ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE KAHANE

# Le rôle des algèbres $A$ de Wiener, $A^\infty$ de Beurling et $H^1$ de Sobolev dans la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling

*Annales de l'institut Fourier*, tome 48, nº 3 (1998), p. 611-648

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_611_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**48**, 3 (1998), 611-648

# LE RÔLE DES ALGÈBRES $A$ DE WIENER $A^\infty$ DE BEURLING ET $H^1$ DE SOBOLEV DANS LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS GENERALISÉS DE BEURLING

**par Jean–Pierre KAHANE**

## Introduction.

En 1937, Beurling a donné un nouveau point de vue sur le théorème des nombres premiers d'Hadamard et de la Vallée Poussin [2]. Voici une observation préliminaire : l'ensemble des nombres premiers ordinaires est multiplicativement libre, et le semi-groupe multiplicatif qu'il engendre est l'ensemble des entiers $\geqslant 2$. Partons maintenant d'une suite croissante $(p_n)$

$$1 < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots,$$

désignons par $P$ l'ensemble des $p_n$ et supposons $P$ multiplicativement libre. Désignons par $N$ le semi-groupe unitaire engendré $P$. Les $p_n$ vont s'appeler les nombres premiers généralisés, et les éléments de $N$ les entiers généralisés. Par exemple, si $P$ est constitué des nombres premiers ordinaires impairs, $N$ est constitué des entiers impairs. On peut s'attendre à ce que, si la distribution de $N$ est assez proche de celle des entiers, ou plus généralement de celle des multiples entiers d'un nombre positif, la distribution de $P$ soit assez proche de celle des nombres premiers. C'est le sujet introduit par Beurling, et ses principaux résultats, que voici, sont extrêmement frappants [2].

Désignons par $N(x)$ et $P(x)$ les fonctions de comptage de $N$ et $P$ :

$$(1)\qquad \begin{cases} N(x) = \operatorname{card} N \cap [1,x[ \\ P(x) = \operatorname{card} P \cap ]1,x[. \end{cases}$$

*Mots-clés :* Nombres premiers – Beurling – Wiener – Sobolev – Fourier.
*Classification math. :* 11M41 - 11N80.

Supposons

$$N(x) = Dx + x\epsilon(x), \quad D > 0, \ \epsilon(x) = o(1) \ (x \to \infty). \tag{2}$$

Si l'on suppose de plus

$$\epsilon(x) = O\left(\frac{1}{(\log x)^{\frac{3}{2}+}}\right) \qquad (x \to \infty) \tag{3}$$

(ici comme dans la suite, $a+$ signifie $a + \delta$ pour $\delta > 0$), on a le «théorème des nombres premiers»

$$P(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty). \tag{TNP}$$

Le même énoncé vaut dans un cadre un peu plus général, où $N(x)$ et $P(x)$ sont deux fonctions croissantes, non nécessairement à valeurs entières, avec la même dépendance formelle que dans le cas (1). Par contre, il existe des fonctions $N(x)$ et $P(x)$, vérifiant (2) avec

$$\epsilon(x) = O\left(\frac{1}{(\log x)^{\frac{3}{2}}}\right) \qquad (x \to \infty) \tag{4}$$

mais non $(TNP)$. Dans l'exemple de Beurling, ces fonctions $N(x)$ et $P(x)$ sont continues; on peut modifier l'exemple de façon qu'elles prennent des valeurs entières et permettent de définir les ensembles $N$ et $P$ (Diamond 1970 [5]).

Dans l'exemple de Beurling, à défaut de $(TNP)$, on a les «inégalités de Tchebycheff»

$$\left\{ \begin{aligned} P(x) &= O\left(\frac{x}{\log x}\right) \\ \frac{x}{\log x} &= O(P(x)) \end{aligned} \right\} \qquad (x \to \infty). \tag{IT}$$

En 1973, dans deux articles destinés à paraître à la suite l'un de l'autre, Hall et Diamond ont montré que

$$\epsilon(x) = O\left(\frac{1}{(\log x)^{\gamma}}\right) \qquad (x \to \infty) \tag{5}$$

n'entraîne jamais $(IT)$ quand $\gamma < 1$, et entraîne $(IT)$ dès que $\gamma > 1$ (Hall [8], Diamond [6]). En 1987, Zhang Wen-bin a amélioré le résultat de Diamond sous la forme suivante : si

$$|\, \epsilon(x) \,| \leqslant \epsilon^*(x) \downarrow, \qquad \int \epsilon^*(x) \frac{dx}{x} < \infty, \tag{6}$$

on a $(IT)$ [15].

Deux conjectures ont été formulées et argumentées en relation avec les résultats que nous venons de mentionner. La première est que la condition

$$\int |\epsilon(x)\log x|^2 \frac{dx}{x} < \infty \tag{7}$$

entraîne $(TNP)$ (Bateman et Diamond 1969 [1], Diamond 1969 [4]). La seconde est que la condition

$$\int |\epsilon(x)| \frac{dx}{x} < \infty \tag{8}$$

entraîne $(IT)$ (Diamond 1974 [7], Zhang 1987 [15]). Nous allons voir au cours de cet article que la première est correcte et que la seconde ne l'est pas (théorèmes 1 et 2).

Naturellement, l'outil essentiel est la fonction *dzèta* adaptée :

$$\zeta(s) = \sum_{n\in N} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Les conditions (6), (7) et (8) s'interprètent comme des propriétés de la fonction $it\,\zeta(1+it)$. Elles signifient que la fonction

$$Y(t) = \frac{it\,\zeta(1+it) - D}{it(1+it)} \tag{10}$$

appartient respectivement à l'algèbre $A^\infty$ de Beurling, à l'algèbre $H^1$ de Sobolev et à l'algèbre $A$ de Wiener.

Rappelons les définitions de ces algèbres. L'algèbre $A$ $(= A(\mathbb{R}))$ de Wiener est constituée des transformées de Fourier :

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iut} f(u)du \tag{11}$$

de fonctions $f$ intégrables sur $\mathbb{R}$. L'algèbre $H^1$ $(= H^1(\mathbb{R}))$ de Sobolev est constituée des fonctions $\hat{f}$ pour lesquelles $f \in L^2\left((1+u^2)du\right)$. Enfin l'algèbre $A^\infty$ $(= A^\infty(\mathbb{R}))$ de Beurling est constituée des fonctions $\hat{f}$ pour lesquelles $|f(u)| \leqslant f^*(|u|)$, $f^*$ étant une fonction décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Historiquement, l'algèbre $A$ de Wiener est liée au théorème des nombres premiers, via les théorèmes taubériens (Wiener 1932 [13], 1933 [14]). Les références d'origine pour les classes de Sobolev et les algèbres de Beurling sont (Sobolev 1936 [12]) et (Beurling 1964 [3], pp. 8 et 9).

## Notations, problèmes et résultats principaux.

Désormais $P(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ (au sens large), nulle sur $[0,1]$ et, disons, continue à gauche ; $N(x)$ a les mêmes propriétés, et les deux fonctions sont liées au moyen de la fonction *dzèta* :

$$(12) \qquad \zeta(s) = \int_1^\infty x^{-s} dN(x) = \exp \int_1^\infty \log(1-x^{-s})^{-1} dP(x).$$

Il est commode d'associer à $\zeta$ la fonction $Z$ définie par

$$(13) \qquad Z(s) = \exp \int_1^\infty x^{-s} dP(x).$$

Ainsi

$$(14) \qquad \frac{\zeta(s)}{Z(s)} = \exp \int_1^\infty \left(\frac{1}{2}x^{-2s} + \frac{1}{3}x^{-3s} + \cdots\right) dP(x).$$

On peut donner à (12), (13) et (14) un sens formel. Cependant, moyennant la condition

$$(15) \qquad N(x) = O(x) \qquad (x \to \infty),$$

qui sera vérifiée dans toutes nos hypothèses et toutes nos constructions, chacune des formules (12), (13), (14) définit une fonction analytique de $s = \sigma + it$ dans le demi-plan ouvert $\sigma > 1$. De plus, la fonction (14) et son inverse sont analytiques et bornées dans tout demi-plan $\sigma > \frac{1}{2} +$.

Dans toutes les situations auxquelles nous nous intéresserons, la condition suivante sera vérifiée :

(C) : la fonction $(s-1)\zeta(s)$ est prolongeable par continuité au demi-plan fermé $\sigma \geqslant 1$ et sa valeur en $s=1$ est non nulle.

Il en est alors de même pour la fonction $(s-1)Z(s)$. Posons

$$(16) \qquad \ell_\epsilon(t) = \int_1^\infty x^{-1-\epsilon-it} dP(x) \ (= \log Z(1+\epsilon+it)).$$

En tout point $t$ tel que $Z(1+it) \neq 0$, donc presque partout, $\log Z(\sigma+it)$ tend vers une limite quand $\sigma \downarrow 1$, donc on peut définir

$$(17) \qquad \ell(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \ell_\epsilon(t).$$

De plus, sur un intervalle $[-a,a]$ où $it\,Z(1+it)$ ne s'annule pas, $(\epsilon+it)$ $Z(1+\epsilon+it)$ tend uniformément vers $it\,Z(1+it)$, donc $\log(\epsilon+it)+\ell_\epsilon(t)$ tend uniformément vers $\log it+\ell(t)$, donc

$$\int_{-a}^{a} |\ell_\epsilon(t)-\ell(t)|^2 = o(1) \qquad (\epsilon \downarrow 0). \tag{18}$$

Soit $\Delta$ une fonction triangle portée par $[-a,a]$ ; ainsi $\Delta \geqslant 0$ et $\hat{\Delta} \geqslant 0$. Si $0<\epsilon'<\epsilon$, on a

$$|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)|^2 = \iint_{\mathbb{R}^{+2}} e^{-it(u-v)}(e^{-\epsilon' u}-e^{-\epsilon u})(e^{-\epsilon' v}-e^{-\epsilon v}) \\ e^{-u-v}dP(e^u)dP(e^v)$$

$$\int \Delta(t)\,|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)|^2\,dt = \iint_{\mathbb{R}^{+2}} \hat{\Delta}(u-v)(e^{-\epsilon' u}-e^{-\epsilon u}) \\ (e^{-\epsilon' v}-e^{-\epsilon v})e^{-u-v}dP(e^u)dP(e^v)$$

$$\int \Delta(t-b)\,|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)|^2\,dt = \iint_{\mathbb{R}^{+2}} \hat{\Delta}(u-v)e^{-ib(u-v)}(e^{-\epsilon' u}-e^{-\epsilon u}) \\ (e^{-\epsilon' v}-e^{-\epsilon v})e^{-u-v}dP(e^u)dP(e^v)$$

pour tout $b$ réel, donc

$$\int \Delta(t-b)\,|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)|^2\,dt \leqslant \int \Delta(t)\,|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)|^2\,dt. \tag{19}$$

Il résulte de (18) et (19) que les $\ell_\epsilon$ convergent dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ vers une limite, et (17) permet d'identifier cette limite à $\ell$. En complément de (17), on a donc

$$\ell = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \ell_\epsilon \ \text{ dans } \ L^2_{\text{loc}}. \tag{20}$$

On peut aller plus loin. Si l'on désigne par $L^2_{\text{loc unif}}$ le sous-espace de $L^2_{\text{loc}}$ constitué par les fonctions $g$ vérifiant

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |g(t)|^2 dt < \infty,$$

on a

$$\ell = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \ell_\epsilon \ \text{ dans } \ L^2_{\text{loc unif}}. \tag{20'}$$

Ainsi $\ell$ est une fonction presque-périodique au sens de Stepanoff.

