ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOËL DUBOIS

Nœuds Fox-résiduellement nilpotents et rigidité virtuelle des variétés hyperboliques de dimension 3

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 2 (1998), p. 535-551

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_2_535_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 2 (1998), 535–551

NŒUDS FOX-RÉSIDUELLEMENT NILPOTENTS ET RIGIDITÉ VIRTUELLE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

par Joël DUBOIS

Introduction.

Un problème central en topologie des variétés de dimension 3 est de décider si une équivalence d'homotopie entre deux variétés, irréductibles, orientables, closes à groupe fondamental infini est toujours homotope à un homéomorphisme.

En 1968, F. Waldhausen a montré dans [Wa1] Théorème 6.1, que c'est toujours le cas si dans l'équivalence d'homotopie une des deux variétés est une variété de Haken. Ce théorème a par la suite été étendu au cas des variétés de Seifert à groupe fondamental infini par P. Scott [Sc2] Théorème 3.1.

Plus récemment, D. Gabai, R. Meyerhoff et N. Thurston [GMT] ont démontré que toute équivalence d'homotopie entre une variété hyperbolique, orientable, close et une variété irréductible est homotope à un homéomorphisme. Ce dernier résultat, qui repose en partie sur un programme informatique, utilise en préliminaire un théorème de D. Gabai de rigidité virtuelle des variétés hyperboliques :

THÉORÈME DE RIGIDITÉ VIRTUELLE [Ga1]. — *Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles,*

Mots-clés : Variété de dimension 3 – Nœuds – Équivalence d'homotopie – Nilpotence résiduelle.
Classification math. : 57M50 – 57N10.

orientables, closes. Si M est une variété hyperbolique, alors il existe des revêtements finis de même degré de M et N tel que le relevé de f à ces revêtements est homotope à un homéomorphisme.

Dans cet article, nous présentons une nouvelle démonstration de ce théorème. Elle est plus classique que la preuve originale de Gabai dans le sens où elle ne fait pas intervenir la norme de Thurston (*cf.* [Ga1] Lemme 1.5, Assertion 2, [Ga2] Corollaire 6.18), mais uniquement des techniques standard d'algèbre et de topologie en dimension 3.

Pour mener à bien notre démonstration, nous introduisons une nouvelle classe de nœuds dans les variétés de dimension 3, que nous appelons nœuds Fox-résiduellement nilpotents (*cf.* Définition 2.1). Un des intérêts de ces nœuds réside dans le critère de rigidité topologique suivant :

THÉORÈME 2.3. — *Soit $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles, orientables, closes à groupe fondamental infini. S'il existe dans N un nœud γ non homotope à un point tel que $f^{-1}(\gamma) = k$ est un nœud Fox-résiduellement nilpotent, alors f est homotope à un homéomorphisme.*

La démonstration de ce théorème, donnée au second paragraphe, utilise essentiellement un résultat de J. Stallings [St] sur la suite centrale descendante d'un groupe.

Dans le paragraphe 3, à l'aide d'un outil appelé lemme de dessatellisation de l'image réciproque d'un nœud par une application de degré 1 (Proposition 3.1), nous obtenons une version renforcée du critère de rigidité précédent :

THÉORÈME 3.3. — *Soit $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles, orientables, closes et à groupe fondamental infini. S'il existe dans N un nœud γ, primitif dans sa classe d'homotopie et tel que $f^{-1}(\gamma) = k$ est un nœud satellite d'un nœud Fox-résiduellement nilpotent, alors f est homotope à un homéomorphisme.*

Puisque tout groupe libre est un groupe résiduellement nilpotent (*cf.* [Ma]), d'après un résultat de T. Sakai [Sa] Théorème 1, une géodésique simple dans une variété hyperbolique est toujours un nœud Fox-résiduellement nilpotent. La preuve du théorème de rigidité virtuelle s'obtient au paragraphe 4 en utilisant une géodésique simple fermée primitive dans la variété hyperbolique et en "remontant" à un revêtement fini pour se ramener à une situation permettant d'utiliser le théorème 3.3.

Dans tout ce qui suivra, sauf mention contraire, toutes les variétés seront irréductibles, orientables, closes et à groupe fondamental infini. La terminologie et les notations seront pour l'essentiel celles généralement utilisées en topologie des variétés de dimension 3 (*cf.* Jaco [Ja], Hempel [He], Scott [Sc1] et Thurston [Th1], [Th2]).

Je souhaiterais remercier les professeurs M. Boileau, C. Hayat-Legrand, F. Bonahon, D. Gabai, A. Marin, G.A. Swarup, H. Zeischang et le referee pour leurs remarques et suggestions.

1. Notations et préliminaires.

Une variété M de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère plongée y borde une boule. Une application continue $f : M \to N$, entre deux variétés est *propre* si $f^{-1}(\partial N) = \partial M$ et si l'image réciproque par f de tout compact de N est un compact de M. Une sous-variété V est *proprement plongée* dans une variété M si le plongement de V dans M est une application propre.

Soit $f : M \to N$ une application propre entre deux variétés de même dimension. On désigne par $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ l'homomorphisme induit entre les groupes fondamentaux, $f_{\sharp i} : H_i(M, \partial M; \mathbb{K}) \to H_i(N, \partial N; \mathbb{K})$ et $f^{\sharp i} : H^i(N, \partial N; \mathbb{K}) \to H^i(M, \partial M; \mathbb{K})$ les morphismes induits entre les groupes d'homologie et de cohomologie, où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Si M n'est pas une variété compacte, $H_c^i(M, \partial M; \mathbb{K})$ est le ième groupe de cohomologie de $(M, \partial M)$ à support compact. Lorsque M et N sont des variétés de dimension n orientables (*i.e.* $H_c^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) = H_c^n(N, \partial N; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$), les groupes $H_c^n(M, \partial M; \mathbb{Z})$ et $H_c^n(N, \partial N; \mathbb{Z})$ ont des générateurs préférés que l'on note respectivement $[M, \partial M]$ et $[N, \partial N]$. On définit *le degré de* f par l'entier $\deg(f)$ qui vérifie l'équation : $f^{\sharp n}[N, \partial N] = \deg(f).[M, \partial M]$. Concernant le degré, on a le résultat suivant, *cf.* Epstein [Ep] Corollaire 3.4 :

