ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Propriétés du groupe tannakien des structures de Hodge p-adiques et torseur entre cohomologies cristalline et étale

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 5 (1997), p. 1289-1334

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_5_1289_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 5 (1997), 1289–1334

PROPRIÉTÉS DU GROUPE TANNAKIEN DES STRUCTURES DE HODGE p-ADIQUES ET TORSEUR ENTRE COHOMOLOGIES CRISTALLINE ET ÉTALE

par **Jean-Pierre WINTENBERGER**

Soit p un nombre premier et soit K un corps local de caractéristique 0 et à corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique p. J.-M. Fontaine a défini la catégorie des (ϕ, N)-modules filtrés sur K ([Fo79], [Fo94]) : si $K_0 \subset K$ est le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans k, un (ϕ, N)-module filtré sur K est un K_0-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une application σ-linéaire bijective ϕ, d'une application linéaire nilpotente N, et, après extension des scalaires à K, d'une filtration. On a : $N\phi = p\phi N$. Un tel (ϕ, N)-module filtré est faiblement admissible s'il vérifie une condition que G. Faltings a interprétée comme une condition de stabilité, au sens de «Geometric invariant theory» de D. Mumford ([Fa94]). C'est un théorème non trivial de G. Laffaille, G. Faltings, et B. Totaro ([La80], [Fa94], [To94]) que le produit tensoriel de deux (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible. Ceci permet de munir les (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles d'une structure de catégorie tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$. Elle est notée $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$. Cette catégorie peut, d'un certain point de vue, être considérée comme un anologue p-adique de la catégorie des structures de Hodge complexes.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et notons G_K le groupe de Galois de $\overline{K}/K$. Appelons représentation p-adique de G_K une représentation continue de G_K dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. J.-M. Fontaine a introduit une sous-catégorie tannakienne de la catégorie

---

Mots-clés : Catégorie tannakienne – Structures de Hodge p-adiques – Torseur – Cohomologies étale et cristalline.
Classification math. : 14F20 – 14F30 – 11S25.

des représentations p-adiques de G_K, la catégorie des représentations p-adiques semi-stables ([Fo94]). Il donne aussi un $\otimes$-foncteur de la catégorie des représentations p-adiques semi-stables dans $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$. Ce foncteur réalise une $\otimes$-équivalence de la catégorie des représentations p-adiques semi-stables sur une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$. Les objets de l'image essentielle de ce foncteur sont dits admissibles et on note $\underline{\mathrm{MF}}_K^{a}(\phi, N)$ la catégorie tannakienne des (ϕ, N)-modules filtrés admissibles. Dans l'équivalence entre représentations p-adiques semi-stables et (ϕ, N)-modules filtrés admissibles, les représentations p-adiques cristallines correspondent aux ϕ-modules filtrés admissibles, *i.e.* aux (ϕ, N)-modules filtrés admissibles avec $N = 0$ ([Fo79]). J.-M. Fontaine conjecture que les (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles sont admissibles $(\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K)$. Cette conjecture a été démontrée par J.-M. Fontaine et G. Laffaille dans le cas particulier $N = 0$, K absolument non ramifié ($e_K = 1$) et la longueur de la filtration $< p$ (*i.e.* on a $\mathrm{Fil}^i D = D$ et $\mathrm{Fil}^{i+p} D = \{0\}$ pour un entier i) ([FL82]). Pour X schéma propre et lisse sur K, à réduction semi-stable, la cohomologie log-cristalline fournit, au moins si $p > 2$, un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{a}(\phi, N)$, la représentation p-adique associée étant la cohomologie étale p-adique ([Ts94]).

La conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ entraîne, pour la catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ des (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, certaines propriétés : existence d'un foncteur fibre sur $\mathbf{Q}_p$, et donc équivalence entre $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ et la catégorie des représentations, dans les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, d'un groupe affine $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{Q}_p$ ($\mathbf{H}$ est donc une limite projective de groupes linéaires), connexité du groupe $\mathbf{H}$ ([Fo79] prop. 3.8.4 dans le cas $N = 0$), description du plus grand quotient abélien de $\mathbf{H}$ ([Se78]). Dans la première partie de cet article, nous prouvons ces propriétés pour $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, généralisant ainsi certains des résultats de [Wi84], qui concernaient le cas où K est absolument non ramifié ($e_K = 1$) et $N = 0$. Plus précisément, nous prouvons qu'il existe des $c \in \mathbf{H}(K_0)$ qui sont tels que, si l'on tord ϕ par c, on obtient une donnée de descente effective de K_0 à $\mathbf{Q}_p$ du foncteur fibre naturel de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$. On obtient ainsi des foncteurs fibres ω_c sur $\mathbf{Q}_p$ (1.6). Pour un tel c, on note $\mathbf{H}_c$ le groupe des $\otimes$-automorphismes de ω_c ; la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est donc équivalente à la catégorie des représentations de $\mathbf{H}_c$ dans les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie.

Dans la seconde partie, nous résolvons pour les (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles sur K le problème du relèvement selon une isogénie. Plus précisément, si H est un quotient algébrique de $\mathbf{H}_c$, et $\alpha : H' \to H$

une isogénie définie sur $\mathbf{Q}_p$, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que le morphisme $\mathbf{H}_c \to H$ se relève en un morphisme $\mathbf{H}_c \to H'$, autrement dit que H' provienne aussi d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Cette condition s'exprime ainsi : d'après un théorème de P. Deligne ([Sa72] chap. 4), la filtration sur $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est scindable, *i.e.* provient d'un groupe à un paramètre $\mu : \mathbf{G}_{\mathrm{m}K} \to \mathbf{H}_K$, et la condition est que l'image de μ dans H_K se relève à H'_K. Nous généralisons ainsi un résultat de [Wi95] (th. 1.1.3), qui concernait le cas $e_K = 1$ et $N = 0$. La conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ entraîne alors facilement la conjecture suivante que nous désignons par $\mathrm{Conj}(isogénie)_K$: si $\rho : G_K \to H(\mathbf{Q}_p)$ est une représentation p-adique semi-stable et si $H' \to H$ est une isogénie telle que le groupe à un paramètre de H donné par la décomposition de Hodge-Tate se relève, alors ρ se relève en une représentation p-adique semi-stable $\rho' : G_K \to H'(\mathbf{Q}_p)$. Rappelons que le théorème de Fontaine-Laffaille ([FL82]) qui donne la conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ lorsque $e_K = 1$, $N = 0$ et la longueur de la filtration est $< p$, permet de prouver la conjecture $\mathrm{Conj}(isogénie)_K$, lorsque $e_K = 1$, $N = 0$ et les poids de la décomposition de Hodge-Tate sont dans un intervalle de longueur suffisamment petit ([Wi95]).

Ensuite, nous prouvons que la partie semi-simple $\mathbf{S}_c$ du groupe $\mathbf{H}_c$ est limite projective de groupes algébriques simplement connexes. Ceci est à rapprocher de la propriété conjecturale analogue du groupe de Galois motivique ([Se94] 8.1). Avec les résultats précédents, la simple connexité de $\mathbf{S}_c$ résulte d'une proposition facile (prop. 3.1.2) sur les groupes réductifs, qui est une variante de la Z-construction (*cf.* par exemple [Bo89] 3.4).

Dans la dernière partie, on donne des conséquences pour le torseur entre le foncteur fibre ω_c et le foncteur fibre qui à un module filtré admissible associe l'espace vectoriel sous-jacent à la représentation p-adique semi-stable associée. Si le (ϕ, N)-module filtré provient de la cohomologie d'un schéma propre et lisse à réduction semi-stable, il s'agit donc du torseur entre cohomologie log-cristalline et cohomologie étale p-adique. Tout d'abord, comme $\mathbf{H}_c$ est connexe, on peut toujours réduire ce problème pour un groupe H au problème identique pour la composante neutre de H (4.3). De plus, à l'aide de nos résultats et d'un théorème de Kneser qui dit que $H^1(\mathbf{Q}_p, S) = \{1\}$ pour S groupe semi-simple simplement connexe ([Kn65]), on prouve facilement que tout torseur sous $\mathbf{H}_c$ est limite projective de torseurs qui ont un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. Sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$, il en est donc ainsi du torseur entre la cohomologie étale et la cohomologie cristralline (et il est très vraisemblable qu'en fait ce torseur a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$). M. Rapoport et T. Zink ont donné une conjecture décrivant ce torseur, lorsque $N = 0$, à l'aide de l'invariant de Kottwitz. Nous énonçons cette conjecture dans le cas des (ϕ, N)-modules filtrés en disant que l'on n'a pas à tenir compte de N. Nous prouvons que $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ entraîne cet énoncé. Le théorème de J.-M. Fontaine et G. Laffaille nous permet de prouver la conjecture de M. Rapoport et T. Zink dans le cas $e_K = 1$ ($N = 0$) et la longueur de la filtration pas trop grande.

Je voudrais remercier B. Totaro : il a prouvé le lemme 3 du théorème 2.2 et a fait les calculs dans le cas du groupe orthogonal. Je voudrais aussi remercier M. Rapoport et T. Zink de m'avoir communiqué leur conjecture, et G. Rousseau qui m'a très gentiment aidé pour les parties qui utilisent les immeubles.

Plan

0. NOTATIONS ET CONVENTIONS

Soit p un nombre premier et soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Notons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 le corps des fractions de W. Désignons par σ le Frobenius de k, W et K_0. On note $\mathbf{Q}_p$ le corps des éléments fixes de K_0 sous l'action de σ et, pour tout entier $s > 1$, on note $\mathbf{Q}_{p^s}$ le corps des éléments fixes de K_0 sous l'action de σ^s. On note $\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}$ la réunion des corps $\mathbf{Q}_{p^s}$. On note K une extension finie de K_0, de degré e_K. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note $\overline{\mathbf{Q}_p}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{K}$. On désigne par G_K et $G_{\mathbf{Q}_p}$ les groupes de Galois des extensions $\overline{K}/K$ et $\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p$ respectivement.

Si $E \subset F$ sont deux corps, et si V est un E-espace vectoriel, on pose $V_F = F \otimes_E V$. De même, si X est un schéma sur E, on pose $X_F = F \times_E X$. Si V' est un F-espace vectoriel et $V \subset V'$ est un sous-E-espace vectoriel de V', on dit que V est une E-structure de V' si le morphisme naturel $V_F \to V'$ est un isomorphisme. De même, si X' est un schéma sur F , on appelle forme sur E de X' un schéma sur E avec un isomorphisme de X_F sur X'.

On appelle sous-catégorie tannakienne d'une catégorie tannakienne une sous-catégorie pleine qui est stable par $\oplus$, $\otimes$, dualité, sous-objet et objet quotient. Si H est un groupe affine sur un corps E, on note $\mathrm{Rep}_E(H)$ la catégorie tannakienne des représentations linéaires de H dans les E-espaces vectoriels de dimension finie. Se donner une sous-catégorie tannakienne $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Rep}_E(H)$ revient à se donner un quotient H' de H : H' s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre naturel de $\mathrm{Rep}_E(H)$ restreint à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ s'identifie à la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}_E(H)$ formée des représentations qui se factorisent à travers H' ([DM82] prop. 2.21.).

1. CONSTRUCTION D'UN FONCTEUR FIBRE SUR $\mathbf{Q}_p$ DE LA CATÉGORIE DES (ϕ, N)-MODULES FILTRÉS FAIBLEMENT ADMISSIBLES

1.1. ϕ-isocristaux sur k.

Un ϕ-isocristal E (sur k et de dimension finie) est la donnée d'un K_0-espace vectoriel de dimension finie $\omega_{\mathrm{sj}}(E)$ (l'espace vectoriel sous-jacent à E) et d'une application σ-linéaire bijective ϕ_E de $\omega_{\mathrm{sj}}(E)$ dans lui-même.

Pour un tel E, on note $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Q}} E_\lambda$ la décomposition de E en ses composantes isoclines. Si s est un multiple des dénominateurs des pentes de E, et si , pour λ rationnel, $\omega_s(E)$ est le $\mathbf{Q}_{p^s}$-espace vectoriel :

$$\omega_s(E)_\lambda = \{x \in \omega_{\mathrm{sj}}(E), \phi_E^s(x) = p^{\lambda s}x\},$$

on a donc : $\omega_{\mathrm{sj}}(E_\lambda) \simeq (\omega_s(E)_\lambda)_{K_0}$. De plus, $\omega_s(E) = \oplus_\lambda \omega_s(E)_\lambda$ est une $\mathbf{Q}_{p^s}$-structure de $\omega_{\mathrm{sj}}(E)$. On note $\nu_{E,s}$ le groupe à un paramètre $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{GL}_{\omega_s(E)}$ dont $\omega_s(E)_\lambda$ est le sous-espace propre de poids λs.

Un morphisme de ϕ-isocristaux est une application linéaire qui commute à l'action de ϕ. Muni des opérations usuelles, somme directe, produit tensoriel, dualité, les ϕ-isocristaux forment une catégorie tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$ ([Sa72] chap.6 § 3). Elle n'est pas neutre, *i.e.* elle n'a pas de foncteur fibre sur $\mathbf{Q}_p$ ([Sa72] *loc. cit.).* Soit E un ϕ-isocristal et soit s un multiple des dénominateurs des pentes de E. Si E' est un ϕ-isocristal de la sous-catégorie tannakienne engendrée par E, s est aussi un multiple des dénominateurs des pentes de E', car E' est isomorphe à un sous-quotient d'une somme de produits tensoriels de d'objets isomorphes à E et à son dual. Si à E' on associe $\omega_s(E')$, on obtient un foncteur fibre à valeurs dans $\mathbf{Q}_{p^s}$ de la sous-catégorie tannakienne engendrée par E.

Le lien de la gerbe associé à la catégorie des ϕ-isocristaux sur k est le groupe proalgébrique diagonalisable $D(\mathbf{Q})$ dont le groupe des caractères est le groupe additif du corps des rationnels $\mathbf{Q}$. Pour tout E, si s est un multiple des dénominateurs des pentes de E, l'action de $D(\mathbf{Q})$ sur $\omega_s(E)$ est celle qui est définie par la graduation, indexée par $\mathbf{Q}$: $\omega_s(E) = \oplus_\lambda \omega_s(E)_\lambda$. On voit qu'elle est donnée par le composé du caractère α_s de $D(\mathbf{Q})$ correspondant à $s^{-1} \in \mathbf{Q}$ et du groupe à un paramètre $\nu_{E,s}$.

Soit H un groupe affine sur $\mathbf{Q}_p$ et soient b et c deux éléments de $H(K_0)$. A $\rho : H \to \mathrm{GL}_V$ de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ (*cf* 0.), on associe les ϕ-isocristaux ${}_bE(\rho) = (V_{K_0}, \rho(b) \circ \sigma)$ et $E(\rho)_c = (V_{K_0}, \sigma \circ \rho(c))$. Les décompositions en composantes isoclines des ϕ-isocristaux ${}_bE(\rho)$ et $E(\rho)_c$ définissent des morphismes ${}_b\nu$ et ν_c de $D(\mathbf{Q})$ dans H_{K_0} ([Ko85] § 4 ou [RR94] pour ${}_b\nu$; la définition de ν_c est identique). On voit immédiatement que ${}_{\sigma(c)}E(\rho)$ et $E(\rho)_c$ s'identifient, et donc ${}_{\sigma(c)}\nu = \nu_c$. Comme de plus : ${}_{\sigma(c)}\nu = {}^\sigma({}_c\nu)$ ([Ko85] 4.4), on voit que $\nu_c = {}^\sigma({}_c\nu)$. En particulier, ν_c est trivial si et seulement si ${}_c\nu$ l'est, auquel cas on dit que c **est de pente** 0.

1.2. (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles sur K.

1.2.1. Soit $\underline{\mathrm{MF}}_K(\phi, N)$ la catégorie des (ϕ, N)-modules filtrés (sur K) ([Fo94]). Rappelons qu'un objet D de cette catégorie est la donnée d'un K_0-espace vectoriel $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ (espace vectoriel sous-jacent), muni :

- d'une application σ-linéaire bijective ϕ_D de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ dans lui-même (on note $E(D)$ le ϕ-isocristal $(\omega_{\mathrm{sj}}(D), \phi_D)$) ;

- d'un endomorphisme N_D du K_0-espace vectoriel $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ vérifiant $N_D\phi_D = p\phi_D N_D$ (ceci entraîne la nilpotence de N_D) ;

- une filtration $(\mathrm{Fil}^i\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K)_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K$ qui est décroissante, exhaustive ($\mathrm{Fil}^i\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K = \omega_{\mathrm{sj}}(D)_K$ pour i petit) et séparée ($\mathrm{Fil}^i\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K = (0)$ pour i grand).

Les morphismes de $\underline{\mathrm{MF}}_K(\phi, N)$ sont les morphismes de ϕ-isocristaux qui commutent à l'action de N et respectent la filtration. Si $N = 0$, on dit aussi que D est un ϕ-module filtré sur K. On note $\underline{\mathrm{MF}}_K(\phi)$ la catégorie des ϕ-modules filtrés sur K.

Si V est un sous-espace vectoriel de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$, on pose

$$t_{\mathrm{H}}(V) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} i\dim_K \mathrm{gr}_i(V_K),$$

où l'on a muni V_K de la filtration induite. Si V est stable par ϕ_D, on pose

$$t_{\mathrm{N}}(V) = \sum_{\lambda\in\mathbf{Q}} \lambda\dim_{K_0}(V_\lambda),$$

où V_λ est la composante isocline de pente λ de l'isocristal $(V, \phi_{|V})$.

Le (ϕ, N)-module filtré D de dimension finie est faiblement admissible si pour tout sous-espace vectoriel V de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ stable par ϕ_D et N_D, on a : $t_{\mathrm{H}}(V) \leqslant t_{\mathrm{N}}(V)$ et si $t_{\mathrm{H}}(\omega_{\mathrm{sj}}(D)) = t_{\mathrm{N}}(\omega_{\mathrm{sj}}(D))$.

On note $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_K(\phi, N)$ dont les objets sont les (ϕ, N)-module filtrés faiblement admissibles.

1.2.2. La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est abélienne ([Fo94] prop. 4.4.4). Le dual d'un (ϕ, N)-module filtré, le produit tensoriel de deux (ϕ, N)-modules filtrés, sont définis de manière évidente. Il est facile de voir que le dual d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible est faiblement admissible ([Fo94] *loc. cit.).* Le produit tensoriel de deux (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles l'est aussi : dans le cas $e_K = 1$ et $N = 0$ c'est un théorème de G. Laffaille ([La80]), dans le cas $N = 0$ mais e_K quelconque, c'est un théorème de G. Faltings ([Fa94], voir aussi [To94]), et B. Totaro le prouve dans le cas général dans [To94]. Il en résulte facilement que $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est une catégorie tensorielle sur $\mathbf{Q}_p$ au sens de [De90]. Le foncteur ω_{sj} qui à un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D associe son espace vectoriel sous-jacent est un foncteur fibre sur K_0. La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est donc une catégorie tannakienne ([De90] 2.8.). Si D est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, on note $\underline{\mathrm{MF}}_D$ la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ engendrée par D ([DM82] 1.14). On note $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ le groupe proalgébrique sur K_0 des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj}. Pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, on désigne par ρ_D la représentation linéaire $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to \mathrm{GL}_{\omega_{\mathrm{sj}}(D)}$ et par $H_{D,\mathrm{sj}}$ le groupe algébrique image de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ par ρ_D. Le groupe algébrique $H_{D,\mathrm{sj}}$ s'identifie donc au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj} restreint à la sous-catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_D$ de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ (*cf* 0.). Si s est un multiple des dénominateurs des pentes de l'isocristal $E(D)$ sous-jacent à D, on note $H_{D,s}$ le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $D' \mapsto \omega_s(E(D'))$ de $\underline{\mathrm{MF}}_D$. Le groupe $H_{D,s}$ est donc une forme sur $\mathbf{Q}_{p^s}$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$.