Pour toute fonction $f \in L^2$ à support compact, et plus généralement pour toute fonction $f \in L^2$ vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left( \int_n^{n+1} | f(t) |^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty, \tag{21}$$

de type positif, on a la «formule de Fourier»

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(t) f(t) dt = \int_0^\infty \hat{f}(u) e^{-u} dP(e^u) \tag{FF}$$

avec, selon nos conventions,

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iut} f(t) dt.$$

La preuve de $(FF)$ consiste à écrire de deux manières la limite de l'intégrale $\int f \, \ell_\epsilon$ ; pour le premier membre on fait usage de (20) ou (20′), et pour le second du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Revenons à l'hypothèse (2) :

$$N(x) = Dx + x\epsilon(x), \quad D > 0, \quad \epsilon(x) = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

À partir de (12), en intégrant par parties, on obtient

$$\zeta(s) = \frac{D}{s-1} + D + s \int_1^\infty x^{-s} \epsilon(x) dx \qquad (\sigma > 1). \tag{22}$$

Sous l'hypothèse (C), posons

$$X(t) = \frac{it\,\zeta(1+it) - D - Dit}{it(1+it)}. \tag{23}$$

Formellement, on a

$$X(t) = \int_1^\infty x^{-it} \epsilon(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{-iut} \epsilon(e^u) du, \tag{24}$$

c'est-à-dire que $X(t)$ est la transformée de Fourier de $\epsilon(e^u)$. Les conditions (6), (7), (8) prennent une signification intéressante : elles expriment, respectivement, que $X$ appartient à l'algèbre $A^\infty$ de Beurling, à l'algèbre $H^1$ de Sobolev et à l'algèbre $A$ de Wiener. Écrivons-les de nouveau en introduisant un symbole qui évoque cette interprétation :

$$\int_1^\infty | \epsilon(x) | \frac{dx}{x} < \infty \qquad (\Leftrightarrow X \in A(\mathbb{R})) \tag{A}$$

$$(H) \qquad \int_1^\infty \mid \epsilon(x)\log x \mid^2 \frac{dx}{x} < \infty \qquad\qquad (\Leftrightarrow X \in H^1(\mathbb{R}))$$

$$(A^\infty) \qquad \mid \epsilon(x) \mid \leqslant \epsilon^*(x) \downarrow, \qquad \int_1^\infty \epsilon^*(x)\frac{dx}{x} < \infty \quad (\Leftrightarrow X \in A^\infty(\mathbb{R})).$$

Comme la fonction $\dfrac{1}{1+it}$ appartient à ces trois algèbres et que la fonction $Y(t)$ définie en (10) s'écrit

$$Y(t) = X(t) + \frac{D}{1+it},$$

on vérifie, comme nous l'avons dit en introduction, que les conditions $(A)$, $(H)$ et $(A^\infty)$ signifient aussi respectivement $Y \in A(\mathbb{R})$, $Y \in H^1(\mathbb{R})$ et $Y \in A^\infty(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 1. — *$(H)$ implique $(TNP)$.*

THÉORÈME 2. — *$(A)$ n'implique pas $(IT)$.*

THÉORÈME 3 *(Zhang [15]). — $(A^\infty)$ implique $(IT)$.*

Il est bon de distinguer dans les hypothèses l'aspect global, c'est-à-dire le comportement de la fonction $X$ sur $\mathbb{R}$, et l'aspect local, c'est-à-dire son comportement au voisinage d'un point. Pour cela, considérons les algèbres $A_{\text{loc}}$, $H^1_{\text{loc}}$, $A^\infty_{\text{loc}}$, qui comprennent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et appartenant localement à $A$, $H^1$ et $A^\infty$ respectivement, et aussi les algèbres $A_{\text{loc}}(0)$, $H^1_{\text{loc}}(0)$, $A^\infty_{\text{loc}}(0)$, constituées par des fonctions définies au voisinage de 0 et qui coïncident dans ce voisinage avec des fonctions de $A$, $H^1$ et $A^\infty$ respectivement.

Nous allons examiner les questions suivantes. Pour conclure à l'«inégalité de Tchebycheff» $(IT)$, ou au «théorème des nombres premiers» $(TNP)$, quelles hypothèses, de nature locale ou globale, peut-on faire sur la fonction $it\,\zeta(1+it)$ $(t \in \mathbb{R})$ ? Voici les résultats que nous allons établir. *Nous supposerons toujours que la condition (C) (continuité de $(s-1)\zeta(s)$ pour $\sigma \geqslant 1$ et non nullité en $s=1$) est réalisée.*

THÉORÈME 4. — *Chacune des hypothèses suivantes entraîne $(IT)$ :*

a) *$it\,\zeta(1+it)$ est absolument continue au voisinage de 0*

b) *$it\,\zeta(1+it) \in H^1_{\text{loc}}(0)$*

c) *$it\,\zeta(1+it) \in A^\infty_{\text{loc}}(0)$.*

THÉORÈME 5. — *Chacune des hypothèses suivantes, jointe à l'hypothèse que* $it\,\zeta(1+it)$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$, *entraîne* $(TNP)$ :

a′) $it\,\zeta(1+it)$ *est absolument continue*

b′) $it\,\zeta(1+it) \in H^1_{\mathrm{loc}}$

c′) $it\,\zeta(1+it) \in A^\infty_{\mathrm{loc}}$.

THÉORÈME 6. — *Les hypothèses jointes* $(A)$ *et* $it\,\zeta(1+it)$ *sans zéro sur* $\mathbb{R}$ *n'entraînent pas* $(IT)$, *et a fortiori n'entraînent pas* $(TNP)$.

Remarquons d'abord que b) entraîne a). Remarquons aussi que $X \in A^\infty$ entraîne $it\,\zeta(1+it) \in A^\infty_{\mathrm{loc}}(0)$. Cela résulte du fait que $A^\infty_{\mathrm{loc}}$ est une algèbre et contient les polynômes. Donc le théorème 4 a pour corollaire le théorème 3 (de Zhang). Remarquons enfin que le théorème 2 montre que l'on ne peut pas remplacer $A^\infty_{\mathrm{loc}}(0)$ par $A_{\mathrm{loc}}(0)$ dans l'énoncé du théorème 4.

Le théorème 6 a pour corollaire le théorème 2. La démonstration consistera, naturellement, à construire un exemple.

Nous allons maintenant introduire des conditions intermédiaires entre $(H)$ et l'appartenance de $it\,\zeta(1+it)$ à $H^1_{\mathrm{loc}}$. Pour tout $\alpha > 0$, considérons la condition

$$(H\alpha) \qquad it\,\zeta(1+it)\exp(-2\mid t\mid^\alpha) \in H^1.$$

Remarquons que $(H\alpha)$ entraîne $(H\beta)$ si $\beta > \alpha$, et que $(H)$ entraîne $(H\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$. En effet, si l'on se réfère à (23), on voit que $X \in H^1$ entraîne $it\,\zeta(1+it)(1+t^2)^{-1} \in H^1$.

Voici donc une généralisation du théorème 1.

THÉORÈME 7. — *Si* $\alpha < 2$, $(H\alpha)$ *entraîne* $(TNP)$.

Dans l'autre sens :

THÉORÈME 8. — $(H2)$ *n'entraîne pas* $(TNP)$.

La dernière section de cet article sera un catalogue d'exemples, où seront détaillées les relations entre fonctions $P(x)$, $N(x)$ et $\zeta(s)$ associées. En particulier, on y trouvera les exemples de Beurling et de Diamond, et on construira des variantes qui permettent d'affiner les théorèmes «négatifs» 6 et 8.

Nous allons maintenant, tour à tour, démontrer les théorèmes 4, 5, 7, 6 et 8. Le cœur de l'article est la preuve du théorème 7.

## Preuve des théorèmes 4 et 5.

*Preuve du théorème 4.* — Nous ferons usage de la formule $(FF)$

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(t) f(t) dt = \int_0^\infty \hat{f}(u) e^{-u} dP(e^u)$$

en choisissant

$$f(t) = \frac{e^{ity}\varphi(t)}{2\pi(1+it)} \quad (= f_y(t)), \tag{25}$$

où $\varphi$ est une fonction de type positif, indéfiniment dérivable, portée par un intervalle $[-a,a]$ où $it\,\zeta(1+it)$ est absolument continue et ne s'annule pas (cas de l'hypothèse a)) ou appartient à $A^\infty_{\mathrm{loc}}$ et ne s'annule pas (cas de l'hypothèse c)). Alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \delta(u-y) * e^u 1_{\mathbb{R}^-}(u) * \hat{\varphi}(u) \\ &= \int_{u-y}^\infty e^{u-y-v}\hat{\varphi}(v) dv \end{aligned} \tag{26}$$

et

$$\int_0^\infty \hat{f}(u) e^{-u} dP(e^u) = \int_{-y}^\infty P(e^{v+y}) e^{-(v+y)} \hat{\varphi}(v) dv. \tag{27}$$

Montrons d'abord que, sous chacune des hypothèses a), b), c), on a

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(t) \frac{\varphi(t)}{1+it} e^{ity} dt = \frac{2\pi\varphi(0)}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \quad (y \to \infty). \tag{28}$$

Dans l'hypothèse a), $it\,\zeta(1+it)$ est absolument continue et ne s'annule pas sur $[-a,a]$. Il en est de même pour $it\,Z(1+it)$, puisque $\dfrac{Z}{\zeta}(1+it)$ est analytique et sans zéro. Donc

$$\ell(t)\frac{\varphi(t)}{1+it} = \log\frac{1}{it}\varphi(t) + \psi(t) \tag{29}$$

où

$$\log\frac{1}{it} = \log\frac{1}{|t|} - i\frac{\pi}{2}\frac{t}{|t|} \tag{30}$$

et $\psi(t)$ est une fonction absolument continue portée par $[-a,a]$. Or

$$\int \log\frac{1}{it}\varphi(t) e^{ity} dt = \frac{2\pi\varphi(0)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad (y \to \infty) \tag{31}$$

par un calcul direct, et

$$\int \psi(t)e^{ity}dt = o\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (y \to \infty) \tag{32}$$

par le théorème de Riemann-Lebesgue. On obtient bien (28) sous l'hypothèse a), et a fortiori sous l'hypothèse b).

