\tilde{K}_0 \in ]-\infty, 0[$  et dont le bord à l'infini est réunion disjointe de  $N$  cercles, quotienté par  $\text{Isom}(H^3)$ . Il existe une application naturelle  $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  qui associe à un plongement sa troisième forme fondamentale (l'application étant triviale sur les composantes  $\tilde{K}_0$ ), et une application  $\tilde{\Psi} : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow ]-\infty, 0[ \times \mathcal{B}$  qui associe à un plongement son bord à l'infini. Alors

LEMME B. —  $\tilde{\Psi}$  est une bijection, et  $\tilde{\Pi} := \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi}^{-1}$  est un difféomorphisme.

Ceci fournit, pour chaque valeur de  $\tilde{K}_0$ , une paramétrisation d'un ouvert de  $\mathcal{M}_0$  par  $\mathcal{B}$ . Enfin, on peut se demander ce que devient le théorème A quand on fait tendre  $K_0 \rightarrow -1$ . On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME C. — Pour chaque  $B \in \mathcal{B}$ , il existe une unique surface convexe de  $H^3$  dont la métrique induite est à courbure constante  $-1$  et dont le bord à l'infini est  $B$ . Pour chaque métrique ouverte  $\sigma_{-1}$  à courbure constante  $-1$  sur  $\Sigma$ , il existe un plongement convexe  $\phi_{-1} : \Sigma \rightarrow H^3$  qui induit  $\sigma_{-1}$ , et dont le bord à l'infini est dans  $\mathcal{B}$ .

Les surfaces qui apparaissent sont convexes et à courbure extrinsèque nulle (c'est-à-dire que le déterminant de leur seconde forme fondamentale est nul), elles sont donc réglées.

Pour mieux comprendre le comportement de ces surfaces, en particulier quand  $K \rightarrow 0$ , on peut fixer un bord  $B \in \mathcal{B}$ . D'après le théorème A, pour chaque  $K \in ]-1, 0[$ , il existe une unique surface  $\Sigma_K$  dont le bord à l'infini est  $B$ , et il existe aussi une surface  $\Sigma_{-1}$  convexe développable dont le bord à l'infini est  $B$ . On note  $\Omega_B$  le complémentaire du domaine fermé convexe borné par  $\Sigma_{-1}$ , et  $\tilde{\Omega}_B$  l'ensemble des points de  $S_1^3$  duaux (cf. la section 3) des plans orientés de  $H^3$  qui ne rencontrent pas  $H^3 \setminus \Omega_B$  et le laissent entièrement du côté opposé à leur normale orientée. Enfin, on appelle  $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$  la surface duale de  $\Sigma_K$ , qui est (section 3) une surface convexe complète de type espace de  $S_1^3$  à courbure constante  $\tilde{K} = K/(K+1)$ .

THÉORÈME D. — Les  $(\Sigma_K)_{K \in ]-1, 0[}$  forment un feuilletage de  $\Omega_B$ , et les  $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$  feuilletent  $\tilde{\Omega}_B$ .

Notons que les résultats ci-dessus, présentés pour  $N \geq 3$  pour éviter de traiter des cas particuliers dans les énoncés, sont en fait valables aussi pour  $N = 2$ ; la seule différence est que les espaces qui interviennent sont alors de dimension 1 et pas  $3N - 6 = 0$ . Tous les énoncés se vérifient dans ce cas de manière à peu près immédiate. Le cas  $N = 1$  est sans intérêt, toutes les surfaces qui interviennent sont totalement ombiliques.

On envisage de donner ultérieurement, en collaboration avec Olivier Biquard, une extension du théorème A à des surfaces à courbure  $K > -1$  variable tendant vers une constante  $K_0 \in ]-1, 0[$  à l'infini.

Ce travail doit beaucoup à des remarques d'Olivier Biquard, François Labourie et Igor Rivin; je tiens à les remercier. Le texte final a aussi bénéficié des remarques d'un rapporteur anonyme.

## 2. Étude de surfaces.

Dans cette section, on étudie les  $K_0$ -surfaces complètes de  $H^3$  dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles. On fixe  $K_0 \in ]-1, 0[$ . On a d'abord un résultat de compacité des  $K_0$ -surfaces :

LEMME 2.1. — *Soit  $(\phi_n)$  une suite de plongements de  $\Sigma$  dans  $H^3$  qui induisent des métriques complètes à courbure constante  $K_0$ , et soit  $x_0 \in \Sigma$  tel que  $(\phi(x_0))$  converge. Alors il existe une suite  $(\psi_n)$  extraite de  $(\phi_n)$  telle que :*

- soit  $(\psi_n)$  converge  $C^\infty$  sur les compacts de  $\Sigma$  vers un plongement qui induit une métrique à courbure constante  $K_0$  ;
- soit les images par les  $\psi_n$  du bord à l'infini de  $\Sigma$  (pour les métriques induites) convergent vers deux points de  $\partial_\infty H^3$ .

*Démonstration.* — C'est une conséquence du théorème E (p. 414) de l'article de François Labourie [Lab89]. En effet, on peut passer au revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ , et on a une suite d'immersions isométriques  $\epsilon$ -elliptiques (au sens de [Lab89]) d'une surface dans  $H^3$ . On se restreint à un compact  $K \ni x_0$  de  $\Sigma$ , et il existe d'après le théorème d'Ascoli une sous-suite de  $(\phi_n)$  qui converge  $C^0$  sur  $K$ . D'après le théorème E de [Lab89], s'il n'y a pas convergence  $C^\infty$  sur  $K$ , alors il y a convergence vers une "surface de pli", c'est-à-dire dégénérescence le long d'une géodésique  $g_0$  de  $H^3$  ; on vérifie alors que les images par les  $\psi_n$  du bord à l'infini de  $\Sigma$  dégèrent vers les deux extrémités de  $g_0$  dans  $\partial_\infty H^3$ .  $\square$

On peut déduire du lemme 2.1 le

LEMME 2.2. — *Soit  $\phi : \Sigma \rightarrow H^3$  un plongement induisant une métrique ouverte  $\sigma$  à courbure  $K_0$ , et  $B$  un bout de  $\Sigma$ . Supposons que  $\phi$  envoie le bord à l'infini de  $B$  sur un cercle  $C_0$  de  $\partial_\infty H^3$ . Alors  $\phi(\Sigma)$  est asymptotique, à l'infini sur  $B$ , à un disque totalement ombilique  $S_0$  à courbure constante  $K_0$  dont le bord est  $C_0$ . De plus, la seconde forme fondamentale de  $\phi$  est asymptotique à l'infini à  $(\sqrt{K_0 + 1})\sigma$ .*

*Démonstration.* — On note  $P_0$  le plan totalement géodésique dont le bord est  $C_0$  ; on considère une suite  $(x_n)$  de points de  $\Sigma$  qui s'éloigne à l'infini sur  $B$ , et une suite  $(\psi_n)$  d'isométries de  $H^3$  fixant  $P_0$  telles que la projection orthogonale de  $\psi_n \circ \phi(x_n)$  sur  $P_0$  soit toujours égale à un point  $y_0 \in P_0$  fixé. Comme  $x_n \rightarrow \infty$  sur  $B$ ,  $(\psi_n \circ \phi(\partial_\infty \Sigma))$  converge vers  $C_0$  (pour l'action de  $\psi_n \circ \phi$  sur  $\partial_\infty H^3$ ).

On note encore  $\Delta_0$  la géodésique orthogonale à  $P_0$  passant par  $y_0$ ,  $P_+, P_-$  les deux plans orthogonaux à  $\Delta_0$  à distance 1 de  $P_0$ , et  $C_+, C_-$  les bords à l'infini de  $P_+, P_-$  (qui sont donc des cercles de  $\partial_\infty H^3$ ). Il existe donc  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $(\psi_n \circ \phi)(\partial_\infty \Sigma)$  est entre  $C_+$  et  $C_-$ .

Notons encore  $P_+^d$  (resp.  $P_-^d$ ) l'ensemble des points à distance  $d$  de  $P_+$  (resp. de  $P_-$ ) du coté opposé à  $P_0$ . Les  $P_\pm^d$  sont convexes à courbure (intrinsèque)  $-1 + \tanh^2(d)$ , donc, pour  $d_0 > \operatorname{argth}(\sqrt{1 + K_0})$  et  $n \geq n_0$ ,  $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$  doit être entre  $P_-^{d_0}$  et  $P_+^{d_0}$ . Sinon, au point de  $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$  qui est extérieur au domaine borné par  $P_-$  et  $P_+$  et qui maximise la distance à  $P_+$  (ou à  $P_-$ ),  $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$  devrait être tangente à l'intérieur à une surface  $P_+^d$  (ou  $P_-^d$ ) à courbure strictement plus grande que  $K_0$ , et donc avoir une courbure strictement plus grande que  $K_0$ , ce qui est impossible.