On dit que D_2 **domine** D_1 si $\underline{\mathrm{MF}}_{D_2}$ contient D_1. On a alors un morphisme surjectif ρ_{D_2,D_1} de $H_{D_2,\mathrm{sj}}$ sur $H_{D_1,\mathrm{sj}}$. On a ainsi un système projectif de groupes algébriques $H_{D,\mathrm{sj}}$ et le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ s'identifie à la limite projective des groupes $H_{D,\mathrm{sj}}$.

1.2.3. On note ν le morphisme de $D(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ défini par le foncteur $D \mapsto E(D)$ (foncteur oubli de la filtration et de N). Autrement dit, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, l'image de $\nu_{E(D)}$ est contenue dans $H_{D,\mathrm{sj}}$ et ν est la limite projective des $\nu_{E(D)}$. On abrège $\nu_{E(D)}$ en ν_D. Si s est un multiple des dénominateurs des pentes de $E(D)$, on note $\nu_{D,s}$ le groupe à un paramètre de $H_{D,s}$ défini par $\nu_{E(D),s}$; il est défini sur $\mathbf{Q}_{p^s}$.

1.2.4. Pour tout scalaire x, les $\exp(xN_D)$ définissent un point de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ et, pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, N_D appartient donc à l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(H_{D,\mathrm{sj}})$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$.

1.2.5. D'autre part, d'après un théorème de Deligne (th. 2.4, chap.4 § 2 de [Sa72]), pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, la $\otimes$-filtration $D' \mapsto \mathrm{Fil}^i\omega_{\mathrm{sj}}(D')_K$ du foncteur fibre ω_{sj_K} de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ est scindable, autrement dit on a une $\otimes$-graduation $D' \mapsto (\omega_{\mathrm{sj}}(D')_{K,i})_{i \in \mathbf{Z}}$ du foncteur fibre $\omega_{\mathrm{sj}K}$, avec

$$\mathrm{Fil}^i\omega_{\mathrm{sj}}(D')_K = \bigoplus_{i' \geqslant i} \omega_{\mathrm{sj}}(D')_{K,i'}.$$

Un tel $\otimes$-scindage définit un groupe à un paramètre μ de $(H_{D,\mathrm{sj}})_K$ (pour D' de $\underline{\mathrm{MF}}_D$, le sous-espace propre de poids i de $\rho_{D,D'} \circ \mu$ est $\omega_{\mathrm{sj}}(D')_{K,i}$). On note $\mathcal{S}c_D$ l'ensemble des groupes à un paramètre qui sont associés à un tel $\otimes$-scindage. L'ensemble $\mathcal{S}c_D$ est un espace principal homogène sous le groupe unipotent des éléments de $H_{D,\mathrm{sj}}(K)$ qui respectent la $\otimes$-filtration de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ et induisent l'identité sur le gradué associé, ce groupe agissant par automorphismes intérieurs ([Sa72] *loc. cit.*). En particulier, tous les éléments de $\mathcal{S}c_D$ sont conjugués par des automorphimes intérieurs de $H_{D,\mathrm{sj}}(K)$; on note $\mathcal{C}_D$ la classe de conjugaison dans $(H_{D,\mathrm{sj}})_{\overline{K}}$ des éléments de $\mathcal{S}c_D$. Notons $\mathcal{F}(H_{D,\mathrm{sj}}, \mathcal{C}_D)$ la variété de drapeaux associée à $\mathcal{C}_D$. C'est le quotient de $\mathcal{C}_D$ par la relation d'équivalence : μ et μ' sont équivalents s'ils induisent la même $\otimes$-filtration sur $\underline{\mathrm{MF}}_D$ (*cf.* par exemple [RZ94] 1.31). On voit donc que $\mathcal{S}c_D$ définit un élément F_D de $\mathcal{F}(H_{D,\mathrm{sj}}, \mathcal{C}_D)(K)$.

1.3. Action de ϕ sur $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$.

1.3.1. Soit ${}^{\sigma}\omega_{\mathrm{sj}}$ le foncteur fibre de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ qui à D associe le K_0-espace vectoriel $K_0\ {}_{\sigma}\!\otimes_{K_0} \omega_{\mathrm{sj}}(D)$ déduit de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ par extension des scalaires par $\sigma : K_0 \to K_0$. Alors, les ϕ_D définissent un $\otimes$-isomorphisme de ${}^{\sigma}\omega_{\mathrm{sj}}$ sur ω_{sj} et donc un isomorphisme de ${}^{\sigma}\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} = K_0\ {}_{\sigma}\!\times_{K_0} \mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ sur $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$. On le note ϕ et on note aussi ϕ l'action qui s'en déduit sur $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0)$ et les $H_{D,\mathrm{sj}}(K_0)$. On a donc $\rho_D(\phi(g)) = \phi_D \circ \rho_D(g) \circ \phi_D^{-1}$, pour $g \in H_{D,\mathrm{sj}}(K_0)$ et D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$.

Remarque 1.3.2. — Il résulte de la relation $N_D\phi_D = p\phi_D N_D$ que l'on a : $\phi(N_D) = p^{-1}N_D$.

Proposition 1.3.3. — *Soit H un quotient algébrique de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ et notons ρ l'homomorphisme : $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to H$. Alors, pour qu'il existe D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ avec* $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\rho_D$*, il faut et il suffit que* $\mathrm{Ker}\rho$ *soit stable par ϕ.*

La proposition entraîne immédiatement le corollaire suivant (*cf.* 0) :

Corollaire 1.3.4. — *Soit H un quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ tel que le noyau de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to H$ soit stable par ϕ. Alors H s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj}, restreint à la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ formée des D qui sont tels que le noyau de ρ_D contient celui de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to H$.*

On note cette catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_H$.

1.3.5. *Démonstration de la proposition.* — La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit donc H un quotient algébrique de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ comme ci-dessus. Soit D un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ tel que le noyau de ρ_D soit contenu dans celui de ρ. Notons $\tilde{\rho}$ le morphisme de $H_{D,\mathrm{sj}}$ sur H et soit s un multiple des dénominateurs des pentes de D.

Tout d'abord, $\tilde{\rho}$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_{p^s}$ à K_0 d'un morphisme de $H_{D,s}$ sur un groupe H_s. En effet, il est facile de voir que, dans l'isomorphisme $(H_{D,s})_{K_0} \simeq H_{D,\mathrm{sj}}$, l'action de σ sur $(H_{D,s})_{K_0}$ correspond à celle de $\phi^s \circ \mathrm{int}(\nu_{D,s}(p^{-1}))$ sur $H_{D,\mathrm{sj}}$. Le groupe $\mathrm{Ker}\tilde{\rho}$ est stable par hypothèse par ϕ et aussi par $\mathrm{int}(\nu_s(p))$ puisque il est distingué dans $H_{D,s}$. Il est donc stable par $\phi^s \circ \mathrm{int}(\nu_s(p^{-1}))$, ce qui prouve bien que $\tilde{\rho}$ se descend à $\mathbf{Q}_{p^s}$. Nous notons encore $\tilde{\rho}$ le morphisme de $H_{D,s}$ sur H_s.

On sait, d'après 3.11 de [DM82], que la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_{p^s}}(H_{D,s})$ s'identifie à la catégorie tannakienne $\mathbf{Q}_{p^s}$-linéaire dont les objets sont les couples (D', ι) formés d'un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ et d'un $\mathbf{Q}_p$-plongement ι de $\mathbf{Q}_{p^s}$ dans $\mathrm{End}(D)$, les morphismes et $\otimes$-structures étant définis de la manière évidente ([DM82] *loc. cit.*). On note $\underline{\mathrm{MF}}_{D,s}$ cette catégorie. Plus précisément, pour un tel (D', ι), on a une structure de $\mathbf{Q}_{p^s} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_{p^s}$-module sur $\omega_s(D')$, les deux actions de $\mathbf{Q}_{p^s}$ sur $\omega_s(D')$ étant l'action définie par la structure de $\mathbf{Q}_{p^s}$-espace vectoriel et celle définie par ι. Pour tout $t \in \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$, on note $\omega_s(D')_{[t]}$ le sous-espace vectoriel de $\omega_s(D')$ formé des éléments x de $\omega_s(D')$ qui sont tels que $\iota(\lambda)(x) = \sigma^t(\lambda)x$. Comme l'action de $H_{D,s}$ sur $\omega_s(D')$ commute aux deux actions de $\mathbf{Q}_{p^s}$, le groupe $H_{D,s}$ laisse stable les $\omega_s(D')_{[t]}$ Si à (D', ι) on associe $\omega_s(D')_{[t]}$, on définit un foncteur fibre de $\underline{\mathrm{MF}}_{D,s}$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_{p^s}$. Le groupe $H_{D,s}$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $D' \mapsto \omega_s(D')_{[0]}$ ([DM82] *loc. cit.*).

Soit (D', ι') un générateur de la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{MF}}_{D,s}$ qui correspond aux représentations qui se factorisent à travers le noyau de $\tilde{\rho}$. Il suffit, pour prouver la proposition de prouver que le noyau du morphisme $\rho_{D,D'}$ (*cf.* 1.2) de $H_{D,s}$ sur $H_{D',s}$ coïncide avec celui de $\tilde{\rho}$. Pour $t \in \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$ et $g \in H_{D,s}$, on note $\rho_{D,D'}(g)_{[t]}$ la restriction de $\rho_{D,D'}(g)$ à $\omega_s(D')_{[t]}$. Le noyau de $\tilde{\rho}$ est , par la définition de (D', ι), le noyau de $g \mapsto \tilde{\rho}(g)_{[0]}$, celui de $\rho_{D,D'}$ est l'intersection des noyaux des $g \mapsto \tilde{\rho}(g)_{[t]}$, pour $t \in \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$. Comme $\phi_{D'}$ est σ-linéaire et commute à l'action de $\iota'(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}_{p^s}$, on voit facilement que $\phi_{D'}$ envoie $\omega_s(D')_{[t]}$ sur $\omega_s(D')_{[t+1]}$. On voit alors que : $\rho_{D,D'}(\phi(g))_{[t+1]} = \phi_{D'} \circ \rho_{D,D'}(g)_{[t]} \circ \phi_{D'}^{-1}$. Si t est l'image dans $\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$ de $n \in \mathbf{Z}$, on a $\rho_{D,D'}(g)_{[t]} = \mathrm{id}$ si et seulement si $\tilde{\rho}(\phi^{-n}(g))_{[0]} = \mathrm{id}$. Comme le noyau de $\tilde{\rho}$ est stable par ϕ, on voit que l'on a bien que les noyaux de $\tilde{\rho}$ et $\rho_{D,D'}$ coïncident, ce qui prouve la proposition.

1.4. Connexité du groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$.

PROPOSITION. — *Le groupe* $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ *est connexe.*

Autrement dit ([DG70] chap. 3.3 n° 7), pour tout (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D, le groupe algébrique $H_{D,\mathrm{sj}}$ est connexe.

Remarque. — J.-M. Fontaine a prouvé que l'adhérence de Zariski H_{Gal} de l'image de l'inertie dans une représentation p-adique cristalline est connexe ([Fo79] prop. 3.8.4). On peut prouver, en reprenant la démonstration de J.-M. Fontaine, que ce résultat s'étend aux représentations semi-stables. Comme, pour D admissible, le groupe $H_{D,\mathrm{sj}}$ est une forme intérieure de $(H_{D,\mathrm{Gal}})_{K_0}$, on voit que la proposition ci-dessus est, sous la conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$, une conséquence de la généralisation du résultat de J.-M. Fontaine.

Démonstration de la proposition. — Puisque la composante neutre de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ est stable par ϕ, on voit, avec le corollaire 1.3.4, qu'il suffit de prouver que, si D est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ tel que ρ_D se factorise à travers $\pi_0(\mathbf{H}_{\mathrm{sj}})$, D est une somme directe d'objets isomorphes à l'objet unité. Mais c'est clair, car pour un tel D, le morphisme ν_D du groupe connexe $D(\mathbf{Q})$ dans H_D est trivial, donc le ϕ-isocristal $E(D)$ est bien isocline de pente 0. L'algèbre de Lie de H_D est triviale donc $N_D = 0$, et le groupe à un paramètre de H_D associé à un scindage de la filtration est trivial, donc on a bien $\mathrm{Fil}^0\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K = \omega_{\mathrm{sj}}(D)_K$ et $\mathrm{Fil}^1\omega_{\mathrm{sj}}(D)_K = (0)$. Ceci prouve la proposition.

1.5. Plus grand quotient abélien de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$.

1.5.1. On sait que la catégorie $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ des représentations p-adiques abéliennes cristallines du groupe de Galois G_K de K est engendrée par les modules de Tate des groupes formels de Lubin et Tate associés aux extensions finies E de $\mathbf{Q}_p$ contenues dans K ([Se78] th. 5). Plus précisément, pour chaque E, la restriction à G_K de la représentation p-adique du groupe formel de Lubin et Tate associé à une uniformisante de E ne dépend pas du choix de cette uniformisante; on la note V_E. Si T_E est la restriction des scalaires à la Weil $R_{E/\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à V_E est muni d'une structure de E-espace vectoriel de dimension 1 et on a un caractère $G_K \to T_E(\mathbf{Q}_p) = E^*$ donnant l'action de Galois. Le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{Gal} qui à une représentation p-adique de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ associe son espace vectoriel sous-jacent s'identifie au protore $\mathbf{T}_K$, $\mathbf{T}_K = \varprojlim T_E$, les morphismes de transition dans la limite projective étant induits par les normes. La catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ est donc équivalente à la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{T}_K)$ des représentations linéaires de $\mathbf{T}_K$ dans les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. Le foncteur de Fontaine qui associe à une représentation p-adique cristalline V son module de Dieudonné filtré $D(V)$ définit une équivalence de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ sur une sous-catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ab}}(\phi)$ de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$. Le groupe des $\otimes$-automorphismes de la restriction du foncteur fibre ω_{sj} à $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ab}}(\phi)$ est une forme intérieure de $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$, obtenue par torsion par le $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$-torseur des $\otimes$-isomorphismes de $(\omega_{\mathrm{Gal}})_{K_0}$ sur la restriction de ω_{sj}. Comme $\mathbf{T}_K$ est abélien, on voit que le groupe des $\otimes$-automorphismes de ω_{sj}, restreint à $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ab}}(\phi)$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$. On en déduit un morphisme surjectif de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ sur $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$.

PROPOSITION 1.5.2. — *Soit D un (ϕ, N) module filtré faiblement admissible tel que $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien. Alors D est dans l'image essentielle de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ par le foncteur de Fontaine.*

COROLLAIRE 1.5.3. — *Notons $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}^{\mathrm{ab}}$ le quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ par son sous-groupe des commutateurs. Alors, l'homomorphisme naturel $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}^{\mathrm{ab}} \to (\mathbf{T}_K)_{K_0}$ est un isomorphisme.*

Remarque. — Notons E_∞ la plus grande extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K et $\mathcal{P}_{E_\infty/\mathbf{Q}_p}$ l'ensemble des $\mathbf{Q}_p$-plongements de E_∞ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$. Le groupe des caractères de $\mathbf{T}_K$ s'identifie au groupe additif des fonctions localement constantes sur $\mathcal{P}_{E_\infty/\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Soit $\mathbf{C}$ le centre du quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ par son radical unipotent. On a un épimorphisme de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{T}_K$, et donc un homomorphisme injectif des groupes des caractères : $X^*(\mathbf{T}_K) \to X^*(\mathbf{C})$. Par analogie avec [Se94] 7.3.4, on peut se demander si cet homomorphisme induit un isomorphisme de $X^*(\mathbf{C})$ sur $X^*(\mathbf{T}_K) \otimes \mathbf{Q}$ et donc si $X^*(\mathbf{C})$ s'identifie au groupe additif des fonctions localement constantes de $\mathcal{P}_{E_\infty/\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $\mathbf{Q}$.

Démonstration de la proposition. — Rappelons la description que nous avons donnée dans [Wi91] du foncteur de Fontaine $V \mapsto D(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{G_K}$ restreint aux représentations p-adiques cristallines abéliennes de G_K. Pour toute extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, si m est l'homomorphisme de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} E \to E$ qui à $x \otimes x'$ associe xx', notons μ_E le groupe à un paramètre de T_E défini sur E par l'unique section de m qui est E-linéaire pour les actions à droite et à gauche de E sur $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$. (*cf* [Wi91] 1.7 où μ_E est noté h_E). Notons μ_K le groupe à un paramètre de $(\mathbf{T}_K)_K$ limite projective des μ_E. Soit π_K une uniformisante de K. Posons :

$$c_{\pi_K} = N_{K/K_0}(\mu_K(\pi_K)) \in \mathbf{T}_K(K_0),$$

où N_{K/K_0} désigne le produit des conjugués dans le groupe abélien $\mathbf{T}_K(K)$. Si $\rho : \mathbf{T}_K \to \mathrm{GL}_V$ est une représentation de $\mathbf{T}_K$ dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie, on note $D(\rho)$ le module filtré défini par :

– le K_0-espace vectoriel sous-jacent à $D(\rho)$ est $K_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$;

– on a : $\phi_{D(\rho)} = (\sigma \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho(c_{\pi_K})$;

– on a : $N_{D(\rho)} = 0$;

– on a $\mathrm{Fil}^i \omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho)) = \oplus_{i' \geqslant i} V_{K i'}$, si $\oplus_{i \in \mathbf{Z}} V_{K\ i}$ est la graduation de V_K définie par l'action de μ_K.

Alors, le foncteur ainsi défini de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ dans $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ab}}(\phi)$ est isomorphe au foncteur de Fontaine ([Wi91]) (nous avons pris ici la convention que μ_K correspond à l'inverse du groupe à un paramètre défini par la décomposition de Hodge-Tate, ce qui explique certaines différences de signe avec [Wi91]).

Soit D un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ tel que $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien. Il s'agit donc de prouver qu'il existe une représentation linéaire ρ de $\mathbf{T}_K$ tel que D soit isomorphe à $D(\rho)$.

Tout d'abord, la relation $N_D \phi_D = p \phi_D N_D$ entraîne que N_D envoie la composante isocline de pente λ de l'isocristal sous-jacent à D sur celle de pente $\lambda - 1$. Il en résulte que, si s est un multiple des dénominateurs des pentes de D, on a $\mathrm{ad}(\nu_{D,s}(\lambda))(N_D) = \lambda^{-s} N_D$ pour tout scalaire λ. On a donc bien $N_D = 0$ puisque $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien.

Comme les groupes à un paramètre associés à deux $\otimes$-scindages de la filtration sont conjugués et que $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien, la filtration sur $\underline{\mathrm{MF}}_D$ est canoniquement scindée. Notons μ_D le groupe à un paramètre de $H_{D,\mathrm{sj}}$ associé à ce scindage (1.2) (si $D = D(\rho)$ pour une représentation ρ de $\mathbf{T}_K$, on a donc : $\mu_D = \rho \circ \mu_K$). Posons :

$$c_{D,\pi_K} = N_{K/K_0}(\mu_D(\pi_K)) \in H_{D,\mathrm{sj}}(K_0).$$

Posons $\phi_{D,\pi_K} = \phi_D \circ c_{D,\pi_K}^{-1}$ et notons $E(D)_{\pi_K}$ l'isocristal : $(\omega_{\mathrm{sj}}(D), \phi_{D,\pi_K})$.