Dans l'hypothèse c), la démonstration est la même, en remplaçant la continuité absolue par l'appartenance à $A^\infty_{\mathrm{loc}}$. On utilise successivement les faits suivants : les fonctions analytiques sont des multiplicateurs de $A^\infty_{\mathrm{loc}}$ ; les fonctions analytiques opèrent dans $A^\infty_{\mathrm{loc}}$ ; les transformées de Fourier de fonctions appartenant à $A^\infty$ sont $o\left(\frac{1}{y}\right)$ à l'infini (parce qu'une fonction $\epsilon^*(y)$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ est $o\left(\frac{1}{y}\right)$). L'hypothèse c) entraîne donc bien (28). Comme, d'après $(FF)$, les premiers membres de (27) et de (28) sont égaux, nous venons d'établir que chacune des hypothèses a), b), c) entraîne

$$\int_{-y}^{\infty} P(e^{v+y})e^{-(v+y)}\hat{\varphi}(v)dv = \frac{2\pi\varphi(0)}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (y \to \infty). \tag{35}$$

Or

$$P(e^y)e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-v}\hat{\varphi}(v)dv \leqslant \int_{-y}^{\infty} P\left(e^{v+y}\right)e^{-(v+y)}\hat{\varphi}(v)dv$$

et cela, joint à (35), entraîne la première partie de $(IT)$, soit $P(e^y)e^{-y} \leqslant K\inf\left(1, \frac{1}{y}\right)$ pour un $K > 0$ convenable et pour tout $y > 0$. Maintenant

$$K\int_{-y}^{-y/2}\hat{\varphi}(v)dv + \frac{2K}{y}\int_{-y/2}^{-\ell}\hat{\varphi} + P(e^{y+\ell})e^{-y+\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{\varphi} + \frac{K}{y}\int_{\ell}^{\infty}\hat{\varphi}$$

$$\geqslant \int_{-y}^{\infty} P(e^{v+y})e^{-(v+y)}\hat{\varphi}(v)dv,$$

et, en choisissant $\hat{\varphi}(v) = O(v^{-2})$ $(v \to \infty)$ puis $\ell$ assez grand, on obtient la seconde inégalité de $(IT)$. Le théorème 4 est démontré.

*Preuve du théorème 5.* — Nous ferons encore usage de (35) en choisissant $f$ de la forme (25), mais maintenant le support de $\varphi$ est arbitraire et nous en profiterons pour prendre pour $\hat{\varphi}$ une approximation de la mesure de Dirac en 0.

Etant donné $\delta > 0$, choisissons $\hat{\varphi}(\geqslant 0)$ de façon que

$$1-\delta \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \hat{\varphi}(u)du < \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(u)du = 1, \tag{36}$$

donc $2\pi\varphi(0) = 1$. Le premier membre de (35) est minoré par l'intégrale prise sur $[-\delta, \delta]$, ce qui donne

$$(1-\delta)e^{-\delta-y}P(e^{y-\delta}) \leqslant \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (y \to \infty) \tag{37}$$

donc, $\delta > 0$ étant arbitraire,

$$\limsup_{y\to\infty} ye^{-y}P(e^y) \leqslant 1. \tag{38}$$

Il en résulte que, pour un $K > 0$ convenable,

$$(x+1)e^{-x}P(e^x) \leqslant K \tag{39}$$

pour tout $x$. Dans le sens opposé, majorons l'intégrale dans (35) par la somme des trois intégrales prises sur $[-y, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, \infty[$. On a

$$\int_{-y}^{-\delta} \cdots \leqslant K \int_{-y}^{-\delta} \frac{\hat{\varphi}(v)}{v+y+1} dv \leqslant \frac{K}{y} \int_{-y}^{-\delta} \hat{\varphi}(v)(1+ \mid v \mid)dv \tag{40}$$

parce que

$$\frac{1}{v+y+1} \leqslant \frac{1+ \mid v \mid}{y}$$

quand $-y \leqslant v \leqslant -\delta$ (c'est vrai aux extrémités donc, par convexité, sur tout l'intervalle). Remarquons que, $\delta$ étant fixé, on peut choisir $\hat{\varphi}$ vérifiant à la fois (36) et

$$\int_{-y}^{-\delta} \hat{\varphi}(v)(1+ \mid v \mid)dv < \delta. \tag{41}$$

Ensuite

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cdots \leqslant e^{\delta-y}P(e^{y+\delta}) \tag{42}$$

et

$$\int_{\delta}^{\infty} \cdots \leqslant K \int_{\delta}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(v)}{v+y+1} dv \leqslant \frac{K}{y} \int_{\delta}^{\infty} \hat{\varphi}(v)dv < \frac{K\delta}{y}. \tag{43}$$

Les formules (40) à (43), jointes à (35) et (36), fournissent

$$\liminf_{y\to\infty} ye^{\delta-y}P(e^{y+\delta}) \geqslant 1-2K\delta \tag{44}$$

et, $\delta > 0$ étant arbitraire,

$$\liminf_{y\to\infty} ye^{-y}P(e^{y}) \geqslant 1. \tag{45}$$

Enfin (38) et (45) donnent $(TNP)$. Cela achève la preuve du théorème 5.

## Propositions auxiliaires en vue du théorème 7.

Rappelons que nous faisons toujours l'hypothèse (C). Nous dirons qu'une fonction $F$ a un zéro d'ordre $\alpha$ au point $t_0$ si $F(t_0) = 0$ et

$$\alpha = \liminf_{t\to t_0} \frac{\log \mid F(t) \mid}{\log \mid t-t_0 \mid}. \tag{46}$$

Proposition 1. — *La somme des ordres des zéros de $\zeta(1+it)$ ne dépasse pas 1.*

*Preuve.* — Nous pouvons remplacer $\zeta(1+it)$ par $Z(1+it)$. Si $\theta$ est un zéro et $\alpha$ son ordre, on a

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\ \ell(t) \leqslant (\alpha-)\log \mid t-\theta \mid +O(1) \quad (t\to\theta) \tag{47}$$

et d'autre part

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\ \ell(t) = \log\frac{1}{\mid t \mid} + O(1) \quad (t\to 0). \tag{48}$$

Soit $\Theta$ un ensemble fini de zéros d'ordres positifs, $\Theta'$ une base du $\mathbb{Z}$-module engendré par $\Theta$, et $\mu$ le produit de convolution

$$\mu = \mathop{*}_{\theta\in\Theta'} \sum_{-N}^{N} \left(1-\frac{\mid n \mid}{N}\right)\delta_{n\theta}, \tag{49}$$

de sorte que la masse de $\mu$ en chaque $\theta \in \Theta$ soit $1^-$ quand $N$ est assez grand et que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ soit positive (ici, naturellement, $1^-$ a la même signification que $1-$ ; dans la suite, nous utiliserons indifféremment les deux notations). Soit $\Delta_\epsilon$ une identité approximative, $\geqslant 0$, portée par $[-\epsilon, \epsilon]$ et d'intégrale égale à 1, et $m_\epsilon = \mu * \Delta_\epsilon$. D'après $(FF)$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}\mathrm{e}\ \ell(t) m_\epsilon(t) dt \geqslant 0. \tag{50}$$

Lorsque $\epsilon$ tend vers zéro la fonction à intégrer est positive au voisinage de 0, bornée supérieurement en dehors de ce voisinage, et négative au voisinage de chaque $\theta \in \Theta$, de sorte que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est majorée par

$$\left(1 - \sum_{\theta \in \Theta} \alpha^-(\theta)\right) \int \Delta_\epsilon(t) \log \frac{1}{|t|} dt,$$

$\alpha(\theta)$ désignant l'ordre du zéro $\theta$. D'où $1 - \sum \alpha(\theta) \geqslant 0$. □

Étant donné $\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (sans rapport avec (46)), désignons par $\Lambda_\alpha$ resp. $\lambda_\alpha$ l'ensemble des fonctions $F(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ vérifiant

$$F(t+h) - F(t) = O(|h|^\alpha) \quad \text{resp. } o(|h|^\alpha) \quad (h \to 0) \tag{51}$$

uniformément sur $\mathbb{R}$. Remarquons que

$$H^1(\mathbb{R}) \subset \lambda_{1/2}, \tag{52}$$

comme conséquence de l'inégalité de Schwarz appliquée à $\int_t^{t+h} F'(s) ds$. En corollaire de la proposition 1 nous voyons que l'hypothèse d'appartenance locale de $it\,\zeta(1+it)$ à $\Lambda_\alpha$ :

$$it\, \zeta(1+it) \in \Lambda_{\alpha,\mathrm{loc}} \tag{53}$$

entraîne que $\zeta(1+it)$ ne s'annule pas lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$, et possède au plus deux zéros, $\theta$ et $-\theta$, lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$. En particulier, l'hypothèse

$$it\, \zeta(1+it) \in H^1_{\mathrm{loc}} \tag{54}$$

entraîne que $\zeta(1+it)$ a au plus deux zéros.

PROPOSITION 2 *(exemple de Beurling). — Choisissons*

$$dP(e^u) = u^{-1} e^u (1 - \cos u) du. \tag{55}$$

*Alors*

$$\begin{cases} Z(s) = \dfrac{\sqrt{1+(s-1)^2}}{s-1} & (\sigma \geqslant 1) \\ Z(1+it) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{it} & \end{cases} \tag{56}$$

*avec la convention que* $\sqrt{1} = 1$ *et* $\sqrt{1-t^2} \sim it$ *quand* $t \to \pm\infty$.

*Preuve.* — On part de

$$\int_0^\infty e^{-u(s-1)} du = \frac{1}{s-1} \qquad (\sigma > 1),$$

on translate par $i$ et $-i$, on ajoute, intègre et exponentie.

Remarquons que dans cet exemple $it\, Z(1+it)$, donc aussi $it\, \zeta(1+it)$, appartiennent à $\Lambda_{1/2}$, et s'annulent en 1 et $-1$.

Proposition 3. — *On suppose* $Z(1+i) = Z(1-i) = 0$ *et*

$$it\, Z(1+it)\exp(-\alpha(t)) \in H^1(\mathbb{R}), \tag{57}$$

*où* $\alpha(t)$ *est une fonction positive paire, croissante sur* $\mathbb{R}^+$, *telle que*

$$\log t = o(\alpha(t)) \quad (t \to \infty). \tag{58}$$

*Alors, pour* $t \geqslant t_0$ *assez grand,*

$$|Z(1+it)| \geqslant \exp(-9\alpha(3t)). \tag{59}$$

*Preuve.* — On applique de nouveau $(FF)$ sous la forme (50), avec $m_\epsilon = \mu * \Delta_\epsilon$, et une autre définition de $\mu$. On choisit ici

(60) $\mu =$

$$\left(\delta_0 + \frac{2}{3}(\delta_1 + \delta_{-1}) + \frac{1}{3}(\delta_2 + \delta_{-2})\right) * \left(\delta_0 + \frac{2}{3}(\delta_\theta + \delta_{-\theta}) + \frac{1}{3}(\delta_{2\theta} + \delta_{-2\theta})\right),$$

où $\epsilon$ est petit (à choisir en fonction de $\theta$) et $\theta$ grand. D'après (57) et (58) nous avons

$$Z(1+it) = O(\exp(1+o(1))\alpha(t)) \quad (t \to \infty). \tag{61}$$

L'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}\mathrm{e}\, \ell(t) m_\epsilon(t) dt \tag{62}$$

se décompose en 25 intégrales $I_a$, prises sur les intervalles $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, avec $a = j + k\theta$, $j$ et $k$ prenant les valeurs entières entre $-2$ et $+2$. En utilisant (47), sous la forme plus précise, justifiée par (52),

$$\begin{cases} \mathcal{R}\mathrm{e}\, \ell(t) \leqslant \frac{1}{2}\log|t-1| + \log o(1) & (t \to 1) \\ \mathcal{R}\mathrm{e}\, \ell(t) \leqslant \frac{1}{2}\log|t+1| + \log o(1) & (t \to -1), \end{cases} \tag{63}$$

et (48), on a l'évaluation

$$I_0 + I_1 + I_{-1} + I_2 + I_{-2} \leqslant \frac{1}{3}\log\frac{1}{\epsilon} + \log o(1) \quad (\epsilon \to 0). \tag{64}$$