Ainsi, pour  $n \geq n_0$ ,  $\psi_n \circ \phi(x_n)$  reste à distance bornée de  $P_0$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(\psi_n \circ \phi(x_n))$  converge. D'après le lemme précédent, il existe donc une suite  $(\phi_n)$  extraite de  $(\psi_n \circ \phi)$  qui converge  $C^\infty$  sur les compacts de  $\Sigma$  vers une  $K_0$ -surface  $\Sigma_\infty$ . Comme  $\partial_\infty \Sigma_\infty = C_0$ ,  $\Sigma_\infty$  est un disque totalement ombilique à distance constante de  $P_0$  (l'unicité des  $K_0$ -surfaces de bord donné est prouvée dans [RS94] quand le bord est une courbe de Jordan), qui est donc invariante par les  $\psi_n$ . On en déduit le résultat.  $\square$

Cette preuve m'a été essentiellement suggérée par François Labourie. On pourra trouver plus loin une preuve alternative.

Maintenant, on en déduit l'unicité des  $K_0$ -surfaces ayant un bord donné, quand ce bord est une réunion de cercles.

**LEMME 2.3.** — *Soit  $C$  une réunion disjointe finie de cercles de  $\partial_\infty H^3$  bordant des disques disjoints. Il existe une unique  $K_0$ -surface plongée dont  $C$  est le bord.*

*Démonstration.* — L'existence vient de [RS94], il nous suffit de montrer l'unicité. On raisonne donc par l'absurde, et on suppose que  $\Sigma_0, \Sigma$  sont deux  $K_0$ -surfaces de bord  $C$ , telles qu'il existe un point de  $\Sigma$  hors du domaine convexe  $D_0$  bordé par  $\Sigma_0$ .

On note  $\Sigma_t$  l'ensemble des points de  $H^3 \setminus D_0$  qui sont à distance  $t$  de  $\Sigma_0$ . On peut utiliser l'équation de Riccati pour vérifier que, si  $\gamma : \mathbf{R}_+ \rightarrow H^3 \setminus D_0$  est une géodésique orthogonale à  $\Sigma_0$  en 0, et si on note  $H(t)$  et  $K_e(t)$  la courbure moyenne et la courbure extrinsèque de  $\Sigma_t$  en  $\gamma(t)$ , alors

$$(1) \quad H'(t) = 1 + K_e(t) - 2H(t)^2, \quad K_e'(t) = 2H(t)(1 - K_e(t)).$$

Or, d'après le lemme 2.2,  $\lim_{\partial_\infty \Sigma_0} H = \sqrt{K_0 + 1}$ , si bien que  $H$  est borné sur  $\Sigma_0$ . On montre alors assez facilement en utilisant (1) que, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $H(t)$  reste dans un intervalle de la forme  $]0, H_M]$ , et  $K_e(t) \in ]0, 1[$  est strictement croissante avec  $t$ .

Maintenant, si on note  $y_0$  le point de  $\Sigma \cap (H^3 \setminus D_0)$  qui maximise la distance à  $\Sigma_0$  ( $y_0$  existe car  $\Sigma_0$  et  $\Sigma$  sont asymptotiques à l'infini d'après le lemme 2.2),  $\Sigma$  doit être tangente "à l'intérieur" à une surface  $\Sigma_t$  en  $y$ , si bien que sa courbure doit être supérieure à celle de  $\Sigma_t$ , qui est strictement plus grande que  $K_0$ . C'est impossible.  $\square$

On a donc montré que l'application  $\Psi$  de l'introduction est une bijection.

Remarquons que l'approche utilisée pour la preuve du lemme 2.3 permet aussi de donner une autre démonstration du lemme 2.2. Pour cela, on considère encore la surface totalement ombilique  $S_0$  qui est à courbure  $K_0$  et dont le bord est  $C_0$ , et une autre surface  $S_1$  qui est aussi à courbure  $K_0$ , mais dont le bord est composé de  $C_0$  et d'un autre cercle  $C_1$  qui sépare  $C_0$  de  $\partial_\infty \Sigma \setminus C_0$ ; on choisit ces surfaces de manière que le domaine convexe borné par  $S_1$  contient celui borné par  $\Sigma$ , qui contient celui borné par  $S_0$ . On note que  $\Sigma$  ne peut traverser ni  $S_0$  (sans quoi elle serait tangente à une équidistante de  $S_0$  à l' "intérieur" de  $S_0$ ) ni  $S_1$  (d'après le même raisonnement que celui qu'on a fait pour montrer le lemme 2.3). Or on vérifie sans mal que  $S_0$  et  $S_1$  sont asymptotiques au voisinage de  $C_0$ , et on en déduit le résultat. En fait, on va voir que la distance entre  $S_0$  et  $S_1$  décroît en  $O(e^{-2k_0 r})$ , et on obtient ainsi le résultat suivant, plus précis que le lemme 2.2 :

LEMME 2.4. — *Avec les hypothèses du lemme 2.2, la distance à  $S_0$  est une fonction sur  $\Sigma$  qui décroît comme  $O(e^{-2k_0 r})$  à l'infini en  $B$ , où  $r$  est la distance (sur  $\Sigma$ ) à un point fixe de  $\Sigma$ .*

*Démonstration.* — D'après le raisonnement précédent, le seul point qui reste à montrer est que la distance à  $S_0$  décroît comme  $e^{-2k_0 r}$  sur  $S_1$ . Pour cela, on appelle  $P_0$  l'unique plan totalement géodésique qui a le même bord à l'infini que  $S_0$ , et on note  $f$  le sinus hyperbolique de la distance  $u$  à  $P_0$  (ainsi que sa restriction à  $S_1$ ).

On vérifie sans difficulté que le hessien de  $f$  est :

$$Ddf = f\mu$$



où  $\mu$  est la métrique de  $H^3$ . Ainsi, si  $x, y$  sont des champs de vecteurs sur  $S_1$ , alors

$$(Ddf)(x, y) = x.y.f - (D_x y).f = f\mu(x, y)$$

et si  $\sigma$  est la métrique de  $S_1$  et  $\bar{D}$  sa connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned} (\bar{D}df)(x, y) &= x.y.f - (\bar{D}_x y).f = (Ddf)(x, y) \\ &\quad + (D_x y - \bar{D}_x y).f = f\sigma(x, y) + II(x, y)df(n) \end{aligned}$$

où  $n$  est la normale orientée extérieure à  $S_1$ .

Ainsi, d'après la formule de Gauss :

$$\det(\bar{D}df - fI) = \|Df(n)\|^2 \det(II) = \|Df(n)\|^2 (K_0 + 1)$$

et  $\|Df\|^2 = \cosh^2(u) = 1 + f^2$ ; comme  $\|Df\|^2 = |Df(n)|^2 + \|\bar{D}f\|^2$ , on trouve que  $f$  vérifie sur  $S_1$  l'équation :

$$\det(\bar{D}df - fI) = (1 + f^2 - \|\bar{D}f\|^2)(K_0 + 1).$$

Comme  $S_1$  a une courbure constante  $K_0$ , on peut se restreindre à un ouvert  $\Omega_1$  de  $S_1$  isométrique au complémentaire  $\Omega_1$  d'une boule du plan  $H_{K_0}^2$  à courbure constante  $K_0$ .  $\Omega_1$  est donc feuilleté par des courbes  $c_r$  à courbure géodésique  $k_0 \coth(k_0 r)$  (avec  $-k_0^2 = K_0$ ). De plus,  $f$  est radiale. On calcule alors que

$$\det(\bar{D}df - fI) = (f'' - f)(f'k_0 \coth(k_0 r) - f)$$

et donc

$$(2) \quad (f'' - f)(f'k_0 \coth(k_0 r) - f) = (1 + f^2 - \|\bar{D}f\|^2)(K_0 + 1)$$

$S_0$  correspond à la solution constante

$$f \equiv f_0 := \sqrt{-\frac{K_0 + 1}{K_0}}.$$

On sait que  $f \rightarrow f_0$  à l'infini ( $S_1$  est asymptotique à  $S_0$ ), on linéarise donc l'équation (2) en posant  $f = f_0 + y$ , et on obtient à l'infini :

$$-f_0(y'' + k_0 y - 2y) = 2f_0 y (K_0 + 1)$$

soit

$$y'' + k_0 y' - k_0^2 y = 0$$

dont les seules solutions bornées sont de la forme  $y(r) = C_0 e^{-2k_0 r}$ .  $\square$

### 3. Rappels de géométrie hyperbolique.

Nous rappelons ici deux outils classiques : d'une part, la dualité entre  $H^3$  et l'espace de Sitter de dimension 3, noté  $S_1^3$ ; d'autre part l'application de Pogorelov, qui permet de "transporter" des problèmes de rigidité de  $H^3$  dans  $\mathbf{R}^3$ . Ces deux éléments admettent des extensions à d'autres cas, voir [Sch].

