ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NICOLAS BOURBAKI

Sur certains espaces vectoriels topologiques

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 5-16
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__5_0>

SUR CERTAINS ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par Nicolas BOURBAKI (Nancago).

---

1. **Introduction** [1]. — Les quelques pages qui suivent se rattachent au récent travail de J. Dieudonné et L. Schwartz sur « La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$ » paru dans ces *Annales* [2]; en analysant les démonstrations de ces auteurs, on s'aperçoit que la plupart de leurs résultats sont encore valables dans les espaces appartenant à l'une ou l'autre des deux catégories que nous définissons ci-dessous, les *espaces bornologiques* (déjà considérés par Mackey [6]) et les *espaces tonnelés*; tous les espaces localement convexes qui interviennent en analyse fonctionnelle sont de cette nature, ce qui nous semble justifier une étude des propriétés de ces deux catégories d'espaces, qui d'ailleurs, du point de vue axiomatique, fournissent une classification plus naturelle que celle basée sur l'existence d'une norme ou d'une distance définissant la topologie de l'espace considéré.

Nous gardons en principe la terminologie et les notations de [2]; nous dirons toutefois « réflexif » au lieu de « semi-réflexif », et « complètement réflexif » au lieu de « réflexif ». Si E et E′ sont deux espaces en dualité faible, nous désignerons par $\beta(E', E)$ la topologie (sur E′) de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E (topologie *forte* sur E′). Si E est un espace vectoriel réunion d'une famille filtrante croissante (E_α) de sous-espaces, et si sur chaque E_α on a défini une topologie $\mathfrak{T}_\alpha$ localement convexe telle que si $E_\alpha \subset E_\beta$, la topologie induite sur E_α par $\mathfrak{T}_\beta$ soit moins fine que $\mathfrak{T}_\alpha$, nous dirons que la topologie localement convexe la plus fine sur E qui induise sur chaque E_α une topologie moins fine que $\mathfrak{T}_\alpha$, est la *limite inductive* des $\mathfrak{T}_\alpha$, et que E muni de cette topologie est la *limite inductive* des espaces E_α.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

2. **Espaces tonnelés.** — Étant donné un espace localement convexe E, nous dirons qu'une partie T de E est un *tonneau* si T est *convexe, cerclé, fermé* dans E et *engendre* E (cette dernière condition signifiant que pour tout $x \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda x \in T$ pour $|\lambda| \leqslant \alpha$). Tout voisinage convexe, cerclé et fermé de o est un tonneau. Nous dirons qu'un espace localement convexe séparé E est *tonnelé* si inversement, *tout tonneau dans* E *est un voisinage de* o. Il revient au même de dire que toute semi-norme sur E semi-continue inférieurement est continue.

Tout espace localement convexe séparé E qui est un *espace de Baire* est tonnelé, car pour tout tonneau T, E est réunion des nT (n entier > 0) ; comme les nT sont fermés dans E, un au moins a un point intérieur en vertu du théorème de Baire, et comme T est convexe cerclé, on voit aussitôt que T est un voisinage de o. En particulier, tout *espace* ($\mathfrak{F}$) est tonnelé.

On voit aisément que le *completé* d'un espace tonnelé est tonnelé, mais il y a des exemples d'espaces tonnelés non complets (par exemple, les espaces normés « presque complets » de Mackey ([5], p. 195-196) sont tonnelés) ; d'ailleurs, on connaît aussi des exemples d'espaces complets non tonnelés.

On montre sans peine que tout *espace quotient* (séparé) d'un espace tonnelé est tonnelé ; tout *produit* d'espaces tonnelés est tonnelé. Toute *limite inductive* (séparée) d'espace tonnelés est un espace tonnelé ; en particulier tout *espace* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$) est tonnelé. Comme tout espace localement convexe séparé peut être plongé dans un produit d'espaces de Banach, on voit par contre qu'un sous-espace fermé d'un espace tonnelé n'est pas nécessairement un espace tonnelé.