LEMME 1.1 [Ep]. — *Soit $f : M \to N$ une application propre entre deux variétés orientables de dimension n. Si $\deg(f)$ est un entier non nul, alors l'indice de $f_*(\pi_1(M))$ dans $\pi_1(N)$ divise $\deg(f)$ et $f^{\sharp i}$ est un morphisme injectif pour tout $i = 0, .., n$. En particulier, si $\deg(f) = 1$ alors f est π_1-surjective.* □

Soit M une variété de dimension 3 connexe, irréductible, orientable. Pour une sous-variété K proprement plongée dans M, on note $N(K)$ un voisinage régulier fermé de K dans M. *L'extérieur* de K est le complémentaire dans M d'un voisinage régulier ouvert de K. On notera aussi toujours par $p : \tilde{M} \to M$ le revêtement universel de M et $\tilde{K} = p^{-1}(K)$.

Soient $f : M \to N$ une application propre de degré 1 et K, L des sous-variétés proprement plongées respectivement dans M et N. La notation $f^{-1}(L) = K$ signifiera qu'il existe un voisinage régulier $N(L)$ de L dans N tel que :

i) $f^{-1}(N(L)) = N(K)$ est un voisinage régulier de K dans M,

ii) la restriction, $f_/ : N(K) \to N(L)$, de f aux voisinages réguliers des sous-variétés K et L est un homéomorphisme.

Un nœud dans une variété M de dimension 3 est une sous-variété plongée dans l'intérieur de M, homéomorphe au cercle S^1.

Un nœud k dans une variété M est *primitif*, s'il ne représente pas une puissance non triviale dans le groupe fondamental de la variété M. En particulier, un nœud primitif ne peut être nul homotope. On dit qu'un nœud k est *satellite* d'un nœud k_0 si k est contenu dans un voisinage régulier de k_0.

Une variété est *atoroïdale* si toute application π_1-injective d'un tore T^2 dans M est homotope à une application dont l'image est contenue dans ∂M.

Un nœud $k \subset M$ est dit *atoroïdal* si son extérieur possède la propriété en question.

Dans tout ce qui suit, tous les nœuds considérés seront des nœuds non nuls homotopes.

Si k est un nœud non nul homotope dans M, $\tilde{k}$ est une réunion infinie disjointe d'arcs proprement plongés dans $\tilde{M}$. En particulier, la restriction du revêtement universel de M à l'extérieur de k est un revêtement régulier qui induit la suite exacte courte de groupes :

$$(S_1) \qquad 1 \to \pi_1(\tilde{M} \setminus \mathrm{int}\widetilde{N(k)}) \xrightarrow{p_{/*}} \pi_1(M \setminus \mathrm{int}N(k)) \to \pi_1(M) \to 1.$$

Fox fut un des premiers à remarquer que le groupe $\pi_1(\tilde{M}\setminus\mathrm{int}\widetilde{N(k)})$ joue un rôle important dans l'étude des nœuds dans une variété non simplement connexe. Pour cela, nous proposons la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. — *Avec les notations précédentes, on appelle* groupe de Fox *du nœud* k *dans la variété* M, *le groupe* $\pi_1(\tilde{M}\setminus\mathrm{int}\widetilde{N(k)}) = \mathrm{Ker}\, p_{/*}$ *que l'on notera* $\mathrm{Fox}(M,k)$.

Soit G un groupe. On note $G_1 = [G,G]$ le groupe des commutateurs de G et on définit de façon inductive $G_{n+1} = [G, G_n]$. La suite des groupes G_n ainsi définie s'appelle *la série centrale descendante de* G. Le groupe $G_\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ est la limite de cette série centrale. On rappelle qu'un groupe G est dit *nilpotent* s'il existe un entier positif p tel que $G_p = \{1\}$. On dit aussi que G est *résiduellement nilpotent* si G_ω est trivial.

On désignera par $H_i(G,\mathbb{Z})$ le ième groupe d'homologie de G à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Lorsque $G = \pi_1(M)$ et M est un $K(\pi,1)$, on a toujours : $H_i(G,\mathbb{Z}) = H_i(M,\mathbb{Z})$.

En conclusion à ces préliminaires, on rappelle le théorème de J. Stallings qui est la clef de la preuve du critère 2.3 :

THÉORÈME [St]. — *Soit* $\varphi : G \to H$ *un homomorphisme de groupes qui induit un isomorphisme entre* $H_1(G,\mathbb{Z})$ *et* $H_1(H,\mathbb{Z})$ *et un morphisme surjectif de* $H_2(G,\mathbb{Z})$ *sur* $H_2(H,\mathbb{Z})$. *Alors, pour tout* $n \geq 1$, φ *induit un isomorphisme* $\varphi_n : G/G_n \to H/H_n$ *et un monomorphisme* $\varphi_\omega : G/G_\omega \to H/H_\omega$. □

2. Nœuds Fox-résiduellement nilpotents et critère de rigidité topologique.

DÉFINITIONS 2.1. — *Soit* k *un nœud dans une variété* M. *On dira que* k *est :*

– *un nœud* Fox-résiduellement nilpotent *si son groupe de Fox est résiduellement nilpotent, c'est-à-dire si :*

$$\mathrm{Fox}(M,k)_\omega = \pi_1(\tilde{M}\setminus\mathrm{int}\widetilde{N(k)})_\omega = \{1\}.$$