LEMME 1.5.4. — *L' isocristal $E(D)_{\pi_K}$ est isocline de pente* 0.

Démonstration. — La décomposition en composantes isoclines des $E(D')_{\pi_K}$, pour D' de $\underline{\mathrm{MF}}_D$, définit une $\otimes$-graduation de la restriction du foncteur fibre ω_{sj} à $\underline{\mathrm{MF}}_D$, et donc, si on choisit un multiple du dénominateur des pentes de $E(D)_{\pi_K}$, elle définit comme au 1.1 un groupe à un paramètre ν_{π_K} de $H_{D,\mathrm{sj}}$.

Les sous-espaces vectoriels sous-jacents à la décomposition en composantes isoclines de $E(D)_{\pi_K}$ sont bien sûr stables par ϕ_{D,π_K}. Ils sont aussi stables par c_{D,π_K} puisque c_{D,π_K} et l'image de ν_{π_K} commutent, $H_{D,\mathrm{sj}}$ étant abélien. Comme $\phi_D = \phi_{D,\pi_K} \circ c_{D,\pi_K}$, ils sont aussi stables par ϕ_D. Munis de la restriction de ϕ_D et la filtration induite de celle de D, ils définissent des ϕ-modules filtrés. Pour tout rationnel λ, on note D_λ le sous-ϕ-module filtré de D ainsi défini. Il s'agit de prouver que $D_\lambda = (0)$ si $\lambda \neq 0$.

Comme les images de ν_{π_K} et du groupe à un paramètre μ_D associé au scindage de la filtration commutent, les D_λ sont aussi stables sous l'action de μ_D. Il en résulte que le ϕ-module filtré D est somme directe des ϕ-modules filtrés D_λ. Comme D est faiblement admissible, on voit immédiatement que les D_λ le sont. Les entiers $t_{\mathrm{H}}(D_\lambda)$ et $t_{\mathrm{N}}(D_\lambda)$ sont égaux à un même entier que nous notons t_λ. On a : $t_{\mathrm{H}}(\wedge^{\max} D_\lambda) = t_{\mathrm{N}}(\wedge^{\max} D_\lambda) = t_\lambda$. Puisque $t_{\mathrm{H}}(\wedge^{\max} D_\lambda) = t_\lambda$, l'action de ϕ_{D,π_K} sur $\omega_{\mathrm{sj}}(\wedge^{\max} D_\lambda)$ est $x \mapsto \phi_{\wedge^{\max} D_\lambda}(N_{K/K_0}(\pi_K)^{-t_\lambda} x)$. Comme la valuation p-adique de $N_{K/K_0}(\pi_K)$ est 1, on voit que la pente de $\wedge^{\max} E(D_\lambda)_{\pi_K}$ est 0. Comme par définition de D_λ, elle est égale à $\lambda \dim(D_\lambda)$, on a donc bien que $E(D)_{\pi_K}$ est isocline de pente 0, ce qui prouve le lemme.

1.5.5. On voit alors que si à D' de $\underline{\mathrm{MF}}_D$, on associe le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des éléments de $\omega_{\mathrm{sj}}(D')$ qui sont fixes par ϕ_{D',π_K}, on définit un foncteur fibre de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$; on le note ω_{π_K} et on désigne par H_{D,π_K} le groupe sur $\mathbf{Q}_p$ de ses $\otimes$-automorphismes. Le groupe algébrique H_{D,π_K} est donc une forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$. Il en résulte que H_{D,π_K} est abélien et est le produit d'un tore T_D par un groupe unipotent, tous deux définis sur $\mathbf{Q}_p$. L'image de μ_D est contenue dans $(T_D)_K$. Comme T_D se déploie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$, le corps de définition E de μ_D est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Elle est contenue dans K puisque μ_D est défini sur K. Comme les images dans $(T_D)_{\overline{\mathbf{Q}_p}}$ des conjugués de μ_D sous l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ commutent, il existe un unique morphisme de T_E dans T_D qui envoie μ_E sur μ_D. On voit immédiatement que si on désigne par ρ la représentation de $\mathbf{T}_K$ définie en composant : $\mathbf{T}_K \to T_E$, $T_E \to T_D \to \mathrm{GL}_{\omega_{\pi_K}(D)}$, les ϕ-modules filtrés $D(\rho)$ et D sont isomorphes. Ceci achève de prouver la proposition.

Remarque 1.5.6.— Le groupe $\mathbf{T}_K$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre naturel ω_{Gal} de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$ (1.5.1). Si ω

est un foncteur fibre sur $\mathbf{Q}_p$ de $\underline{\mathrm{CRIS}}_K^{\mathrm{ab}}$, le groupe de ses $\otimes$-automorphismes est une obtenu à partir de $\mathbf{T}_K$ par torsion par le $\mathbf{T}_K$-torseur des $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre ω_{Gal} sur ω. Comme $\mathbf{T}_K$ est abélien, le groupe $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ est donc canoniquement isomorphe à $\mathbf{T}_K$. Ceci est en particulier vrai pour les foncteurs fibres ω_{π_K}. D'autre part, comme $\phi_D = \phi_{D,\pi_K} \circ c_{D,\pi_K}$, on voit que l'action de ϕ sur $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$ définie au 1.3.1 coïncide avec l'action naturelle de σ sur $(\mathbf{T}_K)_{K_0}$.

1.6. Construction du foncteur fibre ω_c.

1.6.1. Soit H un quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ tel que le noyau de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to H$ soit stable par ϕ, de sorte que H s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj}, restreint à $\underline{\mathrm{MF}}_H$ (corollaire 1.3.4). Soit $c \in H(K_0)$. Pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$, on note $\phi_{D,c}$ l'application σ-linéaire bijective de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ dans lui-même : $\phi_D \circ \rho_D(c^{-1})$. On note $C_{H,0}$ l'ensemble des $c \in H(K_0)$ tels que, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$, le ϕ-isocristal $(\omega_{\mathrm{sj}}(D), \phi_{D,c})$ est isocline de pente 0. Si $H = H_{D,\mathrm{sj}}$, on désigne $C_{H,0}$ par $C_{D,0}$.

THÉORÈME 1.6.2. — *Il existe $c \in \mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0)$ tel que, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, le ϕ-isocristal $(\omega_{\mathrm{sj}}(D), \phi_{D,c})$ est isocline de pente 0, autrement dit $C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$ est non vide.*

Si c est comme dans le théorème, le foncteur qui à D associe le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des éléments de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ fixes par $\phi_{D,c}$ est un foncteur fibre de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$; on le note ω_c. On a donc :

COROLLAIRE 1.6.3. — *La catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ est neutre.*

On note $\mathbf{H}_c$ le groupe des $\otimes$-automorphismes de ω_c ; le groupe $\mathbf{H}_c$ est donc une forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ (au sens de 0). La catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ s'identifie donc à la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ des représentations linéaires de $\mathbf{H}_c$ dans les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie ([DM82] th. 2.11). Pour tout D, on note $H_{D,c}$ l'image de $\mathbf{H}_c$ dans $\mathrm{GL}_{\omega_c(D)}$; le groupe algébrique $H_{D,c}$ est donc une forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$.

Remarques 1.6.4. — 1) Soit π_K une uniformisante de K et c_{π_K} l'élément de $\mathbf{T}_K(K_0)$ défini dans la démonstration de la proposition 1.5.2. Le lemme 1.5.4 montre que c_{π_K} est un élément de $C_{\mathbf{T}_K,0}$; la preuve du théorème montre qu'il existe $c \in \mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0)$ d'image c_{π_K} dans $\mathbf{T}_K(K_0)$.

2) Supposons $e_K = 1$ ($K = K_0$). Soit D un ϕ-module filtré. Rappelons ([La80]) qu'un réseau M de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ est fortement divisible si on a :

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} \phi(p^{-i}(\mathrm{Fil}^i D \cap M)) = M.$$

G. Laffaille a prouvé que D est faiblement admissible si et seulement s'il possède un réseau fortement divisible ([La80]). Dans [Wi84], nous avons prouvé qu'il existe un $\otimes$-scindage $D \mapsto D_i$ de la $\otimes$-filtration $D \mapsto (\mathrm{Fil}^i D)$ (*cf.* 1.2.5) qui est compatible avec les réseaux fortement divisibles *i.e.* :

$$M = \underset{i\in\mathbf{Z}}{\oplus}(D_i \cap M)$$

pour tout ϕ-module filtré faiblement admissible D et tout réseau fortement divisible M de D ([Wi84]). Soit $\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}}$ le quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ qui correspond aux ϕ-modules filtrés faiblement admissibles (sur K_0) et soit μ le groupe à un paramètre de $\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}}$ défini par un tel $\otimes$-scindage. Si D est un ϕ-module filtré faiblement admissible sur K_0, et si M est un réseau fortement divisible de D, on voit facilement que $(\phi_D \circ \rho(\mu(p^{-1}))(M) = M$, où ρ est le morphisme de $\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}}$ sur $H_{D,\mathrm{sj}}$; il en résulte que le ϕ-isocristal $(\omega_{\mathrm{sj}}(D), \phi_D \circ \rho(\mu(p^{-1})))$ est isocline de pente 0. On voit donc que $\mu(p) \in C_{\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}},0}$.

3) Les remarques 1) et 2) montrent que pour les ϕ-modules filtrés D qui sont définis sur K_0 ou qui sont tels que $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien, il existe $c \in C_{D,0}$ vérifiant une propriété particulière vis-à-vis de la filtration. Nous ignorons si l'on peut imposer un tel lien entre c et la filtration dans le cas général.

4) La démonstration qui suit est inspirée de [Ko84] lemme 1.4.9.

Démonstration du théorème. — Soit c_{π_K} l'élément de $\mathbf{T}_K(K_0)$ défini dans la démonstration de la proposition 1.5.2. Prouvons qu'il existe un élément de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0)$ qui vérifie les conclusions du théorème et dont l'image dans $\mathbf{T}_K(K_0)$ est c_{π_K}.

Notons $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ le quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ par son radical unipotent et $\mathbf{S}$ le groupe des commutateurs de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$. Donc, $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ est le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj} restreint à la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ formée de ses objets semi-simples. Supposons prouvé qu'il existe $c_{\mathrm{red}} \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{red}},0}$, d'image c_{π_K} dans $\mathbf{T}_K(K_0)$. Alors, le théorème en résulte facilement. En effet, tout d'abord, comme un torseur sous un groupe unipotent est trivial, $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0) \to \mathbf{H}_{\mathrm{red}}(K_0)$ est surjectif. Soit alors c

un élément de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}(K_0)$ d'image c_{red} dans $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}(K_0)$. Comme un ϕ-isocristal est isocline de pente 0 si et seulement si son semi-simplifié l'est, on voit facilement que $c \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$ (et son image dans $\mathbf{T}_K(K_0)$ est bien c_{π_K}).

Prouvons l'existence de c_{red}.

Soit Λ l'ensemble formé des couples (H_λ, c_λ) où :

– 1) H_λ est le quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ par un sous-groupe distingué Ker_λ de $\mathbf{S}$ qui est connexe et stable sous l'action de ϕ (comme le centre $\mathbf{C}$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ s'envoie sur $\mathbf{T}_K$, on voit que Ker_λ est aussi distingué dans $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$) ;

– 2) $c_\lambda \in C_{H_\lambda,0}$ et l'image de c_λ dans $\mathbf{T}_K(K_0)$ est c_{π_K}.

On munit Λ d'une structure d'ordre en disant que $\lambda' \geqslant \lambda$ si $\mathrm{Ker}_{\lambda'} \subset \mathrm{Ker}_\lambda$ et $c_{\lambda'}$ a pour image c_λ dans $H_\lambda(K_0)$.

L'ensemble Λ est inductif. En effet, si $\Lambda' \subset \Lambda$ est un sous-ensemble totalement ordonné, le couple formé de $H_{\lambda_\infty} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda'} (H_\lambda)$ et de $c_\infty \in H_{\lambda_\infty}(K_0)$ défini par les c_λ, $\lambda \in \Lambda'$, est un majorant de Λ'. La seule chose qui n'est peut-être pas évidente est que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} \mathrm{Ker}_\lambda$ est connexe. Mais, si A est l'algèbre affine de $(\mathbf{S})_{\overline{K}}$ et, pour tout $\lambda \in \Lambda'$, si I_λ est l'idéal de A formé des fonctions qui s'annulent sur $(\mathrm{Ker}_\lambda)_{\overline{K}}$, l'algèbre affine de $(H_{\lambda_\infty})_{\overline{K}}$ est $A/\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} I_\lambda$ et on vérifie immédiatement que cette algèbre est intègre puisque les algèbres affines A/I_λ le sont.

Soit alors (H_λ, c_λ) un élément maximal. Le théorème sera prouvé si l'on prouve que $H_\lambda = \mathbf{H}_{\mathrm{red}}$.

Sinon, il existe un quotient H de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ et vérifiant :

1) On a $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H) \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H_\lambda)$, de sorte que H_λ s'identifie à un quotient de H ;

2) le noyau du morphisme $\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H$ est connexe et stable sous l'action de ϕ ;

3) le noyau S du morphisme $H \to H_\lambda$ est algébrique et $\neq \{1\}$.

En effet, il est clair qu'il existe H_1 vérifiant ces propriétés sauf peut-être la connexité du noyau de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H_1$. Pour un tel H_1, le groupe fondamental de $S_1 = \mathrm{Ker}(H_1 \to H_\lambda)$ est fini, et on voit facilement que le quotient H de $\mathbf{H}_{\mathrm{red}}$ par la composante neutre de $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H_1)$ vérifie les propriétés ci-dessus. Il suffit, pour prouver le théorème, de montrer qu'il existe $c \in C_{H,0}$, d'image c_λ dans $H_\lambda(K_0)$.

Tout d'abord, comme $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}_{\mathrm{red}} \to H)$ est connexe, S l'est. D'après un théorème de Steinberg ([St65]), un espace principal homogène sous S défini sur K_0 est trivial. Ceci implique que $H(K_0) \to H_\lambda(K_0)$ est surjectif. Soit c_0 un élément de $H(K_0)$ d'image c_λ dans $H_\lambda(K_0)$.

Pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$, on pose $\phi_{D,c_0} = \phi_D \circ \rho_D(c_0^{-1})$ (*cf.* 1.6.1). Soit $\nu_{(c_0)}$ le morphisme de $D(\mathbf{Q})$ dans H qui est défini par les décompositions en composantes isoclines des ϕ-isocristaux (D, ϕ_{D,c_0}) pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$ (*cf.* 1.1 : nous avons employé la notation $\nu_{(c_0)}$ pour distinguer ce que nous avons appelé ν_{c_0} dans un contexte légèrement différent). Comme, si ρ_D se factorise à travers H_λ, le ϕ-isocristal (D, ϕ_{D,c_0}) est isocline de pente 0, l'image de $\nu_{(c_0)}$ est contenue dans S. Comme S est algébrique, il existe un entier s tel que $\nu_{(c_0)}$ se factorise à travers le caractère α_s de $D(\mathbf{Q})$ qui correspond à $s^{-1} \in \mathbf{Q}$. Notons $\nu_{(c_0)s}$ le groupe à un paramètre tel que $\nu_{(c_0)} = \nu_{(c_0)s} \circ \alpha_s$ (*cf.* 1.1). Les ϕ^s-isocristaux $(D, \phi^s_{D,c_0} \circ \nu_{(c_0)s}(p^{-1}))$ sont isoclines de pente 0. Si à D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$, on associe le $\mathbf{Q}_{p^s}$-espace vectoriel $\omega_{c_0,s}(D)$ formé des éléments de $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ qui sont fixes par $\phi^s_{D,c_0} \circ \nu_{(c_0)s}(p^{-1})$, on définit un foncteur fibre de $\underline{\mathrm{MF}}_H$ défini sur $\mathbf{Q}_{p^s}$. Le groupe $H_{(c_0)s}$ des $\otimes$-automorphismes de ce foncteur fibre est une $\mathbf{Q}_{p^s}$-forme de H. Notons ϕ_{c_0} l'action sur H définie par les ϕ_{D,c_0}, pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$, autrement dit ϕ_{c_0} est le composé $\phi \circ \mathrm{int}(c_0^{-1})$ de l'action de ϕ (1.3) et de $\mathrm{int}(c_0^{-1})$. L'action de $\sigma^s \times \mathrm{id}$ sur $H = K_0 \times_{\mathbf{Q}_{p^s}} H_{(c_0)s}$ est $\phi^s_{c_0} \circ \mathrm{int}(\nu_{(c_0)s}(p^{-1}))$. On voit alors que S, qui est stable par ϕ et est distingué dans le quotient H, est stable par $\sigma^s \times \mathrm{id}$ et donc provient par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_{p^s}$ à K_0 d'un groupe défini sur $\mathbf{Q}_{p^s}$; on le note $S_{(c_0)s}$. Quitte à remplacer s par un multiple, on peut supposer que $S_{(c_0)s}$ est résiduellement déployé ([Ti79] 1.8).

Comme le groupe $S_{(c_0)s}$ est supposé résiduellement déployé, l'immeuble de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$ possède une chambre stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_{p^s})$ ([Ti79] 1.10.2). Soit C une telle chambre. Notons Iw le sous-groupe d'Iwahori de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p^s})$ qui est défini par la chambre C ([Ti79] 3.7).

Comme les $\omega_{c_0,s}(D)$ sont stables par les ϕ_{D,c_0}, on voit que ϕ_{c_0} agit sur $H_{(c_0)s}$ et sur $S_{(c_0)s}$. Comme l'action de ϕ_{c_0} sur $S_{(c_0)s}$ provient d'un isomorphisme de groupes algébriques de $S_{(c_0)s}$ sur ${}^\sigma S_{(c_0)s} = \mathbf{Q}_{p^s} \times_{\sigma,K_0} S_{(c_0)s}$ et que les immeubles de $S_{(c_0)s}$ et de ${}^\sigma S_{(c_0)s}$ s'identifient, ϕ_{c_0} agit sur l'immeuble de $S_{(c_0)s}$. En particulier, $(\phi_{c_0})^{-1}(\mathrm{Iw})$ est un sous-groupe d'Iwahori de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p^s})$. Comme les sous-groupes d'Iwahori de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p^s})$ sont conjugués ([Ti79] *loc. cit.*), il existe $c' \in S_{c_0,s}(\mathbf{Q}_{p^s})$ tel que $(\phi_{c_0})^{-1}(\mathrm{Iw}) = \mathrm{int}(c')(\mathrm{Iw})$. Posons : $c = c'^{-1}c_0$ et prouvons que c convient. Comme

$(\phi_{c_0})^{-1}(\mathrm{Iw}) = \mathrm{int}(c')(\mathrm{Iw})$, on a :

$$\phi_c(\mathrm{Iw}) = \mathrm{Iw}.$$

Soit $\nu_{(c)}$ le morphisme de $D(\mathbf{Q})$ dans H qui est défini par les décompositions en composantes isoclines des ϕ-isocristaux $(D, \phi_{D,c})$ pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$. Il s'agit de prouver que $\nu_{(c)}$ est trivial.