Proposition 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes,* $\mathfrak{L}$(E, F) *l'espace des applications linéaires continues de* E *dans* F. *Pour qu'une partie* H *de* $\mathfrak{L}$(E, F) *soit bornée pour la topologie* $\mathcal{T}_s$ *de la convergence simple, il faut et il suffit que pour tout voisinage convexe, cerclé et fermé* V *de* o *dans* F, *l'intersection* T *des ensembles* $u^{-1}(V)$, *où* u *parcourt* H, *soit un tonneau.*

En effet, dire que H est borné pour $\mathcal{T}_s$ signifie que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda u(x) \in V$ pour tout $u \in H$, c'est-à-dire $\lambda x \in T$.

Corollaire. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé,* E' *son dual. Pour qu'un ensemble* $\mathfrak{B}' \subset E'$ *soit faiblement borné, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans le polaire* T^0 *d'un tonneau* $T \subset E$.

On déduit aussitôt de la proposition 1 le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* E *un espace tonnelé,* F *un espace localement convexe séparé. Toute partie* H *de* $\mathfrak{L}(E, F)$ *qui est bornée pour* $\mathfrak{T}_s$ *est équicontinue.*

COROLAIRE 1. — *Dans les hypothèses du théorème 1, soit* Φ *un filtre borné sur* $\mathfrak{L}(E, F)$. *Si* Φ *converge simplement dans* E *vers une fonction* u_0, u_0 *est une application linéaire continue de* E *dans* F *et* Φ *converge uniformément vers* u_0 *dans toute partie précompacte de* E. *En outre, si* F *est complet, pour que* Φ *converge simplement dans* E, *il suffit que* Φ *converge simplement dans une partie totale de* E.

Cela résulte du fait que par hypothèse il existe un ensemble $H \in \Phi$ qui est borné pour $\mathfrak{T}_s$, donc équicontinu (cf. [1], § 3).

COROLLAIRE 2. — *Dans les hypothèses du théorème 1, soit* Φ *un filtre sur* $\mathfrak{L}(E, F)$ *ayant une base dénombrable. Si* Φ *converge simplement dans* E *vers une fonction* u_0, u_0 *est une application linéaire continue de* E *dans* F, *et* Φ *converge uniformément vers* u_0 *dans toute partie précompacte de* E.

Lorsque Φ est le filtre élémentaire associé à une suite (v_n), la suite des $v_n(x)$ est convergente vers $u_0(x)$ dans F pour tout $x \in E$; la suite (v_n) est donc bornée pour $\mathfrak{T}_s$, et le corollaire 2 résulte alors du corollaire 1.

Supposons maintenant que Φ soit un filtre quelconque ayant une base dénombrable (H_n), qu'on peut supposer décroissante. Si v_n est un élément de H_n, la suite (v_n) converge simplement vers u_0, donç u_0 est une application linéaire continue de E dans F. Reste à voir que si $K \subset E$ est précompact et si V est un voisinage de o dans F, pour n assez grand et pour tout $u \in H_n$, on a $w(K) \subset V$ en posant $w = u - u_0$. Or, s'il n'en était pas ainsi, il existerait pour tout n une application $v_n \in H^n$ telle que $w_n(K) \not\subset V$ (avec $w_n = v_n - u_0$) ; conclusion absurde, puisque la suite (v_n) converge simplement vers u_0 dans E.

PROPOSITION 2. — *Pour qu'un espace localement convexe séparé* E *soit tonnelé, il faut et il suffit que sa topologie soit identique à* $\tau(E, E')$ *et que tout ensemble faiblement borné dans* E′ *soit relativement faiblement compact.*

En effet, si E est tonnelé, tout ensemble faiblement borné dans E′ est équicontinu (théorème 1), donc relativement faiblement compact. Inversement, tout ensemble convexe et faiblement compact $K \subset E'$ est faiblement borné, donc K^0 est un tonneau dans E et par suite un voisinage de o ; cela prouve que la topologie $\mathfrak{T}$ de E est plus fine que $\tau(E, E')$, mais comme elle est par ailleurs moins fine que cette dernière, elle lui est identique.