– *un nœud* libre *si son groupe de Fox est un groupe libre.*

Nous énonçons ici sans démonstration la proposition suivante dont on peut trouver une preuve dans [Du, chapitre II]. Elle résume une série d'exemples de nœuds libres qui, d'après un théorème de Magnus [Ma], sont en particulier des nœuds Fox-résiduellement nilpotents :

PROPOSITION 2.2. — *Toute variété de dimension 3, compacte, irréductible, à groupe fondamental infini et géométrique au sens de Thurston (voir [Sc1]), contient au moins un nœud libre. En particulier, les nœuds suivants sont tous des nœuds libres et donc Fox-résiduellement nilpotents :*

i) *les géodésiques simples des variétés hyperboliques, (voir aussi Sakai [Sa]),*

ii) *les fibres des variétés de Seifert,*

iii) *un nœud transverse à chaque fibre d'une variété fibrée sur le cercle,*

iv) *une courbe simple dans une surface incompressible d'une variété de Haken,*

v) *un nœud isotope par un anneau plongé à une courbe simple dans le bord d'une variété irréductible compacte,*

vi) *une courbe simple contenue dans l'ensemble des points doubles d'une surface orientable immergée, π_1-injectée et vérifiant la "1-line and 3-planes intersection property" considérée par Hass et Scott dans [HS].* □

Il est à noter que dans la démonstration du théorème de rigidité virtuelle, seul le premier point de la proposition précédente interviendra.

Nous donnons maintenant une version plus précise du critère de rigidité topologique 2.3. Pour cela on rappelle qu'une équivalence d'homotopie $f : M \to N$ *se scinde le long d'un nœud* $\gamma \subset N$ si :

i) $f^{-1}(\gamma) = k$ est un nœud de M et

ii) la restriction $f_/ : M \backslash \text{int}N(k) \to N \backslash \text{int}N(\gamma)$ de f aux extérieurs des nœuds k et γ est encore une équivalence d'homotopie.

La preuve du théorème 2.3 occupe la fin de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.3. — *Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles, orientables, closes à groupe fondamental infini. S'il existe dans N un nœud γ non homotope à un point tel que $f^{-1}(\gamma) = k$ est un nœud Fox-résiduellement nilpotent, alors f se scinde le long de γ et f est homotope à un homéomorphisme.*

Démonstration. — Soient $p : \tilde{M} \to M$ et $q : \tilde{N} \to N$ les revêtements universels respectifs de M et N. On note $f_{/*} : \pi_1(M \backslash \text{int}N(k)) \to \pi_1(N \backslash \text{int}N(\gamma))$ le morphisme induit par la restriction $f_/$ de f aux extérieurs des nœuds k et γ et $\tilde{f}_{/*} : \pi_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)}) \to \pi_1(\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)})$ désigne le morphisme induit par $\tilde{f}_/$, le relevé de $f_/$ à $\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)}$.

La suite exacte courte S_1 entraîne que les restrictions des projections $p : \tilde{M} \to M$ et $q : \tilde{N} \to N$ des revêtements universels de M et N aux extérieurs de $\tilde{k} = p^{-1}(k)$ et $\tilde{\gamma} = q^{-1}(\gamma)$ sont des revêtements réguliers de groupe $\pi_1(M)$. D'où, puisque f_* est un isomorphisme, on a $\mathrm{Ker} f_{/*} = \mathrm{Ker}\,\tilde{f}_{/*}$. Par ailleurs, $f_/$ est par construction une application propre de degré 1 qui définit un homéomorphisme des bords. D'après Waldhausen [Wa1], il suffit donc de vérifier que $\mathrm{Ker}\, f_{/*} = \{1\}$ pour montrer que $f_/$ est proprement homotope à un homéomorphisme. En recollant alors les voisinages réguliers des nœuds, on obtient le résultat. La preuve du théorème se ramène donc à montrer que $\mathrm{Ker}\,\tilde{f}_{/*} = \{1\}$. Pour ce faire, nous allons appliquer le théorème de Stallings précédemment cité à l'homomorphisme $\tilde{f}_{/*}$.

AFFIRMATION 1. — *$\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ sont des $K(\pi,1)$ d'homologie triviale.*

Il suffit de le vérifier pour $\tilde{M}$. Or, d'après les hypothèses faites sur M et le théorème de la Sphère, $\pi_2(M) = 0$. En utilisant l'homomorphisme d'Hurewicz et le fait que $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M, on a :

$$H_2(\tilde{M},\mathbb{Z}) = \pi_2(\tilde{M}) = \pi_2(M) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_3(\tilde{M}) = H_3(\tilde{M},\mathbb{Z}) = 0$$

car $\tilde{M}$ est non compacte.

AFFIRMATION 2. — $H_2(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)},\mathbb{Z}) = H_2(\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)},\mathbb{Z}) = 0$ *et $\tilde{f}_/$ induit un isomorphisme $\tilde{f}_{/\sharp_1}$ entre*

$$H_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)},\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad H_1(\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)},\mathbb{Z}).$$

L'égalité des seconds groupes d'homologie découle de la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à la décomposition de $\tilde{M}$ (respectivement $\tilde{N}$) en $\tilde{M} = \tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)} \cup \widetilde{N(k)}$ et de même pour $\tilde{N}$. Or dans cette suite, $H_2(\tilde{M},\mathbb{Z})$ est trivial d'après l'affirmation précédente, $H_2(\widetilde{N(k)},\mathbb{Z}) = 0$ puisque réunion infinie disjointe de cylindres solides (k est non nul homotope) et $H_2(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)} \cap \widetilde{N(k)},\mathbb{Z}) = 0$ en tant que réunion infinie disjointe de surfaces non compactes.

Par un calcul analogue, la suite exacte de Mayer-Vietoris montre que $H_1(\partial(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)}),\mathbb{Z})$ et $H_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)},\mathbb{Z})$ sont naturellement isomorphes. Mais comme $\tilde{f}_/$ induit par construction un homéomorphisme du bord de $\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)}$ sur le bord de $\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)}$, nous obtenons l'isomorphisme $\tilde{f}_{/\sharp_1}$ annoncé.

