ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDELGHANI ZEGHIB

Sur les actions affines des groupes discrets

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 2 (1997), p. 641-685

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_641_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 2 (1997), 641–685

SUR LES ACTIONS AFFINES DES GROUPES DISCRETS

par Abdelghani ZEGHIB

1. INTRODUCTION

Les objets affines sont omniprésents dans les systèmes dynamiques. Les exemples fondamentaux et typiques de cette théorie sont en fait souvent affines, pourtant, il y a peu d'études systématiques sur la dynamique des transformations affines; moins que celles sur les feuilletages transversalement affines, par exemple. Le présent article constitue un essai sur la dynamique affine : quelques affirmations et quelques interrogations. Concrètement, il apporte une amélioration au résultat suivant sur les actions affines des réseaux de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Ce résultat consiste en deux parties, dues respectivement à R. Zimmer, puis à E. Goetze.

THÉORÈME 1.1. — *Soit* Γ *un réseau de* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$, *agissant sur une variété compacte* M *en préservant une connexion et une forme volume.*

(i) [Zim2] *Si* $\dim M < n$, Γ *préserve une métrique riemannienne. En fait l'action est finie.*

(ii) [Goe] *Si* $\dim M = n$ *et si l'action est ergodique,* M *est un tore affine euclidien.*

1.1. Un théorème de rigidité.

La preuve du théorème précédent utilise (dans ses deux parties) essentiellement le théorème de super-rigidité des cocycles de Zimmer (d'où l'apparition de la condition $n > 2$). Ici, un argument géométrique supplémentaire nous permet de généraliser ce théorème, en supposant que $\dim M \leq n+1$, et sans hypothèse d'ergodicité.

Mots-clés : Réseau – Connexion – Affine – Parallèle.
Classification math. : 57S20 – 53C05 – 58F99.

THÉORÈME 1.2. — *Soit* Γ *un réseau de* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ *où* $n \geq 3$, *agissant sur une variété compacte* M, *avec* $\dim M \leq n+1$, *en préservant une connexion et une forme volume. Supposons que l'action ne préserve pas de métrique riemannienne. Alors deux possibilités se présentent :*

(i) $\dim M = n$: *à revêtement fini près,* M *est un tore affine euclidien et, à indice fini près,* $\Gamma = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *agissant de la façon usuelle.*

(ii) $\dim M = n+1$: *à indice fini près,* $\Gamma = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *et, à revêtement fini près,* M *est difféomorphe à un produit* $\mathbb{T}^n \times S^1$. *L'action de* Γ *sur* $\mathbb{T}^n \times S^1$ *est conjuguée au produit de l'action usuelle de* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{T}^n$ *par l'action triviale sur* S^1. *La connexion initiale est somme de la connexion plate canonique (i.e. la connexion plate euclidienne sur* $\mathbb{T}^n \times S^1$*) et d'un 2-tenseur image réciproque d'un tenseur analogue sur* S^1.

Remarque 1.3. — Dans le présent article, le terme connexion affine ne signifie pas que cette connexion est plate. Dans les énoncés qui suivent, on ne suppose pas non plus que la connexion est sans torsion. Remarquons toutefois qu'en considérant la différence entre une connexion et son tenseur torsion, on aura affaire à une connexion sans torsion. Il est ensuite facile de démontrer le théorème 1.2 sachant qu'il est vrai dans la cas sans torsion. On se restreindra donc dans la suite à ce type de connexions (*i.e.* sans torsion).

Exemple 1.4. — Soit $G = \mathrm{Homet}^{n+1}$ le groupe des homothéties-translations de $\mathbb{R}^{n+1}$ (quand $n=0$, G est simplement le groupe affine). Comme tout groupe de Lie, il admet une connexion canonique (sans torsion) bi-invariante, *i.e.* invariante par l'action $(g_1, g_2)g = g_1^{-1} g g_2$ de $G \times G$ sur G, ainsi que par les automorphismes (extérieurs) de G (par naturalité). Soit $\pi = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \subset G \times G$ un groupe discret avec comme premier facteur $\mathbb{Z}^n$ engendré par des translations et comme second $\mathbb{Z}$ engendré par une homothétie. Le quotient de G par π est un tore de dimension $n+1$ muni d'une connexion non plate, invariante par l'action de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, agissant naturellement par automorphisme sur G.