$H^3$  est isométrique à

$$H^3 \simeq \{x \in \mathbf{R}_1^4 \mid \langle x, x \rangle = -1 \text{ et } x_0 > 0\}$$

avec la métrique induite, où  $\mathbf{R}_1^4$  est l'espace de Minkowski de dimension 4 avec le produit scalaire

$$\langle x, x' \rangle = -x_0x'_0 + x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3.$$

De même, on identifie l'espace de Sitter à

$$S_1^3 \simeq \{x \in \mathbf{R}_1^4 \mid \langle x, x \rangle = 1\}.$$

On définit alors une dualité entre points de  $H^3$  et plans totalement géodésiques de type espace de  $S_1^3$ , et entre points de  $S_1^3$  et plans totalement géodésiques orientés de  $H^3$ , de la manière suivante. Pour  $m \in H^3$ , il existe une unique droite  $D$  de  $\mathbf{R}_1^4$  passant par  $m$  et par 0; on note  $D^*$  son orthogonal, qui est un 3-plan de  $\mathbf{R}_1^4$  passant par 0 sur lequel la restriction de la métrique de  $\mathbf{R}_1^4$  est définie positive.  $D^* \cap S_1^3$  est alors un 2-plan totalement géodésique de  $S_1^3$  de type espace, qu'on note  $m^*$ . De manière analogue, à chaque point  $m' \in S_1^3$ , on associe la droite orientée  $D'$  passant par  $m'$  et par 0, puis son orthogonal  $D'^*$ , qui est un 3-plan orienté de  $\mathbf{R}_1^4$  sur lequel la restriction de la métrique est de signature  $(2, 1)$ . Enfin, on note  $m'^* = D'^* \cap H^3$ , qui est un 2-plan totalement géodésique orienté de  $H^3$ . On a alors le

LEMME 3.1. — *Soit  $S$  une surface, et  $\phi$  une immersion localement strictement convexe de  $S$  dans  $H^3$ . Alors l'application  $\tilde{\phi}$  qui à  $x \in S$  associe le point dual du plan tangent à  $\phi(S)$  en  $\phi(x)$  est une immersion localement strictement convexe de type espace de  $S$  dans  $S_1^3$ . De plus,  $\phi(x)$  est le point dual du plan tangent à  $\tilde{\phi}(S)$  en  $\tilde{\phi}(x)$ . Enfin, la troisième forme fondamentale de  $\tilde{\phi}$  coïncide avec la métrique induite par  $\phi$ , et réciproquement.*

On pourra consulter [Sch] pour la preuve de ce lemme classique, ou [RH93] pour son analogue polyédral.

Enfin, on rappelle que, si  $S$  est une surface immergée dans  $H^3$ , dont la métrique induite a pour courbure  $K \neq -1$  en un point  $x$ , alors la troisième forme fondamentale de  $S$  en  $x$  a pour courbure  $\tilde{K} = K/(K+1)$ .

En ajoutant à ces rappels les résultats de la section précédente, on obtient le

**COROLLAIRE 3.2.** — *Soit  $\Sigma$  une surface plongée dans  $H^3$ , avec une métrique induite ouverte à courbure  $K_0 \in ]-1, 0[$  et un bord à l'infini constitué d'une réunion disjointe de cercles. Alors sa troisième forme fondamentale est une métrique ouverte à courbure  $\tilde{K}_0 = K_0/(K_0+1)$  dont les géodésiques fermées sont de longueur  $L > 2\pi$ .*

*Démonstration.* — La troisième forme fondamentale est complète parce que  $\Sigma$  est ombilique à l'infini d'après le lemme 2.2.

Soit  $\gamma$  une géodésique fermée de  $\Sigma$  de longueur  $L \leq 2\pi$ . L'image de  $\gamma$  dans  $S_1^3$  par l'application duale du plongement donné serait une courbe "convexe" au sens où elle pourrait être paramétrée à vitesse 1 avec une accélération toujours non nulle et de type temps; or on sait (voir [Sch96], ou [RH93], [CD95] pour l'analogie polyédral) que de telles courbes sont nécessairement de longueur  $L > 2\pi$ . Les géodésiques fermées de la troisième forme fondamentale de  $\Sigma$  sont donc de longueur  $L > 2\pi$ .  $\square$

On en déduit que l'application  $\tilde{\Psi}$  de l'introduction est bien définie à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{M}}$ ; c'est une bijection d'après le lemme 2.3 et la dualité du lemme 3.1.

Définissons maintenant l'application de Pogorelov. On utilise encore le modèle de  $H^3$  ci-dessus. Rappelons qu'on peut en déduire un modèle projectif de  $H^3$ , donné par l'application

$$\begin{aligned} \rho : H^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 = \{x \in \mathbf{R}_1^4 \mid x_0 = 1\} \\ x &\mapsto \frac{x}{x_0} \end{aligned}$$

$\rho$  envoie  $H^3$  sur l'intérieur de la boule unité  $B^3$  de  $\mathbf{R}^3$ , et préserve les géodésiques. On notera aussi  $\rho$  son extension de  $\overline{H^3}$  dans  $B^3$ . Pogorelov [Pog73] a montré que  $\rho$  n'est qu'une "composante" d'une application plus intéressante :

DÉFINITION 3.3. — On note  $P_0$  la projection orthogonale de  $\mathbf{R}_1^4$  sur l'hyperplan  $\{x_0 = 1\}$ , puis  $P_1 := P_0 \times P_0$ . On pose

$$\mathcal{P} : H^3 \times H^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$$

$$(x, x') \mapsto P_1 \left( \frac{2x}{x_0 + x'_0}, \frac{2x'}{x_0 + x'_0} \right).$$

La restriction de  $\mathcal{P}$  à la diagonale  $\Delta$  de  $H^3 \times H^3$  n'est autre que  $\rho$ .  $\mathcal{P}$  a de remarquables propriétés. Pour les exprimer, on note  $p_1, p_2$  les projections canoniques de  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  sur les deux facteurs. Alors

LEMME 3.4. — 1. Si  $u, u' : S \rightarrow H^3$  sont deux immersions qui induisent la même métrique,  $p_1 \circ \mathcal{P} \circ (u, u')$  et  $p_2 \circ \mathcal{P} \circ (u, u')$  sont aussi des immersions qui induisent la même métrique.

2. Si  $\alpha : H^3 \rightarrow H^3$  est un difféomorphisme, alors  $\alpha$  est une isométrie si et seulement si il existe une isométrie  $\beta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que, pour  $x \in H^3$ ,  $p_1 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x)) = \beta \circ p_2 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$ .

Démonstration. — On note  $X_0$  le point de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  dans  $\mathbf{R}_1^4$ . Alors pour  $x, x' \in H^3$  and  $X \in T_x H^3, X' \in T_{x'} H^3$  :

$$\langle x + x', X_0 \rangle^2 (p_1 \circ \Phi)_*(X, X')$$

$$= 2(X - \langle X, X_0 \rangle X_0) \langle x + x', X_0 \rangle - \langle X + X', X_0 \rangle (x - \langle x, X_0 \rangle X_0)$$

et donc

$$\langle x + x', X_0 \rangle^4 \|(p_1 \circ \Phi)_*(X, X')\|^2 = 4[\langle x + x', X_0 \rangle^2 (\|X\|^2 - \langle X, X_0 \rangle^2)$$

$$+ \langle X + X', X_0 \rangle^2 (\|x\|^2 - \langle x, X_0 \rangle^2) - 2\langle x + x', X_0 \rangle \langle X + X', X_0 \rangle (\langle X, x \rangle - \langle X, X_0 \rangle \langle x, X_0 \rangle)].$$

Mais  $\|x\|^2 = -1$ , donc  $\langle x, X \rangle = 0$ , et on trouve que

$$\langle x + x', X_0 \rangle^4 \|(p_1 \circ \Phi)_*(X, X')\|^2 = 4[\langle x + x', X_0 \rangle^2 (\|X\|^2 - \langle X, X_0 \rangle^2)$$

$$- \langle X + X', X_0 \rangle^2 (1 + \langle x, X_0 \rangle^2) + 2\langle x + x', X_0 \rangle \langle X + X', X_0 \rangle \langle X, X_0 \rangle \langle x, X_0 \rangle]$$

$$= 4[\langle x + x', X_0 \rangle^2 \|X\|^2 - \langle X + X', X_0 \rangle^2$$

$$- (\langle x + x', X_0 \rangle \langle X, X_0 \rangle - \langle X + X', X_0 \rangle \langle x, X_0 \rangle)^2]$$

$$= 4[\langle x + x', X_0 \rangle^2 \|X\|^2 - \langle X + X', X_0 \rangle^2 - (\langle x', X_0 \rangle \langle X, X_0 \rangle - \langle x, X_0 \rangle \langle X', X_0 \rangle)^2].$$

En soustrayant l'équation obtenue en échangeant  $x$  et  $x'$ , on obtient le point (1).