L'affirmation 2 et le théorème de Stallings impliquent que $\tilde{f}_{/*}$ induit un monomorphisme $(\tilde{f}_{/*})_\omega\ :\ \pi_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)})/(\pi_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)})_\omega) \to \pi_1(\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)})/(\pi_1(\tilde{N}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)})_\omega)$. Mais k étant un nœud Fox-résiduellement nilpotent , $\pi_1(\tilde{M}\backslash\mathrm{int}\widetilde{N(k)})_\omega$ est un groupe trivial. Le diagramme commutatif suivant, où p_ω et q_ω sont les projections naturelles, entraîne alors facilement la conclusion :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{M}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(k)}) \arrow[r, "\tilde{f}_{/*}"] \arrow[d, "p_\omega"] & \pi_1(\tilde{N}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)}) \arrow[d, "q_\omega"] \\
\pi_1(\tilde{M}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(k)})/(\pi_1(\tilde{M}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(k)}))_\omega \arrow[r, "(\tilde{f}_{/*})_\omega"] & \pi_1(\tilde{N}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)})/(\pi_1(\tilde{N}\setminus \mathrm{int}\widetilde{N(\gamma)}))_\omega))
\end{tikzcd}$$

□

3. Lemme de dessatellisation et critère de rigidité renforcé.

Le but de ce paragraphe est de donner une version renforcée du théorème 2.3. Pour cela, l'ingrédient principal que nous allons utiliser est la proposition 3.1 que nous appelons *lemme de dessatellisation* de l'image réciproque d'un nœud. Pour simplifier son énoncé, on introduit la convention suivante :

On dit qu'un nœud k dans une variété M est *satellite homotope* d'un nœud k_0 si k est contenu dans un voisinage régulier $N(k_0)$ de k_0 dans M et si k et k_0 sont librement homotopes.

PROPOSITION 3.1 (de dessatellisation de l'image réciproque d'un nœud). — *Soient $f\ :\ M \to N$ une application propre de degré 1 entre deux sphères d'homologie rationnelle, irréductibles, orientables, à groupe fondamental infini et $\gamma \subset N$ un nœud atoroïdal non homotope à un point. Si l'image réciproque de γ par f est un nœud k, satellite homotope d'un nœud k_0 dans M, alors il existe une application $g\ :\ M \to N$, homotope à f et telle que $g^{-1}(\gamma) = k_0$.*

Démonstration. — On désigne par $N(k_0)$ un voisinage régulier du nœud k_0 contenant k. Nous allons montrer que la restriction de l'application f à $M\backslash\mathrm{int}N(k_0)$, qui n'est pas propre et dont l'image est contenue dans $N\backslash\mathrm{int}N(\gamma)$, est homotope à une application propre de degré 1,

$\varphi : M\backslash\text{int}N(k_0) \to N\backslash\text{int}N(\gamma)$. On vérifie ensuite que par construction, l'application φ ainsi obtenue s'étend de façon naturelle en une application $g : M \to N$, satisfaisant les conclusions de la proposition 3.1. La preuve procède par étapes :

Préliminaires. — Soient $N(k)$ et $N(\gamma)$ les voisinages réguliers de k et γ respectivement dans M et N tels que $N(k) = f^{-1}(N(\gamma))$. On suppose que $N(k_0)$ est choisi de sorte que $N(k) \subset \text{int}N(k_0)$. Pour $i \in \{k, k_0, \gamma\}$, on note $T_i = \partial N(i)$. Par l_i et m_i on désigne deux courbes simples dans T_i dont l'intersection géométrique est réduite à un point et telles que m_i soit le bord d'un disque méridien de $N(i)$. Dans ce cas, (m_i, l_i) est une base de $\pi_1(T_i)$.

On rappelle que d'après nos conventions, $f^{-1}(\gamma) = k$ signifie que la restriction de f aux extérieurs des nœuds k et γ est une application propre qui induit un homéomorphisme des bords (*cf.* §1). Pour conclure à ces préliminaires, on note par $\psi : M\backslash\text{int}N(k_0) \to N\backslash\text{int}N(\gamma)$ et $f_/ : M\backslash\text{int}N(k) \to N\backslash\text{int}N(\gamma)$ les restrictions respectives de f.

ÉTAPE 1. — *$\psi_*(m_0) \neq 1$ dans $\pi_1(N\backslash\text{int}N(\gamma))$.*

Si $\psi(m_0)$ est nul homotope dans $N\backslash\text{int}N(\gamma)$, alors $\psi(m_0)$ est le bord d'un disque singulier $\Delta \subset N\backslash\text{int}N(\gamma)$. Par définition, m_0 est le bord d'un disque méridien $D_0 \subset N(k_0)$ dont le nombre algébrique d'intersections avec k est égal à ± 1, car k et k_0 sont librement homotopes dans $N(k_0)$. D'autre part puisque $k = f^{-1}(\gamma)$, le nombre algébrique d'intersections de $f(D_0)$ avec γ est encore égal à ± 1. On vient donc de construire dans N une sphère singulière, $\Sigma^2 = \Delta \cup f(D_0)$, dont le nombre algébrique d'intersections avec γ est égal à ± 1. D'où Σ^2 n'est pas nulle homologue dans N, ce qui contredit l'hypothèse M et N sphères d'homologie rationnelle. Donc $\psi(m_0)$ est non nul homotope.