Comme ϕ_{D,c_0} laisse stable $\omega_{c_0,s}(D)$, que $c' \in S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p^s})$ et que $\phi_c = \phi_{c_0} \circ \mathrm{int}(c')$, on voit que $\phi_{D,c}$ agit sur $\omega_{c_0,s}(D)$ et donc sur $\omega_{c_0,s}(D) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^s}} \widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}}$. Comme les décompositions en composantes isoclines des isocristaux $(D, \phi_{D,c})$ proviennent, par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_{p^s}$ à K_0, de décompositions en composantes isoclines des isocristaux $(\omega_{c_0,s}(D), \phi_{D,c})$, on voit que $\nu_{(c)}$ provient d'un morphisme de $D(\mathbf{Q})$ dans $H_{(c_0)s}$ défini sur $\mathbf{Q}_{p^s}$.

Comme ci-dessus, on voit que l'image de $\nu_{(c)}$ est contenue dans S. Soit s' un entier multiple des dénominateurs des pentes de des ϕ-isocristaux $(\omega_{c_0,s}(D), \phi_{D,c})$, pour D de $\underline{\mathrm{MF}}_H$. Notons $\nu_{(c)s'}$ le groupe à un paramètre de S tel que $\nu_{(c)} = \nu_{(c)s'} \circ \alpha_{s'}$. Pour D dans $\underline{\mathrm{MF}}_H$, désignons par $\omega_{(c)s'}(D)$ le $\mathbf{Q}_{p^{s'}}$-espace vectoriel des éléments de $\omega_{c_0,s}(D) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^s}} \widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}}$ qui sont fixes par $\phi^{s'}_{D,c} \circ \nu_{(c)s'}(p^{-1})$. Désignons par $H_{(c)s'}$ le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $\omega_{c,s'}$ et par $S_{(c)s'}$ la forme sur $\mathbf{Q}_{p^{s'}}$ de S qui est un sous-groupe défini sur $\mathbf{Q}_{p^{s'}}$ de $H_{(c)s'}$.

L'immeuble de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p^s})$ s'injecte dans celui de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$. Comme $S_{(c_0)s}$ est résiduellement déployé, la chambre C s'identifie à une chambre de l'immeuble de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$ ([Ti79] 1.10.2). Il résulte de [Ro] propositions 2.3.5 et 2.3.9 que les immeubles de $S_{(c_0)s}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$ et $S_{(c_0)s}(\widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}})$ s'identifient et donc C s'identifie à une chambre de l'immeuble de $S_{(c_0)s}(\widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}})$. De même les immeubles de $S_{(c)s'}(\widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}})$ et $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$ s'identifient et C s'identifie à une chambre de l'immeuble de $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$. Quitte à remplacer s' par un multiple, on peut supposer que $S_{(c)s'}$ est résiduellement déployé et que la chambre C s'identifie à une chambre de l'immeuble de $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p^{s'}})$. Notons Iw' l'Iwahori de $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p^{s'}})$ défini par cette chambre. Comme l'isocristal $(\omega_{c_0,s}(D) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^s}} \widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}}, \phi_{D,c})$ provient par extension des scalaires d'un isocristal d'espace vectoriel sous-jacent $\omega_{c,s'}(D)$, les actions de ϕ_c et de $\sigma^{s'}$ sur $S = (S_{(c)s'})_{K_0}$ commutent. Il en résulte que ϕ_c agit sur $S_{c,s'}$. Comme $\phi_c(\mathrm{Iw}) = \mathrm{Iw}$, on a : $\phi_c(\mathrm{Iw}') = \mathrm{Iw}'$. Comme $\sigma^{s'}(\mathrm{Iw}') = \mathrm{Iw}'$ et que $\phi_c^{s'} = \sigma^{s'} \circ \mathrm{int}(\nu_{(c)s'}(p))$, on en déduit que $\mathrm{int}(\nu_{(c)s'}(p))(\mathrm{Iw}') = \mathrm{Iw}'$. Comme l'action de $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p^{s'}})$ sur son immeuble est propre (2.2 de [Ti79]), il en résulte que les $\nu_{(c)s'}(p)^n$ forment un sous-groupe borné de $S_{(c)s'}(\mathbf{Q}_{p^{s'}})$.

Il est alors facile de voir que $\nu_{(c)s'}$ est trivial. En effet, comme les isocristaux $(\omega_{c_0,s}(D) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^s}} \widehat{\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}}, \phi_{D,c})$ proviennent par extension des scalaires d'isocristaux d'espaces vectoriels sous-jacents $\omega_{c,s'}(D)$, le groupe à un paramètre $\nu_{(c)s'}$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_{p^{s'}}$ à K_0 d'un groupe à un paramètre de $S_{(c)s'}$. Soit alors T un tore maximal déployé de $S_{(c)s'}$ contenant l'image de $\nu_{(c)s'}$ et A l'appartement associé. Soit $\{\chi_i\}$ une base du groupe des caractères de T. Alors $\nu_{(c)s'}(p)$ agit sur A par translation par le vecteur de coordonnées les inverses des valuations des $\chi_i(\nu_{(c)s'}(p))$ (1.2 de [Ti79]). On voit donc que, si les $\nu_{(c)s'}(p)^n$, pour $n \in \mathbf{Z}$, forment un sous-groupe borné de $S(K_0)$, on doit avoir $\langle \chi_i, \nu_{c,s} \rangle = 0$ pour tout i et donc $\nu_{(c)s'}$ est trivial, ce qui achève de prouver le théorème.

2. (ϕ, N)-MODULES FILTRÉS FAIBLEMENT ADMISSIBLES ET ISOGÉNIES

2.1. Rappels sur le groupe fondamental d'un groupe algébrique linéaire ([Bo89], [Bo96]).

Soit E un corps de caractéristique 0 et soit $\overline{E}$ une clôture algébrique de E.

Soit H un groupe algébrique linéaire connexe sur $\overline{E}$. On note $\pi_1(H)$ le groupe fondamental de H (à la Grothendieck, et avec comme point base l'identité de H) et H_{sc} le groupe (proalgébrique) «revêtement universel» de H. On a une suite exacte :

$$1 \to \pi_1(H) \to H_{\mathrm{sc}} \to H \to 1.$$

Le groupe $\pi_1(H)$ est un groupe profini abélien, contenu dans le centre de H_{sc}. Si H' est un groupe algébrique linéaire connexe sur $\overline{E}$ et si $\alpha : H' \to H$ est une isogénie (centrale puisque H' est connexe), on a un unique morphisme de groupes algébriques $H_{\mathrm{sc}} \to H'$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{sc}} & \longrightarrow & H' \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathrm{sc}} & \longrightarrow & H. \end{array}$$

Les morphismes $H_{\mathrm{sc}} \to H'$ sont surjectifs. Les (H', α) comme ci-dessus forment de la manière évidente un système projectif et H_{sc} s'identifie à la limite projectif des H', et $\pi_1(H)$ s'identifie à la limite projective des groupes finis Ker α.

Soient H_{red} le quotient de H par son radical unipotent, S le groupe des commutateurs de H_{red} et S_{sc} le revêtement simplement connexe de S. Soit T un tore maximal de $H_{\overline{E}}$ et notons T_{sc} son image réciproque dans S_{sc}. Notons $X_*(T)$ et $X_*(T_{\text{sc}})$ les groupes des cocaractères de T et T_{sc} respectivement. L'homomorphisme naturel de $X_*(T_{\text{sc}})$ dans $X_*(T)$ est injectif, et son image est le réseau $Q(R^\vee)$ des poids radiciels du système de racines dual de H relativement à T. On pose $\pi_1^{\text{alg}}(H) = X_*(T)/Q(R^\vee)$ («π_1 algébrique»). Cette définition ne dépend pas du choix de T. En effet, si T' est un autre tore maximal de H, pour $g \in H(\overline{E})$ tel que $\text{Int}(g)(T) = T'$, l'isomorphisme de $X_*(T)/Q$ sur $X_*(T')/Q'$ induit par $\text{Int}(g)$ ne dépend pas de g, comme on le voit facilement en remarquant que le groupe de Weyl agit trivialement sur $X_*(T)/Q(R^\vee)$. On a un isomorphisme naturel du complété profini tordu $\varprojlim_n \pi_1^{\text{alg}}(H) \otimes \mu_n(\overline{E})$ sur $\pi_1(H)$ ($\mu_n(\overline{E})$ désignant le groupe des racines n-ièmes de l'unité de $\overline{E}$). On a en particulier que le morphisme $H \to H_{\text{red}}$ induit un isomorphisme sur les π_1.

Soit μ un groupe à un paramètre de H. Pour T tore maximal de $H_{\overline{E}}$ contenant l'image de μ, l'image de μ dans $\pi_1^{\text{alg}}(H) = X_*(T)/Q(R^\vee)$ ne dépend pas du choix de T. En effet, si T' est un autre tore maximal de H contenant l'image de μ, les tores T et T' sont conjugués par un élément g du centralisateur de μ dans H, et l'isomorphisme de $X_*(T)/Q(R^\vee)$ sur $X_*(T')/Q'(R^\vee)$ induit par $\text{int}(g)$ envoie bien l'image de μ dans $X_*(T)/Q$ sur celle dans $X_*(T')/Q'$. On note $\tilde{\mu}$ cette image. Comme les tores maximaux de $H_{\overline{E}}$ sont conjugués par automorphismes intérieurs, on voit que $\tilde{\mu}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de μ. Si $\mathcal{C}$ est une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de H, on pose $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mu}$, pour un quelconque $\mu \in \mathcal{C}$.

Supposons maintenant H défini sur E. Soit G_E le groupe de Galois de $\overline{E}/E$. Le groupe G_E agit de manière naturelle sur $\pi_1^{\text{alg}}(H_{\overline{E}})$ et $\pi_1(H_{\overline{E}})$. Il agit de manière naturelle sur $(H_{\overline{E}})_{\text{sc}}$ et on voit donc que $(H_{\overline{E}})_{\text{sc}}$ provient de manière naturelle d'un groupe sur E. On le note H_{sc} ; le morphisme $(H_{\text{sc}})_{\overline{E}} \to H_{\overline{E}}$ est défini sur E. On voit donc que si H' est une groupe algébrique linéaire connexe et si $\alpha : H' \to H_{\overline{E}}$ est une isogénie, H' et α proviennent par extension des scalaires de E à $\overline{E}$ d'un groupe algébrique linéaire H_E et d'une isogénie α_E si et seulement si le noyau du morphisme $\pi_1(H_{\overline{E}}) \to \text{Ker}(\alpha)$ est stable par G_E, et si c'est le cas, H_E et α_E sont uniquement déterminés.

Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est un groupe d'automorphismes de $\overline{E}$ qui laissent stables E, et si l'on a une action de $\mathcal{A}$ sur $H_{\overline{E}}$ (*i.e.* , pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a un isomorphisme de $H_{\overline{E}}$ sur ${}^a(H_{\overline{E}}) = \overline{E} \times_{a,\overline{E}} H_{\overline{E}}$, ces isomorphismes vérifiant les conditions de descente habituelles), on a des actions de $\mathcal{A}$ sur les groupes $\pi_1(H_{\overline{E}})$ et $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{E}})$, et l'isomorphisme $\pi_1(H_{\overline{E}})$ sur le complété profini tordu de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{E}})$ est compatible aux actions de $\mathcal{A}$. Les automorphismes intérieurs de H agissent trivialement sur les π_1 ; c'est clair pour $\pi_1(H_{\overline{E}})$ puisque toute isogénie $\alpha : H' \to H_{\overline{E}}$ de H' connexe vers $H_{\overline{E}}$, est centrale, et pour $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{E}})$ car les isomorphismes qui permettent d'identifier les différents quotients $X_*(T)/Q(R^\vee)$ sont la restriction d' automorphismes intérieurs.

2.2. Énonce des résultats.

Définition 2.2.1. — *Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Soit H' un groupe algébrique connexe sur K_0 et α une isogénie de H' sur $H_{D,\mathrm{sj}}$, définie sur K_0. On dit que (H', α)* **provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible (sur K)** *s'il existe D' de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, dominant D (cf. 1.2) et un isomorphisme i de $H_{D',\mathrm{sj}}$ sur H' tels que $\alpha \circ i$ soit le morphisme naturel de $H_{D',\mathrm{sj}}$ sur $H_{D,\mathrm{sj}}$.*

Avec la proposition 1.3.4, on voit que (H', α) provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible si et seulement s'il existe un morphisme $\rho' : \mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to H'$ tel que $\alpha \circ \rho' = \rho_D$ et dont le noyau est stable sous l'action de ϕ. Comme $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ est connexe, on voit que si ρ' existe, ρ' est unique.

Soit $W(\overline{K}/\mathbf{Q}_p)$ le groupe des automorphimes de $\overline{K}$ qui induisent sur K_0 une puissance entière du Frobenius σ. D'après le numéro précédent, l'action de ϕ sur H (1.3) définit une action de $W(\overline{K}/\mathbf{Q}_p)$ sur $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$ et $\pi_1(H_{\overline{K}})$. Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Si $c \in C_{D,0}$ (1.6), les π_1 pour $H_{\overline{K}}$ et pour $(H_{D,c})_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ s'identifient. Comme l'action de $\phi_{D,c}$ sur $H_{D,\mathrm{sj}}$ est $\phi \circ \mathrm{int}(c^{-1})$, et que les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur les π_1, on voit que l'action de $W(\overline{K}/\mathbf{Q}_p)$ sur les π_1 de $H_{\overline{K}}$ est compatible avec les actions de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur les π_1 des $(H_{D,c})_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$. En particulier, $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$ et $\pi_1(H_{\overline{K}})$ sont munis d'une action naturelle de $G_{\mathbf{Q}_p}$.

Théorème 2.2.2. — *Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible (sur K). Posons $H = H_{D,\mathrm{sj}}$. Soit H' un groupe algébrique connexe sur K_0 et α une isogénie de H' sur H. Alors, pour que (H', α) provienne d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

– a) $\pi_1(H'_{\overline{K}}) \subset \pi_1(H_{\overline{K}})$ *est stable sous l'action de* $G_{\mathbf{Q}_p}$,

– b) *si* μ *est un élément de la classe de conjugaison* $\mathcal{C}_D$ *des groupes à un paramètre de* $H_{\overline{K}}$ *qui sont associés à un* $\otimes$*-scindage de la filtration de* D *(cf 1.2.5),* μ *se relève en un groupe à un paramètre de* H'.

Remarques. — 1) Soit $c \in C_{H,0}$. Alors, comme on le voit facilement avec le 2.1 et le 2.2.1, la première condition équivaut à ce que H' et α proviennent par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à K_0 d'un groupe H'_c sur $\mathbf{Q}_p$ et d'une isogénie de α_c de H'_c sur H_c définie sur $\mathbf{Q}_p$.

2) Il est clair que la condition b) ne dépend pas du choix de μ.

3) On voit que , si K' une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, et si (H',α) provient d'un (ϕ,N)-module filtré sur K', alors (H',α) provient d'un (ϕ,N)-module filtré sur K.

2.2.3. Soient $\alpha_1 : H'_1 \to H$ et $\alpha_2 : H'_2 \to H$ deux isogénies qui proviennent de (ϕ,N)-modules filtrés faiblement admissibles D_1 et D_2. Soit H_3 le quotient de H_{sc} par $\mathrm{Ker}\,\alpha_1 \cap \mathrm{Ker}\,\alpha_2$ et α_3 l'isogénie de H_3 sur H. Alors, (H_3,α_3) provient de $D'_1 \oplus D'_2$. Passant à la limite projective, il en résulte l'existence d'un groupe $H_{\max}$ avec un morphisme $\alpha_{\max} : H_{\max} \to H$, limite projective d'isogénies, tel que $\alpha : H' \to H$ provient d'un (ϕ,N)-module filtré faiblement admissible si et seulement si on a un morphisme $\eta : H_{\max} \to H'$ vérifiant $\alpha_{\max} = \alpha \circ \eta$ et dont le noyau est stable sous l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$.

PROPOSITION. — *Le morphisme* $\alpha_{\max}$ *est une isogénie.*

De manière analogue à [Se94] n. 11, on dit que D est **maximal** si $H_{\max} = H$; on voit que tout (ϕ,N)-module filtré faiblement admissible D est dominé, au sens de 1.2, par un (ϕ,N)-module filtré faiblement admissible maximal D' et $\rho_{D',D}$ est une isogénie.

2.3. Démonstration des résultats.

Démonstration du théorème. — Les conditions a) et b) sont évidemment nécessaires. Il s'agit de prouver qu'elles sont suffisantes.

Soit donc (H',α) vérifiant les hypothèses a) et b) du théorème; il s'agit de prouver que (H',α) provient d'un (ϕ,N)-module filtré faiblement admissible D'. On se ramène facilement au cas où H est réductif. En effet, soient H_{red} et H'_{red} les quotients de H et H' par leurs radicaux unipotents respectifs, et soit α_{red} l'isogénie $H'_{\mathrm{red}} \to H_{\mathrm{red}}$ qui se déduit de α par passage aux quotients par ces radicaux unipotents. Alors, si $(H'_{\mathrm{red}}, \alpha_{\mathrm{red}})$ provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D_1, alors on voit facilement que (H', α) provient de $D \oplus D_1$, ce qui prouve le théorème dans le cas général. On suppose désormais H réductif.

Soient S le groupe des commutateurs de H et H^{ab} le quotient H/S. On a la suite exacte :

$$1 \to \pi_1(S_{\overline{K}}) \to \pi_1(H_{\overline{K}}) \to \pi_1(H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}}) \to 1.$$

Soit $Y = \pi_1(H'_{\overline{K}}) \subset \pi_1(H_{\overline{K}})$. Posons $Y_1 = Y + \pi_1(S_{\overline{K}})$. Soit H_1 le quotient de H_{sc} par Y_1. Notons α_1 et α_2 les isogénies $H_1 \to H$ et $H' \to H_1$ respectivement. On voit immédiatement que (H_1, α_1) vérifie les hypothèses du théorème et que :

– si H_1^{ab} est le quotient de H_1 par son groupe des commutateurs, $H_1 \to H \times_{H^{\mathrm{ab}}} H_1^{\mathrm{ab}}$ est un isomorphisme ;

– le noyau de α_2 est inclus dans le groupe des commutateurs S' de H'.

LEMME 1. — *L'isogénie α_1 provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\pi_1^{\mathrm{ab}} : H_1^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Soit π_K une uniformisante de K et soit $H^{\mathrm{ab}}_{\pi_K}$ la forme sur $\mathbf{Q}_p$ de H^{ab} définie par le foncteur fibre ω_{π_K} restreint à $\underline{\mathrm{MF}}_{H^{\mathrm{ab}}}$ (1.5.5). On sait que $\mathbf{T}_K$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{π_K} de la sous-catégorie $\underline{\mathrm{MF}}^{ab}_K(\phi)$ de $\underline{\mathrm{MF}}^{fa}_K(\phi, N)$ formée des D tels que $H_{D,\mathrm{sj}}$ est abélien (remarque 1.5.6). Soit $\mathbf{T}_K \to H^{\mathrm{ab}}_{\pi_K}$ le morphisme correspondant au foncteur naturel de $\underline{\mathrm{MF}}_{H_1^{\mathrm{ab}}}$ dans $\underline{\mathrm{MF}}^{ab}_K(\phi)$. Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, telle que le morphisme $\mathbf{T}_K \to H^{\mathrm{ab}}_{\pi_K}$ se factorise à travers T_E. Si μ est un groupe à un paramètre de H_K appartenant à $\mathcal{CS}c_D$ *i.e.* qui scinde la filtration du foncteur fibre ω_{sj} de $\underline{\mathrm{MF}}_H$ (1.2.5), son image μ^{ab} dans H^{ab} coïncide avec celle de μ_E. Comme, d'après la condition b) du théorème, μ se relève à $= H_1$, μ^{ab} se relève à H_1^{ab}. D'autre part, l'image de Y dans $\pi_1(H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}})$ est stable sous l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$. La remarque 1) suivant l'énoncé du théorème donne que que H_1^{ab} et α_1^{ab} proviennent par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à K_0 d'un tore $(H_1^{\mathrm{ab}})_{\pi_K}$ et d'une isogénie ${\pi_1^{\mathrm{ab}}}_{\pi_K}$ définis sur $\mathbf{Q}_p$. Comme μ se relève à H_1, il résulte alors de la propriété universelle de T_E que $T_E \to H^{\mathrm{ab}}_{\pi_K}$ se relève selon ${\alpha_1^{\mathrm{ab}}}_{\mathbf{Q}_p}$ en un morphisme $T_E \to {H_1^{\mathrm{ab}}}_{\mathbf{Q}_p}$. On voit que le morphisme $\mathbf{T}_K \to H^{\mathrm{ab}}$ se relève en un morphisme $\mathbf{T}_K \to H_1^{\mathrm{ab}}$ dont le noyau est stable sous l'action de ϕ et ceci prouve le lemme.