Le point (2) est une conséquence de (1); par exemple, si  $\alpha$  est une isométrie, alors  $x \mapsto p_1 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$  et  $x \mapsto p_2 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$  doivent induire la même métrique d'après (1), et ils diffèrent donc par une isométrie de  $\mathbf{R}^3$ .

□

On pourra trouver dans [Sch] une analyse plus géométrique de ce lemme, ainsi que diverses extensions.

On peut linéariser  $\mathcal{P}$  au voisinage de  $\Delta$  : on note

$$\begin{aligned} i : TH^3 &\rightarrow TH^3 \times TH^3 \\ (x, v) &\mapsto ((x, 0), (x, v)) \end{aligned}$$

puis on pose

$$\mathcal{P}' := (p_1 \circ \mathcal{P})_* \circ i - (p_2 \circ \mathcal{P})_* \circ i$$

$\mathcal{P}'$  a encore de belles propriétés :

LEMME 3.5. — *Soit  $\phi$  une immersion d'une surface  $S$  dans  $H^3$ , et  $u$  un champ de vecteurs sur  $\phi(S)$  qui induit une déformation infinitésimale isométrique de  $\phi(S)$ . Alors  $\mathcal{P}'(u)$  est une déformation infinitésimale isométrique de  $\rho \circ \phi(S)$ . De plus, si  $v$  est un champ de vecteurs sur  $H^3$ ,  $v$  est un champ de Killing si et seulement si  $\mathcal{P}'(v)$  est un champ de Killing sur  $B^3$ .*

La première partie du lemme est une conséquence du premier point du lemme 3.4, et le second point est une conséquence directe du second point de 3.4.

On note aussi que  $\mathcal{P}'$  est continu pour la norme hyperbolique sur  $TH^3$  et la norme euclidienne sur  $TB^3$ ; en effet, on vérifie à partir de la définition explicite de  $\mathcal{P}$  ci-dessus que  $\mathcal{P}' = \rho_* + \delta$ , où  $\delta(v)$  est un terme radial (dirigé comme la géodésique passant par le centre de  $B^3$ ) égal à la norme de la composante radiale de  $v$  multipliée par  $\tanh(r)$ , où  $r$  est la distance hyperbolique au "centre"  $X_0$ . Plus simplement,  $\mathcal{P}'$  agit comme  $\rho_*$  sur les vecteurs orthogonaux à la direction de  $X_0$ , et préserve la norme pour les vecteurs parallèles à la direction de  $X_0$ . Dans le modèle projectif de  $H^3$  où  $H^3$  correspond à l'intérieur de la boule de rayon 1,  $\mathcal{P}'$  agit sur les champs de vecteurs en multipliant leur composante radiale par  $\text{ch}^2(r) = 1/(1 - R^2)$ , où  $R = \tanh(r)$  est la distance à l'origine dans  $\mathbf{R}^3$ .

De la même manière, on définit une application de Pogorelov pour  $S_1^3$ . On appelle pour cela  $S_{1,+}^3$  l'hémisphère de  $S_1^3$  :

$$S_{1,+}^3 := \{x \in \mathbf{R}_1^4 \mid \langle x, x \rangle = 1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

DÉFINITION 3.6. — On note

$$\tilde{\mathcal{P}} : S_{1,+}^3 \times S_{1,+}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$$

$$(x, x') \mapsto P_1 \left( \frac{2x}{x_0 + x'_0}, \frac{2x'}{x_0 + x'_0} \right).$$

La restriction de  $\tilde{\mathcal{P}}$  à la diagonale  $\tilde{\Delta}$  de  $S_{1,+}^3 \times S_{1,+}^3$  est une application projective  $\tilde{\rho}$  de  $S_{1,+}^3$  sur  $\mathbf{R}^3 \setminus B^3$ . De plus

LEMME 3.7. — 1. Si  $u, u' : S \rightarrow S_{1,+}^3$  sont deux immersions de type espace d'une surface qui induisent la même métrique,  $p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}} \circ (u, u')$  et  $p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}} \circ (u, u')$  sont aussi des immersions qui induisent la même métrique.

2. Si  $\alpha : S_{1,+}^3 \rightarrow S_{1,+}^3$  est un difféomorphisme, alors  $\alpha$  est une isométrie si et seulement si il existe une isométrie  $\beta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que, pour  $x \in S_{1,+}^3$ ,  $p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}(x, \alpha(x)) = \beta \circ p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}(x, \alpha(x))$ .

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 3.4.

On peut encore linéariser  $\tilde{\mathcal{P}}$  au voisinage de  $\tilde{\Delta}$  : on note

$$\tilde{i} : TS_{1,+}^3 \rightarrow TS_{1,+}^3 \times TS_{1,+}^3$$

$$(x, v) \mapsto ((x, 0), (x, v))$$

puis on pose :  $\tilde{\mathcal{P}}' := (p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}})_* \circ \tilde{i} - (p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}})_* \circ \tilde{i}$ . Alors :

LEMME 3.8. — Soit  $\phi$  une immersion d'une surface  $S$  dans  $S_{1,+}^3$ , et  $u$  un champ de vecteurs sur  $\phi(S)$  qui induit une déformation infinitésimale isométrique de  $\phi(S)$ . Alors  $\tilde{\mathcal{P}}'(u)$  est une déformation infinitésimale isométrique de  $\tilde{\rho} \circ \phi(S)$ . De plus, un champ de vecteurs sur  $S_{1,+}^3$  est un champ de Killing si et seulement si son image par  $\tilde{\mathcal{P}}'$  en est un.

### 4. Rigidité.

Dans cette section, on utilise les applications de Pogorelov de la section précédente pour donner des résultats de rigidité pour les  $K_0$ -surfaces dont les bords à l'infini sont des cercles.

LEMME 4.1. — Soit  $g \in \mathcal{I}$  un plongement de  $\Sigma$  avec  $\Psi(g) = C \in \mathcal{B}$  et  $\Phi(g) = \sigma \in \mathcal{M}$ . Alors  $\Pi_* : T_C \mathcal{B} \mapsto T_\sigma \mathcal{M}$  est injective.

En d'autres termes, si  $C'$  est une variation infinitésimale de  $C$ ,  $C'$  induit un champ de vecteurs sur  $g(\Sigma)$  (une déformation infinitésimale) et

donc une variation infinitésimale  $\sigma'$  de la métrique induite; cette variation n'est pas nulle si  $C' \neq 0$ .

La preuve utilise la transformation de Pogorelov, qui permet de se ramener à la proposition suivante :

LEMME 4.2. — Soit  $\Sigma$  une surface (localement strictement) convexe dans  $\mathbf{R}^3$  dont le bord  $\partial\Sigma$  est une réunion de cercles  $C_1, \dots, C_N$  de  $S^2$  bordant des disques convexes disjoints de  $S^2$ . Supposons  $\Sigma$  tangente à  $S^2$  sur les  $C_i$ . Soit  $V$  un champ de vecteurs sur  $\Sigma$  induisant une déformation infinitésimale isométrique. Supposons que, au voisinage de  $C_i$ ,  $V = V_i + v_i$ , où  $V_i$  est la restriction à  $\Sigma$  d'un champ de Killing de  $\mathbf{R}^3$  parallèle en 0 à l'axe de  $C_i$ , et  $v_i$  est, sur  $C_i$ , dans le plan tangent à  $C_i$  contenant 0. Alors  $V$  est trivial, i.e. c'est la restriction à  $\Sigma$  d'un champ de Killing de  $\mathbf{R}^3$ .

Démonstration. — Posons  $f = r^2$ , où  $r$  est la distance à l'origine dans  $\mathbf{R}^3$ . Appelons  $f'$  la variation de  $f$  induite par  $V$  sur  $\Sigma$ , et  $I', II', B'$  les variations de  $I, II$  et  $B$ . Par hypothèse,  $I' = 0$ .