ÉTAPE 2. — *ψ_* injecte $\pi_1(T_0)$ dans $\pi_1(N\backslash\text{int}N(\gamma))$.*

Dans le cas contraire, il existe un élément α s'écrivant $p.l_0+q.m_0$ dans $\pi_1(T_0)$ et tel que $\psi_*(\alpha) = f_{/*}(\alpha) = 1$ dans $\pi_1(N\backslash\text{int}N(\gamma))$. Puisque m_0 est le bord d'un disque méridien de $N(k_0)$, m_0 est nul homotope dans M. De plus, d'après les hypothèses, l_0, l_k, k_0 et k sont conjugués dans $\pi_1(M)$ et non homotopes à un point. On obtient donc dans $\pi_1(N)$ la relation $f_{/*}(\alpha) = f_*(l_0)^p = 1$, où $f_*(l_0)$ est conjugué à γ. Comme γ est d'ordre infini dans $\pi_1(N)$, $p = 0$ et $\alpha = q.m_0$ dans $\pi_1(T_0)$. La conclusion découle alors de l'étape précédente.

ÉTAPE 3. — *ψ est homotope à une application propre ψ'.*

Comme γ est un nœud atoroïdal, la première étape implique que $\psi(T_0)$ est homotope dans $N\backslash\mathrm{int}N(\gamma)$ à une surface, éventuellement singulière, contenue dans T_γ. D'après le théorème d'extension des homotopies (cf par exemple Hirsch [Hi]), on peut réaliser cette homotopie de $\psi(T_0)$ par une homotopie de ψ à support $N(T_0) \cong T_0 \times [0,\varepsilon]$, un voisinage régulier de T_0 dans $M\backslash\mathrm{int}N(k_0)$. Pour cela, il suffit d'utiliser une application plateau paramétrée par le rayon du voisinage régulier de T_0. On obtient alors une application $\psi' : M\backslash\mathrm{int}N(k_0) \to N\backslash\mathrm{int}N(\gamma)$, qui coïncide avec ψ sur $M\backslash\mathrm{int}(N(k_0) \cup N(T_0))$ et telle que $\psi'(T_0)$ soit contenu dans T_γ. Par construction, on a ${\psi'}^{-1}(T_\gamma) = T_0$. C'est-à-dire, ψ' est une application propre homotope à ψ sur $M\backslash\mathrm{int}N(k_0)$.

ÉTAPE 4. — *$\psi'_*(l_0) = \pm l_\gamma + qm_\gamma$ dans $\pi_1(T_\gamma)$.*

Si le lacet $\psi'(l_0)$ ne représente pas une classe d'homotopie primitive dans $\pi_1(T_\gamma)$, il existe $p,q,r \in \mathbb{Z}$ tels que $\psi'_*(l_0) = r(pl_\gamma + qm_\gamma)$ dans $\pi_1(T_\gamma)$, avec p et q premiers entre eux. Ce qui conduit à la relation $\psi'_*(l_0) = l_\gamma^{rp}$ dans $\pi_1(N)$. Comme $\psi'_*(l_0)$, $\psi_*(l_0) = f_*(l_0)$, $f_*(k) = \gamma$ et l_γ sont conjugués dans $\pi_1(N)$, il s'ensuit que l_γ^{rp} est conjugué à l_γ dans $\pi_1(N)$. Mais l_γ étant d'ordre infini dans $\pi_1(N)$, d'après Kropholler [Kr, Proposition 1], l_γ est conjugué à l_γ^{rp} dans $\pi_1(N)$ si et seulement si $rp = \pm 1$. D'où l'affirmation.

ÉTAPE 5. — *$\psi'_*(m_0) = \pm m_\gamma$ dans $\pi_1(T_\gamma)$.*

Supposons que $\psi'_*(m_0) = r(pl_\gamma + qm_\gamma)$ dans $\pi_1(T_\gamma)$ avec p et q premiers entre eux. Comme m_0 et m_γ sont respectivement nuls homotopes dans $\pi_1(M)$ et $\pi_1(N)$ et comme l_γ est d'ordre infini dans $\pi_1(N)$, on a $p = 0$ et $\psi'_*(m_0) = rqm_\gamma$ dans $\pi_1(T_\gamma)$.

D'autre part, m_0 est homologue à $\pm m_k$ dans $H_1(N(k_0)\backslash\mathrm{int}N(k), \mathbb{Q})$ et par construction $\psi'(m_0)$ est homologue à $f_/(m_0)$ dans $H_1(N\backslash\mathrm{int}N(\gamma), \mathbb{Q})$. D'où $\psi'(m_0)$ est homologue à $\pm m_\gamma$ dans $H_1(N\backslash\mathrm{int}N(\gamma), \mathbb{Q})$. Or comme N est une sphère d'homologie rationnelle, $m_\gamma \neq 0$ dans $H_1(N\backslash\mathrm{int}N(\gamma), \mathbb{Q})$ et $rq = \pm 1$.

ÉTAPE 6. — *ψ' est proprement homotope sur $M\backslash\mathrm{int}N(k_0)$ à une application $\varphi : M\backslash\mathrm{int}N(k_0) \to N\backslash\mathrm{int}N(\gamma)$, de degré 1 qui induit un homéomorphisme de T_0 sur T_γ.*

D'après ce qui précède, la restriction $\psi'_{/} : T_0 \to T_\gamma$ de ψ' à T_0 définit un isomorphisme des groupes fondamentaux. Le tore T_γ étant un $K(\pi, 1)$, $\psi'_{/}$ est homotope à un homéomorphisme. Comme précédemment, on étend cette homotopie par une application plateau à support un voisinage collier de T_0 dans $M\backslash \mathrm{int}N(k_0)$. On obtient ainsi une application propre $\varphi : M\backslash \mathrm{int}N(k_0) \to N\backslash \mathrm{int}N(\gamma)$, proprement homotope à ψ' et qui induit un homéomorphisme de $T_0 = \varphi^{-1}(T_\gamma)$ sur T_γ. La suite exacte d'homologie des paires $(M\backslash \mathrm{int}N(k_0), T_0)$ et $(N\backslash \mathrm{int}N(\gamma), T_\gamma)$ montre alors que φ est par construction une application de degré 1.