Sous l'hypothèse

$$| Z(1+it) | \leqslant 2\exp(-\beta(\theta)) \quad \text{quand } \theta - \epsilon \leqslant t \leqslant \theta + \epsilon, \tag{65}$$

on a

$$I_\theta + I_{-\theta} \leqslant -\frac{4}{3}(\beta(\theta) - \log 2). \tag{66}$$

Compte tenu de (61), la somme de toutes les autres intégrales $I_a$ est majorée par

$$A\alpha(3\theta) + O(1) \qquad (\theta \to \infty,\ \epsilon \to 0),$$

où $A$ est la somme des coefficients, soit

$$A = \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}.$$

En ajoutant,

$$I \leqslant \frac{1}{3}\log\frac{1}{\epsilon} - \frac{4}{3}\beta(\theta) + \frac{14}{3}\alpha(3\theta) \quad (\theta \to \infty,\ \ \epsilon \to 0). \tag{67}$$

Supposons maintenant

$$| Z(1+i\theta) | \leqslant \exp(-\gamma(\theta)) \tag{68}$$

pour une infinité de valeurs $\theta \to \infty$. Comme on a, d'après (52) et (57),

$$| Z(1+it)\exp(-\alpha(t)) | \leqslant | Z(1+i\theta) | \exp(-\alpha(\theta)) + \sqrt{\epsilon}$$

quand $| t - \theta | < \epsilon$ petit, (68) entraîne (65) moyennant la condition

$$\beta(\theta) \leqslant (\gamma(\theta) + \alpha(\theta) - \alpha(\theta+\epsilon)) \wedge \left(-\alpha(\theta+\epsilon) + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\epsilon}\right). \tag{69}$$

D'après (67) et (69), on a $I < 0$ dès que

$$\begin{cases} \log\frac{1}{\epsilon} - 4(\gamma(\theta) + \alpha(\theta) - \alpha(\theta+\epsilon)) + 14\alpha(3\theta) < 0 \\ \log\frac{1}{\epsilon} - 4\left(-\alpha(\theta+\epsilon) + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\epsilon}\right) + 14\alpha(3\theta) < 0. \end{cases} \tag{70}$$

Il en est bien ainsi quand $\log\frac{1}{\epsilon} = 18\alpha(3\theta)$ et $\gamma(\theta) = 9\alpha(3\theta)$, donc, avec ce choix de $\gamma(\theta)$, il est impossible que (68) ait lieu pour une infinité de $\theta \to \infty$, c'est-à-dire que (59) a lieu pour $t$ assez grand. □

**Preuve du théorème 7.**

Nous supposons

$$(H\alpha) \qquad it\ \zeta(1+it)\exp(-2\mid t\mid^{\alpha}) \in H^1$$

avec $\alpha < 2$. Nous savons, par le théorème 5, que $(TNP)$ a lieu si $\zeta(1+it)$ ne s'annule pas et, par la proposition 1, que $\zeta(1+it)$ s'annule en deux points au plus, $\theta$ et $-\theta$. Moyennant une normalisation (changer $e^{-u}dN(e^u)$ en $e^{-\theta u}dN(e^{\theta u})$), nous pouvons nous ramener au cas $\theta = 1$. Le théorème 7 est démontré si nous montrons qu'il est impossible d'avoir $\zeta(1+i) = \zeta(1-i) = 0$, ou, ce qui revient au même, $Z(1+i) = Z(1-i) = 0$.

Nous allons donc supposer

$$Z(1+i) = Z(1-i) = 0 \tag{71}$$

et tenter d'aboutir à une contradiction. Partons de la proposition 2, l'exemple de Beurling, que nous écrirons maintenant

$$\begin{cases} dP_0(e^u) = u^{-1}e^u(1-\cos u)du \\ \ell_0(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-iut}(1-\cos u)\frac{du}{u} = \log\frac{\sqrt{1-t^2}}{it} \\ Z_0(1+it) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{it}. \end{cases} \tag{72}$$

Posons

$$L(t) = \ell(t) - \ell_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-iut}e^{-u}d\,(P(e^u) - P_0(e^u)), \tag{73}$$

Par commodité d'écriture, nous allons poser

$$e^{-u}d\,(P(e^u) - P_0(e^u)) = h(u)\frac{du}{u} \tag{74}$$

et traiter $h(u)$ comme une fonction ; ainsi

$$L(t) = \int_0^{\infty} e^{-iut}h(u)\frac{du}{u} \tag{75}$$

et le fait que $(1 - \cos u)du + h(u)du$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$ sera exprimé par la formule

$$1 - \cos u + h(u) \geqslant 0 \qquad (u > 0). \tag{76}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $\varphi(t) = 1$ au voisinage des points -1, 0 et 1, et

$$\begin{cases} L_1(t) = L(t)\varphi(-t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} h_1(u) \frac{du}{u} \\ L_2(t) = L(t) - L_1(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} h_2(u) \frac{du}{u}. \end{cases} \tag{77}$$

Les propriétés de $L_1$ et $h_1$ dépendent du comportement local de $it\,\zeta(1+it)$, à savoir de l'appartenance à $H^1_{\text{loc}}$, et les propriétés de $L_2$ et $h_2$ font intervenir le comportement global exprimé par $(H\alpha)$.

Commençons par $L_1$ et $h_1$. La fonction $h_1$ vérifie

$$2\pi h_1(u) = u \int_0^{\infty} \frac{h(v)}{v} \hat{\varphi}(u - v)dv. \tag{78}$$

C'est une fonction entière de type exponentiel d'après (77), et nous allons montrer qu'elle est bornée.

Pour cela, partons de $(IT)$, qui a lieu en vertu du théorème 4 :

$$\int_0^y dP(e^u) = O\left(\frac{1}{y} e^y\right) \qquad (y \to \infty). \tag{79}$$

Il en résulte

$$\int_{y-1}^{y} (1 - \cos v + h(v)) \frac{dv}{v} = \int_{y-1}^{y} e^{-v} dP(e^v) = O\left(\frac{1}{y}\right) \quad (y \to \infty) \tag{80}$$

d'où, pour une constante $C > 0$ convenable,

(81)

$$\left| \int_0^{\infty} (1 - \cos v + h(v)) \hat{\varphi}(u - v) \frac{dv}{v} \right| \leqslant C \sum_{n=+\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |\, u - n \,|} \sup_{n-1 \leqslant w \leqslant n} |\hat{\varphi}(w)|$$
$$= O\left(\frac{1}{|\, u \,|}\right) \qquad (|\, u \,| \to \infty).$$

De même, en partant de $P_0$ au lieu de $P$,

$$\int_0^{\infty} (1 - \cos v) \hat{\varphi}(u - v) \frac{dv}{v} = O\left(\frac{1}{|\, u \,|}\right) \quad (|\, u \,| \to \infty). \tag{82}$$

En comparant (78), (81) et (82) on obtient bien

$$h_1(u) = O(1) \quad (|\, u \,| \to \infty). \tag{83}$$

En outre, le même argument montre que $h_1(u)$ est à décroissance rapide quand $u \to -\infty$.

Comme $h_1$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et prolongeable en une fonction entière de type exponentiel, ses dérivées successives sont aussi bornées sur $\mathbb{R}$ (voir p. ex. [16], théorème (7.24)) :

$$h_1'(u) = O(1), \quad h_1''(u) = O(1) \quad (|\, u \,| \to \infty). \tag{84}$$

En vertu de (52) nous avons

$$\begin{cases} Z(1+it) = o(|\, t-1 \,|^{1/2}) & (t \to 1) \\ Z(1+it) = o(|\, t+1 \,|^{1/2}) & (t \to -1) \end{cases} \tag{85}$$

et par conséquent, compte tenu de (72) et (73),

$$\begin{cases} L(1) = \lim\limits_{t \to 1} L(t) = -\infty \\ L(-1) = \lim\limits_{t \to -1} L(t) = -\infty. \end{cases} \tag{86}$$

De même $L_1(1) = L_1(-1) = -\infty$. Comme $L_1$ est à support compact et continue sauf aux points 1 et -1, la formule de Poisson s'applique sous la forme

$$\lim_{\rho \uparrow 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{|n|} \frac{h_1(2\pi n)}{n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_1(n) = -\infty, \tag{87}$$

en convenant que $\dfrac{h_1(2\pi 0)}{0}$ vaut $2\pi h_1'(0)$. La partie de la somme correspondant à $n < 0$ étant bornée puisque $h_1(u)$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^-$, (87) équivaut à

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n} h_1^-(2\pi n) = \infty \tag{88}$$

(ici $h_1^-$ =partie négative de $h_1 = \dfrac{1}{2}(|\, h_1 \,| - h_1)$), et (88) entraîne

$$\sum_{j>0} 2^{-j} \log |\, \Lambda_j \,| = \infty, \tag{89}$$

si l'on désigne par $\Lambda_j$ l'ensemble des $n$ pour lesquels

$$2^{-j-1} \leqslant h_1^-(2\pi n) < 2^{-j} \tag{90}$$

et par $|\Lambda_j|$ son cardinal.

En tout point $2\pi n$ tel que $n \in \Lambda_j$, la fonction $\cos u - 1 - h_1(u)$ est minorée par $2^{-j-1}$. Or sa dérivée seconde est bornée, comme nous l'avons vu en (84). On a donc

$$\cos u - 1 - h_1(u) \geqslant 2^{-j-2} \tag{91}$$

sur un intervalle $I_n$ de longueur $d2^{-j/2}$ contenant le point $2\pi n$, à condition que

$$d^2 \sup_u |(\cos u - 1 - h_1(u))''| \leqslant \frac{1}{2}$$

(suivant le signe de la dérivée de $\cos u - 1 - h_1(u)$ au point $2\pi n$, on peut prendre $I_n = [2\pi n, 2\pi n + d2^{-j/2}]$ ou $[2\pi n - d2^{-j/2}, 2\pi n]$).