On définit une 1-forme  $\omega$  sur  $\Sigma$  comme

$$\omega(x) = df'(J_0 B' x)$$

où  $J_0$  est la structure complexe sur  $\Sigma$  associée à  $I$ . On calcule la différentielle de  $\omega$  comme par exemple dans [LS96]. D'abord, le hessien de  $f$  dans  $\mathbf{R}^3$  est

$$Ddf = 2\mu_0$$

où  $\mu_0$  est la métrique de  $\mathbf{R}^3$ . Appelons  $n$  le vecteur normal unitaire intérieur à  $\Sigma$ , et posons  $h := df(n)$ . Ainsi,  $h \leq 0$ . Alors, si  $x, y$  sont deux champs de vecteurs sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} (\overline{D}df)(x, y) &= x.(y.f) - (\overline{D}_x y).f \\ &= x.(y.f) - ((D_x y) - II(x, y)n).f \\ &= (Ddf)(x, y) + II(x, y)h \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\overline{D}df = I + hII.$$

Comme  $V$  laisse  $I$  et donc  $\overline{D}$  invariants :

$$(3) \quad \overline{D}df' = hII' + h'II.$$

Ainsi

$$d\omega(x, y) = df'(J_0(\overline{D}_x(B'y) - \overline{D}_y(B'x) - B'[x, y])) + (\overline{D}df')(x, J_0B'y) - (\overline{D}df')(y, J_0B'x)$$

et donc

$$d\omega(x, y) = df'(J_0(d\overline{D}B')(x, y)) + h'(II(x, J_0B'y) - II(y, J_0B'x)) + h(II'(x, J_0B'y) - II'(y, J_0B'x)).$$

Mais :

- $d\overline{D}B' = 0$  par l'équation de Codazzi;
- $II(x, J_0B'y) - II(y, J_0B'x) = 0$  car  $\text{tr}(B^{-1}B') = 0$ , parce que  $\det(B)$  ne varie pas avec  $V$  (d'après l'équation de Gauss);
- $II'(x, J_0B'y) - II'(y, J_0B'x) = -2 \det(B') dv(x, y)$ .

Maintenant

$$(4) \quad d\omega = -2h \det(B') dv.$$

Or  $\text{tr}(B^{-1}B') = 0$ , donc  $\det(B^{-1}B') \leq 0$ , et  $\det(B') \leq 0$ , ce qui conduit à :

$$(5) \quad \int_{\Sigma} d\omega \leq 0.$$

Pour montrer que  $\omega$  doit s'annuler, il faut calculer l'intégrale de  $\omega$  sur le bord, i.e. sur chacun des  $C_i$ . Notons que  $V_i$  ne joue ici aucun rôle, parce qu'il induit une variation nulle  $B$  et une variation constante (au premier ordre sur  $C_i$ ) de  $f$ , on peut donc l'oublier.

On appelle  $(e_1, e_2)$  le repère mobile au voisinage de  $C_i$  des directions principales de  $\Sigma$ , qui sont bien définies près de  $C_i$  parce que les courbures principales sont distinctes; on choisit  $e_1$  parallèle à  $C_i$  (la courbure principale associée est 1 sur  $C_i$  parce que  $\Sigma$  est tangente à  $S^2$  sur  $C_i$ ) et  $e_2$  la normale extérieure (avec courbure principale associée  $k_2$ ).  $\kappa_i$  est la courbure géodésique de  $C_i$ ,  $\kappa_i = \langle \overline{D}_{e_1} e_1, e_2 \rangle$ ,  $u_i$  est la projection de  $v_i$  sur  $\Sigma$ ,  $l := \langle u_i, e_1 \rangle$ , et  $\lambda$  est la projection de  $v_i$  sur  $-n$ . Comme  $\Sigma$  est tangente à  $S^2$  sur  $C_i$ , les 1-jets de  $f'$  et de  $2\lambda$  coïncident sur  $C_i$ .

Un calcul élémentaire montre que :

$$I' = \lambda II + 2\delta^* u_i$$



et  $I' = 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= e_2 \cdot (\lambda II(e_1, e_1)) + 2e_2 \cdot \langle \bar{D}_{e_1} u_i, e_1 \rangle \\ &= d\lambda(e_2) + \lambda(\bar{D}_{e_2} II)(e_1, e_1) + 2\lambda II(\bar{D}_{e_2} e_1, e_1) \\ &\quad + 2\langle \bar{D}_{e_2} \bar{D}_{e_1} u_i, e_1 \rangle + 2\langle \bar{D}_{e_1} u_i, \bar{D}_{e_2} e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Comme l'équation de Codazzi nous dit aussi que  $(\bar{D}_{e_1} II)(e_2, e_2) = (\bar{D}_{e_2} II)(e_1, e_2)$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= e_2 \cdot \lambda + \lambda(\bar{D}_{e_1} II)(e_2, e_1) + 2\langle \bar{R}_{e_1, e_2} u_i, e_1 \rangle \\ &\quad + 2\langle \bar{D}_{e_1} \bar{D}_{e_2} u_i, e_1 \rangle + 2\langle \bar{D}_{[e_2, e_1]} u_i, e_1 \rangle + 2\langle \bar{D}_{e_1} u_i, \bar{D}_{e_2} e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Or  $II(e_1, e_2) = 0$  sur  $C_i$ , et  $\langle \bar{R}_{e_1, e_2} u_i, e_1 \rangle = 0$  car  $u_i$  est parallèle à  $e_1$  sur  $C_i$ . Donc

$$\begin{aligned} 0 &= d\lambda(e_2) - \lambda II(\bar{D}_{e_1} e_2, e_1) - \lambda II(e_2, \bar{D}_{e_1} e_1) + 2e_1 \cdot \langle \bar{D}_{e_2} u_i, e_1 \rangle \\ &\quad - 2\langle \bar{D}_{e_2} u_i, \bar{D}_{e_1} e_1 \rangle - 2\langle \bar{D}_{\bar{D}_{e_1} e_2} u_i, e_1 \rangle + 2(\langle \bar{D}_{\bar{D}_{e_2} e_1} u_i, e_1 \rangle + \langle \bar{D}_{e_1} u_i, \bar{D}_{e_2} e_1 \rangle). \end{aligned}$$

Mais  $\lambda II + 2\delta^* u_i = 0$ , et le dernier terme est donc  $-\lambda II(e_1, \bar{D}_{e_2} e_1) = 0$ ; de plus,  $2(\delta^* u_i)(e_1, e_2) = 0$ , si bien que  $\langle \bar{D}_{e_2} u_i, e_1 \rangle = -\langle \bar{D}_{e_1} u_i, e_2 \rangle = -l\kappa_i$ . Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i - \lambda\kappa_2\kappa_i - 2e_1 \cdot (l\kappa_i) - 2\langle \bar{D}_{e_2} u_i, \kappa_i e_2 \rangle + 2\kappa_i \langle \bar{D}_{e_1} u_i, e_1 \rangle \\ &= d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i - \lambda\kappa_2\kappa_i - 2\kappa_i(e_1 \cdot l) + \kappa_i \lambda\kappa_2 + 2\kappa_i(e_1 \cdot l) \end{aligned}$$

et finalement

$$(6) \quad d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i = 0.$$

Il est facile de montrer (et classique) que

$$II' = \lambda III + 2\delta_{II}^* u_i - \bar{D}d\lambda$$

car  $II$  est défini avec la normale à  $\Sigma$  dirigée vers la partie convexe; donc

$$\begin{aligned} II'(e_1, e_2) &= 2(\delta_{II}^* u_i)(e_1, e_2) - \bar{D}d\lambda(e_1, e_2) \\ &= u_i \cdot II(e_1, e_2) + II([e_1, u_i], e_2) \\ &\quad + II([e_2, u_i], e_1) - e_1 \cdot d\lambda(e_2) + d\lambda(\bar{D}_{e_1} e_2) \\ &= II(\bar{D}_{e_1} u_i - \bar{D}_{u_i} e_1, e_2) \\ &\quad + II(\bar{D}_{e_2} u_i - \bar{D}_{u_i} e_2, e_1) + e_1 \cdot (\lambda\kappa_i) - d\lambda(\kappa_i e_1). \end{aligned}$$

Mais  $II(\overline{D}_{e_1}u_i - \overline{D}_{u_i}e_1, e_2) = 0$  car  $u_i$  est parallèle à  $e_1$  sur  $C_i$ ; par ailleurs,

$$\begin{aligned} II(\overline{D}_{e_2}u_i, e_1) &= \langle \overline{D}_{e_2}u_i, e_1 \rangle = -\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_2 \rangle \\ &= -l\kappa_i = \langle D_{u_i}e_2, e_1 \rangle = II(\overline{D}_{u_i}e_2, e_1) \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$(7) \quad II'(e_1, e_2) = 0.$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} II'(e_1, e_1) &= \lambda + u_i \cdot II(e_1, e_1) + 2II([e_1, u_i], e_1) - e_1 \cdot e_1 \cdot \lambda + (\overline{D}_{e_1}e_1) \cdot \lambda \\ &= \lambda + 2II(\overline{D}_{e_1}u_i - \overline{D}_{u_i}e_1, e_1) - e_1 \cdot e_1 \cdot \lambda + \kappa_i d\lambda(e_2) \\ &= \lambda + 2\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_1 \rangle - e_1 \cdot e_1 \cdot \lambda - \kappa_i^2 \lambda \\ &= \lambda II(e_1, e_1) + 2(\delta^* u_i)(e_1, e_1) - e_1 \cdot e_1 \cdot \lambda - \kappa_i^2 \lambda \end{aligned}$$

si bien que, si on appelle  $\theta$  la coordonnée sur  $C_i$ ,

$$(8) \quad II'(e_1, e_1) = -\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} - \kappa_i^2 \lambda.$$