Si maintenant on suppose les conditions de l'énoncé vérifiées et si T est un tonneau dans E, T^0 est faiblement borné, donc faiblement compact dans E', et $T = T^{00}$ est par hypothèse un voisinage de o dans E, puisque la topologie de E est $\tau(E, E')$.

Si E est un espace tonnelé, E' son dual fort (c'est-à-dire muni de la topologie $\beta(E', E)$), il y a donc identité dans E' entre les notions de parties faiblement bornées, fortement bornées, faiblement relativement compactes et équicontinues ; tout ensemble borné dans E' est contenu dans le polaire d'un voisinage de o dans E, et a donc pour ensemble polaire dans E un voisinage de o.

On sait que E peut être considéré comme plongé (algébriquement) dans son bidual E'' (dual fort du dual fort E' de E) ; en outre, lorsque E est tonnelé, la topologie de E est identique à la topologie induite sur E par la topologie $\beta(E'', E')$ de E'' ; de façon plus précise, les adhérences faibles dans E'' (pour $\sigma(E'', E')$) des voisinages de o dans E forment un système fondamental de voisinages de o dans E'' pour la topologie forte $\beta(E'', E')$.

Proposition 3. — *Le dual fort d'un espace réflexif est tonnelé. Pour qu'un espace localement convexe séparé* E *soit complètement réflexif, il faut et il suffit que* E *soit réflexif et tonnelé.*

La première partie de la proposition résulte aussitôt de la proposition 2 et de la caractérisation des espaces réflexifs ([2], p. 79). Il est clair d'après les remarques ci-dessus que si E est réflexif et tonnelé, il est complètement réflexif. Inversement s'il est complètement réflexif, il en est de même de son dual fort E', et comme $E = E''$, E est tonnelé.

3. Propriétés des tonneaux dans les espaces localement convexes quelconques. — Étant donné un ensemble convexe cerclé A dans un espace vectoriel E, on dit que A absorbe une partie B de E s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset A$. Les ensembles convexes et cerclés engendrant E sont les ensembles qui absorbent toutes les parties finies de E. Dans un espace localement convexe E, les ensembles bornés sont par définition ceux qui sont absorbés par tout voisinage convexe et cerclé de o.

Théorème 2. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé,* A *un* *ensemble convexe, cerclé, borné et complet dans* E. *Alors* A *est absorbé par tout tonneau dans* E.

En considérant le sous-espace vectoriel V de E engendré par A, on peut se ramener au cas où A engendre E, autrement dit est lui-même un *tonneau complet et borné*. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* A *un tonneau complet et borné dans un espace localement convexe séparé* E, *et soit* E_0 *l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant* E *de la topologie dans laquelle les ensembles* $\lambda A (\lambda > 0)$ *forment un système fondamental de voisinages de* o ; *alors* E_0 *est un espace de Banach.*

Soit p la semi-norme sur E telle que A soit l'ensemble des x tels que $p(x) \leqslant 1$; pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe un voisinage U de o ne contenant pas x, et un $\alpha > 0$ tel que $\alpha A \subset U$, puisque A est borné ; on a donc $p(x) \neq 0$, ce qui prouve que p est une *norme* sur E. La topologie de E_0, définie par la norme p, est *plus fine* que celle de E, puisque A est borné dans E. Montrons que E_0 est complet : une suite de Cauchy (x_n) dans E_0 est bornée, donc il existe $\lambda > 0$ tel que tous les x_n appartiennent à λA ; la topologie de E étant moins fine que celle de E_0, (x_n) est une suite de Cauchy *dans* E, et comme λA est par hypothèse un sous-espace complet de E, la suite (x_n) a une limite y *dans* E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ entraîne $x_n \in x_{n_0} + \varepsilon A$; comme cet ensemble est fermé dans E, il contient y, d'où $p(x_n - y) \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$, ce qui montre que y est limite de (x_n) *dans* E_0.

Ce lemme étant démontré, soit T un tonneau dans E ; comme T est fermé dans E, il est aussi fermé dans E_0, donc est un tonneau dans E_0. Mais l'espace de Banach E_0 est tonnelé, donc T est un voisinage de o dans E_0 ; or, par définition de la topologie de E_0, cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset T$, ce qui démontre le théorème.