Venons-en à $h_2$ et $L_2$. En général, $h_2(u)du$ est une mesure, comme $h(u)du$, mais nous utiliserons la même convention d'écriture qu'en (76). D'après (76) et (91) nous avons

$$h_2(u) \geqslant \cos u - 1 - h_1(u) \geqslant \begin{cases} 2^{-j-2} \text{ sur } I_n,\ n \in \Lambda_j \\ -M > -\infty \text{ partout.} \end{cases} \tag{92}$$

Choisissons $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (classe de Schwartz), positive et d'intégrale égale à 1 telle que $\hat{\psi}$ soit portée par $[-1, 1]$, et posons

$$\psi_\delta(u) = \frac{1}{\delta}\psi\left(\frac{u}{\delta}\right).$$

Désignons par $J_n$ l'intervalle de même centre que $I_n$ et de longueur moitié. Fixons $j$. Choisissons $\delta = 2^{-aj}$ avec $a > \frac{1}{2}$ et considérons la convolution $h_2 * \psi_\delta$ sur $J_n$, $n \in \Lambda_j$. D'après (92) on a pour $j$ assez grand

$$h_2 * \psi_\delta \geqslant 2^{-j-2} 1_{I_n} * \psi_\delta - M 1_{\mathbb{R}\setminus I_n} * \psi_\delta \geqslant c2^{-j}, \tag{93}$$

où $c = c(d, a, M) > 0$. Il en résulte, avec un autre $c > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |h_2 * \psi_\delta(u)|^2 \, du \geqslant c2^{-\frac{5}{2}j} |\Lambda_j|. \tag{94}$$

Nous pouvons maintenant faire intervenir $L_2$. Quitte à changer $c$ à chaque ligne, l'égalité de Parseval permet d'écrire (94) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} | L_2'(t)\hat{\psi}(\delta t) |^2 \, dt \geqslant c \, 2^{-\frac{5}{2}j} \mid \Lambda_j \mid \tag{95}$$

ou encore, en se référant à la définition de $L_2$ en (77),

$$\int_0^\infty | L'(t)\hat{\psi}(\delta t) |^2 \, dt \geqslant c 2^{-\frac{5}{2}j} |\Lambda_j|. \tag{96}$$

Comme $\hat{\psi}$ est portée par $[-1,1]$ et majorée en module par 1, et que $\delta^{-1} = 2^{aj}$, (96) donne

$$\int_2^{2^{aj}} | L'(t) |^2 \, dt \geqslant c 2^{-\frac{5}{2}j} |\Lambda_j|. \tag{97}$$

Revenons à la définition de $L (= \ell - \ell_0)$ en (73), et observons que d'après (72)

$$\int_2^{2^{aj}} | \ell_0'(t) |^2 \, dt = O(1). \tag{98}$$

Faisons maintenant tendre $j$ vers l'infini. D'après (97 et (98), nous avons

$$\log \mid \Lambda_j \mid = O\left( \log \int_2^{2^{aj}} | \ell'(t) |^2 \, dt \right) + O(j). \tag{99}$$

Joint à (89), (99) entraîne

$$\sum_{j>0} 2^{-j} \log \int_2^{2^{aj}} | \ell'(t) |^2 \, dt = \infty. \tag{100}$$

Reste à montrer que $(H\alpha)$ est incompatible avec (100) pour un choix convenable de $a > \frac{1}{2}$. Considérons $H^1(T, 2T)$, algèbre des restrictions à l'intervalle $[T, 2T]$ des fonctions appartenant à $H^1(\mathbb{R})$, avec la norme usuelle. La condition $(H\alpha)$ avec $\alpha < 2$ entraîne, pour un $c > 0$ convenable,

$$\begin{aligned} \| Z(1+it) \|_{H^1(T,2T)} &\leqslant c \, \| t^{-1} \exp | t |^\alpha \|_{H^1(T,2T)} \\ &\leqslant c \, \exp(2T)^\alpha, \end{aligned} \tag{101}$$

donc

$$\int_T^{2T} |\, \ell'(t) Z(1+it) \,|^2 \, dt \leqslant \exp(5T^\alpha) \tag{102}$$

pour $T$ assez grand. Or, pour $T$ assez grand, nous avons (proposition 3)

$$|\, Z(1+it) \,| \geqslant \exp(-18(3T)^\alpha),$$

donc, pour un $c > 0$ convenable,

$$\int_T^{2T} |\, \ell'(t) \,|^2 \, dt \leqslant \exp(cT^\alpha). \tag{103}$$

Nous constatons que (100) et (103) sont incompatibles lorsque $a\alpha < 1$, et nous pouvons choisir $a > \frac{1}{2}$ vérifiant cette condition. Cela termine la preuve du théorème 7.

## Preuve du théorème 6.

Il s'agit de construire un exemple pour lequel on a $(A)$, c'est-à-dire

$$\frac{it\,\zeta(1+it) - D}{it(1+it)} \in A(\mathbb{R}), \tag{104}$$

tel que $\zeta(1+it)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et que l'on ait le contraire de $(IT)$, soit

$$\limsup_{y \to \infty} (y e^{-y} P(e^y)) = \infty. \tag{105}$$

Partons ici de

$$\begin{cases} dP_1(e^u) = \mathbb{1}_{[1,\infty[}(u) e^u \dfrac{du}{u} \\ \ell_1(t) = \displaystyle\int_1^\infty e^{-iut} \frac{du}{u}. \end{cases} \tag{106}$$

On vérifie facilement les deux propriétés suivantes de $\ell_1(t)$ :

$$\ell_1(t) = \log \frac{1}{it} + \text{fonction analytique sur } \mathbb{R}, \tag{107}$$

où $\log \frac{1}{it}$ est toujours défini comme en (33), et

$$|\, \ell_1(t) \,| + |\, \ell_1'(t) \,| = O\left(\frac{1}{|\, t \,|}\right) \qquad (|\, t \,| \to \infty). \tag{108}$$

Pour définir $P(x)$, posons

$$(109)\qquad \begin{cases} \ell(t) = \ell_1(t) + L(t) \\ L(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} L_j(t) \\ L_j(t) = \displaystyle\int_{a_j}^{a_j+b_j} \left(e^{-ia_jt} - e^{-iut}\right) \frac{du}{u} \end{cases}$$

avec $1 < a_1 < a_1 + b_1 < a_2 < \cdots$. Ainsi la mesure $e^{-u}P(e^u)$ est égale à $\dfrac{du}{u}$ sur $[1, \infty[$, sauf sur les intervalles $]a_j, a_j + b_j[$ où elle est nulle, et aux points $a_j$, où sa masse est $\log\left(1 + \dfrac{b_j}{a_j}\right)$.

Pour avoir (105), il suffit, comme nous l'avons vu en (80), que

$$\limsup_{y\to\infty} y \int_{y-1}^{y} e^{-u} dP(e^u) = \infty.$$

Il suffit donc que $a_j \log\left(1 + \dfrac{b_j}{a_j}\right)$ tende vers l'infini, soit

$$(110)\qquad \lim b_j = \infty.$$

Nous imposerons également la condition

$$(111)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^2}{a_j} < \infty.$$

Introduisons $B = B(\mathbb{R})$, l'algèbre de Banach des transformées de Fourier de mesures bornées. Vérifions, ce qui nous servira ensuite, que

$$(112)\qquad L \in B(\mathbb{R}), \quad \frac{L(t)}{t} \in A(\mathbb{R}).$$

En effet,

$$\| L_j \|_B \leqslant 2 \log\left(1 + \frac{b_j}{a_j}\right),$$

terme général d'une série convergente d'après (110) et (111), et

$$\left\| \frac{L_j(t)}{t} \right\|_A \leqslant \left\| \frac{e^{-ia_jt} - e^{-iut}}{it(u - a_j)} \right\|_A \int_{a_j}^{a_j+b_j} (u - a_j) \frac{du}{u} \leqslant C \frac{b_j^2}{a_j}$$

parce que la norme dans le second membre ne dépend pas de $j$, et la série de ces normes est encore convergente d'après (111). Reste à établir (104).

Pour cela, nous nous servirons d'une propriété de «recollement» qui est commune aux algèbres $A$, $A^\infty$ et $H^1$, et que nous utiliserons aussi dans la preuve du théorème 8 : une fonction appartient à l'algèbre si elle y appartient localement à distance finie et à l'infini. Il nous suffit donc de démontrer

$$\frac{it\,\zeta(1+it)-D}{it} \in A_{\mathrm{loc}}(0) \tag{114}$$

et

$$\frac{\zeta(1+it)}{t} \in A(0+,\infty). \tag{115}$$

Nous allons maintenant utiliser le fait que les fonctions entières opèrent dans les algèbres $A(\mathbb{R})$ et $B(\mathbb{R})$, et que $B(\mathbb{R})$ est l'algèbre des multiplicateurs de $A(\mathbb{R})$. En vertu de (107), la fonction

$$m(t) = \frac{\zeta(1+it)}{Z(1+it)}\exp\left(\ell_1(t)+\log it\right)$$

est analytique et, selon la définition (109),

$$it\,\zeta(1+it) = m(t)e^{L(t)}.$$

De plus $D = m(0)$. Ainsi

$$it\,\zeta(1+it) - D = m(0)(e^{L(t)}-1) + (m(t)-m(0))e^{L(t)}. \tag{116}$$

Or

$$\frac{e^{L(t)}-1}{t} = \frac{e^{L(t)}-1}{L(t)}\frac{L(t)}{t} \in A(\mathbb{R}) \tag{117}$$

d'après (112), et

$$\frac{m(t)-m(0)}{t}e^{L(t)} \in A_{\mathrm{loc}}(0). \tag{118}$$

Les formules (116), (117), (118) établissent (114).

En vertu de (108), $\ell_1$ appartient à $H^1(0+,\infty)$, donc à $A(0+,\infty)$. De même $\ell_1 + L \in A(0+,\infty)$ d'après (112), et, en exponentiant,

$$Z(1+it) \in B(0+,\infty), \tag{119}$$

algèbre des restrictions à $[0+,\infty[$ des transformées de Fourier de mesures bornées (dont on désigne l'ensemble par $B(\mathbb{R})$). Reprenons maintenant la formule (14), qui donne l'expression de $\dfrac{\zeta(s)}{Z(s)}$ comme transformée de Laplace. En y faisant $s = 1 + it$, on voit que

$$\frac{\zeta(1+it)}{Z(1+it)} \in B(\mathbb{R}). \tag{120}$$

Remarquons encore que

$$\frac{1}{t} \in A(0+,\infty). \tag{121}$$

Enfin $A(0+,\infty)$ est un module sur $B(0+,\infty)$. De (119), (120) et (121) résulte donc (115).

Il est clair que $Z(1+it)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $\zeta(1+it)$ non plus. Ainsi, moyennant les conditions (110) et (111), les formules (109) fournissent l'exemple voulu.

## Preuve du théorème 8.

Nous utiliserons les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Pour $u$ réel et $n$ entier $\geqslant 1$, on a*

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\cos u + \frac{1}{n^2}\cos nu \geqslant 0. \tag{122}$$

*Preuve.* — C'est vrai pour $u = 0$, pour $0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ parce que la dérivée est positive, et pour $\dfrac{\pi}{n} \leqslant u \leqslant \pi$ parce que, cos $u$ étant décroissant, on a sur cet intervalle

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\cos u - \frac{1}{n^2} \geqslant 0.$$

LEMME 2. — *Si $\mu(u)$ est une fonction positive décroissante (au sens large) sur $[a,\infty[$, tendant vers 0 à l'infini, et $a \leqslant A \leqslant B$, on a pour tout $t > 0$*

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^\infty e^{-iut}\mu(u)d\mu &= \int_a^A \mu(u)du + R \\ | R | \leqslant t\int_a^A u\,\mu(u)du &+ \int_A^B \mu(u)du + \frac{2\mu(B)}{t}. \end{aligned}\right. \tag{123}$$

*Preuve.* — Banale, en décomposant l'intégrale.