Mais  $2\lambda = f'$  sur  $C_i$ , (7) et (8) montrent donc que

$$2B'e_1 = -\left(\kappa_i^2 f' + \frac{d^2 f'}{d\theta^2}\right) e_1$$

et donc, avec (6),

$$2\omega(e_1) = df'(J_0 B' e_1) = \kappa_i \left(\kappa_i^2 f'^2 + f' \frac{d^2 f'}{d\theta^2}\right).$$

En intégrant sur  $C_i$ , on trouve que

$$\int_{C_i} \omega = \kappa_i \int_{C_i} \kappa_i^2 - \left(\frac{df'}{d\theta}\right)^2 d\theta$$

$C_i$  est de longueur  $2\pi L_i$ , avec  $L_i \leq 1/\kappa_i$ . Posons  $\theta = L_i t$  ( $t$  varie donc dans  $(0, 2\pi)$ ) :

$$\int_{C_i} \omega = \kappa_i \int_0^{2\pi} \kappa_i^2 f'^2 - \left(\frac{1}{L_i}\right)^2 \left(\frac{df'}{dt}\right)^2 dt$$

et  $\kappa_i \leq 1/L_i$ . Comme la longueur de  $C_i$  est laissée invariante par  $V_i$ ,

$$\int_{C_i} f'(t) dt = 0$$

et la décomposition de la restriction  $f'|_{C_i}$  en ses composantes de Fourier montre que

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \left( \frac{df'}{dt} \right)^2 dt.$$

On trouve donc que

$$\int_{C_i} \omega \leq 0.$$

En combinant ceci avec (5), on voit que  $\omega \equiv 0$  sur  $\Sigma$ , donc  $d\omega = 0$ , donc  $\det(B') = 0$  par (4), et, comme  $\text{tr}(B^{-1}B') = 0$ ,  $B' = 0$ . La déformation  $V$  est donc triviale.  $\square$

On peut maintenant en déduire la

*Démonstration du lemme 4.1.* — On se donne une déformation  $(C_t)$  de  $C$  qui engendre  $C'$  en 0. On déduit de  $(C_t)$  une déformation  $(g_t)$  de  $g$  parmi les plongements induisant une métrique à courbure  $K_0$ . Soit  $v := (dg_t/dt)|_{t=0}$  le champ de vecteurs sur  $g(\Sigma)$  associé à la variation infinitésimale  $C'$ . Soit  $B_i$  un bout de  $\Sigma$ ; en faisant agir une isométrie infinitésimale de  $H^3$ , on peut se ramener au cas où  $(C_t)$  ne change pas le bord à l'infini de  $B_i$ , qui est un cercle. En d'autres termes, au voisinage de  $B_i$ , on décompose  $v$  en  $V_i + v_i$ , où  $V_i$  est un champ de Killing qui, en  $X_0$ , est parallèle à l'axe de  $C_i$ .

$\rho_* v_i$  est alors un champ de vecteurs sur  $(\rho_* \circ g)(\Sigma)$  qui s'annule sur le cercle de  $S^2$  correspondant à  $B_i$ . De plus,  $\rho_* v_i$  laisse  $(\rho_* \circ g)(\Sigma)$  asymptote à l'image par  $\rho$  du plan ombilique à courbure  $K_0$  s'appuyant sur l'image de  $\partial_\infty B_i$ , qui est une surface tangente à  $S^2$ . La composante radiale de  $\rho_* v_i$  décroît donc comme le carré de la distance à  $\rho(\partial_\infty B_i)$  sur  $(\rho \circ g)(\Sigma)$ , et donc comme la distance à  $S^2$  dans  $B^3$ . De plus, la composante de  $\rho_* v_i$  normale à la direction radiale est tangente à  $\rho(\partial_\infty B_i)$  au bord. La transformation de Pogorelov agit sur  $\rho_* v_i$  en multipliant la composante radiale par  $1/(1-R^2)$ ; donc  $\mathcal{P}'(v_i)$  est un champ de vecteurs dont la composante radiale et la composante tangente à  $\rho(C_i)$  sont en  $O(1)$ , et dont la composante tangente à  $S^2$  mais normale à  $\rho(C_i)$  tend vers 0.

Par ailleurs,  $V_i$  est un champ de Killing, donc son image par  $\mathcal{P}'$  aussi. En faisant la même analyse pour chacun des bouts de  $\Sigma$ , on voit que l'image de  $v$  par la transformation de Pogorelov du lemme 3.4 vérifie les hypothèses du lemme 4.2. On peut donc appliquer le lemme 4.2 à l'image  $\mathcal{P}'(v)$  de  $v$  par  $\mathcal{P}'$ , et on trouve que  $\mathcal{P}'(v)$  est triviale, donc  $v$  aussi.  $\square$

De même, on a dans  $S_{1,+}^3$  :

LEMME 4.3. — Soit  $(\tilde{K}_0, \tilde{g}) \in \tilde{\mathcal{I}}$  avec  $\tilde{\Psi}((\tilde{K}_0, \tilde{g})) = (\tilde{K}_0, \tilde{C}) \in \mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B}$  et  $\tilde{\Phi}(\tilde{g}) = (\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})$ . Alors  $\tilde{\Pi}_* : T_{(\tilde{K}_0, \tilde{C})} \mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B} \mapsto T_{(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})} \mathcal{M}$  est injective.

La preuve est la même que pour le lemme précédent, car on peut se restreindre à une variation  $\tilde{C}'$  qui est nulle sur la composante  $\mathbf{R}_-^*$  de  $\mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B}$ . Mais on se place maintenant — en utilisant la dualité de la section 3 — dans  $S_{1,+}^3$ , et on utilise le lemme 3.8 au lieu du lemme 3.5. La surface  $\tilde{\rho}(\tilde{\Sigma})$  est dans l'extérieur de  $B^3$ .

### 5. Surfaces développables.

On donne dans cette section une description des surfaces convexes à courbure extrinsèque nulle (c'est-à-dire développables) dans  $H^3$ , dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles.

LEMME 5.1. — Soit  $\Sigma$  une surface convexe développable complète  $C^2$  plongée dans  $H^3$ . Alors  $\Sigma$  est incluse dans le bord de l'enveloppe convexe de son bord à l'infini  $C := \partial_\infty \Sigma \subset \partial_\infty H^3$ .

Le bord de l'enveloppe convexe de  $C$  contient aussi d'autres composantes connexes, qui seront dans notre cas les plans s'appuyant sur chacun des cercles du bord à l'infini  $C$ .

*Démonstration du lemme 5.1.* — On sait (voir [Pog73]) que  $\Sigma$  se décompose en des régions totalement géodésiques, et en un fermé feuilleté par des géodésiques de  $H^3$  sur lesquelles la seconde forme fondamentale de  $\Sigma$  s'annule. Ces géodésiques ont nécessairement leurs "extrémités" sur  $\partial_\infty H^3$ . On en déduit que  $\Sigma$  est dans l'enveloppe convexe de  $C$ .

Mais  $\Sigma$  est convexe, ce qui implique (comme on le voit en considérant les enveloppes convexes de domaines de  $\Sigma$  de plus en plus grands) que le domaine convexe qu'elle délimite contient l'enveloppe convexe de son bord à l'infini. □

Réciproquement, pour  $C \in \mathcal{B}$  donné, le bord de son enveloppe convexe (privé des plans s'appuyant sur chacun des cercles) est une surface convexe réglée (sur le complémentaire d'un ouvert totalement géodésique), donc développable. On a donc une bijection  $\Psi_{-1} : \mathcal{I}_{-1} \rightarrow \mathcal{B}$  entre les surfaces ouvertes convexes développables et  $\mathcal{B}$ . Comme on a aussi une application naturelle  $\Phi_{-1} : \mathcal{I}_{-1} \rightarrow \mathcal{M}_0$  qui à un plongement associe sa métrique induite, on peut poser  $\Pi_{-1} := \Phi_{-1} \circ (\Psi_{-1})^{-1}$ .

## 6. Propreté.

On va étudier maintenant la propriété des opérateurs  $\Pi, \tilde{\Pi}, \Pi_{-1}$ .

LEMME 6.1. —  $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$  est propre.

*Démonstration.* — Soit  $(b_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{B}$  telle que  $(\sigma_n) := (\Pi(b_n))$  converge vers  $\sigma \in \mathcal{M}$ . On doit montrer que  $(b_n)$  admet une sous-suite convergente dans  $\mathcal{B}$ .