Le résultat s'applique en particulier lorsque A est *faiblement compact* dans E (pour $\sigma(E, E')$, E' étant le dual de E), puisque tout tonneau dans E est aussi un tonneau pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et que A est complet pour cette topologie ; on retrouve ainsi un résultat de Mackey qui, appliqué à E', démontre que dans E tout ensemble faiblement borné est borné pour toute topologie localement convexe pour laquelle E' est le dual de E ([5], p. 198, th. VII-4).

Proposition 4. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés, et soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties de* E *qui sont convexes, cerclées, bornées et* complètes. *Toute partie* H *de* $\mathfrak{L}(E, F)$ *bornée pour la topologie de la convergence simple, est bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$.

Cela résulte aussitôt de la proposition 1 et du théorème 2, puisque tout ensemble de $\mathfrak{S}$ est absorbé par un tonneau quelconque de E.

Lorsque E est un espace *complet*, l'adhérence de tout ensemble borné dans E est un ensemble complet et borné dans E, donc le théorème 2 montre que *tout tonneau dans* E *absorbe tous les ensembles bornés*. Dans l'énoncé de la proposition 4, on peut alors remplacer $\mathfrak{S}$ par l'ensemble de *toutes* les parties bornées de E. On retrouve ainsi en particulier le résultat suivant de Mackey ([5], p. 193, th. VI-4 et [6], p. 532, th. 13):

Corollaire. — *Si* E *est un espace localement convexe séparé et complet, tout ensemble faiblement borné dans le dual* E′ *de* E *est aussi fortement borné.*

4. **Espaces bornologiques.** — Étant donné un espace localement convexe E, nous dirons qu'une partie A de E est un ensemble *bornivore* s'il est *convexe, cerclé,* et *absorbe tout ensemble borné* dans E. Tout ensemble bornivore engendre E. Tout voisinage convexe et cerclé de 0 est bornivore. Nous dirons qu'un espace localement convexe séparé E est *bornologique* si inversement, *tout ensemble bornivore dans* E *est un voisinage de* 0. Il revient au même de dire que toute semi-norme sur E, bornée dans toute partie bornée de E, est continue.

Proposition 5. — *Pour qu'un espace localement convexe séparé* E *soit bornologique, il faut et il suffit que sa topologie soit identique à* $\tau(E, E')$ *et que toute forme linéaire sur* E *bornée dans tout ensemble borné de* E *soit continue.*

La nécessité de la seconde condition est immédiate, car si u est une forme linéaire sur E bornée dans toute partie bornée de E, l'image réciproque par u d'un voisinage de 0 dans C est bornivore, donc un voisinage de 0 dans E. Pour voir que la topologie de E est identique à $\tau(E, E')$, considérons dans E′ un ensemble convexe et faiblement compact K; il suffit de prouver que K^0 est un voisinage de 0, c'est-à-dire ici que K^0 est bornivore. Or, si B est un ensemble borné quelconque dans E, B est borné pour $\sigma(E, E')$, donc B^0 est un tonneau pour la topologie faible $\sigma(E', E)$ (cor. de la prop. 1); il existe donc, en vertu du théorème 2, un $\lambda > 0$ tel que $\lambda K \subset B^0$, ce qui équivaut à $\lambda B \subset K^0$ et démontre que K^0 est bornivore.

Pour voir que les conditions sont suffisantes, considérons sur E la topologie $\mathcal{T}$ pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles bornivores. Cette topologie est plus fine que la topologie donnée sur E, qui est par hypothèse $\tau(E, E')$; tout revient donc à prouver que $\mathcal{T}$ est moins fine que $\tau(E, E')$, c'est-à-dire que toute forme linéaire sur E continue pour $\mathcal{T}$ appartient à E'. Or, si u est une telle forme et V un voisinage borné de 0 dans C, $u^{-1}(V)$ est un ensemble bornivore (pour $\tau(E, E')$), donc u est bornée dans toute partie bornée de E, ce qui prouve, en vertu de l'hypothèse, que u est continue pour $\tau(E, E')$.