Voici maintenant un exemple qui établit le théorème 8. Nous prenons

(124)
$$dP(e^u) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[u_n, u_{n+1}[}(u) \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \cos \mathrm{u} + \frac{1}{n^2} \cos nu\right) e^u \frac{du}{u}$$

avec $u_n = \exp(cn^2)$, $c > 0$. C'est une définition correcte d'après le lemme 1. Écrivons

(125)
$$\begin{cases} \ell(t) = \ell_0(t) + H(t) + K(t) \\ \ell_0(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-iut}(1 - \cos u) \frac{du}{u} = \log \frac{\sqrt{1-t^2}}{it} \\ H(t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{-iut} \cos u \frac{du}{u} \\ K(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{-iut} \cos nu \frac{du}{u}. \end{cases}$$

Ainsi

(126)
$$it\, Z(1 + it) = it \exp\left(\ell_0(t) + H(t) + K(t)\right).$$

Nous allons montrer que, pour $c > 1$, cette fonction appartient à $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et que de plus son produit par $\exp\left(-\frac{1}{2}c^+ t^2\right)$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$.

Posons

(127)
$$\begin{cases} \mu(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[u_n, u_{n+1}[}(u) \frac{1}{n^2 u} \\ J(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-iut} \mu(u) du. \end{cases}$$

D'après le lemme 2, en choisissant $A = u_N$ et $B = u_{N+1}$ lorsque $u_N \leqslant \frac{1}{t} < u_{N+1}$, on a

(128)
$$\begin{cases} J(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{du}{u} + R \\ \mid R \mid \leqslant t \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2}(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{N^2} \int_{u_N}^{u_{N+1}} \frac{du}{u} + \frac{2}{tN^2 u_{N+1}} \\ \quad = O(1) \qquad (t \downarrow 0) \end{cases}$$

donc

$$(129)\qquad \begin{cases} J(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{c}{n^2}((n+1)^2 - n^2) + O(1) \\ \quad = 2c\log N + O(1) \\ \quad = c\log\log \dfrac{1}{t} + O(1) \qquad (t \downarrow 0). \end{cases}$$

En remplaçant $\mu(u)$ par $u\mu(u)$ et en choisissant $A = B = u_1$, on voit que $J(t)$ est de classe $C^1$ sur $]0, \infty[$, et que

$$(130)\qquad J'(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (t \downarrow 0).$$

Comme $J(-t) = \overline{J(t)}$ et $H(t) = -\frac{1}{2}(J(t+1) + J(t-1))$, on voit que $H(t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, avec

$$(131)\qquad H(t) = -\frac{c}{2}\log\log\frac{1}{\mid t-1 \mid} + O(1) \qquad (t \to 1)$$

$$(132)\qquad H'(t) = O\left(\frac{1}{\mid t-1 \mid}\right) \qquad (t \to 1)$$

et l'analogue quand $t \to -1$.

Considérons maintenant $K(t)$ et $K'(t)$ sur $\mathbb{R}^+$. Les intégrales

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{-iut}\cos nu \frac{du}{u}, \qquad \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{-iut}\cos nu\, du$$

sont uniformément bornées quand $\mid t - n) \geqslant \frac{1}{2}$, donc $K(t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a les majorations

$$(133)\qquad \mid K(t) \mid \leqslant \frac{1}{2\nu^2} \int_{u_\nu}^{u_{\nu+1}} \frac{du}{u} + O(1) = O(1)$$

$$(134)\qquad \mid K'(t) \mid \leqslant \frac{1}{2\nu^2}(u_{\nu+1} - u_\nu) + O(1)$$

lorsque $\nu - \frac{1}{2} \leqslant t < \nu + \frac{1}{2}$. Ainsi $K(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et

$$(135)\qquad K'(t) = O\left(\exp(c't^2)\right) \qquad (\mid t \mid \to \infty)$$

pour tout $c' > c$.

Au voisinage du point 1, $it\ Z(1+it)$ est le produit d'une fonction de classe $H^1$ et de la fonction

$$\sqrt{1-t}\ e^{H(t)}, \tag{136}$$

dont la dérivée est $O\left(\mid t-1\mid^{-1/2} (\log\frac{1}{\mid t-1\mid})^{-c/2}\right)$ $(t \to 1)$ en vertu de (131) et (132). Donc la fonction (136) appartient à $H^1_{\mathrm{loc}}(1)$ et, pour la même raison, à $H^1_{\mathrm{loc}}(-1)$, lorsque $c>1$. Résumons :

$$c > 1 \Rightarrow it\ Z(1+it) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}). \tag{137}$$

Au voisinage de $+\infty$, $e^{H(t)}$ appartient à $H^1$ parce que, d'après le lemme 2 (avec $A = B = u_1$), on a

$$H(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad H'(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (t \to \infty).$$

De plus $e^{\ell_0(t)} - 1 \in H^1_{\mathrm{loc}}(+\infty)$. Enfin, d'après (133) et (135), on a pour tout $c' > c$

$$\exp\left(-c't^2\right) e^{K(t)} \in H^1. \tag{138}$$

Finalement, en choisissant $c' > c > 1$, on obtient

$$it\ Z(1+it)\exp\left(-c't^2\right) \in H^1(\mathbb{R}), \tag{139}$$

ce qui est un peu meilleur que la condition (H2) du théorème 8.

Comme dans l'exemple de Beurling, dont (124) est une variante, on a

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{(2k-\frac{1}{2})\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi} ue^{-u}dP(e^u) &= 1-\frac{2}{\pi} < 1+\frac{2}{\pi}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+\frac{3}{2})\pi} ue^{-u}dP(e^u)\end{aligned} \tag{140}$$

donc $(TNP)$ n'a pas lieu et le théorème 8 est établi.

## Compléments et variantes à propos des exemples.

Récapitulons les exemples que nous connaissons, en précisant lorsqu'il y a lieu la valeur de $D$ et le comportement de la fonction $\epsilon(x)$, et indiquons comment en obtenir des variantes en modifiant la fonction $P(x)$.

*Exemple 1.* — C'est le cas classique, des nombres premiers et des entiers ordinaires. Ici $N(x) = [x]$, partie entière de $x$, et $\epsilon(x) = [x] - x$. Alors $(TNP)$ est le théorème des nombres premiers d'Hadamard et de la Vallée Poussin, qui est le point de départ de la théorie de Beurling.

*Exemple 2.* — C'est la variante continue du cas classique, qui a été introduite en (106) pour la preuve du théorème 6 :

$$\begin{cases} dP_1(e^u) = 1_{[1,\infty[}(u)e^u \dfrac{du}{u} \\ \ell_1(t) = \displaystyle\int_1^\infty e^{-iut}\frac{du}{u} \\ \ell_1'(t) = -\dfrac{e^{-it}}{t}. \end{cases} \tag{141}$$

La fonction $(s-1)Z(s)$ est une fonction entière, qui s'obtient en exponentiant une primitive de $-(s-1)^{-1}e^{1-s}$, et dont la valeur en 1 est $e^c$ avec

$$c = \int_1^\infty e^{-u}\frac{du}{u} - \int_0^1 (1-e^{-u})\frac{du}{u} \; (= -\gamma, \text{ constante d'Euler}). \tag{142}$$

On a d'ailleurs

$$Z(\sigma + it) = 1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \qquad (|t| \to \infty) \tag{143}$$

uniformément pour $|\sigma + it - 1| \geqslant 1$ et $\sigma \geqslant \sigma_0$ fixé. En se référant à (14), qui s'écrit

$$\zeta(s) = Z(s)(Z(2s))^{1/2}(Z(3s))^{1/3}\cdots \tag{144}$$

on voit d'abord que

$$D = e^c \prod_{k=2}^{\infty} (Z(k))^{1/k} \tag{145}$$

et ensuite que la singularité de la fonction $(s-1)\zeta(s)$ dont l'abscisse est la plus proche de 1 est l'inverse d'une racine carrée au point $s = \frac{1}{2}$. On en tire, par inversion de Fourier à partir de (10) et (24)

$$\epsilon(e^u) = O(u^{-1/2}e^{-u/2}) \qquad (u \to \infty). \tag{146}$$

*Exemple 3.* — C'est l'exemple de Beurling, présenté dans la proposition 2 et utilisé dans la preuve du théorème 7 (formules (55), (56) et (72)).

On a ici, d'après (72)

$$\left\{\begin{aligned} dP_0(e^u) &= u^{-1}e^u(1-\cos u)du \quad (u>0) \\ (s-1)Z_0(s) &= \sqrt{1+(s-1)^2}. \end{aligned}\right. \tag{147}$$

La formule (145) est toujours valable et donne

$$D_0 = \prod_{k=2}^{\infty}\left(1+(k-1)^{-2}\right)^{\frac{1}{2k}}. \tag{148}$$

La formule (144) permet de définir $\zeta_0(s)$ comme fonction multiforme pour $\sigma > 0$, avec des points de branchement du type racine $k$-ième ou inverse de racine $k$-ième aux points $1 \pm i$, $\frac{1}{2}(1 \pm i)$, $\frac{1}{3}(1 \pm i), \cdots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$. On a d'autre part au lieu de (143), pour tout $\sigma > 0$

$$\left\{\begin{aligned} Z_0(\sigma+it) &= 1+O\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ \zeta_0(\sigma+it) &= 1+O\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}\right. \qquad (t\to\infty), \tag{149}$$

quand on définit $Z_0(s)$ et $\zeta_0(s)$ par prolongement analytique à partir du demi-plan $\sigma > 1$ dans le demi plan $\sigma > 0$ privé du triangle $0 < \sigma \leqslant t$, $|\, t \,| \leqslant 1$. Par inversion de Fourier, on peut obtenir, à partir de (10) et (24), un développement asymptotique de $\epsilon(e^u)$. Contentons-nous d'indiquer la forme des premiers termes :

$$\epsilon(e^u) = u^{-\frac{3}{2}}(A\cos u + B\sin u) + O(u^{-\frac{5}{2}}) \quad (u\to\infty), \tag{150}$$

$A$ et $B$ étant des constantes numériques.

En vue d'applications à venir, détaillons l'argument. Partant de

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-(a-iu)t}dt = \Gamma(\alpha+1)(a-iu)^{-\alpha-1} \qquad (\alpha>0,\ a>0),$$

on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout entier $\ell > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^\alpha\varphi(t)e^{iut}dt = \sum_{k=0}^{\ell}\varphi^{(k)}(0)\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)}e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha+k+1)}u^{-\alpha-k-1} \\ + O(u^{-\alpha-k-2}) \qquad (u\to\infty),\end{aligned} \tag{151}$$

d'où, en nous limitant à $\ell = 1$, par réflexion et translation,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1-t^2}\varphi(t)e^{iut}dt = 2\Gamma(\tfrac{3}{2})u^{-\frac{3}{2}}\left(\varphi(1)e^{-i\frac{3\pi}{4}}e^{iu}+\varphi(-1)e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-iu}\right) \\ + O(u^{-\frac{5}{2}}) \qquad (u\to\infty).\end{aligned} \tag{152}$$

Ici $\sqrt{1-t^2}$ a le même sens que dans la définition de $Z_0(1+it)$ :

$$it\, Z_0(1+it) = \sqrt{1-t^2}. \tag{153}$$

D'autre part, compte tenu de (149), on a

$$\begin{cases} \zeta_0(1+it) = 1 + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \\ \zeta_0^{(p)}(1+it) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \end{cases} \quad (t \to \infty) \tag{154}$$

pour tout entier $p \geqslant 1$.