Il est alors clair que α_2 vérifie les conditions du théorème. On peut donc supposer que $\alpha = \alpha_2$ autrement dit que le noyau de α est contenu dans S', ce que nous ferons désormais.

LEMME 2. — *Il existe $c \in C_{H,0}$ qui est dans l'image de $H'(K_0)$ par α.*

Démonstration. — Comme, d'après un théorème de R. Steinberg ([St65] th. 1.9), on a : $H^1(K_0, H'(K_0)) = \{1\}$, et on a une suite exacte de groupes ([Se73] chap. 1 n° 5.7) :

$$H'(K_0) \to H(K_0) \to H^1(K_0, \operatorname{Ker}\alpha(\overline{K})) \to 1.$$

Notons δ l'homomorphisme : $H(K_0) \to H^1(K_0, \operatorname{Ker}\alpha(\overline{K}))$. Il s'agit de prouver qu'il existe $c \in C_{H,0}$ tel que $\delta(c) = 1$. D'après le théorème 1.6.2, $C_{H,0}$ est non vide; soit $c_1 \in C_{H,0}$. Posons $H_{c_1} = H_{D,c_1}$ et soit S_{c_1} le groupe des commutateurs de H_{c_1}, de sorte que S_{c_1} est une forme sur $\mathbf{Q}_p$ de S. On sait d'après la remarque 1) suivant le théorème à prouver que H' et α proviennent par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à K_0 d'un groupe H'_{c_1} et d'une isogénie $\alpha_{c_1} : H'_{c_1} \to H_{c_1}$ définis sur $\mathbf{Q}_p$. Si nous pouvons trouver $c_2 \in S_{c_1}(K_0)$ de pente 0 (*cf.* 1.1) tel que $\delta(c_2) = \delta(c_1)$, $c = c_2^{-1}c_1$ convient : en effet, alors $\phi_{D,c} = \phi_{D,c_1} \circ c_2$ est bien isocline de pente 0. Comme le noyau de α est contenu dans S', on voit donc que le lemme 2 résulte du lemme 3 suivant :

LEMME 3. — *Soient S et S' deux groupes semi-simples sur $\mathbf{Q}_p$ et α une isogénie de S' sur S définie sur $\mathbf{Q}_p$. Pour tout $h \in H^1(K_0, \operatorname{Ker}\alpha(\overline{K}))$, il existe $c \in S(K_0)$ de pente 0 (au sens de 1.1) d'image h dans $H^1(K_0, \operatorname{Ker}\alpha(\overline{K}))$.*

Démonstration. — D'après un résultat de M. Kneser ([Kn65]), S possède un tore maximal T qui est défini sur $\mathbf{Q}_p$ et anisotrope. Soit T' l'image réciproque de T dans S'. Comme $H^1(K_0, T'(\overline{K})) = \{1\}$ ([Se68] chap. 10 cor. prop. 11), on a la suite exacte :

$$T'(K_0) \to T(K_0) \to H^1(K_0, \operatorname{Ker}\alpha(\overline{K})) \to 1.$$

Il existe donc $c \in T(K_0)$, d'image h dans $H^1(K_0, \operatorname{Ker}(\overline{K}))$. L'homomorphisme ν_c (*cf.* 1.1) se factorise à travers T et est défini sur $\mathbf{Q}_p$ ([Ko85] 4.4.3) : il est donc trivial ce qui prouve que c est bien de pente 0, *i.e.* le lemme 3, et achève donc de prouver le lemme 2.

Montrons le théorème. Soit $c \in H(K_0)$ comme dans le lemme 2 et $c' \in H'(K_0)$ tel que $\alpha(c') = c$. Soient H'_c et α_c les formes sur $\mathbf{Q}_p$ de H'

et α telles que $\alpha : H' \to H$ provienne par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à K_0 de $\alpha_c : H'_c \to H_c$ (remarque 1) suivant l'énoncé du théorème). Soit μ un groupe à un paramètre de $\mathcal{S}c_D$ (1.2) *i.e.* μ est défini par un scindage de la filtration de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ (il est défini sur K) et soit μ' son relèvement à H'. Comme ce relèvement est unique, il est aussi défini sur K. Pour chaque représentation linéaire ρ de H'_c dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie, nous définissons un (ϕ, N)-module filtré $D(\rho)$ par :

– $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho)) = V_{K_0}$;

– $\phi_{D(\rho)} = (\sigma \otimes \mathrm{id}) \circ \rho(c')$;

– la filtration de $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho))_K = V_K$ est la fitration décroissante associée à l'action de $\rho \circ \mu'$ sur V_K ;

– $N_{D(\rho)}$ est l'image dans $\mathrm{End}(V_{K_0})$ de $N \in \mathrm{Lie}(H) \simeq \mathrm{Lie}(H')$.

Le lemme suivant entraîne le théorème :

LEMME 4 (B. Totaro). — *Les (ϕ, N)-modules filtrés $D(\rho)$ sont faiblement admissibles.*

Démonstration. — C'est le cas si ρ se factorise à travers $\mathrm{Ker}\,\alpha$, puisque $D(\rho)$ est alors un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_D$. Comme on a supposé H réductif et qu'une somme directe de (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible, il suffit de démontrer le lemme quand ρ est irréductible, ce que nous supposerons désormais.

Tout d'abord, on a : $t_{\mathrm{H}}(D(\rho)) = t_{\mathrm{N}}(D(\rho))$. En effet, soit m un annulateur de $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Le caractère donnant l'action de $H'_{\mathbf{Q}_p}$ sur $(\wedge^{\max}\rho)^{\otimes m}$ se factorise à travers $\mathrm{Ker}\alpha$, et donc $D((\wedge^{\max}\rho)^{\otimes m})$ est faiblement admissible. On a donc :

$$t_{\mathrm{H}}(D((\wedge^{\max}\rho)^{\otimes m})) = t_{\mathrm{N}}(D((\wedge^{\max}\rho)^{\otimes m})),$$

d'où $mt_{\mathrm{H}}(D(\rho)) = mt_{\mathrm{N}}(D(\rho))$, et on a bien : $t_{\mathrm{H}}(D(\rho)) = t_{\mathrm{N}}(D(\rho))$.

Reste à prouver que, pour tout sous-espace vectoriel V de $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho))$ qui est stable par ϕ et N, on a : $t_{\mathrm{H}}(V) \leqslant t_{\mathrm{N}}(V)$. Posons $t(V) = t_{\mathrm{H}}(V) - t_{\mathrm{N}}(V)$ et soit $t_{\max}$ la valeur maximale atteinte par $t(V) = t_{\mathrm{H}}(V) - t_{\mathrm{N}}(V)$. Il s'agit de prouver que $t_{\max} \leqslant 0$. On a, parmi les V avec $t(V) = t_{\max}$, un plus grand sous-espace vectoriel, que nous noterons V_1 (c'est le plus petit sous-espace vectoriel de la filtration de Harder-Narashimhan du (ϕ, N)-module filtré $D(\rho)$, [Fa94] 2). Soit E le centre du commutant de ρ. Comme on a supposé ρ est irréductible, c'est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. La représentation linéaire $\otimes_E^m \rho$ se factorise à travers α , et donc $D(\otimes_E^m \rho)$ est faiblement admissible. Comme les éléments de E agissent sur $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho))$ comme des endomorphismes de $D(\rho)$, ils laissent stables V_1. Soit alors V_2 le sous-espace vectoriel de $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\otimes_E^m \rho))$, produit tensoriel, sur $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$, de V_1 et de $m-1$ copies de $\omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho))$:

$$V_2 = V_1 \otimes \omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho)) \otimes \ldots \otimes \omega_{\mathrm{sj}}(D(\rho)).$$

On voit facilement ([Fa94] lemme de 2) que l'on a :

$$t(V_2)/\dim(V_2) = t(V_1)/\dim(V_1) + (m-1)t(D(\rho))/\dim(D(\rho)).$$

Puisqu'on sait déjà que $t(D(\rho)) = 0$, on voit que $t(V_2)/\dim(V_2) = t(V_1)/\dim(V_1)$. Comme $D(\otimes_E^m \rho)$ est faiblement admissible, on a $t(V_2) \leqslant 0$ et donc $t(V_1) = t_{\max} \leqslant 0$, ce qui prouve bien que $D(\rho)$ est faiblement admissible. Ceci prouve le lemme et achève la démonstration du théorème.

Démonstration de la proposition. — Soit H' un groupe algébrique sur K_0 et α une isogénie de H' sur H. On voit immédiatement que μ se relève à H' si et seulement si l'image de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H'_{\overline{K}})$ dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$ contient l'image $\tilde{\mu}$ de μ dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$ (2.1). Soit Y le sous-groupe de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$ engendré par les ${}^{\tau}\tilde{\mu}$, pour τ décrivant $G_{\mathbf{Q}_p}$. Il résulte du théorème 2.2.2 que $H_{\max}$ est le quotient du revêtement universel H_{sc} de H par Y et qu'il s'agit de prouver que Y est d'indice fini dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}})$. Soit H_{red} le quotient de H par son radical unipotent, S le groupe des commutateurs de H_{red} et H^{ab} le quotient H_{red}/S. Comme on a la suite exacte ([Bo89] lemme 1.5) :

$$1 \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(S_{\overline{K}}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(H_{\overline{K}}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}}) \to 1,$$

et comme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(S_{\overline{K}})$ est fini, on voit qu'il suffit de prouver que l'image de Y dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}})$ est d'indice fini. Comme les tores T_E du 1.5 sont engendrés par les images des groupes à un paramètre ${}^{\tau}\mu_E$, pour $\tau \in G_{\mathbf{Q}_p}$, le tore H^{ab} est engendré par les images des conjugués, sous l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de l'image de μ dans $H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}}$. Il en résulte que l'image de Y dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H^{\mathrm{ab}}_{\overline{K}})$ est bien d'indice fini. Ceci prouve la proposition.

3. SIMPLE-CONNEXITÉ DE LA PARTIE SEMI-SIMPLE DE $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$

3.1. Énoncé du théorème.

Soit $\mathbf{S}$ le quotient du noyau de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{sj}}^{\mathrm{ab}}$ (*cf.* 1.2.2) par son radical unipotent. L'objet du paragraphe 3 est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. — *Le groupe* $\mathbf{S}$ *est simplement connexe, autrement dit est produit de groupes algébriques simples simplement connexes.*

Pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$, notons $S_{D,\mathrm{sj}}$ le groupe des commutateurs du quotient de $H_{D,\mathrm{sj}}$ par son radical unipotent. Le théorème résulte clairement du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.2. — *Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Alors il existe un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D', dominant D, et tel que $S_{D',\mathrm{sj}}$ soit simplement connexe et que $\rho_{D,D'}$ induise une isogénie de $S_{D',\mathrm{sj}}$ sur $S_{D,\mathrm{sj}}$.*

Remarque. — On prendra garde qu'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D peut être maximal, au sens de 2.2.2, sans que la partie semi-simple de $H_{D,\mathrm{sj}}$ soit simplement connexe, et donc, dans le théorème 3.1.2, on ne peut pas imposer en général que $\rho_{D,D'}$ est une isogénie. En voici un exemple. Il résulte du 3.4.1.2 de [Wi84] que si H est un groupe algébrique absolument simple sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison de groupes à un paramètre qui est définie sur $\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}$, il existe un ϕ-module filtré faiblement admissible D sur K_0 avec un isomorphisme de H_{K_0} sur $H_{D,\mathrm{sj}}$ qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_D$. Si $\mathcal{C}$ ne se relève selon aucune isogénie non triviale $H' \to H$ définie sur $\mathbf{Q}_p$, alors D est maximal; H peut ne pas être simplement connexe. Par exemple, on peut prendre pour H le groupe spécial orthogonal SO_n pour $n \geqslant 3$ et pour $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison de groupes à un paramètre qui est définie sur $\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}$, et qui ne se releve pas au groupe spinoriel (condition équivalante : si m_i est la dimension du sous-espace propre de poids i de $\mu \in \mathcal{C}$ dans la représentation standard, l'entier $\sum_{i \geqslant 0} m_{2i+1}$ est impair). Il n'est pas difficile de prouver que D est dominé par un ϕ-module filtré faiblement admissible D' tel que $H_{D',\mathrm{sj}}$ est isomorphe au groupe des similitudes spinorielles.

3.2. Démonstration du théorème.

Elle s'appuie sur la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soient E un corps et F une extension de E ; on suppose que F est un corps parfait. Soient H un groupe réductif connexe sur E et $\mu : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to H_F$ un groupe à un paramètre de H défini sur F. Alors, il existe H' et μ' comme H et μ, et un morphisme f de H' dans H, défini sur E et vérifiant :*

— *la restriction de f au sous-groupe dérivé S' de H' est une isogénie centrale* ([BT72]) *du groupe dérivé S' de H sur le groupe dérivé S de H;*

— *S' est simplement connexe;*

— *on a : $f \circ \mu' = \mu$.*

Démonstration. — Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, et soit E_s la clôture séparable de E dans $\overline{F}$. Soit T un tore maximal de H_{E_s} et B un sous-groupe de Borel de H_{E_s} contenant T. Soit $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^\vee, \underline{B})$ le système de racines muni de sa base $\underline{B}$ associé à (T, B). Il ne dépend pas, à isomorphisme unique près, du choix de (T, B) ([LIE] Chap. 8 § 5 n. 3, Remarques). Le groupe de Galois $G_E = \mathrm{Gal}(E_s/E)$ opère sur $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^\vee, \underline{B})$. Notons $P(R)$ (resp. $Q(R)$) le réseau des poids (respectivement des poids radiciels) de R. Soient C le centre de H, C° la composante neutre de C, et $X(C^\circ)$ le groupe des caractères de $C^\circ_{\overline{E}}$. Soit S_{sc} le revêtement simplement connexe de S. L'isogénie $S_{\mathrm{sc}} \times C^\circ \to H$ permet d'identifier X, à un sous-module du $\mathbf{Z}[G_E]$-module $P(R) \oplus X(C^\circ)$; X est d'indice fini dans $P(R) \oplus X(C^\circ)$, se projète surjectivement sur $X(C^\circ)$, et contient $Q(R)$.

Soit $h(\mu)$ l'unique élément de Y qui est conjugué de μ (par un automorphisme intérieur de $H_{\overline{F}}$) et qui appartient à la chambre du système dual $R^\vee$ de R définie par la base $\underline{B}$. Comme μ est défini sur F, $h(\mu)$ est invariant sous l'action du groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Il en résulte que l'extension séparable finie E' de F correspondant au fixateur de $h(\mu)$ dans G_E est contenue dans F. Soit c un annulateur de $P(R)/Q(R)$. Comme $Q(R)$ est inclus dans X, $h(\mu)$ induit un homomorphisme de $Q(R)$ dans $c^{-1}\mathbf{Z}$ que l'on note encore $h(\mu)$. Comme la projection de X sur $X(C^\circ)$ est surjective, on en déduit que, de même, $h(\mu)$ induit un homomorphisme de $X(C^\circ)$ dans $c^{-1}\mathbf{Z}$. Notons $P_{E'/E}$ l'ensemble des classes à gauche de G_E modulo $G_{E'} = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E')$ et $\mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$ le groupe des fonctions de $P_{E'/E}$ dans $c^{-1}\mathbf{Z}$. Si à $\chi \in X(C^\circ)$, on associe la fonction $\tau \mapsto h(\mu)({}^{\tau^{-1}}\chi)$, on définit un homomorphisme de $X(C^\circ)$ dans $\mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$, qui est compatible aux actions de G_E, le groupe G_E agissant sur $P_{E'/E}$ par les translations à gauche. Notons f^* l'homomorphisme de $P(R) \oplus X(C^\circ)$ dans $P(R) \oplus \mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$, somme directe de l'identité et de cet homomorphisme. Soit h' l'homomorphisme de $P(R) \oplus \mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$ dans $c^{-1}\mathbf{Z}$ défini par :

$$h'(\omega \oplus f) = h(\mu)(\omega) + f(\overline{\mathrm{id}}),$$

où $\overline{\mathrm{id}}$ est la classe de l'élément neutre dans $P_{E'/E}$. On a donc :

$$h(\mu) = h' \circ f^*.$$

Soit X' le plus grand sous-groupe de $P(R) \oplus \mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$, qui est stable par G_E et est tel que $h'(X') \subset \mathbf{Z}$, autrement dit $\chi \in X'$ si et seulement si $h'({}^{\tau}\chi) \in \mathbf{Z}$ pour tout $\tau \in G_E$. Soit C'° le tore sur E dont le groupe des caractères est la projection de X' sur $\mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$. Puisque $h(\mu) = h' \circ f^*$, on a $Q(R) \subset X'$, et $X' \to P(R) \oplus \mathcal{F}(P_{F'/E})$ définit une isogénie centrale de $S_{\mathrm{sc}} \times C'^{0}$ dans un groupe réductif connexe H'. On note S' le groupe des commutateurs de H'. L'homomorphisme f^* définit un homomorphisme f de H' dans H, qui induit une isogénie centrale de S' sur S. L'image réciproque de T dans $H'_{\overline{F}}$ est un tore maximal de $H'_{\overline{F}}$, que l'on note T'. Le groupe des caractères de T' s'identifie à X' et l'homomorphisme $h' : X' \to \mathbf{Z}$ définit un groupe à un paramètre μ'' de $H'_{E_{\mathrm{s}}}$. Si $g \in H'(\overline{E})$ est tel que $\mathrm{Int}(f(g))(h(\mu)) = \mu$, posons $\mu' = \mathrm{Int}(f(g))(\mu'')$. On a $f \circ \mu' = \mu$.

Montrons que μ' est défini sur F. Soit S_{ad} le quotient de S par son centre. Le composé de μ' avec le morphisme $i : H' \to S_{\mathrm{ad}}$ est défini sur F, puisqu'il se factorise par μ et que μ est défini sur F. Il en est de même du composé de μ' avec le morphisme $H' \to H'/S'$, puisqu'il correspond à la forme linéaire sur $\mathcal{F}(P_{F'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$ définie par l'évaluation en la classe $\overline{\mathrm{id}}$ de l'identité et que E' est contenu dans F. On voit donc que le composé de μ' avec l'isogénie $i : H' \to S_{\mathrm{ad}} \times H'/S'$ est défini sur F. Il en est de même de μ' puisque μ' est l'unique relèvement de $i \circ \mu'$ à H'.