La démonstration de la proposition 3.1 découle maintenant du fait que d'après l'étape 5, $\varphi(m_0)$ est homotope dans T_γ à $\pm m_\gamma$. On peut donc étendre φ en une application $g : M \to N$ telle que $g_{/} : N(k_0) \to N(\gamma)$ soit un homéomorphisme. D'où $g^{-1}(N(\gamma)) = N(k_0)$. □

La proposition suivante va nous permettre de faire intervenir le lemme précédent de façon plus souple dans la preuve de la version renforcée du critère de rigidité topologique.

PROPOSITION 3.2. — *Soit k un nœud primitif dans une variété M de dimension 3, irréductible, orientable, close, atoroïdale et non Seifert. Il existe alors un nœud atoroïdal $\gamma \subset M$ et une application $f : M \to M$, homotope à l'identité et telle que $f^{-1}(\gamma) = k$.*

La démonstration de cette proposition s'appuie sur les deux lemmes suivants :

LEMME 3.2.1.

i) *Tout nœud primitif dans un tore solide est l'image réciproque de l'âme par une application homotope à l'identité relativement au bord.*

ii) *Tout nœud dans S^3 est l'image réciproque du nœud trivial par une application homotope à l'identité.*

iii) *Tout arc simple α proprement plongé dans une boule B^3 est l'image réciproque d'un arc non noué, proprement plongé, par une application homotope à l'identité relativement au bord.*

Démonstration. — Nous allons tout d'abord démontrer le lemme dans le cas d'un nœud primitif k contenu dans l'intérieur d'un tore solide $V \cong S^1 \times D^2$ d'âme γ. Pour cela, on construit anses par anses l'application f demandée.

Soit $N(k)$ un voisinage régulier de k dans V. On appelle W son extérieur, *i.e.* $W = V \backslash \mathrm{int} N(k)$ et on note par T et T_k les bords respectifs de V et $N(k)$.

Comme k est un nœud primitif dans V, $H_i(V, N(k); \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'axiome d'excision et la suite exacte d'homologie de la paire (W, T_k) impliquent alors que W a le type d'homologie d'un tore T^2. En particulier, les plongements respectifs des composantes connexes du bord de W induisent des isomorphismes en homologie. On note par $\chi : H_1(T; \mathbb{Z}) \to H_1(W; \mathbb{Z})$ l'isomorphisme induit par le plongement naturel de T dans W. En composant χ^{-1} avec θ, la projection habituelle de $\pi_1(W)$ sur $H_1(W; \mathbb{Z})$, nous obtenons un homomorphisme $\varphi = \chi^{-1} \circ \theta : \pi_1(W) \to H_1(T; \mathbb{Z}) = \pi_1(T) = \pi_1(T \times I)$ des groupes fondamentaux, où $I = [0, 1]$. Comme les variétés W et $T \times I$ sont des $K(\pi, 1)$, on peut facilement réaliser φ par une application f de W dans $T \times I$. Pour cela, on considère une décomposition de Morse de W en 1 et 2-anses et on construit f anses par anses à partir de $\mathrm{Id}_T : T \subset W \to T \times \{0\} \subset T \times I$.

Quitte à agrandir I et faire un changement de paramètre, on peut supposer que $f(W)$ est contenue dans $T \times [1/4, 3/4]$. Or, les constructions précédentes impliquent que les restrictions respectives de f à T et T_k induisent des isomorphismes entre les groupes fondamentaux de T, T_k et $T \times I$. En particulier, $f(T)$ et $f(T_k)$ sont respectivement homotopes dans $T \times I$ à $T \times \{0\}$ et $T \times \{1\}$. D'où, comme dans les étapes 3 et 6 de la démonstration du lemme de dessatellisation, on peut déformer f par homotopie en une application propre de degré 1 dont la restriction au bord est un homéomorphisme. Nous appelons encore cette application f.

Soit $m \subset T$ (respectivement $m_k \subset T_k$) le bord d'un disque méridien de V (resp. de $N(k)$). D'après les choix précédents, la restriction de f à T est l'application identique; donc $f(m)$ est une courbe simple dans $T \times \{0\}$. D'autre part, puisque k est primitif dans V, m et m_k sont homologues dans W, d'où $f(m_k)$ et m sont librement homotopes dans $T \times I$. Ceci nous permet d'étendre f en une application $\overline{f} : V = W \cup N(k) \to T \times I \cup S^1 \times D^2 = V$ telle que $\overline{f}^{-1}(S^1 \times D^2) = N(k)$. Or $\overline{f}$ est par construction une application propre d'un tore solide dans lui-même et sa restriction au bord est l'identité de T. Elle est donc homotope, relativement au bord, à Id_V.

Le cas d'un nœud dans S^3 se déduit directement du cas précédent en considérant qu'à homotopie près, tout nœud $k \subset S^3$ est primitif dans un tore solide non noué. Il suffit par exemple de considérer l'extérieur du bord d'un disque méridien d'un voisinage régulier de k.

Le cas de l'arc $\alpha \subset B^3$ se démontre de manière analogue au cas du nœud $k \subset V \cong S^1 \times D^2$. □

Avant d'énoncer le second lemme, nous rappellons qu'un tore plongé T est dit *essentiel* dans une variété M si son groupe fondamental s'injecte dans celui de M et s'il n'est pas isotope à une composante connexe de ∂M. D'après le théorème de décomposition de Jaco-Shalen-Johannson des variétés de Haken, *cf.* [JS], [Jo], si k est un nœud dans une variété irréductible, orientable, il existe un nombre minimal $\tau(M,k)$ de tores essentiels deux à deux disjoints et non parallèles dans $M\backslash \mathrm{int}N(k)$, notons les $T_1, ..., T_{\tau(k)}$, tels que $M\backslash\Big(\bigcup_{i=1..\tau(k)} \mathrm{int}N(T_i) \cup N(k)\Big)$ est une variété atoroïdale ou de Seifert. Toujours d'après le théorème de Jaco-Shalen-Johannson, cette famille de tores est alors unique à isotopie près.