Les espaces bornologiques sont donc identiques aux espaces que Mackey nomme « relatively strong with a boundedly closed linear system » ([6], p. 527). Tout espace *métrisable* est bornologique ([6], p. 527, th. 10).

On montre sans peine que tout *espace quotient* (séparé) d'un espace bornologique est bornologique; tout *produit* d'une infinité *dénombrable* d'espaces bornologiques est bornologique; l'extension de ce résultat à un produit quelconque entraînerait la solution positive d'un problème d'Ulam sur la théorie des mesures abstraites ([5], p. 180-181, th. IV-12). Toute *limite inductive* (séparée) d'espaces bornologiques est bornologique; en particulier, tout *espace* $(\mathcal{LF})$ est bornologique. Un exemple de Grothendieck (annoncé dans [4]) montre qu'un sous-espace fermé d'un espace bornologique n'est pas nécessairement bornologique.

Tout espace bornologique *complet* est tonnelé puisque tout tonneau est alors bornivore (th. 2). On connaît d'ailleurs des exemples d'espaces normés (donc bornologiques) non tonnelés. Jusqu'ici on ne connaît pas d'exemple d'espace tonnelé non bornologique.

La propriété fondamentale des espaces bornologiques est le résultat suivant, dû à Mackey ([6], p. 527, th. 8):

Théorème 3. — *Pour qu'un espace localement convexe séparé* E *soit bornologique, il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante: toute application linéaire u de* E *dans un espace localement convexe* (*quelconque*) F, *qui transforme tout ensemble borné en un ensemble borné, est continue.*

Corollaire. — *Soit* E *un espace bornologique,* F *un espace loca-*

lement convexe séparé et complet. L'espace $\mathfrak{L}(E, F)$, *muni de la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de* E, *est complet.*

En effet, on vérifie aisément qu'une application linéaire u de E dans F, dont la restriction à toute partie bornée de E est continue, transforme tout ensemble borné en ensemble borné.

En particulier, le *dual fort* d'un espace bornologique est complet.

PROPOSITION 6. — *Soient* E *un espace bornologique*, F *un espace localement convexe séparé. Toute partie* H *de* $\mathfrak{L}(E, F)$ *qui est bornée pour la topologie* $\mathcal{T}_b$ *de la convergence uniforme dans les parties bornées de* E, *est équicontinue.*

En effet, l'hypothèse entraîne que pour tout voisinage V de 0 dans F, convexe, cerclé et fermé, l'intersection des ensembles $u^{-1}(V)$, où u parcourt H, est un tonneau bornivore (cf. prop. 1), donc un voisinage de 0 dans E.

En particulier, dans le dual fort E′ d'un espace bornologique, toute partie fortement bornée est équicontinue (et a fortiori faiblement relativement compacte). On en conclut que les adhérences faibles dans E″ (pour $\sigma(E'', E')$) des voisinages de 0 dans E forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E″ pour la topologie forte $\beta(E'', E')$.

5. **Continuité forte et continuité faible.**

PROPOSITION 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés tels que la topologie de* E *soit identique à* $\tau(E, E')$. *Alors toute application linéaire u faiblement continue de* E *dans* F *est continue* (pour les topologies données sur E et F).

En effet, u est continue pour les topologies $\tau(E, E')$ et $\tau(F, F')$ ([2], p. 91, th. 19), et la topologie donnée sur F est moins fine que $\tau(F, F')$.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé dont la topologie est identique à* $\tau(E, E')$; *tout homomorphisme faible u de* E *dans un espace localement convexe métrisable* F *est un homomorphisme* (pour les topologies données sur E et F).

En effet, u est alors continue pour les topologies données sur E et F (cf. [2], p. 92, remarque suivant la prop. 21).