Remarques 1.5.

1) La condition de conservation du volume est indispensable. Sans elle, on peut faire agir naturellement le groupe de Lie $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ lui-même sur une variété de Hopf $\mathbb{R}^n - \{0\}/x \mapsto \lambda x$ (λ étant un réel appartenant à $]0,1[$). L'action de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ respecte la connexion plate sur la variété de Hopf.

2) L'amélioration par rapport à [Zim2] et [Goe] de la condition

sur la dimension n'est certainement pas encore optimale ! Néanmoins une majoration de la dimension est nécessaire, sans quoi on peut faire agir le groupe de Lie $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ lui-même sur ses quotients compacts $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\Gamma$ en respectant une métrique pseudo-riemannienne. En particulier, pour $n = 2$, *i.e.* pour des réseaux de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, le théorème 1.2 est vrai pour des actions affines sur des surfaces (la preuve est directe dans ce cas), mais n'est pas vrai pour des actions sur des variétés de dimension 3. On peut cependant espérer classifier ces dernières actions.

3) Notons enfin que d'après [Zeg3], dans le cas des réseaux non co-compacts de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (par exemple $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$), aucune restriction de dimension n'est imposée, si l'on suppose que la connexion préservée est riemannienne.

1.2. Un théorème de structure géométrique.

L'analogue du théorème précédent dans le cas de connexions riemanniennes, a été démontré dans [Zeg3], avec la condition plus faible : $\dim M < 2n$. Comme dans cet article, c'était une généralisation d'un résultat de [Zim2] et [Fer1], concernant également les actions respectant des connexions riemanniennes. Le passage du riemannien au non riemannien s'avère très délicat (voir aussi [Fer2]). Il n'a été possible ici que grâce au théorème de super-rigidité des cocycles, ainsi qu'à une certaine analyse géométrique de la situation ainsi créée. Cette analyse a permis de montrer que la structure mesurable, donnée par la super-rigidité est en fait complètement régulière. Elle est valable dès que $\dim M < 2n$:

THÉORÈME 1.6. — *Soit M^m une variété compacte munie d'une connexion et d'une forme volume, préservées par une action d'un réseau Γ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, avec $\dim M < 2n$. Alors, il existe un ouvert Ω de M de mesure totale muni d'un couple de feuilletage $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$, invariants par Γ. Les feuilletages $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ sont supplémentaires, de dimension respectivement n et $(\dim M - n)$, et jouissent en plus des propriétés suivantes :*

(i) *Propriétés de $\mathcal{P}$: le feuilletage $\mathcal{P}$ est parallèle et à feuilles plates. Plus précisément, la structure affine des feuilles de $\mathcal{P}$ est modelée sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$, où Homet^n est le groupe des homothéties-translations de $\mathbb{R}^n$.*

Transversalement, $\mathcal{P}$ admet naturellement une structure affine invariante par holonomie et par l'action de Γ, modelée sur le pseudo-groupe des transformations affines locales d'une feuille de $\mathcal{N}$. Plus précisément, les projections locales déterminées par le couple $(\mathcal{P}, \mathcal{N})$, sont des submersions affines (i.e., envoyant géodésique paramétrée sur géodésique paramétrée) *d'ouverts de M sur des ouverts de feuilles de $\mathcal{N}$.*

(ii) *Propriétés de $\mathcal{N}$: le feuilletage $\mathcal{N}$ est lisse et à feuilles géodésiques. De plus il est transversalement modelé sur* $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$ *de façon Γ-invariante. Plus précisément, les applications d'holonomie de $\mathcal{N}$ définies sur des ouverts de feuilles de $\mathcal{P}$ respectent leur* $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$*-structure.*

(iii) *Complétude relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$. Si une géodésique est quelque part tangente à $\mathcal{N}$ ou à $\mathcal{P}$ dans Ω, alors son prolongement maximal est contenu dans Ω. Plus précisément, Ω est invariant par un feuilletage Lipschitz $\mathcal{F}$ de codimension* 1*, à feuilles géodésiques, défini sur M et qui contient $\mathcal{N}$. De plus, toute limite de feuilles locales de $\mathcal{P}$, passant par des points tendant vers $M - \Omega$ est contenue dans une feuille locale de $\mathcal{F}$.*