LEMME 3.2.2. — *Soit k un nœud primitif dans une variété M de dimension 3, irréductible, orientable, close et atoroïdale. On suppose que $\tau(M,k) \geq 1$. Il existe alors un nœud $k' \subset M$ et une application $f : M \to M$, homotope à l'identité et telle que $f^{-1}(k') = k$ et $\tau(M,k') \leq \tau(M,k) - 1$.*

Démonstration. — L'inégalité $\tau(M,k) \geq 1$ entraîne qu'il existe dans $M\backslash \mathrm{int}N(k)$ un tore essentiel T appartenant à la décomposition minimale de Jaco-Shalen-Johannson de $M\backslash \mathrm{int}N(k)$. D'après les hypothèses faites, ce tore est nécessairement compressible dans M. À l'aide de ce tore et du lemme 3.2.1, nous allons construire dans M le nœud k' et l'application f demandés.

Comme tout tore compressible T dans une variété irréductible sépare en deux, T est soit le bord d'un tore solide V, soit contenu dans une boule B. Puisque k est non nul homotope dans M et T est essentiel dans $M\backslash \mathrm{int}N(k)$, il s'ensuit que ou bien k est contenu dans V, ou bien k rencontre la boule B le long d'un arc simple α, proprement plongé et éventuellement noué dans B tel que $T = \partial(B\backslash \mathrm{int}N(\alpha))$.

Dans le premier cas, $k \subset V$, on note k' l'âme du tore solide V. Puisque k est supposé primitif, k et k' sont librement homotopes dans V. D'après le lemme 3.2.1.i), il existe une application $f : V \to V$, homotope à l'identité relativement au bord de V et telle que $f^{-1}(k') = k$. On peut donc étendre f à M, par l'identité sur $M\backslash \mathrm{int}V$, en une application encore notée f. Par construction nous avons : $\tau(M,k') \leq \tau(M,k) - 1$.

Pour le second cas, $T \subset B$, on considère l'arc trivial α_0, proprement plongé dans B et ayant les mêmes extrémités que α. D'après le lemme 3.2.1, il existe une application $f : B \to B$, homotope à l'identité par une homotopie fixe au bord et telle que $f^{-1}(\alpha_0) = \alpha$. On désigne par $N(\alpha_0)$ le voisinage régulier de α_0 dans B tel que la restriction $f_/ : f^{-1}(N(\alpha_0)) = N(\alpha) \to N(\alpha_0)$ de f soit un homéomorphisme. On définit le nœud $k' \subset M$ par :

$$(M, k') = (M \backslash \mathrm{int} B, k \cap (M \backslash \mathrm{int} B)) \cup (B, f_/(k \cap N(\alpha))).$$

L'application $f : B \to B$ s'étend naturellement par l'identité sur $M \backslash \mathrm{int} B$ en une application de M dans M, encore appelée f. Par construction, l'application $f : M \to M$ ainsi définie est homotope à l'identité de M, $f^{-1}(k') = k$ et $f(T) = \partial(B \backslash \mathrm{int} N(\alpha_0))$ est un tore compressible dans $M \backslash \mathrm{int} N(k')$ (car α_0 est non noué dans B). D'où, comme $\tau(M, k) = \tau((M \backslash \mathrm{int} B) \cup N(\alpha), k) + \tau(B, \alpha) + 1$, on a $\tau(M, k') \leq \tau((M \backslash \mathrm{int} B) \cup N(\alpha), k) \leq \tau(M, k) - 1$. □

Démonstration de la proposition 3.2. — Si k est atoroïdal, il suffit de prendre $f = id_M$ et $\gamma = k$. Sinon, on obtient le résultat en appliquant le lemme 3.2.2 au plus $\tau(M, k)$ fois à partir de la paire (M, k) et en composant la suite d'applications ainsi construite. On obtient ainsi un nœud k' tel que $\tau(M, k') = 0$. D'après le théorème de Jaco-Shalen-Johannson, soit k' est un nœud atoroïdal et il convient, soit $M \backslash N(k')$ est une variété de Seifert. Mais ce dernier cas est impossible car M étant irréductible, la fibration de Seifert de $N \backslash \mathrm{int} N(k')$ s'étendrait sur M tout entier et M serait aussi une variété de Seifert, contredisant l'hypothèse. □

THÉORÈME 3.3. — *Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles, orientables, closes et à groupe fondamental infini. S'il existe dans N un nœud γ, primitif dans sa classe d'homotopie et tel que $f^{-1}(\gamma) = k$ est un nœud satellite d'un nœud Fox-résiduellement nilpotent, alors f est homotope à un homéomorphisme.*

Démonstration. — On suppose que N est une sphère d'homologie rationnelle atoroïdale. Sinon, d'après le théorème du Tore ([Ja] Théorème 8.14, [Wa2]) M est soit une variété de Haken, soit une variété de Seifert et le résultat se déduit respectivement du théorème de rigidité de Waldhausen [Wa1] ou du théorème de Scott [Sc2].

Notons par k_0 le nœud Fox-résiduellement nilpotent dont k est satellite. Comme f est une équivalence d'homotopie et γ est un nœud primitif non homotope à un point, k est primitif et satellite homotope de

k_0. D'après la proposition précédente, il existe une application $\varphi : N \to N$, homotope à l'identité et un nœud atoroïdal $\gamma_0 \subset N$ tel que $\gamma = \varphi^{-1}(\gamma_0)$. Il est primitif par construction. D'après le lemme de dessatellisation, il existe une application $g : M \to N$, homotope à f et telle que $g^{-1}(\gamma_0) = k_0$. Mais k_0 étant un nœud Fox-résiduellement nilpotent, le critère de rigidité 2.3 implique que f est homotope à un homéomorphisme. □

4. Démonstration du théorème de rigidité virtuelle.

La démonstration du théorème de rigidité virtuelle s'appuie sur le lemme suivant que nous énonçons ici sans démonstration et qui est un corollaire direct des lemmes 1.3 et 1.4 de [Ga1]. Ce lemme repose sur la propriété de résiduelle finitude des groupes fondamentaux des variétés hyperboliques de dimension 3 (*cf.* [Mal]) et sur le fait qu'une géodésique simple dans une variété hyperbolique admet des relevés dans des revêtements finis ayant des voisinages tubulaires de rayons arbitrairement grands.