Comme  $\mathcal{B}$  est définie avec un quotient par  $\text{Isom}(H^3)$ , on peut choisir une suite de plongements  $\phi_n : \Sigma \rightarrow H^3$  telle que la métrique induite par  $\phi_n$  soit  $\sigma_n$  et que le bord à l'infini de  $\phi_n$  soit  $b_n$ , et on peut supposer qu'il existe  $x \in \Sigma$  tel que  $y = \phi_n(x)$  est indépendant de  $n$ . On peut alors mettre sur  $\partial_\infty H^3$  la métrique obtenue en poussant celle de la sphère unité de  $T_y H^3$  par l'application exponentielle. Chaque  $b_n$  est alors identifié à une famille de  $N$  cercles de  $S^2$  bordant des disques disjoints.

Or l'espace  $E$  des cercles (de rayon éventuellement nul) de  $S^2$  est compact, donc il existe une sous-suite  $(b'_n)$  de  $(b_n)$  qui converge (pour la structure naturelle sur  $\mathcal{B}$  comme ouvert du produit de  $N$  copies de  $E$ ) vers une limite  $b_\infty$ . Il faut montrer que  $b_\infty \in \mathcal{B}$ , c'est-à-dire que  $b_\infty$  ne peut pas contenir de cercle de rayon nul ou de paire de cercles tangents.

On vérifie facilement que si l'un des cercles de  $b_\infty$  est réduit à un point, alors la limite  $\sigma$  des métriques induites a un cusp, et ne peut donc pas être ouverte.  $b_\infty$  ne peut pas non plus contenir deux cercles tangents, sans quoi, par convexité des  $\phi_n$ , aucune boule de centre  $y$  et de rayon  $R$  sur  $(\Sigma, \sigma_n)$  ne pourrait séparer les bouts correspondants de  $\Sigma$  pour  $n$  assez grand, ce qui contredit encore l'existence de la limite  $\sigma$ .  $\square$

Notons que cette démonstration fonctionne exactement de la même manière pour  $\Pi_{-1}$ . On obtient ainsi le

LEMME 6.2. —  $\Pi_{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}_0$  est propre.

Finalement, la preuve de la propriété de  $\tilde{\Pi}$  est un peu plus délicate.

LEMME 6.3. —  $\tilde{\Pi} : \mathbf{R}_*^* \times \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  est propre.

*Démonstration.* — On considère encore une suite  $(\tilde{K}_n, b_n)$  d'éléments de  $\mathbf{R}_*^* \times \mathcal{B}$ , et on suppose que la suite  $(\tilde{K}_n, \tilde{\sigma}_n) = (\tilde{\Pi}(\tilde{K}_n, b_n))$  converge vers une limite  $(\tilde{K}, \tilde{\sigma})$ . On note  $(\tilde{\phi}_n)$  une suite de plongements de  $\Sigma$  dans  $S_1^3$  qui induisent  $\tilde{\sigma}_n$  — c'est-à-dire deux de plongements dans  $H^3$  dont

la troisième forme fondamentale est  $\tilde{\sigma}_n$  — et dont le bord à l'infini est  $b_n$ . On suppose enfin qu'il existe un point  $x \in \Sigma$  tel que le 1-jet  $(j^1\phi_n)(x)$  est constant.

On peut alors se restreindre à un disque  $D$  (pour  $\tilde{\sigma}_n$ ) centré en  $x$  du revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ , et appliquer le théorème 5.6 (p. 287) de [Sch96], qui affirme que, si  $(\tilde{\phi}_n)$  ne converge pas  $C^\infty$  vers un plongement isométrique d'une surface à courbure constante, alors il existe une sous-suite  $(\tilde{\phi}'_n)$  de  $(\tilde{\phi}_n)$ , une géodésique maximale  $\gamma$  de  $D$ , et une géodésique  $\Gamma$  de  $S_1^3$  telle que  $(\tilde{\phi}'_n|_\gamma)$  converge vers une isométrie sur  $\Gamma$ .

En prenant une suite de disques de plus en plus grands et en extrayant des sous-suites, on voit que, toujours si  $(\tilde{\phi}_n)$  ne converge pas  $C^\infty$  vers un plongement isométrique, alors il existe une géodésique  $\gamma$  maximale de  $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma})$  et une géodésique  $\Gamma$  de  $S_1^3$  telles que (quitte à extraire une sous-suite)  $(\tilde{\phi}_n|_\gamma)$  converge vers une isométrie sur  $\Gamma$ . En revenant de  $\tilde{\Sigma}$  à  $\Sigma$ , on trouve qu'une géodésique de  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  devrait être de longueur  $2\pi$  — car c'est la longueur de toutes les géodésiques de type espace de  $S_1^3$  — ce qui est exclu.

Donc une sous-suite de  $(\tilde{\phi}_n)$  doit converger  $C^\infty$  sur les compacts vers un plongement de  $\Sigma$  dans  $S_1^3$  ayant un bord à l'infini  $b_\infty$ ; il existe donc une sous-suite de  $(b_n)$  qui converge vers  $b_\infty$ , ce qu'on voulait montrer.  $\square$

## 7. Conclusions.

Donnons la preuve du lemme A. On note que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{M}$  sont deux variétés de même dimension  $3N - 6$ , et que  $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$  est un opérateur localement injectif (lemme 4.1). De plus, il est propre d'après le lemme 6.1.  $\Pi$  est donc un homéomorphisme local de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{M}$ .

D'après la description de  $\pi_1(\mathcal{M})$  et de  $\pi_1(\mathcal{B})$  qui se trouve dans l'introduction, on voit facilement que chaque élément de  $\pi_1(\mathcal{M})$  se relève en un élément de  $\pi_1(\mathcal{B})$ ; ainsi,  $\Pi_* : \pi_1(\mathcal{B}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M})$  est surjectif, et  $\Pi$  est donc un homéomorphisme global de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{M}$ .

La démonstration du lemme B se fait de la même manière, à ceci près que les espaces en jeu ont une dimension de plus à cause de la présence de  $\tilde{K}_0$  : l'injectivité locale de  $\tilde{\Pi}$  vient du lemme 4.3, sa propriété du lemme 6.3.  $\tilde{\mathcal{M}}$  est encore connexe, car si  $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma}_0), (\tilde{K}_1, \tilde{\sigma}_1) \in \tilde{\mathcal{M}}$ , on peut leur associer  $\sigma_0 := \tilde{K}_0.\tilde{\sigma}_0, \sigma_1 := \tilde{K}_1.\tilde{\sigma}_1 \in \mathcal{M}_0$ , et, comme  $\mathcal{M}_0$  est connexe, il existe un chemin  $\sigma_t$  joignant  $\sigma_0$  à  $\sigma_1$  dans  $\mathcal{M}_0$ . Puis on note  $L_0$  la longueur de la plus courte géodésique des  $\sigma_t$  pour

$t \in [0, 1]$ , et on définit un chemin qui transforme d'abord  $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma}_0)$  en  $((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2 \tilde{K}_0 \tilde{\sigma}_0) = ((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2 \cdot \sigma_0)$  par homothétie, puis en  $((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2 \cdot \sigma_1) = ((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2 \tilde{K}_1 \tilde{\sigma}_1)$  en suivant le chemin homothétique de  $(\sigma_t)$ , enfin en  $(\tilde{K}_1, \tilde{\sigma}_1)$  par homothétie à nouveau. Le choix du coefficient d'homothétie nous assure qu'on reste ainsi dans  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

Ainsi,  $\tilde{\Pi}$  est un revêtement de  $\tilde{\mathcal{M}}$  par  $\mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B}$ . Comme pour  $\Pi$ , chaque élément de  $\pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$  se relève en un élément de  $\pi_1(\mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B})$ , si bien que  $\tilde{\Pi}_*$  est surjectif, et  $\tilde{\Pi}$  est un homéomorphisme global.

La preuve du théorème C est directe : d'après le lemme 5.1, chaque réunion de  $N$  cercles de  $S^2$  bordant des disques disjoints est le bord à l'infini d'une unique surface convexe développable (qui est une composante connexe du bord de l'enveloppe convexe des  $N$  cercles). Ceci définit (cf la section 5) une application  $\Pi_{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}_0$  qui est propre d'après le lemme 6.2.

Identifions tous les espaces  $\mathcal{M}$  pour les différentes valeurs de  $K_0 \in ]-1, 0[$ , et  $\mathcal{M}_0$ , qui ne diffèrent que par une homothétie.  $\Pi_{-1}$  peut se voir comme la limite (quand  $K_0 \rightarrow -1$ ) de la famille des homéomorphismes  $\Pi_{K_0} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ . On en déduit que  $\partial(\Pi_{-1}(\mathcal{B}))$  est, dans  $\mathcal{M}$ , l'ensemble des limites de suites  $\Pi_{-1}(b_n)$ , où  $(b_n)$  ne converge pas dans  $\mathcal{B}$ . Comme  $\Pi_{-1}$  est propre,  $\partial\Pi_{-1}(\mathcal{B}) = \emptyset$ , ce qui implique que  $\Pi_{-1}$  est surjectif.