En se référant à (10) et à (24), on peut écrire

$$\begin{cases} \epsilon(e^u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X_0(t)e^{iut}dt \\ \qquad\;\; = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Y_0(t)e^{iut}dt - (D-1)e^{-u} \quad (u>0) \\ Y_0(t) = \dfrac{1}{1+it}\left(\zeta_0(1+it) - \dfrac{D}{it}\right). \end{cases} \tag{155}$$

Choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-2,2]$. L'intégrale

$$\int Y_0(t)\psi(t)e^{iut}dt \tag{156}$$

est de la forme (152). Compte tenu de (154), l'intégrale

$$\int Y_0(t)(1-\psi(t))e^{iut}dt = O(|\, u\,|^{-N}) \qquad (|\, u\,| \to \infty) \tag{157}$$

pour tout entier $N$. On obtient ainsi (150), avec, si on le désire, les valeurs explicites de $A$ et de $B$.

*Exemple 4.* — C'est la variante qu'a donné Diamond de l'exemple de Beurling, dans laquelle $P(x)$ et $N(x)$ ont des valeurs entières [5]. Diamond choisit pour $P(x)$ la partie entière de $P_0(x)$ et montre qu'alors $\epsilon(x) = O\left((\log x)^{-3/2}\right)$ $(x \to \infty)$. Voici comment on peut étendre et préciser le résultat de Diamond.

*Sous la condition*

$$P(e^u) - P_0(e^u) = O\left(e^{c\sqrt{u}}\right) \qquad (u \to \infty), \tag{158}$$

*où $dP_0(e^u)$ est la distribution de Beurling, définie en (147), et $c$ une constante positive, la formule (150) est valable.*

La preuve consiste à établir pour $Y(t)$ (associée à $P(x)$) ce que nous venons de montrer pour $Y_0(t)$ (associée à $P_0(x)$) avec (156) et (157). Il suffit pour cela que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+it}\frac{\zeta(1+it)}{\zeta_0(1+it)}e^{iut}dt = O\left(|\, u\,|^{-N}\right) \qquad (|\, u\,| \to \infty) \tag{159}$$

pour tout entier $N$. En effet, comme conséquence de (159), la fonction $\dfrac{1}{1+it}\dfrac{\zeta(1+it)}{\zeta_0(1+it)}$ est de classe $C^\infty$ ; or

$$Y(t) = \frac{1}{1+it}\frac{\zeta(1+it)}{\zeta_0(1+it)}\left(\zeta_0(1+it) - \frac{D_0}{it}\right) + \text{fonction de classe } C^\infty,$$

donc l'intégrale $\int Y(t)\varphi(t)e^{iut}dt$ est bien de la forme (152), avec une $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ convenable. D'autre part,

$$\int Y(t)(1-\psi(t))e^{iut}dt = \int \frac{\zeta(1+it)}{1+it}e^{iut}dt - O(|\, u\,|^{-N})$$

$$= \int \frac{1}{1+it}\frac{\zeta(1+it)}{\zeta_0(1+it)}\left(1+\frac{a_2}{t^2}+\frac{a_3}{t^3}+\cdots\right)(1-\psi(t))e^{iut}dt + O(|\, u\,|^{-N})$$

et (159) entraîne que le second membre est $O\left(|\, u\,|^{-N}\right)$ $(|\, u\,| \to \infty)$.

Pour démontrer (159), introduisons deux notations :

$$Q(x) = P(x) + \frac{1}{2}P(x^{1/2}) + \frac{1}{3}P(x^{1/3}) + \cdots \tag{160}$$

$$m(t) = \int_1^\infty x^{-1-it}dQ(x). \tag{161}$$

Observons que

(162)

$$\begin{cases} \zeta(s) = \exp \displaystyle\int \left(x^{-s} + \frac{1}{2}x^{-2s} + \frac{1}{3}x^{-3s} + \cdots\right) dP(x) = \exp \int x^{-s}dQ(x) \\ \zeta(1+it) = \exp m(t). \end{cases}$$

Naturellement, nous définissons de même manière $Q_0(x)$ et $m_0(t)$. Remarquons que le nombre de termes non nuls dans la somme (160) est $O(\log x)$, d'où

$$Q(x) = O(P(x)\log\log x) \qquad (x \to \infty) \tag{163}$$

et, d'après (158),

$$Q(e^u) - Q_0(e^u) = O\left(e^{c\sqrt{u}}\log u\right) \qquad (u \to \infty). \tag{164}$$

Désignons par $\mathcal{F}^{-1}$ la transformation de Fourier inverse. Ainsi (161) s'exprime par

$$\mathcal{F}^{-1}(m(t))(u) = e^{-u}dQ(e^u)$$

et, compte tenu de (162), la formule (159), à démontrer s'écrit

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\exp(m(t)-m_0(t))}{1+it}\right)(u) = O\left(|\, u \,|^{-N}\right) \qquad (|\, u \,| \to \infty). \tag{165}$$

Écrivons $\Delta m = m - m_0$ et $\Delta Q = Q - Q_0$. On va démontrer (165) en développant l'exponentielle en séries de puissances et en utilisant la formule clé :

(166)
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\Delta m(t))^k}{1+it}\right)(u) = e^{-u}\int\cdots\int_{u_1+\cdots+u_k<u} d\Delta Q(e^{u_1})\cdots d\Delta Q(e^{u_k}).$$

L'intégrale du second membre est prise sur le domaine $D_k(u)$ défini par $u_j > 0$ $(j = 1,\cdots,k)$ et $u_1 + \cdots + u_k < u$. Ce domaine se décompose en $k$ parties $D_{kj}(u)$ $(j = 1,\cdots,k)$ ainsi définies :

$$0 < u_j \leqslant \frac{u}{k}, \quad u_i > \frac{u}{k} \text{ pour } i < j,\ u_1 + \cdots + u_k < u.$$

Sur chaque $D_{kj}(u)$ on intègre d'abord par rapport à $u_j$. Quand $u_j$ est fixé, le domaine d'intégration pour les autres variables est, soit un $D_{k-1}(u-u_j)$ (c'est le cas quand $j = 1$), soit l'intersection d'un $D_{k-1}(u-u_j)$ et de la bande $\left\{\forall i < j,\ u_i > \frac{u}{k}\right\}$ (c'est le cas quand $j > 1$). Nous procéderons donc à la récurrence en considérant tous les domaines $D'_k(u)$ définis par

$$u_j > a_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\cdots,k), \quad u_1 + \cdots + u_k < u.$$

Posons

$$\sup\left|\int\cdots\int_{D'_k(u)} d\Delta Q(e^{u_1})\cdots d\Delta Q(e^{u_k})\right| = A_k(u), \tag{167}$$

la borne supérieure étant prise pour tous les $D'_k(u)$, c'est-à-dire pour tous les choix des $a_j$ $(j = 1,\cdots,k)$. En décomposant, comme ci-dessus, l'intégrale sur $D'_k(u)$ en intégrales prises sur des parties $D'_{kj}(u)$ où nous intégrons d'abord par rapport à $u_j$, on obtient

$$A_k(u) \leqslant k \int_0^{u/k} A_{k-1}(u-v)|d\Delta Q(e^v)|. \tag{168}$$

Pour exploiter (168), supposons d'abord

$$\mid \Delta Q(e^u) \mid \leqslant \frac{1}{2} A(u), \tag{169}$$

où $A(u)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\int_0^u \mid d\Delta Q(e^v) \mid \leqslant \gamma e^u \tag{170}$$

pour un $\gamma > 0$. De (169) découle

$$A_1(u) \leqslant A(u). \tag{$R1$}$$

On va démontrer par récurrence

$$A_k(u) \leqslant k!\gamma^{k-1} A(u) \exp\left(u(1-\frac{1}{k})\right). \tag{$Rk$}$$

La formule est correcte pour $k=1$. Supposant $(R_{k-1})$, on a d'après (168) et (170)

$$\begin{aligned} A_k(u) &\leqslant k!\gamma^{k-2} \int_0^{u/k} A(u-v)\exp\left((u-v)(1-\frac{1}{k-1})\right) \mid d\Delta Q(e^v) \mid \\ &\leqslant k!\gamma^{k-2} A(u)\exp\left((u-\frac{u}{k})(1-\frac{1}{k-1})\right) \int_0^{u/k} \mid d\Delta Q(e^v) \mid \\ &\leqslant k!\gamma^{k-1} A(u)\exp\left(u\left((1-\frac{1}{k})(1-\frac{1}{k-1}) + \frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(R_k)$. Revenant à (166), on en tire

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\exp \Delta m(t)}{1+it}\right)(u) &\leqslant A(u) \sum_0^\infty \gamma^{k-1} \exp\left(-\frac{u}{k}\right) \\ &= O\left(A(u)\exp\left(-(u \log\frac{1}{\gamma})^{1/2}\right)\right). \end{aligned}$$

Sous la condition (158), qui entraîne (164) donc (169) avec $A(u) = \exp(C\sqrt{u})$ avec $C$ assez grand, il suffit d'avoir (170) avec $\gamma$ assez petit pour obtenir

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\exp \Delta m(t)}{1+it}\right)(u) = O\left(\exp(-\sqrt{u})\right) \qquad (u \to \infty), \tag{171}$$

ce qui est un peu plus fort que (165), notre objectif.

Or, en vertu de (163) et des hypothèses faites sur $P_0(x)$ et $P(x)$, on a bien (170) pour $u \geqslant u(\gamma)$ assez grand. Pour conclure dans le cas général, il suffit de décomposer $\Delta m$ sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta m(t) = \Delta m_1(t) + \Delta m_2(t) \\ \Delta m_1(t) = \displaystyle\int_1^{u(\gamma)} e^{-u} e^{-iut} d\Delta Q(e^u) \\ \Delta m_2(t) = \displaystyle\int_{u(\gamma)}^{\infty} e^{-u} e^{-iut} d\Delta Q(e^u). \end{cases} \tag{172}$$

(171) étant valable pour $\exp \Delta m_2(t)$, le résultat découle du fait, facile à vérifier, que l'exponentielle de convolution d'une mesure à support compact est un convoluteur des fonctions qui sont $O\left(\exp(-\sqrt{|\, u\,|})\right)$ $(|\, u \,| \to \infty)$.

Cela achève la preuve que (158) entraîne (150). Naturellement, on peut alors choisir $P(x)$ à valeurs entières, ce qui était l'objectif primitif de Diamond. La méthode est essentiellement celle de Diamond. Remarquons que le choix de $P_0(x)$ est à peine intervenu dans la démonstration du (171). À toutes fins utiles, indiquons sous forme de lemme ce que donne la méthode quand on part d'une autre fonction $P(x)$.