La prop. 7 et son corollaire s'appliquent en particulier aux espaces tonnelés et aux espaces bornologiques, en vertu des propositions 2 et 5

6. **Parties équicontinues de $\mathfrak{L}(F' E')$.** — Soient E et F deux espaces localement convexes séparés. Dire qu'une partie H de $\mathfrak{L}(E, F)$ est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple signifie que pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x)$ des $u(x)$, où u parcourt H, est *borné* dans F ; il revient au même de dire que pour tout $x \in E$ et tout $y' \in F'$, l'ensemble des nombres $\langle u(x), y' \rangle$ est borné. En désignant par ${}^t u$ la transposée de u, cela s'exprime encore en disant que l'ensemble des nombres $\langle x, {}^t u(y) \rangle$ est borné ; nous dirons alors que l'ensemble ${}^t H$ des transposées des applications $u \in H$ est *faiblement borné* dans $\mathfrak{L}(F', E')$; cela signifie aussi que pour tout $y' \in F'$, l'ensemble des ${}^t u(y')$ est faiblement borné dans E'.

Proposition 8. — *Soient* E *un espace complet ou tonnelé,* F *un espace localement convexe séparé quelconque. Soit* M *une partie de* $\mathfrak{L}(F', E')$ *formée d'applications faiblement continues de* F' *dans* E'. *Si* M *est faiblement bornée,* M *est fortement équicontinue* (c'est-à-dire équicontinue pour les topologies fortes sur E' et F'),

En effet, M est l'ensemble ${}^t H$ des transposées d'un ensemble H d'applications linéaires continues de E dans F, et H est borné pour la topologie de la convergence simple dans E. Mais les hypothèses entraînent que H est borné pour la topologie $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme dans les parties bornées de E (th. 1 et prop. 4). Par suite M est fortement équicontinu ([2], p. 93, prop. 23).

7. **Fonctions bilinéaires hypocontinues.** — Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes. Pour toute application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F et tout $x \in E_1$ (resp. $y \in E_2$), nous désignerons par u_x (resp. u_y) l'application linéaire $y \to u(x, y)$ (resp. $x \to u(x, y)$) de E_2 (resp. E_1) dans F.

Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un recouvrement de E_1 (resp. E_2) formé de parties *bornées* ; nous dirons que u est *hypocontinue* relativement aux ensembles $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ (ou encore $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ — hypocontinue) si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1° pour tout ensemble $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'ensemble des applications linéaires u_x, où x parcourt B_1, est équicontinu ;

2° pour tout ensemble $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, l'ensemble des applications linéaires u_y, où y parcourt B_2, est équicontinu.

Ces conditions sont respectivement équivalentes aux deux suivantes :

3° Lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E_1, F)$ de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_1$, l'application linéaire $y \to u_y$ de E_2 dans $\mathcal{L}(E_1, F)$ est continue ;

4° lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E_2, F)$ de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_2$, l'application linéaire $x \to u_x$ de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2, F)$ est continue.

Proposition 9. — *Soit u une application bilinéaire hypocontinue de $E_1 \times E_2$ dans F, relativement aux ensembles de parties $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Quels que soient $B_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, u est continue dans $B_1 \times E_2$ et dans $E_1 \times B_2$, et uniformément continue dans $B_1 \times B_2$.*

En effet, soit $x_0 \in B_1$, $y_0 \in E_2$. On peut écrire

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = u_{y_0}(x - x_0) + u_x(y - y_0).$$

Or u_{y_0} est continue dans E_1 et d'autre part l'ensemble des u_x est équicontinu lorsque x parcourt B_1 ; donc pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E_2 tel que les relations $x \in B_1$, $y - y_0 \in V$ entraînent $u_x(y - y_0) \in W$. On montre de même que u est uniformément continue dans $B_1 \times B_2$ en remarquant qu'alors les u_{y_0} forment un ensemble équicontinu lorsque y_0 parcourt B_2.