Donnons enfin la preuve du théorème D. Soit  $K < K'$ . D'après le lemme 2.2,  $\Sigma_{K'}$  est à l'extérieur (i.e. reste du côté concave) de  $\Sigma_K$  en dehors d'un compact. Pour montrer que  $\Sigma_K \cap \Sigma_{K'} = \emptyset$ , on raisonne comme dans la preuve du lemme 2.3 : on considère les surfaces  $\Sigma_t$  à distance  $t$  de  $\Sigma_{K'}$  à l'extérieur de  $\Sigma_{K'}$ , et on note qu'elles ont une courbure  $K_t > K'$ . Si  $\Sigma_K \cap \Sigma_{K'} \neq \emptyset$ , il existerait un plus grand  $t$  tel que  $\Sigma_t \cap \Sigma_K \neq \emptyset$ . Alors, au point de contact de  $\Sigma_t$  et de  $\Sigma_K$ ,  $\Sigma_K$  serait à l'intérieur de  $\Sigma_t$  alors que  $K < K_t$ , c'est impossible.

Par ailleurs, quand  $K \rightarrow -1$ ,  $\Sigma_K \rightarrow \Sigma_{-1}$ ; et, si on fixe  $K_0 \in ]-1, 0[$  et qu'on note encore  $\Sigma_t$  les surfaces à distance  $t$  de  $\Sigma_{K_0}$  du côté extérieur, on voit encore (comme dans la preuve du lemme 2.3) que, pour  $K$  assez proche de 0,  $\Sigma_K \cap \Sigma_t = \emptyset$ , si bien que  $\lim_{K \rightarrow 0^-} d(\Sigma_K, \Sigma_{K_0}) = \infty$ . Les  $(\Sigma_K)_{K \in ]-1, 0[}$  feuilletent donc  $\Omega_B$ .

Soit  $m \in \tilde{\Omega}_B$ . Par définition,  $m$  est dual d'un plan orienté  $p$  de  $H^3$  qui laisse  $H^3 \setminus \Omega_B$  sur son côté opposé à sa normale (orientée). Comme les  $(\Sigma_K)_{K \in ]-1, 0[}$  feuilletent  $\Omega_B$  et sont convexes,  $p$  est nécessairement tangent à une unique  $\Sigma_K$ ;  $m$  est donc dans une unique  $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$  (pour  $\tilde{K} = K/(K+1)$ ).

Réciproquement, si  $p$  est un plan orienté de  $H^2$  tangent à une surface  $\Sigma_K$ , alors, par convexité de  $\Sigma_K$ ,  $p$  ne rencontre pas l'intérieur de  $\Sigma_K$ , et donc pas non plus l'intérieur de  $\Sigma_{-1}$ , et donc le point dual de  $p$  est dans  $\tilde{\Omega}_B$ . Ainsi, les  $(\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}})_{\tilde{K} \in ]-\infty, 0[}$  feuilletent  $\tilde{\Omega}_B$ .

Notons que  $\tilde{\Omega}_B$  a une structure géométrique simple. Plaçons-nous pour la comprendre dans le modèle projectif de  $S^3_{1,+}$  (section 3).  $S^3_{1,+}$  correspond à l'extérieur de la boule  $B(0, 1)$  de rayon 1 de  $\mathbf{R}^3$ , et  $B$  à la réunion de  $N$  cercles  $(C_i)_{i \in \mathbf{N}_N}$  de  $\partial B(0, 1)$  bordant des disques disjoints. Pour  $i \in \mathbf{N}_N$ , notons  $T_i$  le cône (ou le cylindre) convexe bordé par la réunion des droites de  $\mathbf{R}^3$  orthogonales à  $C_i$  et tangentes à  $\partial B(0, 1)$ .  $T_i \cap (\mathbf{R}^3 \setminus B(0, 1))$  a deux composantes connexes dont une, soit  $T'_i$ , contient les  $C_j, j \neq i$  dans son adhérence. On peut alors vérifier facilement que  $\tilde{\Omega}_B$  correspond, dans le modèle projectif, à l'intersection des  $T'_i, i \in \mathbf{N}_N$ .

Dans  $\partial\tilde{\Omega}_B$ , les intersections deux à deux des  $\partial T'_i$  sont des arcs de cercles dont la réunion forme un graphe qui est dual de  $\Sigma_{-1}$  ( $\Sigma_{-1}$  n'est pas strictement convexe mais au contraire réglée, c'est pourquoi son dual est de dimension 1 seulement).

Le théorème D montre que, pour un bord fixé, les  $(\Sigma_K)$  et les  $(\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}})$  "divergent" en partant à l'infini quand  $K \rightarrow 0$  (donc quand  $\tilde{K} \rightarrow 0$ ). Ceci correspond au fait qu'il existe seulement deux catégories de surfaces complètes plates dans  $H^3$ , les horosphères et les tubes à distance constante d'une géodésique. Comme une surface convexe de  $S^3_1$  est plate si et seulement si sa surface duale l'est (car  $\tilde{K} = K/(K + 1)$ ), ce résultat se transpose dans  $S^3_1$ .

Si on prend une famille  $(\sigma_K)_{K \in ]-1, 0[}$  de métriques complètes à courbure constante  $K$  sur une surface  $\Sigma$  difféomorphe à  $S^2$  privée de  $N$  points, et si on suppose que  $(\sigma_K)$  converge sur les compacts vers une métrique  $\sigma_0$  complète plate quand  $K \rightarrow 0$ , alors nécessairement  $N = 1$  (et  $(\Sigma, \sigma_0)$  est le plan euclidien) ou bien  $N = 2$  (et  $(\Sigma, \sigma_0)$  est un cylindre euclidien).

D'après le théorème A, il existe une famille  $(\Sigma_K)_{K \in ]-1, 0[}$  de surfaces de  $H^3$  dont les bords à l'infini  $(B_K)$  sont composés de cercles. Si  $N = 1$ , la situation est transparente. Si  $N = 2$ , les  $(B_K)$  ne peuvent pas être fixes, mais peuvent (si on les normalise par l'action de  $\text{Isom}(H^3)$ ) converger vers deux points  $p_+, p_-$ . On vérifie alors assez facilement que les  $(\Sigma_K)$  convergent sur les compacts vers une surface  $\Sigma_0$  isométrique à  $(\Sigma, \sigma_0)$  et dont le bord à l'infini est constitué de  $p_-$  et  $p_+$  ( $\Sigma_0$  est un tube à distance constante de la géodésique d'extrémités  $p_-$  et  $p_+$ ).



Par dualité, la même situation se produit aussi dans  $S_1^3$ ; en d'autres termes, si on note  $\mathbb{I}_K$  la troisième forme fondamentale de  $\Sigma_K$ , alors  $(\mathbb{I}_K)$  converge quand  $K \rightarrow 0$  vers une métrique  $\mathbb{I}_0$  plate, et les surfaces  $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$  duales des  $\Sigma_K$  convergent sur les compacts vers la surface  $\tilde{\Sigma}_0$  duale de  $\Sigma_0$ . La plus courte géodésique fermée de  $(\Sigma, \mathbb{I}_0)$  est de longueur strictement supérieure à  $2\pi$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [CD95] R. CHARNEY and M. DAVIS, The polar dual of a convex polyhedral set in hyperbolic space, *Michigan Math. J.*, 42 (1995), 479–510.
- [Lab89] F. LABOURIE, Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes, *Journal of Differential Geometry*, 30 (1989), 395–424.
- [LS96] F. LABOURIE and J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes fuchsienues dans les espaces lorentziens à courbure constante, Prépublication 96-05, Université de Paris-Sud, 1996.
- [Pog73] A. V. POGORELOV, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*. American Mathematical Society, 1973, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 35.
- [RH93] I. RIVIN and C. D. HODGSON, A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, *Invent. Math.*, 111 (1993), 77–111.
- [RS94] H. ROSENBERG and J. SPRUCK, On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space, *Journal of Differential Geometry*, 40 (1994), 379–409.
- [Sch] J.-M. SCHLENKER, Métriques sur les polyèdres hyperboliques convexes, Prépublication no 97-18, Université de Paris-Sud, à paraître, *Journal of Differential Geometry*.
- [Sch96] J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante, *Comm. in Analysis and Geometry*, 4 (1996), 285–331.
- [Spi75] M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to geometry*, Vol. I-V, publish or perish, 1970-1975.

Manuscrit reçu le 7 avril 1997,  
accepté le 23 septembre 1997.

Jean-Marc SCHLENKER,  
Université Paris-Sud  
Mathématiques  
Topologie et Dynamique (URA 1165 CNRS)  
Bâtiment 425  
91405 Orsay Cedex (France).