LEMME3. — *Considérons deux fonctions positives croissantes, $P(e^u)$ et $P^*(e^u)$, telles que $P(e^u) = o\,(e^u/\log u)$ et $P(e^u) - P^*(e^u) = O\left(e^{c\sqrt{u}}\right)$ pour un $c > 0$ convenable $(u \to \infty)$. Alors*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+it}\frac{\zeta^*(1+it)}{\zeta(1+it)}\right)(u) = O\left(e^{-\sqrt{u}}\right) \qquad (u \to \infty), \tag{173}$$

*$\zeta(s)$ et $\zeta^*(s)$ désignant les fonctions dzéta associées à $P(x)$ et $P^*(x)$.*

Remarquons que le premier membre de (173) est nul pour $u < 0$.

*Exemple 5.* — C'est celui que nous avons construit pour démontrer le théorème 6 (formule (109)). On part de l'exemple 2, pour lequel

$$e^{-u} dP_1(e^u) = \mathbb{1}_{[1,\infty[}(u)\frac{du}{u}, \tag{174}$$

et on modifie cette distribution en la remplaçant par 0 sur une suite d'intervalles $]a_j, b_j[$ disjoints et en reportant au point $a_j$ sa masse sur $]a_j, b_j[$. On obtient ainsi la nouvelle distribution $e^{-u}dP(e^u)$. Sous les conditions $b_j \to \infty$ et $\sum b_j^2 a_j^{-1} < \infty$, on vérifie que *la condition* $(A)$ *est vérifiée,* que $(IT)$ *ne l'est pas,* et que $\zeta(1+it)$ *ne s'annule pas.* Dans cet exemple, $P(x)$ n'est ni continu, ni à valeurs entières. Mais il est facile de le modifier pour réaliser l'une de ces conditions.

Le principe de variation est ici, partant de $P_1(e^u)$, de définir

$$e^{-u}P(e^u) = e^{-a(u)}P_1(e^{a(u)}) \tag{175}$$

où $a(u)$ est une fonction croissante (dans l'exemple (109), $a(u) = a_j$ quand $a_j \leqslant u \leqslant a_j + b_j$, et $a(u) = u$ hors des intervalles $[a_j, a_j + b_j]$). Ainsi

$$\ell(t) = \int e^{-it\,a(u)}e^{-u}dP_1(e^u)$$

$$L(t) = \ell(t) - \ell_1(t) = \int e^{-iut}\left(e^{-it(a(u)-u)} - 1\right)e^{-u}dP_1(e^u).$$

Les conditions

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{a(u)\neq u} e^{-u}dP_1(e^u) < \infty \\ \displaystyle\int_{a(u)\neq u} \mid a(u) - u \mid e^{-u}dP_1(e^u) < \infty \end{cases} \tag{176}$$

assurent que $L(t)$ et $t^{-1}L(t)$ appartiennent à $A(\mathbb{R})$. Le reste de la démonstration du théorème 6 est valable. Donc, *sous les conditions (174), (175), (176), la fonction* $\zeta(1+it)$ *associée à* $P(x)$ *ne s'annule pas, et la condition (A)* ($\epsilon(x) \in L^1(dx/x)$) *est vérifiée.* On peut d'autre part imposer

$$\overline{\lim}\left(ue^{-a(u)}P_1(e^{a(u)})\right) = \infty \tag{177}$$

et cela veut dire que $(IT)$ *n'a pas lieu pour* $P(x)$. Si, au lieu de notre exemple, nous choisissons $a(u)$ continue, nous avons donc les conclusions désirées avec $P(x)$ continue.

Pour obtenir ces conclusions avec $P(x)$ à valeurs entières, il suffit de partir des nombres premiers ordinaires, et de remplacer ci-dessus $P_1(x)$ par la fonction de comptage $\pi(x)$. Grâce aux propriétés de la fonction $\zeta(s)$ ordinaire ($(s-1)\zeta(s)$ analytique sur la droite $\sigma \doteq 1$, et $t^{-1}\zeta(1+it) \in A(O^+, \infty)$), la démonstration du théorème 6 se transcrit encore, en remarquant que l'on passe de la fonction $\zeta(1+it)$ ordinaire à la nouvelle fonction $\zeta(1+it)$ en la multipliant par une fonction appartenant à $B(\mathbb{R})$. On obtient donc un nouvel exemple vérifiant $(A)$ et non $(IT)$, avec une fonction dzéta qui ne s'annule pas sur la droite $\sigma = 1$ en construisant l'ensemble $P$ de la manière suivante : on part des nombres premiers ordinaires et de suites $a_j$ et $b_j$ comme ci-dessus $(0 < a_j < a_j + b_j < a_{j+1},\ b_j \to \infty,\ \sum b_j^2 a_j^{-1} < \infty)$ ; sur chaque intervalle $I_j = [\exp a_j, \exp(a_j + b_j)]$ on remplace les nombres premiers ordinaires par les entiers naturels compris entre $\exp a_j$ et $\exp(a_j + \beta_j)$, où $\beta_j$ est la somme des inverses des nombres premiers ordinaires contenus dans $I_j$ ; en dehors de ces intervalles, on conserve les nombres premiers ordinaires. Ainsi

$$d\pi(e^u) = \sum_p \frac{1}{p}\delta_{\log\, p}$$

($p$ : nombre premier ordinaire), et

$$dP(e^u) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+\setminus\cup I_j} \sum_p \frac{1}{p}\delta_{\log\, n} + 1\!\!1_{\cup I_j} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\delta_{\log\, n}$$

avec $J_j = [\exp a_j, \exp(a_j + \beta_j)]$, de sorte que

$$\sum_{n\in J_j} \frac{1}{n} \simeq \sum_{p\in I_j} \frac{1}{p}.$$

*Exemple 6.* — C'est celui que nous avons construit pour démontrer le théorème 8 (formules (124) et (125)). Nous avons observé qu'il vérifie la formule (139), c'est-à-dire

$$it\,\zeta(1+it)\exp\left(-c't^2\right) \in H^1(\mathbb{R}), \tag{178}$$

sans vérifier $(TNP)$. Deux questions se posent : 1) peut-on obtenir un exemple de cette sorte avec $P(x)$ à valeurs entières ? 2) peut-on ajouter à la condition (178), qui porte uniquement sur le comportement de la fonction $\zeta(1+it)$, la condition $(A)$, qui concerne directement la fonction $N(x)$ ?

La réponse positive à la première question est immédiate en appliquant le lemme 3 (formule (173)).

La réponse à la seconde question est également positive, mais elle force à modifier substantiellement la fonction $P(x)$ définie par (124).

On considère maintenant, au lieu de (124),

(179)
$$dP(e^u) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{[u_n,u_{n+1}[} \left(1 - (1+\frac{1}{n^2})\cos u + \frac{1}{n^2}\cos(n-m)u\,\cos^m u\right)e^u\frac{du}{u}$$

avec $m$ =partie entière de $\sqrt{n}$. Une variante du lemme 1, à savoir

$$1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cos u+\frac{1}{n^2}\cos ku \geqslant 0$$

lorsque $k$ est un entier $\leqslant n$, montre que la parenthèse dans (179) est positive. On conserve (125) et (126), sauf la dernière ligne de (125) qui devient

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{-iut}\cos(n-m)u \cos^m u\frac{du}{u}.$$

L'introduction de $\cos^m u$ garantit que $K$ appartient à $A(\mathbb{R})$. Reste alors à vérifier, comme dans la preuve du théorème 6, que (114) et (115) ont lieu, et cela ne présente pas de difficulté.

En utilisant une variante discrète de (179) et en s'appuyant sur le lemme 3, on obtient simultanément une réponse positive aux deux questions posées.

Finalement, en complément du théorème 8, on a maintenant une fonction $P(x)$ à valeurs entières, telle que la fonction $N(x)$ associée vérifie la condition $(A)$ et que la fonction $\zeta(s)$ associée vérifie la condition $(H2)$, sans que $(TNP)$ ait lieu.

Le premier exemple montrant que $(A)$ et l'appartenance de $it\,\zeta(1+it)$ à $H^1_{\text{loc}}$ n'impliquent pas $(TNP)$ est décrit en [9]. La démonstration du théorème 1 se trouve en [10]. L'annonce des théorèmes 2, 7 et 8, avec une ébauche de la preuve du théorème 7, qui est le plus important du présent article, est publié dans une note aux Comptes rendus [11] mais la condition $(H2)$ de la note doit être remplacée par la condition $(H2)$ du théorème 8. Je dois à Harold Diamond d'avoir attiré mon attention sur la référence [15], et à Paul Koosis d'avoir provoqué une série de corrections et d'améliorations à la première version de ce texte. Sur la seconde version, j'ai bénéficié d'une lecture attentive de Michel Balazard, et je le remercie vivement de la série de critiques et de suggestions qui ont abouti au présent article.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] P. T. BATEMAN, and H. G. DIAMOND, Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers, Studies in Number Theory, Math. Assoc. Amer. Studies vol. 6 (W. J. Leveque, ed.), 1969, 152-210.

[2] A. BEURLING, Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, Acta Math., 68 (1937), 255-291.

[3] A. BEURLING, Construction and analysis of some convolution algebras, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14 (1964), 1-32.

[4] H. G. DIAMOND, The prime number theorem for Beurling's generalized numbers, J. Number Theory, 1 (1969), 200-207.

[5] H. G. DIAMOND, A set of generalized numbers showing Beurling's theorem to be sharp, Ill. J. Math., 14 (1970), 29-34.

[6] H. G. DIAMOND, Chebyshev estimates for Beurling generalized prime numbers, Proc. Amer. Math. Soc., 39 (1973), 503-508.

[7] H. G. DIAMOND, Chebyshev type estimates in prime number theory, in Séminaire de théorie des nombres, Université de Bordeaux I, 1974-1975, exposé n° 24.

[8] R. S. HALL, Beurling generalized prime number systems in which the Chebyshev inequalities fail, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 79-82.

[9] J.-P. KAHANE, A Fourier formula for prime numbers. Dedicated to the memory of Carl Herz, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, 21 (1997), 89-102.

[10] J.-P. KAHANE, Sur les nombres généralisés de Beurling. Preuve d'une conjecture de Bateman et Diamond., J. Th. Nombres Bordeaux, 9 (1997), 251-266.

[11] J.-P. KAHANE, Le rôle de l'algèbre $H^1$ de Sobolev dans la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling, C. R. Acad. Sci. Paris, 324 (1997), 1117-1120.

[12] S. L. SOBOLEV, (Soboleff), Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions etc..., C. R. Acad. Sc. URSS (Doklady) I (X), N. 7 (84), 1936, p. 279 et III (XII), N. 1 (98), 1936, p. 107.

[13] N. WIENER, Tauberian theorems, Ann. Math., 33 (1932), 1-100.

[14] N. WIENER, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933.

[15] Wen-lin ZHANG, Chebyshev estimates for Beurling generalized prime numbers, Proc. Amer. Math. Soc., 101 (1987), 205-212.

[16] A. ZYGMUND, Trigonometric series, II. Cambridge Univ. Press, 1959.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1997,
révisé le 28 janvier 1998.
accepté le 23 février 1998.

Jean–Pierre KAHANE,
Université de Paris–Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)