Reste à prouver que S' est simplement connexe. Il s'agit de prouver que X' se projecte surjectivement sur $P(R)$. Soit donc $\omega \in P(R)$. Notons f_ω la fonction de $\mathcal{F}(P_{E'/E}, c^{-1}\mathbf{Z})$ définie par $f_\omega(\tau) = h(\mu)({}^{\tau^{-1}}\omega)$. Alors $\omega \oplus (-f_\omega)$ appartient à X'. En effet, on a pour tout $\tau \in G_E$:

$$h'({}^{\tau}(\omega \oplus -f_\omega)) = h(\mu)({}^{\tau}\omega) - f_\omega(\tau^{-1}) = 0 \in \mathbf{Z}.$$

On a donc prouvé que S' est simplement connexe et ceci achève de prouver la proposition.

Passons à la démonstration du théorème 3.1.2.

Soit donc D un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K(\phi, N)$. On se ramène immédiatement au cas où D est semi-simple : en effet, si D_{ss} est le semi-simplifié de D, et si D'' vérifie la conclusion du théorème pour D_{ss}, *i.e.* D'' domine D et est tel que $S_{D'',\mathrm{sj}}$ est simplement connexe et $\rho_{D'',D_{\mathrm{ss}}}$ induit une isogénie de

$S_{D'',\mathrm{sj}}$ sur $S_{D_{\mathrm{ss}},\mathrm{sj}}$, $D' = D \oplus D''$ vérifie les conclusions du théorème pour D. On suppose désormais D semi-simple et donc $H_{D,\mathrm{sj}}$ réductif.

Soit π_K une uniformisante de K et soit $c \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$, d'image c_{π_K} dans $\mathbf{T}_K(K_0)$ (1.6). Soit $f : H' \to H_{D,c}$ comme dans la proposition ci-dessus, appliquée avec $E = \mathbf{Q}_p, F = K, H = H_{D,c}$. Soit H'^{ab} le plus grand quotient de H' . Soit $H^{\mathrm{ab}}_{D,c}$ le quotient de $H_{D,c}$ par son sous-groupe des commutateurs. On voit que l'homomorphisme $\mathbf{T}_K \to H^{\mathrm{ab}}_{D,c}$ (1.5.5) admet un unique relèvement $\mathbf{T}_K \to H'^{\mathrm{ab}}$ qui est tel que μ_K s'envoie sur l'image de μ' dans H'^{ab}. Soit D_1 un ϕ-module filtré faiblement admissible tel que le noyau de $\mathbf{T}_K \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{\pi_K})$ coïncide avec le noyau de $\mathbf{T}_K \to H'^{\mathrm{ab}}$ (1.5.5). Notons H'' le sous-groupe de H' engendré par le sous-groupe des commutateurs S' de H' et par les ${}^{\tau}\mu'$, pour $\tau \in G_{\mathbf{Q}_p}$, de sorte que le quotient H''^{ab} de H'' par son sous-groupe des commutateurs S' s'identifie à l'image de $\mathbf{T}_K$ dans H'^{ab}. Soit $D_2 = D \oplus D_1$. On voit facilement que $H_{D_2,c}$ s'identifie au produit fibré $H_{D,c} \times_{H^{\mathrm{ab}}_{D,c}} H''^{\mathrm{ab}}$. Le morphisme $H'' \to H_{D_2,c}$ est donc une isogénie et on voit alors avec le théorème 2.2.1 que H'' provient d'un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Puisque le groupe des commutateurs S' de H'' est simplement connexe, ceci prouve le théorème.

4. CONSÉQUENCES POUR LE TORSEUR ENTRE LES FONCTEURS FIBRES ω_{sj} ET ω_{Gal}

4.1. Description de Rapoport et Zink des (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles.

4.1.1. Si H est un groupe réductif sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $H_{\overline{K}}$, on note $\mathcal{F}(H, \mathcal{C})$ la variété de drapeaux associée à $\mathcal{C}$. Rappelons que $\mathcal{F}(H, \mathcal{C})(\overline{K})$ est le quotient de $\mathcal{C}$ par la relation d'équivalence : les groupes à un paramètre μ et μ' sont équivalents s'ils induisent la même filtration sur la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{K}}(H_{\overline{K}})$ des représentations linéaires de $H_{\overline{K}}$ dans les $\overline{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (si V est une telle représentation linéaire, la filtration induite par μ est la filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i V)_{i \in \mathbf{Z}}$ définie par $\mathrm{Fil}^i V = \bigoplus_{i' \geqslant i} V_{i'}$, où V_i est le sous-espace propre de poids i de V pour l'action de μ) (1.2, [RZ94] 1.31). La variété $\mathcal{F}(H, \mathcal{C})$ est définie sur le corps de définition $E_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

4.1.2. Soient H un groupe réductif sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $H_{\overline{K}}$ qui est définie sur K. Soit b

un élément de $H(K_0)$ et N un élément de $\mathrm{Lie}(H)(K_0)$. On note ϕ l'action de $\mathrm{int}(b) \circ \sigma$ sur H_{K_0} et aussi celle induite sur $\mathrm{Lie}(H)(K_0)$. On suppose que l'on a : $\phi(N) = p^{-1}N$. Soit F un élément de $\mathcal{F}(H, \mathcal{C})(K)$ (*cf.* numéro précédent).

Pour chaque représentation linéaire $\rho : H \to \mathrm{GL}_V$ de H dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V, on associe le (ϕ, N)-module filtré $D(H, b, N, F, \rho)$ sur K défini par :

- l'espace vectoriel sous-jacent à $D(H, b, N, F, \rho)$ est V_{K_0} ;

- on a $\phi_{D(H,b,N,F,\rho)} = \rho(b) \circ (\sigma \otimes \mathrm{id})$;

- $N_{D(H,b,N,F,\rho)}$ est l'image de N par l'homomorphisme d'algèbres de Lie : $\mathrm{Lie}(\rho) : \mathrm{Lie}(H)(K_0) \to \mathrm{End}_{K_0}(V_{K_0})$;

- la filtration de $\omega_{\mathrm{sj}}(D(H, b, N, F, \rho))_K$ est celle définie par F.

Si $N = 0$, c'est la construction de M. Rapoport et T. Zink ([RZ94] 1.17) ; nous abrégeons alors $D(H, b, N, F, \rho)$ en $D(H, b, F, \rho)$.

Soit $\mathcal{F}^{fa}(H, b, N, \mathcal{C})(K)$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}(H, \mathcal{C})(K)$ qui sont tels que, pour tout ρ de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$, le (ϕ, N)-module filtré $D(H, b, N, F, \rho)$ est faiblement admissible. Comme H est réductif, on voit facilement qu'il suffit pour ceci que ce soit le cas pour une représentation fidèle ([RZ94] Def. 1.18 pour le cas où $N = 0$). Si $F \in \mathcal{F}^{fa}(H, b, N, \mathcal{C})$, on définit un $\otimes$-foncteur de la catégorie tannakienne $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ dans celle des (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles en associant à ρ le (ϕ, N)-module filtré $D(H, b, N, F, \rho)$. Ce foncteur définit un morphisme de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ dans H_{K_0}. On note H_F son image. Le groupe H_F s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj} restreint à la sous-catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{MF}}_F$ de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ engendrée par les (ϕ, N)-modules filtrés $D(H, b, N, F, \rho)$. On note $\mathcal{C}_F$ la classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $(H_F)_{\overline{K}}$ qui est égale à $\mathcal{C}_D$ pour un quelconque générateur de $\underline{\mathrm{MF}}_F$, et F_F le point de la variété de drapeaux de $\mathcal{F}(H_F, \mathcal{C}_F)$ qui est égal à F_D pour un tel D.

Remarque. — M. Rapoport et T. Zink ont défini sur $\mathcal{F}^{fa}(H, b, \mathcal{C})$ une structure d'espace analytique rigide (prop. 1.36 de [RZ94]).

4.1.3. Si H est un groupe réductif sur $\mathbf{Q}_p$, et si $d \in H(K_0)$ est de pente 0 au sens de 1.1, on définit un foncteur fibre sur $\mathbf{Q}_p$ de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ en associant à $\rho : H \to \mathrm{GL}_V$ le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des éléments de V_{K_0} qui sont fixes par $\rho(d) \circ (\sigma \otimes \mathrm{id})$. On le note $\omega_d(V)$. Le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_d est une forme intérieure H_d de H.

Si à $\rho : H \to \mathrm{GL}_V$, on associe la représentation linéaire ρ_d de H_d sur $\omega_d(V)$, on définit un isomorphisme des catégories tannakiennes $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ et $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H_d)$.

Les groupes $(H_d)_{K_0}$ et H_{K_0} s'identifient. Si $\mathcal{C}$ est une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $H_{\overline{K}}$ qui est définie sur K, on voit donc que l'on peut aussi voir $\mathcal{C}$ comme une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $(H_d)_{\overline{K}}$ qui est définie sur K. Les variétés de drapeaux $\mathcal{F}(H,\mathcal{C})$ et $\mathcal{F}(H_d,\mathcal{C})$ s'identifient (en tant que K-variétés). Pour $b \in H(K_0) = H_d(K_0)$, $N \in \mathrm{Lie}(H)(K_0) = \mathrm{Lie}(H_d)(K_0)$, ρ une représentations linéaire de H, et F un élément de $\mathcal{F}(H,\mathcal{C})(K)$, les modules filtrés $D(H,b,N,F,\rho)$ et $D(H_d,bd^{-1},N,F,\rho_d)$ s'identifient : ceci résulte de l'égalité : $\phi_{D(H,b,F,N,\rho)} = \rho(b)\circ\sigma = \rho(bd^{-1})\circ(\rho(d)\circ\sigma)$. Il en résulte que les ensembles $\mathcal{F}^{fa}(H,b,N,\mathcal{C})(K)$ et $\mathcal{F}^{fa}(H_d,bd^{-1},N,\mathcal{C})(K)$ s'identifient.

La proposition suivante fait le lien entre les foncteurs ω_c du 1.6 et la construction de M. Rapoport et T. Zink.

Proposition 4.1.4.

a) *Soit D un objet semi-simple de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi,N)$. Soit $c \in C_{D,0}$ et $H_{D,c}$ la forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$ qui lui est associée (1.6.2). Notons ρ_c la représentation linéaire naturelle de $H_{D,c}$ dans $\omega_c(D)$. Alors, D est isomorphe au (ϕ,N)-module filtré $D(H_{D,c},{}^{\sigma}c,N_D,F_D,\rho_c)$ (pour la définition de F_D, voir 1.2.5).*

b) *Soient H, b, N, $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2. Soit $F \in \mathcal{F}^{fa}(H,b,N,\mathcal{C})(K)$, et soient H_F et F_F comme au 4.1.2. Soit $c \in C_{H_{F,0}}$ (1.6.2). Alors, si $d = b({}^{\sigma}c^{-1})$, d est de pente 0, et le morphisme $H_F \to H_{K_0}$ se descend en un morphisme, défini sur $\mathbf{Q}_p$, de $H_{F,c}$ dans H_d. On le note ι. Le morphisme $\mathrm{Lie}(H_{F,c})(K_0) \to \mathrm{Lie}(H)(K_0)$ induit par ι sur les algèbres de Lie envoie N_D sur N. Le morphisme ι envoie $\mathcal{C}_F$ sur $\mathcal{C}$ et $F_F \in \mathcal{F}(H_F,\mathcal{C}_F)(K)$ (4.1.2) sur $F \in \mathcal{F}(H_d,\mathcal{C})(K) = \mathcal{F}(H,\mathcal{C})(K)$.*

Démonstration. — Pour le a), soit D un (ϕ,N)-module filtré faiblement admissible qui est somme directe d'objets simples et $c \in C_{D,0}$. Comme $\phi_{D,c}$ coïncide avec l'action de σ sur $\omega_{\mathrm{sj}}(D)$ définie par la $\mathbf{Q}_p$-structure $\omega_c(D)$, le a) résulte immédiatement de la formule : $\phi_D = \phi_{D,c}\circ c = {}^{\sigma}c\circ\phi_{D,c}$.

La seule chose qui n'est peut-être pas évidente dans le b) est que d est de pente 0. Soit ρ une représentation linéaire fidèle de H dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie et posons $D = D(H,b,N,F,\rho)$. Comme ci-dessus, on a : $\phi_D = \rho({}^{\sigma}c)\circ\phi_{D,c}$. Comme $d = b({}^{\sigma}c^{-1})$, on a ${}^{\sigma}c = bd^{-1}$, d'où : $\phi_D = \rho(bd^{-1})\circ\phi_{D,c}$. Par définition de $D(b,N,F,\rho)$, on a : $\phi_D = \rho(b) \circ \sigma$ (σ provenant de la $\mathbf{Q}_p$-structure V de V_{K_0}). On voit donc que l'on a : $\phi_{D,c} = \rho(d) \circ \sigma$. Comme $c \in C_{D,0}$, l'isocristal $(V_{K_0}, \phi_{D,c})$ est isocline de pente 0. Donc d est bien de pente 0. Ceci achève de prouver la proposition.

4.2. Classe de cohomologie du torseur entre les foncteurs fibres ω_c et ω_{Gal}.

On note $\underline{\mathrm{MF}}^a(\phi, N)$ la catégorie des (ϕ, N)-modules filtrés admissibles.

4.2.1. Soit D un (ϕ, N)-module filtré admissible. Les objets de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ sont admissibles. En effet, un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ est un sous-quotient d'une somme directe de produits tensoriels de copies de D et de son dual, et un tel (ϕ, N)-module filtré est admissible ([Fo94] th. 5.3.5). On voit donc que si à D' de $\underline{\mathrm{MF}}_D$, on associe l'espace vectoriel sous-jacent à la représentation p-adique du groupe de Galois G_K associée par le foncteur de Fontaine à D', on définit un foncteur fibre ω_{Gal} de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$. On note $H_{D,\mathrm{Gal}}$ le groupe de ses $\otimes$-automorphismes. Si $c \in C_{D,0}$, on note $\mathrm{Is}_{D,c} = \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{\mathrm{Gal}})$ le torseur des $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre ω_c sur le foncteur fibre ω_{Gal} : le groupe $H_{D,c}$ opère à droite sur $\mathrm{Is}_{D,c}$ et le groupe $H_{D,\mathrm{Gal}}$ à gauche. On note $cl_{D,c} \in H^1(\mathbf{Q}_p, H_c(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ la classe de cohomologie définie par le torseur $\mathrm{Is}_{D,c}$ ([Se73] prop. 33). Si c' est un autre élément de $C_{D,0}$, on note $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})$ le torseur des $\otimes$-isomorphismes de ω_c sur $\omega_{c'}$. Le torseur $\mathrm{Is}_{D,c}$ s'identifie au composé $\mathrm{Is}_{D,c'} \circ \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})$ au sens de [Se73] chap. 1 n° 5.3 : si $i_1 \in \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})$ et $i_2 \in \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_{c'}, \omega_{\mathrm{Gal}})$, $i_2 \circ i_1 \in \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{\mathrm{Gal}})$ et $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{\mathrm{Gal}})$ s'identifie aux tels couples (i_1, i_2) modulo la relation d'équivalence $(i_1, i_2) \sim (i'_1, i'_2)$ s'il existe $g \in H_{c'}$ avec $i'_1 = g \circ i_1$ et $i'_2 = i_2 \circ g^{-1}$. Soit $I_{c,c'}$ est la bijection de $H^1(\mathbf{Q}_p, H_{c'}(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ sur $H^1(\mathbf{Q}_p, H_c(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ définie par $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})$ ([Se73] chap. 1 prop. 35), de sorte que $I_{c,c'}$ envoie l'élément «neutre» de $H^1(\mathbf{Q}_p, H_{c'}(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ sur la classe de cohomologie de $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, H_c(\overline{\mathbf{Q}_p}))$. Il résulte de [Se73] *loc. cit.* que $I_{c,c'}(cl_{D,c'}) = cl_{D,c}$.

4.2.2. Soient H, b, N, et $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2. On note $\mathcal{F}^a(H, b, N, \mathcal{C})(K)$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}^{fa}(H, b, N, \mathcal{C})(K)$ qui sont telles que, pour toute représentation linéaire ρ de H, le (ϕ, N)-module filtré $D(H, b, N, F, \rho)$ est admissible. Comme la catégorie des (ϕ, N)-modules filtrés admissibles est stable par sous-objets, objets quotients, sommes directes et produits tensoriels dans celle des (ϕ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, on voit qu'il suffit qu'il en soit ainsi pour une représentation linéaire fidèle de H.

Soit $F \in \mathcal{F}^a(H,b,N,\mathcal{C})(K)$. Le foncteur qui à ρ de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ associe le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent associé à la représentation galoisienne associée par le foncteur de Fontaine à $D(H,b,N,F,\rho)$, est un foncteur fibre à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$; on le note aussi ω_{Gal} avec un léger abus de notation puisque le contexte n'est pas le même qu'au numéro précédent. On note $\mathrm{Is}(H,b,N,F)$ le H-torseur $\mathrm{Is}(H,b,N,F)$ des $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre espace vectoriel sous-jacent de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ dans ω_{Gal} et $\mathrm{Is}(H,b,N,F) \in H^1(\mathbf{Q}_p,H)$ la classe de cohomologie de $\mathrm{Is}(H,b,N,F)$.

Si d est un élément de $H(K_0)$ qui est de pente 0, on dispose sur $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ du foncteur fibre espace vectoriel sous-jacent ω et du foncteur fibre ω_d (4.1.3) : on note Is_d le (H_d,H)-torseur des isomorphismes du premier vers le second. On note I_d est la bijection de $H^1(\mathbf{Q}_p,H_d)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p,H)$ définie par le torseur Is_d : de façon analogue au numéro précédent, I_d envoie l'élément «neutre» de $H^1(\mathbf{Q}_p,H_d)$ sur la classe de Is_d dans $H^1(\mathbf{Q}_p,H)$. On voit facilement, comme au numéro précédent, que l'on a : $I_d(cl(H_d,bd^{-1},N,F)) = cl(H,b,N,F)$.

La proposition suivante permet de réduire le groupe structural à une forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$.

PROPOSITION 4.2.3. — *Soient H, b, N, $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2 et $F \in \mathcal{F}^a(H,b,N,\mathcal{C})(K)$. Soient c, d et $\iota : H_{F,c} \to H_d$ comme dans le b) de la proposition 4.1.4. Notons $h^1(\iota)$ l'application de $H^1(\mathbf{Q}_p,H_{F,c})$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p,H_d)$ induite par ι. Alors, on a $I_d(h^1(\iota)(cl_{D,c})) = cl(H,b,N,F)$.*

Démonstration. — Clairement, le b) de la proposition 4.1.3 entraîne que le torseur $\mathrm{Is}(H_d,bd^{-1},N,F)$ s'identifie au torseur obtenu à partir de $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega_c,\omega_{\mathrm{Gal}})$ par extension du groupe structural de $H_{F,c}$ à H_d via ι. On a donc : $h^1(\iota)(cl_{D,c}) = cl(H_d,bd^{-1},N,F)$. La proposition résulte alors immédiatement de l'égalité : $I_d(cl(H_d,bd^{-1},N,F)) = cl(H,b,N,F)$, prouvée au numéro précédent.