On sait qu'en général une application bilinéaire hypocontinue n'est pas continue (cf. [2], p. 97); toutefois, il existe pour ces fonctions un théorème de prolongement analogue au théorème classique de prolongement des fonctions bilinéaires continues :

Théorème 4. — *Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes séparés, et supposons F complet. Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels partout denses de E_1, E_2 respectivement. Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un recouvrement de G_1 (resp. G_2) formé de parties bornées, dont les adhérences forment un recouvrement $\mathfrak{S}'_1$ (resp. $\mathfrak{S}'_2$) de E_1 (resp. E_2). Soit u une application bilinéaire de $G_1 \times G_2$ dans F, hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$; cette application se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}'_1$ et $\mathfrak{S}'_2$.*

En effet, soit $B_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $B_2 \in \mathfrak{S}_2$; comme u est uniformément continue dans $B_1 \times B_2$, elle se prolonge d'une seule manière en une fonction uniformément continue dans $\bar{B}_1 \times \bar{B}_2$; d'ailleurs si $B_1 \subset C_1$

et $B_2 \subset C_2$, où $C_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $C_2 \in \mathfrak{S}_2$, il est clair que le prolongement de u à $\overline{B}_1 \times \overline{B}_2$ est la restriction du prolongement de u à $\overline{C}_1 \times \overline{C}_2$; on définit donc ainsi un prolongement $\bar{u}$ de u à $E_1 \times E_2$ tout entier, puisque $\mathfrak{S}'_1$ et $\mathfrak{S}'_2$ sont des recouvrements, et il est immédiat que $\bar{u}$ est bilinéaire. Reste à voir que $\bar{u}$ est $(\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2)$ — hypocontinue. Soit $B_1 \in \mathfrak{S}_1$; par hypothèse pour tout voisinage fermé W de o dans F, il existe un voisinage V_2 de o dans G_2, fermé dans G_2 et tel que pour $x \in B_1$ et $y \in V_2$ on ait $u(x, y) \in W$. L'adhérence $\overline{V}_2$ de V_2 dans E_2 est un voisinage de o dans E_2 ; soit U_2 un voisinage de o dans E_2 tel que $U_2 + U_2 \subset \overline{V}_2$ et soit $a \in \overline{B}_1$, $b \in U_2$. Par hypothèse, b est adhérent à un ensemble $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, donc aussi à $B_2 \cap (U_2 + b)$; mais cet ensemble est contenu dans $G_2 \cap (U_2 + U_2)$, donc dans V_2 ; comme $\bar{u}(a, b)$ est adhérent à l'ensemble des $u(x, y)$, où $x \in B_1$ et $y \in B_2 \cap (U_2 + b)$, on a bien $\bar{u}(a, b) \in W$, ce qui démontre le théorème.

Bien entendu, le fait que pour tout $x \in E_1$ et pour tout $y \in E_2$, les applications linéaires u_x et u_y soient continues, signifie que u est hypocontinue relativement aux ensembles de parties *finies* de E_1 et E_2 mais non en général retativement aux ensembles de parties bornées de E_1 et E_2. Toutefois :

PROPOSITION 10. — *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces tonnelés, u une application bilinéaire de* $E_1 \times E_2$ *dans* F, *telle que pour tout* $x \in E_1$ *et tout* $y \in E_2$, *les applications linéaires* u_x *et* u_y *soient continues. Alors u est hypocontinue relativement aux ensembles de parties bornées de* E_1 *et* E_2.

En effet, si B_1 est borné dans E_1, l'ensemble des u_x, lorsque x parcourt B_1, est borné dans $\mathfrak{L}(E_2, F)$ pour la topologie de la convergence simple, puisque $u_y(B_1)$ est borné dans F pour tout $y \in E_2$. Il en résulte que l'ensemble des u_x (pour $x \in B_1$) est équicontinu (th. 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. x (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 1084).

[2] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathfrak{L}\mathcal{F})$ (*Ann. Inst. Fourier*, 1 (1949), p. 61-101).

[3] A. GROTHENDIECK, Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe (*C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), p. 605-606).

[4] A. Grothendieck, Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces $(\mathfrak{LF})$ (*C. R. Acad. Sci. Paris*, 231 (1950), p. 940-942).
[5] G. W. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces (*Trans Amer. Math. Soc.*, 57 (1945), p. 155-207).
[6] G. W. Mackey, On convex topological linear spaces (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 60 (1946), p. 520-537).

(Parvenu aux Annales en février 1951.)