LEMME 4.1. — *Soient l une géodésique de longueur minimale dans une variété hyperbolique M de dimension 3 et $k \subset M$ un nœud librement homotope à l. Alors il existe un revêtement régulier fini $p_1 : M_1 \to M$ dans lequel chaque composante connexe de l'entrelacs $K = \{k_1, ..., k_r\} = p_1^{-1}(k)$ est satellite homotope d'une composante connexe de l'entrelacs $L = \{l_1, ..., l_r\} = p_1^{-1}(l)$.* □

THÉORÈME DE RIGIDITÉ VIRTUELLE [Ga1]. — *Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés de dimension 3, irréductibles, orientables, closes. Si M est une variété hyperbolique, alors il existe des revêtements finis de même degré de M et N tels que le relevé de f à ces revêtements est homotope à un homéomorphisme.*

Démonstration. — Soient $l \subset M$ une géodésique de longueur minimale et $\gamma \subset N$ un nœud librement homotope à $f(l)$. Quitte à modifier f par une homotopie, il est connu que l'on peut supposer que $k = f^{-1}(\gamma)$ est un nœud de M (*cf.* [Wr] Théorème 8.2). Comme f est une équivalence d'homotopie, k et l sont librement homotopes dans M. D'après le lemme précédent, il existe un revêtement régulier fini $p_1 : M_1 \to M$ dans lequel chaque composante connexe de l'entrelacs $K = \{k_1, ..., k_r\} = p_1^{-1}(k)$ est satellite homotope d'une composante connexe de l'entrelacs

$L = \{l_1, ..., l_r\} = p_1^{-1}(l)$. On note encore par $q_1 : N_1 \to N$ le revêtement régulier de N induit par f et p_1. Soient $f_1 : M_1 \to N_1$ le relevé de f à ces revêtements et $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_r\} = q_1^{-1}(\gamma)$.

Comme $l \subset M$ est une géodésique de longueur minimale, c'est un nœud primitif dans M. Par ailleurs, puisque p_1 et q_1 sont des revêtements et f_1 est une équivalence d'homotopie, les composantes connexes de L, K et Γ sont encore des nœuds primitifs. Or par construction, pour tout $i = 1...r$, $f^{-1}(\gamma_i) \subset K$ est un nœud satellite homotope d'une composante connexe de L qui est une géodésique simple. La proposition 2.2.i) et le théorème 3.3 impliquent alors la conclusion. □

BIBLIOGRAPHIE

[Du] J. DUBOIS, Nœuds géométriquement-libres et rigidité topologique des variétés de dimension 3, Thèse, Université Toulouse-III, 1996.

[Ep] D.B.A. EPSTEIN, The degree of map, Proc. London Math. Soc., (3) 16 (1966), 369-383.

[Ga1] D. GABAI, Homotopy hyperbolic 3-manifolds are virtually hyperbolic, J. Amer. Math. Soc., 7 (1994), 193-198.

[Ga2] D. GABAI, Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Differential Geom., 18 (1983), 445-503.

[GMT] D. GABAI, G.R. MEYERHOFF, N. THURSTON, Homotopy Hyperbolic 3-manifolds are hyperbolic, preprint.

[He] J. HEMPEL, 3-Manifolds, Ann. of Math. Stud., vol 86, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1976.

[Hi] M.W. HIRSCH, Differential topology, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[HS] J. HASS, P. SCOTT, Homotopy equivalence and homeomorphism of 3-manifolds, Topology, 31 (1992), 493-517.

[Ja] W. JACO, Lecture on 3-manifold topology, CBMS Lecture Notes, No. 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.

[Jo] K. JOHANNSON, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lecture Note in Math. Vol. 761 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979).

[JS] W. JACO, P. SHALEM, Seifert fibred spaces in 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., 220 (1980).

[Kr] P.H. KROPHOLLER, A note on centrality in 3-manifold groups, School of Math. Sci. , Queen Mary College, London E1 4NS (1989), 261-266.

[Ma] W. MAGNUS, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann., 111 (1935).

[Mal] A. MAL'CEV, On isomorphic matrix representations of infinite groups, Math. Sb., 8 (50) (1940), 405-422.

[Sa] T. SAKAI, Geodesic knots in hyperbolic 3-manifold, Kobe J. Math., 8 (1991), 81-87.

[Sc1] P. SCOTT, The geometry of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 401-487.

[Sc2] P. SCOTT, There are no fake Seifert fibred spaces with infinite π_1, Ann. of Math., (2) 117 (1983), 35-70.

[St] J. STALLINGS, Homology and Central Series of Groups, J. Algebra, 2 (1965), 170-181.

[Th1] W. THURSTON, Geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton University, Princeton NJ, 1978-79.

[Th2] W. THURSTON, Three dimensionnal manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc., 6 (1982) 357-381.

[Wa1] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math., (2) 87 (1968), 56-88.

[Wa2] F. WALDHAUSEN, On the determination of some bounded 3-manifold by their fundamental groups alone, Proc. of Int. Sym. of Topology, Hercy-Novi, Yugoslavia, 1968 : Beograd (1969), 331-332.

[Wr] A.H. WRIGHT, Monotone mappings and degree one mappings between pl manifolds, Geometry Topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974), Lecture Note in Math. Vol 438, Springer, Berlin (1975) 441-459.

Manuscrit reçu le 18 juillet 1997,
accepté le 21 octobre 1997.

Joël DUBOIS,
Université Paul Sabatier
UFR MIG
Laboratoire Émile Picard, UMR 5580
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France).
dubois@picard.ups-tlse.fr