(iv) *On a $\Omega = M$, lorsque $n = m$ ($= \dim M$).*

(v) *Lorsque $m = n + 1$, $\mathcal{P}$ se prolonge à M, en un feuilletage* (*de codimension* 1) *ayant les mêmes propriétés que sur Ω.*

(vi) *Obstruction à la platitude. Il existe une forme bilinéaire transverse antisymétrique q* (*resp. symétrique p*) *invariante par l'holonomie de $\mathcal{P}$ et par l'action de Γ. Ces deux formes sont des obstructions* (*partielles*) *au fait que $\mathcal{N}$ soit parallèle et que M soit plate.*

(vii) *Propriétés ergodiques. Les composantes ergodiques de Γ sont invariantes par $\mathcal{P}$, i.e. une fonction mesurable Γ-invariante est constante sur les feuilles de $\mathcal{P}$.*

Remarques 1.7.

1) On peut se demander si l'on a toujours $\Omega = M$. On rencontre souvent, dans les systèmes dynamiques géométriques, ce type de résultat où l'on démontre l'existence de structure géométrique sur un ouvert. Notre résultat ici est plus précis, dû aux propriétés de « complétude relative », très intéressantes, de Ω.

2) La difficulté dans l'énoncé ci-dessus réside dans le fait que $\mathcal{N}$ n'est pas nécessairement parallèle comme le montre l'exemple précédent. Cette situation n'arrive pas dans le cas de connexions riemanniennes ou plus généralement dans le cas de connexions à groupe d'holonomie reductif.

3) On peut se demander si la structure affine des feuilles de $\mathcal{P}$ ou la structure transverse de $\mathcal{N}$ ne sont pas en fait modelées sur $(\mathrm{Translations}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$. Ceci paraît vraisemblable. On verra plus loin (10.2) que c'est lié à un problème de régularité de certaines données engendrées

par la super-rigidité. On peut en fait même espérer que $\mathcal{P}$ soit paramétré par une action affine de $\mathbb{R}^n$.

4) Soit d_n la plus petite dimension d'une représentation irréductible non équivalente (modulo automorphisme) à la représentation canonique de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Toute représentation de dimension $< d_n$ est donc somme de copies de la représentation canonique. La méthode utilisée dans la preuve du théorème 1.6, se «généralise» aux actions affines des réseaux de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ agissant affinement sur des variétés compactes de dimension $< d_n$. Cependant la structure géométrique obtenue dans ce cas est plus faible et moins précise que celle du cas dimension $< 2n$. La même «généralisation» est valable pour les actions des réseaux de groupes de Lie semi-simples de rang supérieur. On exige cette fois que la dimension de la variété soit inférieure au double de la dimension de la représentation minimale non triviale du groupe de Lie.

Ingrédient principal de la preuve. — Le fait fondamental utilisé ici, permettant le passage du mesurable au régulier, est la régularité Lipschitz automatique des feuilletages (au sens le plus faible possible) géodésiques (au sens d'une connexion) de codimension 1 (voir 3.5).

Le théorème de super-rigidité des cocycles assure que beaucoup d'éléments de Γ ont un «fibré» stable faible de codimension 1. Ces fibrés sont *a priori* seulement mesurables. On montre alors qu'ils sont intégrables et déterminent des feuilletages géodésiques, qui sont donc Lipschitz. De plus, ces éléments admettent des fibrés stables et super-stables, qui sont parallèles le long de leurs feuilletages stables faibles. En considérant des intersections de feuilletages stables faibles associés à divers éléments de Γ, on montre que leurs feuilletages stables et super-stables sont parallèles le long de suffisamment de directions, engendrant tout l'espace tangent. On obtient ainsi des fibrés parallèles sur M...