4.3. Réduction à un groupe connexe.

PROPOSITION 4.3.1. — *Soit $(H,b,N,\mathcal{C})$ comme au 4.1.2 et soit $F \in \mathcal{F}^{fa}$ $(H,b,N,\mathcal{C})(K)$. Notons H^0 la composante neutre de H. Alors, il existe $\tilde{d} \in H(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$, de pente 0, et de même image que b dans $H(K_0)/H^0(K_0)$.*

Démonstration. — Soit $c \in C_{H_F,0}$ et soient $d = b({}^{\sigma}c^{-1})$ comme dans le b) de la proposition 4.1.4. Comme d est de pente 0, pour ρ

représentation linéaire de H dans un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V, $\omega_d(V)$ est une $\mathbf{Q}_p$-structure de V_{K_0} et les K_0-espaces vectoriels V_{K_0} et $(\omega_d(V))_{K_0}$ s'identifient. On voit que les applications identité $\mathrm{id} : V_{K_0} \simeq (\omega_d(V))_{K_0}$ définissent un point à valeurs dans K_0 du (H_d, H)-torseur Is_d des $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre naturel de $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H)$ sur le foncteur fibre ω_d. On le note i. On a : ${}^\sigma i = d \circ \sigma \circ \mathrm{id} \circ \sigma^{-1}$, d'où : ${}^\sigma i = i \circ d$. Soit Is_d/H^0 le quotient de Is_d sous l'action de H^0 ; c'est donc une $\mathbf{Q}_p$-variété de dimension 0, *i.e.* un ensemble fini muni d'une action de $G_{\mathbf{Q}_p}$. Soit $\bar{i}$ l'image de i dans $(\mathrm{Is}_d/H^0)(K_0)$. Comme Is_d/H^0 est fini, on a : $(\mathrm{Is}_d/H^0)(K_0) = (\mathrm{Is}_d/H^0)(\mathbf{Q}_{pnr})$. Par suite, $\bar{i} \in (\mathrm{Is}_d/H^0)(\mathbf{Q}_{pnr})$. Comme d'après un théorème de Steinberg ([St65]), un espace principal homogène sous un groupe algébrique connexe sur $\mathbf{Q}_{pnr}$ a un point rationnel, on voit que $\bar{i}$ se remonte en un point $\tilde{i}$ de $\mathrm{Is}_d(\mathbf{Q}_{pnr})$. Soit $\tilde{d} \in H(\mathbf{Q}_{pnr})$ défini par l'égalité ${}^\sigma(\tilde{i}) = \tilde{i} \circ \tilde{d}$, et montrons que $\tilde{d}$ convient. Si $g \in H^0(K_0)$ est défini par $\tilde{i} = i \circ g$, on a : $\tilde{d} = g^{-1} d({}^\sigma g)$. Il en résulte que ${}_{\tilde{d}}\nu = \mathrm{int}(g^{-1})({}_d\nu)$ ([Ko85] 4.4.2), et, comme d est de pente 0, ${}_d\nu$ est trivial, donc aussi ${}_{\tilde{d}}\nu$ et $\tilde{d}$ est aussi de pente 0 (1.1). De plus, comme $g \in H^0(K_0)$, les images de d et $\tilde{d}$ dans $H(K_0)/H^0(K_0)$ coïncident. On a : $d = ({}^\sigma c)^{-1} b$, avec $c \in H_F(K_0)$. Comme H_F est un quotient de $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$ et que ce groupe est connexe (1.4), le groupe H_F est aussi connexe et on voit que les images de d et b dans $H(K_0)/H^0(K_0)$ coïncident. Comme les images de d et $\tilde{d}$, coïncident, il en est de même des images de $\tilde{d}$ et b. Ceci achève de prouver la proposition.

La proposition suivante permet de se ramener au cas d'un groupe connexe :

Proposition 4.3.2. — *Soient H, b, N, F, $\tilde{d}$ comme dans la proposition précédente. Supposons de plus $F \in \mathcal{F}^a(H, b, N, \mathcal{C})(K)$. Donc $\tilde{d}$ est de pente 0 ; soit $H_{\tilde{d}}$ comme dans le 4.1.3, et $H^0_{\tilde{d}}$ la composante neutre de $H_{\tilde{d}}$. Soit ι^0 l'inclusion de $H^0_{\tilde{d}}$ dans $H_{\tilde{d}}$ et notons $h^1(\iota^0)$ l'application de $H^1(\mathbf{Q}_p, H^0_{\tilde{d}})$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, H_{\tilde{d}})$ induite par ι^0. Alors, on a :*

$$cl(H, b, N, F) = I_{\tilde{d}}(h^1(\iota^0))(cl(H^0_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, F))).$$

(Comme $b\tilde{d}^{-1} \in H^0(K_0) = H^0_{\tilde{d}}(K_0)$, on voit que F peut être vue comme un élément de $\mathcal{F}^a(H^0_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, \mathcal{C})(K)$; $I_{\tilde{d}}$ est défini au 4.2.2.)

Démonstration. — On a clairement :

$$h^1(\iota^0)(cl(H^0_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, F)) = cl(H_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, F).$$

Comme : $I_{\tilde{d}}(cl(H_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, F)) = cl(H, b, N, F)$ (4.2.2), on voit que l'on a la formule cherchée.

PROPOSITION 4.3.3. — *Soit H, b, N et $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2 et soit $F \in \mathcal{F}^a\ (H, b, N, \mathcal{C})(K)$. Soit b^0 l'image de b dans $H(K_0)/H^0(K_0) = H(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})/H^0(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}})$. Notons c_b^0 la classe dans $H^1(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p, H/H^0)$ du cocycle qui envoie σ sur b^0. Alors, l'image de $cl(H, b, N, F)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, H/H^0)$ coïncide avec celle de c_b^0 par l'inflation : $H^1(\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p, H/H^0) \to H^1(\mathbf{Q}_p, H/H^0)$.*

Démonstration. — La proposition résulte immédiatement de la formule du numéro précédent puisque l'image de $h^1(\iota^0)(cl(H^0_{\tilde{d}}, b\tilde{d}^{-1}, N, F))$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, H_{\tilde{d}}/H^0_{\tilde{d}})$ est l'élément «neutre» et que l'image de $\tilde{d}$ dans $H/H^0(K_0)$ coïncide avec celle de b.

Remarque. — Soit $H = \mathrm{O}(q)$ pour une forme quadratique q sur $\mathbf{Q}_p$, non dégénérée, de rang $= n$. Soient b, N, $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2 et $F \in \mathcal{F}^{fa}(H, b, N, \mathcal{C})(K)$. Supposons que $\det(b) = -1$. On peut alors prendre pour $\tilde{d}$ une symétrie orthogonale s_e quelconque par rapport à un vecteur e non isotrope et rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. En effet, comme d est d'ordre 2 et rationnel sur $\mathbf{Q}_p$, il est de pente 0 puisque $(d\sigma)^2 = \sigma^2$. Soit $\lambda \in \mathbf{Q}_{p^2}$ tel que $\sigma(\lambda) = -\lambda$ et posons $\alpha = \lambda^2$, de sorte que $\alpha \in \mathbf{Q}_p$. Soit $q_{\tilde{d}}$ la forme quadratique obtenue par torsion ω_{s_e}. On vérifie facilement que l'on a : $\mathrm{disc}(q_{s_e}) \equiv \mathrm{disc}(q)\alpha \bmod .\mathbf{Q}_p^{*2}$. Si F est admissible et si q_{Gal} désigne la forme quadratique sur le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à la représentation galoisienne associée, la proposition précédente dit que $\mathrm{disc}(q_{s_e}) = \mathrm{disc}(q_{\mathrm{Gal}})$ et on retrouve facilement la formule de la proposition 1.30. de [RZ94]. Notons $w_2(q)$ l'invariant de Hasse (ou classe de Stiefel-Whitney, [Se73] Annexe 2) : $w_2(q) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (q(e_i), q(e_j))$ où $e_1, e_2, ..., e_n$ est une base orthonormée et $(\ ,\ )$ le symbole de Hilbert. Un calcul facile montre que : $w_2(q_{s_e}) = w_2(q) \times v_p(\mathrm{disc}(q) \times q(e)) \bmod .2$, où v_p désigne la valuation p-adique normalisée par $v_p(p) = 1$.

4.4. Trivialité du torseur $\mathrm{Is}_{D,c}$ (4.2.1).

PROPOSITION 4.4.1. — *Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible. Il existe un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible D', dominant D (1.2.2), vérifiant :*

- le sous-groupe des commutateurs $S_{D',\mathrm{sj}}$ de $H_{D',\mathrm{sj}}$ est simplement connexe;

- si H'^{ab} est la forme sur $\mathbf{Q}_p$, définie par l'action de ϕ, du quotient de $H_{D',\mathrm{sj}}$ par $S_{D',\mathrm{sj}}$ (1.5.6), on a $H^1(\mathbf{Q}_p, H'^{\mathrm{ab}}) = \{1\}$.

Supposons D admissible. Soit $c' \in C_{D',0}$ et soit c l'image de c' dans $H_{D,\mathrm{sj}}(K_0)$. Alors, si D' est admissible, le torseur $\mathrm{Is}_{D,c}$ (4.2.1) a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$.

Remarque. — On verra au cours de la démonstration que l'on peut trouver D' comme dans l'énoncé de la proposition et tel que $\rho_{D,D'}$ induise une isogénie de $S_{D',\mathrm{sj}}$ sur $S_{D,\mathrm{sj}}$. On a alors que, si D est un ϕ-module filtré, alors D' est aussi un ϕ-module filtré.

Démonstration. — On a vu au 3.1.2 qu'il existe un (ϕ, N)-module filtré sur K faiblement admissible D_1 dominant D tel que la partie semi-simple de $H_{D_1,\mathrm{sj}}$ soit simplement connexe et que $\rho_{D_1,D}$ induise une isogénie du sous-groupe des commutateurs de $H_{D_1,\mathrm{sj}}$ sur $S_{D,\mathrm{sj}}$. Soit $H^{\mathrm{ab}}_{D_1,\mathrm{sj}}$ le plus grand quotient abélien de $H_{D_1,\mathrm{sj}}$ et H_1^{ab} la forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H^{\mathrm{ab}}_{D_1,\mathrm{sj}}$ définie par l'action de ϕ (1.5.6). Il existe une extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, telle que le morphisme $\mathbf{T_K} \to H_1^{\mathrm{ab}}$ (1.5) se factorise à travers T_E. On peut prendre pour D' un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible qui engendre la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi, N)$ formée des D'' tels que $\rho_{D''}$ se factorise à travers le produit fibré de $H_{D_1,\mathrm{sj}}$ et de $(T_E)_{K_0}$ au dessus de $H^{\mathrm{ab}}_{D_1,\mathrm{sj}}$. En effet, $S_{D',\mathrm{sj}} = S_{D_1,\mathrm{sj}}$ est simplement connexe et $H^1(\mathbf{Q}_p, T_E) = \{1\}$.

Supposons D et D' admissibles et soit $c' \in C_{D',0}$. On a : $H^1(\mathbf{Q}_p, H'_{c'}) = \{1\}$. En effet, si $\mathrm{rad}_u(H'_{c'})$ est le radical unipotent de $H'_{c'}$, on a : $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathrm{rad}_u(H'_{c'})) = \{1\}$; si $S'_{c'}$ est la partie semi-simple de $H'_{c'}$, on a $H^1(\mathbf{Q}_p, S'_{c'}) = \{1\}$, d'après un théorème de Kneser ([Kn65]), puisque $S'_{c'}$ est simplement connexe, et $H^1(\mathbf{Q}_p, H'^{\mathrm{ab}}) = \{1\}$ par hypothèse. Il en résulte que le torseur $\mathrm{Is}_{D',c'}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. L'image de ce point dans $\mathrm{Is}_{D,c}$ est un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$, ce qui entraîne la proposition.

COROLLAIRE 4.4.2. — *Soit $c \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$ (1.6). Sous la conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ qui dit que tout (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible sur K est admissible, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{a}(\phi, N)$, le torseur $\mathrm{Is}_{D,c}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$.*

Remarques. — 1) Soit $c \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$. Il est très vraisemblable que, sous la conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$, on puisse prouver que le $\mathbf{H}_{\mathrm{sj}}$-torseur des $\otimes$-isomorphismes de ω_c sur ω_{Gal} est trivial, autrement dit que $\varprojlim \mathrm{Is}_{D,\rho_D(c)}(\mathbf{Q}_p)$ est non vide. Il n'est pas très difficile de prouver que, si $c' \in C_{\mathbf{H}_{\mathrm{sj}},0}$, la limite projective $\varprojlim \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_c, \omega_{c'})(\mathbf{Q}_p)$ est non vide.

Dans les remarques qui suivent, on suppose $e_K = 1$ et donc $K = K_0$. On appelle $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$ le cas particulier de la conjecture $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ qui dit que tout ϕ-module filtré faiblement admissible sur K est admissible.

2) Soient, comme dans la remarque 2) de 1.6.4, $\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}}$ le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre ω_{sj} restreint à la catégorie des ϕ-modules filtrés faiblement admissibles sur K, et soit μ le groupe à un paramètre de $(\mathbf{H}_{N=0,\mathrm{sj}})_K$ associé à un scindage de la filtration qui est compatible aux réseaux fortement divisibles. Le corollaire ci-dessus montre que, sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$, le torseur $\mathrm{Is}_{D,\mu_D(p)}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$, μ_D étant l'image de μ dans $H_{D,\mathrm{sj}}$.

Dans [Wi84], nous avons construit pour les ϕ-modules filtrés sur $K = K_0$ un $\otimes$-scindage de la filtration, caractérisé par des propriétés particulières, et qui est compatible aux réseaux fortement divisibles. Nous avons noté $D \mapsto D_{\mathbf{Q}_p}$ le foncteur fibre que nous avons noté ici $\omega_{D,\mu_D(p)}$. On voit donc que, sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$, le torseur $\mathrm{Is}_{D,\mu_D(p)}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$.

3) Nous avons aussi introduit un foncteur fibre que nous avons noté $D \mapsto D^{\mathrm{el}}_{\mathbf{Q}_p}$. Il n'est pas difficile de prouver, que le torseur des $\otimes$-isomorphismes des foncteurs fibres $D \mapsto D_{\mathbf{Q}_p}$ et $D^{\mathrm{el}}_{\mathbf{Q}_p}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. Il en résulte, que, sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$, le torseur $\mathrm{Is}_{D,\mathrm{el}}$ entre les foncteurs fibres $D' \mapsto D'^{\mathrm{el}}_{\mathbf{Q}_p}$ et $D' \mapsto \omega_{\mathrm{Gal}}(D')$ de $\underline{\mathrm{MF}}_D$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$.

Si D est un ϕ-module filtré faiblement admissible sur K, on note $H_{D,\mathrm{el}}$ la forme sur $\mathbf{Q}_p$ de $H_{D,\mathrm{sj}}$ définie par le foncteur fibre $D' \mapsto D'^{\mathrm{el}}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\underline{\mathrm{MF}}_D$. Soit H un groupe réductif sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison de groupes à un paramètre de $H_{\overline{\mathbf{Q}_p}}$. Nous avons prouvé dans [Wi86] th. 3.4.1.2 que, pour qu'il existe D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$ avec un isomorphisme de H sur $H_{D,\mathrm{el}}$ qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_D$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

– la classe de conjugaison $\mathcal{C}$ est définie sur $\mathbf{Q}_{p\mathrm{nr}}$;

– le groupe $H_{\overline{\mathbf{Q}_p}}$ est engendré par les images des éléments des classes de conjugaison de groupes à un paramètre ${}^{\tau}\mathcal{C}$, pour $\tau \in G_{\mathbf{Q}_p}$.

Nous avons vu dans la remarque précédente que, sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$, pour tout D de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{fa}(\phi)$, le torseur $\mathrm{Is}_{D,\mathrm{el}}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. Il en résulte que, sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$, les conditions ci-dessus sont aussi nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une représentation cristalline de G_K avec un isomorphisme de H sur l'adhérence de Zariski de l'image de G_K envoyant $\mathcal{C}$ sur la classe de conjugaison du groupe à un paramètre défini par la décomposition de Hodge-Tate ([Se78] 1.4).

4) J.-M. Fontaine et G. Laffaille ont prouvé que si D est un ϕ-module filtré faiblement admissible sur K tel que $\mathrm{Fil}^0 D = D$ et $\mathrm{Fil}^p D = \{0\}$, D est admissible ([FL82]). Soit D un ϕ-module filtré admissible sur K. Soit D' un ϕ-module filtré faiblement admissible vérifiant les conditions de la proposition et soit $c' \in C_{D',0}$ et notons c l'image de c' dans $H_{D,\mathrm{sj}}(K_0)$. Il résulte de la proposition et du théorème de J.-M. Fontaine et G. Laffaille, que si $\mathrm{Fil}^0 D' = D'$ et $\mathrm{Fil}^p D' = \{0\}$, alors $\mathrm{Is}_{D,c}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$. Par exemple, supposons que $H_{D,\mathrm{sj}}$ soit le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(q)$ dans sa représentation usuelle. Notons $h_i = \dim_{K_0}(\mathrm{gr}_i(D))$. On a : $h_i = h_{-i}$. On peut prendre D' tel que $H_{D'}$ soit le groupe de Clifford réduit $\mathrm{Spin}(q)$ si $\sum\limits_{i>0, i\equiv 1 \mathrm{mod}.2} h_i$ est pair, et au groupe de Clifford $\mathrm{GSpin}(q)$ sinon (Bourbaki, Algèbre chap. 9, [De72]), dans leurs représentations spinorielles ou sommes des deux représentations semi-spinorielles selon que $\dim(D)$ est impaire ou paire. Notons cette représentation W dans chacun des cas. Comme, si V est la représentation standard de $\mathrm{SO}(q)$, la représentation $\oplus_i \wedge^{2i} V$ est isomorphe à la représentation $\mathrm{End}(W)$ (3 de [De72]), on voit facilement que si $\sum\limits_{i>0} ih_i < p$, $\mathrm{Is}_{D,c}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$ (si $\sum\limits_{i>0} h_i$ est impair et $h_0 = 0$, la condition plus faible suivante suffit : $\big(\sum\limits_{i>0} ih_i\big) - i_{\min} < p$, où $i_{\min}$ est le plus petit $i > 0$ tel que $h_i \neq 0$).

5) Soit D un ϕ-module filtré admissible. Supposons donné un sous-groupe H de $\mathrm{GL}_{\omega_{\mathrm{sj}}(D)}$, contenant $H_{D,\mathrm{sj}}$ et stable par ϕ. Par exemple, on se donne un nombre fini de tenseurs t_i, vérifiant $\phi t_i = p^{w_i} t_i$ et $t_i \in \mathrm{Fil}^{w_i}$ et H est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\omega_{\mathrm{sj}}(D)}$ formé des éléments g tels qu'il existe un scalaire λ tel que $g(t_i) = \lambda^{w_i} t_i$ pour tout i. Si $c \in C_{D,0}$, le groupe H est stable sous l'action de $\phi_{D,c}$, donc H se descend en un sous-groupe H_c de $\mathrm{GL}_{\omega_c(D)}$ contenant $H_{D,c}$. On note $\mathrm{Is}_{c,H}$ le H_c-torseur obtenu par extension du groupe structural de $H_{D,c}$ à H_c à partir de $\mathrm{Is}_{D,c}$. On note $H_{c,\mathrm{Gal}}$ le groupe obtenu par torsion par $\mathrm{Is}_{c,H}$ à partir de H_c. On voit que le groupe $H_{D,\mathrm{Gal}}$ s'dentifie à un sous-groupe de $H_{c,\mathrm{Gal}}$.

Supposons H réductif *connexe*. Supposons de plus qu'il existe un réseau fortement divisible M tel que l'adhérence schématique $\mathcal{H}$ de H dans

GL_M soit un groupe lisse à fibre spéciale réductive. Ceci implique que cette fibre spéciale est connexe et que $\mathcal{H}(W)$ est le fixateur d'un point spécial de l'immeuble de H (4.6.31 de [BT84], 3.8.1 de [Ti79]). Soit μ_D comme dans la remarque 2), et prenons $c = \mu_D(p)$. On a : $\phi_{D,c}(M) = M$, et $\phi_{D,c}$ laissant stable H. On voit que le groupe $\mathcal{H}$ se descend en un groupe réductif sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathcal{H}(W)$ est le fixateur d'un point hyperspécial de l'immeuble de H_c. Si $\mathrm{Is}_{c,H}$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$, ce qui est le cas sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$ ou sous la condition de la remarque 4, on voit que l'immeuble de $H_{c,\mathrm{Gal}}$ a un point hyperspécial.

6) Soit D un module filtré admissible sur $\mathbf{Q}_p$. On suppose donné un groupe *réductif connexe* $H \subset \mathrm{GL}_D$ contenant $H_{D,\mathrm{sj}}$ et ϕ_D, tel qu'il existe un réseau fortement divisible M tel que l'adhérence schématique $\mathcal{H}$ de H dans GL_M soit un groupe lisse à fibre spéciale réductive. Alors, on voit facilement que sous $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_{N=0,K}$ ou sous la condition de la remarque 4, le torseur entre le foncteur fibre espace vectoriel sous-jacent de D et la représentation galoisienne associée par le foncteur de Fontaine à D a un point rationnel sur $\mathbf{Q}_p$.

4.5. Conséquences pour la conjecture de Rapoport et Zink.

4.5.1. *Rappels sur l'invariant de Kottwitz* ([Ko85], [Ko90], [RR94], [Ko95]).

Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$, E_{nr} l'extension maximale non ramifiée de E contenue dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$, et $\widehat{E_{\mathrm{nr}}}$ le complété de E_{nr}. On note σ_E le Frobenius de $\mathrm{Gal}(E_{\mathrm{nr}}/E)$.

Soit H un groupe réductif connexe sur E. Rappelons que deux éléments b et b' de $H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}})$ sont σ_E-conjugués s'il existe $g \in H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}})$ tel que $b' = gb\sigma_E(g^{-1})$ ([Ko85]). On note $B(H)$ l'ensemble des classes de σ-conjugaison des éléments de $H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}})$. Soit $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)$ le «groupe fondamental algébrique» de $H_{\overline{\mathbf{Q}_p}}$ (2.1). R. E. Kottwitz a défini un invariant $\kappa : B(H) \to \pi_1(H)^{\mathrm{alg}}_{G_E}$, le groupe $\pi_1(H)_{G_E}$ étant le plus grand quotient de $\pi_1(H)$ sur lequel le groupe de Galois G_E agit trivialement ([Ko85],1 § 6 de [Ko90], [RR94],[Ko95]).

Remarque. — 1) Soit $H' \to H$ une isogénie définie sur $\widehat{E_{\mathrm{nr}}}$ de noyau C. La suite exacte de cohomologie définit alors un morphisme surjectif : $H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}}) \to H^1(E_{\mathrm{nr}}, C(\overline{\mathbf{Q}_p}))$. On sait que $H^1(E_{\mathrm{nr}}, C(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ est le groupe des points à valeurs dans $\overline{\mathbf{F}_p}$ d'un groupe quasi-algébrique dont le groupe $\pi_0(H^1(C))$ des composantes connexes s'identifie au dual $\mathrm{Hom}(C^*(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de $C^*(\mathbf{Q}_p)$, C^* étant le dual de Cartier de C (§ 6 de [Be80]). On voit donc que $\pi_0(H^1(C))$ s'identifie à $C(\overline{\mathbf{Q}_p})(-1)_I$, (-1) désignant la torsion par l'inverse du caractère cyclotomique et I désignant le plus grand quotient sur lequel le sous-groupe d'inertie I de $G_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement. Comme la limite projective, pour les différentes isogénies vers H, de $C(\overline{\mathbf{Q}_p})(-1)$ s'identifie au complété profini $\widehat{\pi_1^{\mathrm{alg}}}(H)$ de π_1^{alg}, on en déduit un morphisme de $H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}})$ sur $\widehat{\pi_1^{\mathrm{alg}}}(H)_I$, et par suite, on en déduit une application $B(H) \to \widehat{\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)}_{G_{\mathbf{Q}_p}}$. Il me semble très vraisemblable que le morphisme $H(\widehat{E_{\mathrm{nr}}}) \to \widehat{\pi_1^{\mathrm{alg}}}(H)_I$ coïncide avec le morphisme w_H défini au § 7 de [Ko95] (c'est le cas si $H = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ d'après 6.1 de [Be80], et le cas général devrait en résulter par fonctorialité). Il en résulterait que l'application $B(H) \to \widehat{\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)}_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ coïncide avec κ (7.5 [Ko95]). Ceci permettrait de voir κ comme l'obstruction à trouver dans une classe de σ_E-conjugaison un élément se relevant selon une isogénie.

2) Soit μ un groupe à un paramètre de H, défini sur $\widehat{E_{\mathrm{nr}}}$. Soit π une uniformisante de $\widehat{E_{\mathrm{nr}}}$ et $\overline{\mu(\pi)}$ l'image de $\mu(\pi)$ dans $B(H)$. Alors : $\kappa(\overline{\mu(\pi)}) = \overline{\mu}$. En effet, la proposition 3.2.1 prouve qu'il existe un groupe réductif connexe H' sur E, de groupe dérivé simplement connexe, un groupe à un paramètre μ' de H' défini sur $\widehat{E_{\mathrm{nr}}}$, et un morphisme $f : H' \to H$ vérifiant $f\circ\mu' = \mu$. Par fonctorialité de l'invariant de Kottwitz ([RR] 1.14), on a : $f_*(\kappa(\overline{\mu'(\pi)})) = \kappa(\overline{\mu(\pi)})$. Comme on a $f_*(\overline{\mu'}) = \overline{\mu}$, on voit qu'on est ramené au cas où le groupe dérivé S de H est simplement connexe. Dans ce cas, on a $\pi_1(H) = \pi_1(H/S)$ et on est finalement ramené au cas d'un tore. Dans ce cas, la proposition est prouvée dans [Ko85] 2.5 (en fait, la propriété est énoncée lorsque π appartient à une extension finie de E, mais la démonstration s'étend au cas général).

4.5.2. Soient H, b, N, $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2. On suppose H connexe. Désignons, comme au 2.1, par $\tilde{\mathcal{C}}$ l'image d'un élément quelconque de $\mathcal{C}$ dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)$. Désignons par $\tilde{\mathcal{C}}_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ l'image de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)_{G_{\mathbf{Q}_p}}$. Rappelons que $H^1(\mathbf{Q}_p,H)$ s'identifie au sous-groupe de torsion de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ ([Ko90]). M. Rapoport et T. Zink ont formulé le cas particulier $N=0$ de la conjecture suivante, qui décrit $cl(H,b,N,F)$ (4.2.2) :

CONJECTURE. — *Soit $F \in \mathcal{F}^a(H,b,N,\mathcal{C})(K)$. Alors $cl(H,b,N,F) = \kappa(b) - \tilde{\mathcal{C}}_{G_{\mathbf{Q}_p}}$.*

Remarques. — 1) Soit d un élément de $H(K_0)$ qui est de pente 0. On peut alors aussi voir F comme un élément de $\mathcal{F}^a(H_d, bd^{-1}, N, \mathcal{C})(K)$ (4.1.3). Comme H_d est une forme intérieure de H, les deux groupes $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)$ et $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H_d)$ s'identifient. De la relation : $I_d(cl(H_d, bd^{-1}, N, F)) = cl(H, b, N, F)$ (4.2.2), on tire, l'égalité suivante dans $\pi_1^{\mathrm{alg}}(H)_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ ([Bo89] prop. 3.8) :

$$cl(H_d, bd^{-1}, N, F) = cl(H, b, N, F) - cl(\mathrm{Is}_d),$$

où $cl(\mathrm{Is}_d)$ est la classe de cohomologie du H-torseur Is_d (4.2.2) dans $H^1(\mathbf{Q}_p, H)$. D'après [Ko90] prop. 6.3, on a :

$$\kappa(bd^{-1}) = \kappa(b) - cl(\mathrm{Is}_d),$$

ce qui montre que la conjecture est compatible avec la torsion par Is_d ([RZ94] 1.26).

2) Si $F \in \mathcal{F}^{fa}(H, b, N, \mathcal{C})(K)$, on peut prouver que $\kappa(b) - \tilde{\mathcal{C}}_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ est bien de torsion. Il suffit en effet de le faire lorsque H est abélien, auquel cas ceci résulte de [RZ94] prop. 1.20. et prop. 1.21. On peut le voir en remarquant que grâce à 1.5, à la remarque précédente et à une réduction du groupe structural (4.1.4), on se ramène au cas où $H = T_E$ pour une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, $\mu = \mu_E$ et $b =^{\sigma} N_{E/E_0}(\mu_E(\pi_E))$, où E_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans E et π_E une uniformisante de E. Il résulte alors du 2.5 de [Ko85] que : $\kappa(b) - \tilde{\mathcal{C}}_{G_{\mathbf{Q}_p}} = 0$.

3) La conjecture est vraie lorsque H est un tore et donc aussi lorsque le groupe dérivé de H est simplement connexe ([RZ94] prop. 1.20 lorsque $N = 0$, mais l'argument s'étend au cas N quelconque). On peut le voir aussi en remarquant que, pour E extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, la restriction à $\underline{\mathrm{MF}}_{T_E}$ du foncteur fibre ω_{π_K} (1.5) est isomorphe, sur $\mathbf{Q}_p$, à celle du foncteur fibre ω_{Gal}, puisque $H^1(\mathbf{Q}_p, T_E) = \{1\}$ ([Wi91] 3.1) , et en utilisant la remarque 1.

PROPOSITION 4.5.3. — 1) *Soient H, b, N, $\mathcal{C}$ comme au 4.1.2 et $F \in \mathcal{F}^a(H, b, N, \mathcal{C})(K)$. On suppose H connexe. Alors, il existe H', b', N' et $\mathcal{C}'$ comme au 4.1.2 et $F' \in \mathcal{F}^{fa}(H', b', N', \mathcal{C})(K)$, $d \in H(K_0)$, de pente 0 et f un morphisme de H' vers H_d, tels que :*

- *$f(b') = bd^{-1}$, $f(N') = N$, $f(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$, $f(F') = F$,*

- *le groupe des commutateurs de H' est simplement connexe.*

2) *Si (H', b', N', F') est comme au 1) et si de plus $F' \in \mathcal{F}^a(H', b', N', \mathcal{C})(K)$, alors la conjecture 4.5.2 est vraie pour (H, b, N, F).*

COROLLAIRE. — *La conjecture de Fontaine* $\mathrm{Conj}(fa \Rightarrow a)_K$ *(admissibilité des* (ϕ, N)*-modules filtrés faiblement admissibles sur* K*) entraîne la conjecture 4.5.2.*

Démonstration. — Montrons 1). Soit ρ une représentation linéaire fidèle de H et soit D le (ϕ, N)-module filtré associé (4.1.2), de sorte que $H_{D,\mathrm{sj}}$ s'identifie au sous-groupe H_F de H_{K_0} (4.1.2). Soit D' un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible dominant D et tel que la partie semi-simple de $H_{D',\mathrm{sj}}$ soit simplement connexe (th. 3.1.2). Soit $c' \in C_{D',0}$ (1.6). Posons $H' = H_{D',c'}$. Notons c l'image de c' dans $H_F(K_0)$. Alors, puisque $c' \in C_{D',0}$, on a : $c \in C_{D,0}$. Soit d comme au b) de la proposition 4.1.4. Alors, $\rho_{D',D}$ se descend un morphisme f de $H_{D',c'}$ vers $H_{F,c}$, et $H_{F,c}$ s'identifie à un sous-groupe de H_d. On voit que H', $b' = {}^{\sigma}c'$, $N' = N_{D'}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{D'}$, $F' = F_{D'}$ et f satisfont aux conditions du 1).

Le 2) résulte immédiatement de ce que l'on connaît la conjecture 4.5.2 dans le cas où la partie semi-simple de H est simplement connexe (([RZ94] prop. 1.20, remarque 3 du 4.5.2), et de l'invariance de la conjecture par torsion par un élément de pente 0 ([RZ94] 1.26, remarque 1 du 4.5.2).

4.5.4. *Remarques.* — 1) Il résulte de la proposition et du théorème de Fontaine et Laffaille ([FL82]) que la conjecture 4.5.2 est vraie si $e_K = 1$, $N = 0$ et H' admet une représentation fidèle telle que les poids de F' dans cette représentation soient dans un intervalle de longueur $< p$. C'est le cas si $H = \mathrm{SO}$ et avec la condition de la remarque 4) de 4.4.2, en particulier si $\sum_{i>0} ih_i < p$.

2) Supposons $H = \mathrm{O}(q)$. On voit facilement que, pour tout $b \in \mathrm{SO}(q)(K_0)$, on a $\kappa(b) = v_p(\theta(b))$ mod.2, où $\theta : \mathrm{O}(q)(K_0) \to {K_0}^*/{K_0}^{*2}$ est la norme spinorielle ([Sc69] 3.6) : θ est un homomorphisme et, si e est un vecteur non isotrope et s_e est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à e, on a $\theta(s_e) = -q(e)$. Posons $h = \sum_{i>0} ih_i$. On voit que, pour $\det(b) = 1$, si la conjecture 4.5.2 est vraie, on a :

$$w_2(q_{\mathrm{Gal}}) = w_2(q) \times (-1)^{v_p(\theta(b))}(-1)^h.$$

Supposons $\det(b) = -1$. On a vu dans la remarque du 4.3.3 que : $w_2(q_{s_e}) = w_2(q) \times (-1)^{v_p(\mathrm{disc}(q)\times q(e))}$. On voit donc que, si la conjecture 4.5.2 est vraie, on a :

$$w_2(q_{\mathrm{Gal}}) = w_2(q) \times (-1)^{v_p(\mathrm{disc}(q)\times\theta(b))} \times (-1)^h.$$

On retrouve les formules données dans [RZ94] 1.29 (si le rang de q est pair, on peut définir un morphisme $\theta' : \mathrm{O}(q)(K_0) \to {K_0}^*/{K_0}^{*2}$ par $\theta'(-s_e) = q(e)$, on a : $\theta'(b) = -\theta(b) \times \mathrm{disc}(q) \bmod {K_0}^*/{K_0}^{*2}$, d'où, si la conjecture 4.5.2 est vraie, $w_2(q_{\mathrm{Gal}}) = w_2(q) \times (-1)^{v_p(\theta'(b))} \times (-1)^h$).

BIBLIOGRAPHIE

[Be80] L. BEGUERI, Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos, Mémoire de la Société Mathématique de France, n°4 (1980).

[Bo89] M.V. BOROVOI, The algebraic fundamental group and abelian Galois cohomology of reductive algebraic groups, Preprint Max-Planck-Institut fur Mathematik, 1989.

[Bo96] M.V. BOROVOI, Abelianization of the first Galois cohomology of reductive groups, Internat. Math. Res. Notices, n° 8 (1996), 401-407.

[BT72] A. BOREL et J. TITS, Compléments à l'article «Groupes réductifs», Publications Mathématiques IHES, n° 41 (1972), 253-276.

[BT84] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local. 2. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, Publications Mathématiques IHES, n° 60 (1984).

[DG70] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, Groupes Algébriques, Masson et Cie, Paris, North Holland, Amsterdam.

[DM82] P. DELIGNE and J.S. MILNE, Tannakian categories. Dans Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Notes in Mathematics, 900 (1982).

[De72] P. DELIGNE. La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, Inventiones Math., 15 (1972), 206-226.

[De90] P. DELIGNE. Catégories tannakiennes. The Grothendieck Festschrift, Volume 2, Progress in Mathematics Birkhauser 87 (1990).

[Fa94] G. FALTINGS, Mumford-Stabilitat in der algebraischen Geometrie, Proceedings du Congrès International de Zurich.

[Fo79] J.-M. FONTAINE, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. Dans Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Juillet 1978) (vol. 3), Astérisque 65 (1979).

[Fo94] J.-M. FONTAINE. Représentations p-adiques semi-stables. Exposé 3, dans Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque 223 (1994).

[FL82] J.-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE, Construction de représentations p-adiques, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., série 4, t. 15 (1982), 547-608.

[Kn65] M. KNESER, Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen uber p-adischen Korpern. 2, Math. Zeit., 89 (1965), 250-272.

[Ko84] R.E. KOTTWITZ, Shimura Varieties and Twisted Orbital Integrals, Math. Ann., 269 (1984), 287-300.

[Ko85] R.E. KOTTWITZ, Isocrystals with additional structure. Compositio Mathematica, 56 (1985), 201-220.

[Ko90] R.E. KOTTWITZ, Shimura varieties and λ-adic representations, in : L. Clozel, L. Milne (ed) : Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, part 1, Perspective in Mathematics 10, Academic Press 1990, p. 161-209.

[Ko95] R.E. KOTTWITZ, Isocrystals with additional structure. 2, Preprint.

[La80] G. LAFFAILLE, Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, Bull. Soc. Math. France, 108 (1980), 187-206.

[LIE] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie. Chap. 8 § 5 n. 3.

[Ro] G. ROUSSEAU, Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux, Thèse, Université de Paris-Sud (Orsay), 1977.

[RR94] M. RAPOPORT et M. RICHARTZ, On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure, Compositio Math., 103, no 2(1996), 153-181.

[RZ94] M. RAPOPORT et T. ZINK, Period spaces for p-divisible groups, Annals of Mathematics studies 141, Princeton University Press.

[Sa72] N. SAAVEDRA RIVANO, Catégories Tannakiennes. Lecture Notes in Mathematics, 265 (1972).

[Sc69] W. SCHARLAU, Quadratic forms, Queen's papers on pure and applied mathematics-no. 22, Queen's University, Kingston (Ontario), 1969.

[Se68] J.-P. SERRE, Corps locaux, Hermann, 1968.

[Se73] J.-P. SERRE, Cohomologie Galoisienne. (Cinquième édition, révisée et complétée), Lecture Notes in Mathematics, 5.

[Se78] J.-P. SERRE, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. Dans : Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, 65 (1979).

[Se94] J.-P. SERRE, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques. Dans Motives (Seattle). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55, Part 1. AMS (1994).

[St65] R. STEINBERG, Regular elements of semisimple algebraic groups, Publications IHES, 25 (1965).

[Ti79] J. TITS, Reductive groups over local fields. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Corvallis). Vol. 33, part 1 (1979), 29-69, AMS.

[To94] B. TOTARO, Tensor products in p-adic Hodge Theory, Duke Math. Journal, 83, no 1 (1996), 79-104.

[Ts94] T. TSUJI, On syntomic cohomology of higher degree of a semi-stable family, Preprint (Kyoto University), 1994.

[Wi84] J.-P. WINTENBERGER, Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux, Annals of Mathematics, 119 (1984), 511-548.

[Wi86] J.-P. WINTENBERGER, Groupes algébriques associés à certaines représentations p-adiques, American Journal of Mathematics, 108 (1986), 1425-1466.

[Wi91] J.-P. WINTENBERGER, Torseur entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline; le cas abélien, Duke Mathematical Journal, Vol. 62, No 3 (1991), 511-526.

[Wi95] J.-P. WINTENBERGER, Relèvement selon une isogénie de systèmes ℓ-adiques de représentations galoisiennes associés aux motifs, Invent. Math., 120 (1995), 215-240.

Manuscrit reçu le 22 janvier 1996,
accepté le 7 juillet 1997.

Jean-Pierre WINTENBERGER,
Université Louis Pasteur et CNRS
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).
wintenberger@math.u-strasbg.fr