1.3. Un théorème de complétude.

Le théorème 1.6 sera certainement une étape importante vers la preuve du théorème 1.2. Cependant, contrairement à ce qu'on pourrait penser, le théorème 1.2 ne sera pas (sauf lorsque $m = n$) une conséquence directe du théorème précédent. Ce dernier ne permet pas de comprendre la structure «algébrique» globale de la variété considérée. En effet, le théorème 1.2 n'est à notre avis nullement évident, même avec l'hypothèse (*a priori*) que M est plate! Le résultat suivant contibuera à traiter cette situation. Il décrit un cas de complétude des variétés affines plates. Sa preuve est une adaptation de la méthode d'Y. Carrière dans sa preuve du fameux théorème de complétude des variétés lorentziennes plates compactes [Car].

THÉORÈME 1.8. — *Soit M^{n+p} une variété affine plate unimodulaire dont le groupe d'holonomie est contenu dans*

$$\big(\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^p)\big) \cap \mathrm{SAffin}(n+p, \mathbb{R})$$

où $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^k)$ *(resp.* $\mathrm{SAffin}(k, \mathbb{R})$*) dénote le groupe des similitudes (resp. le groupe des transformations affines préservant le volume) de* $\mathbb{R}^k$. *Alors M est complète. Plus précisément, à revêtement fini près, M est un tore affine euclidien.*

Il s'agit donc d'un cas de complétude des variétés affines plates unimodulaires, qui sont conjecturellement toutes complètes d'après L. Markus.

2. DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES AFFINES

Le théorème de super-rigidité des cocycles décrit des propriétés dynamiques mesurables des actions des réseaux de rang supérieur. Pour donner une idée plus claire sur les propriétés dynamiques utiles dans la suite, on a préféré commencer par les considérer dans un cadre topologique, ce qui aura (probablement) un intérêt en soi-même.

DÉFINITION 2.1. — *Soit M un variété compacte. Pour les notions suivantes on munira TM d'une norme auxiliaire continue $\| \,.\, \|$, dont le choix n'aura aucune importance. Soient $f : M \to M$ un difféomorphisme et $u \in T_xM$. On dira que :*

(i) *u est faiblement stable (par f) si $\{D_x f^i u, i \geq 0\}$ est borné;*

(ii) *u est stable si $D_x f^i u \to 0$ quand i tend vers $+\infty$;*

(iii) *u est super-stable si pour tout $v \in T_xM - \{0\}$, $\dfrac{\|D_x f^i u\|}{\|D_x f^i v\|}$ est borné quand i tend vers $+\infty$;*

(iv) *u est central si $\{D_x f^i u, i \in \mathbb{Z}\}$ est borné.*

Les espaces ainsi définis seront notés respectivement :

- $E^{s0}(x)$ *(faiblement stable),*
- $E^s(x)$ *(stable),*

- $E^{ss}(x)$ (*super-stable*) *et*
- $E^0(x)$ (*central*).

On a les inclusions suivantes :

$$E^{ss}(x) \subset E^s(x) \subset E^{s0}(x) \quad et \quad E^0(x) \subset E^{s0}(x).$$

On définit de façon duale les objets instables pour f, comme étant les objets stables pour f^{-1}. Les espaces ainsi définis seront notés :

- $E^{u0}(x)$ (*faiblement instable*),
- $E^u(x)$ (*instable*) *et*
- $E^{su}(x)$ (*super-instable*).

On a des inclusions analogues au cas stable et de plus :

$$E^0(x) = E^{s0}(x) \cap E^{u0}(x).$$

Lorsque plusieurs difféomorphismes sont en jeu, ces espaces seront notés $E^{s0}(x, f)$, etc.

2.1. Transformations affines.

Nous allons maintenant étudier ces notions dans le cas de difféomorphismes affines. Désormais (M, ∇) sera une variété compacte munie d'une connexion linéaire ∇ sans torsion.

L'application exponentielle exp est définie dans un ouvert $\mathcal{D}ef \subset TM$ (son domaine de définition) à valeurs dans M. Pour $x \in M$, on notera $\exp_x$ et $\mathcal{D}ef_x$ les objets correspondants relatifs à T_xM. Par définition, $u \in \mathcal{D}ef_x$ si et seulement si $\exp_x tu$ existe pour $t \in [0, 1]$. Aussi, par définition M est complète exactement lorsque $\mathcal{D}ef = TM$.

Rappelons qu'une sous-variété $V \subset M$ est géodésique si pour tout $x \in V$, l'image d'un voisinage de 0 dans T_xV par $\exp_x$ est contenue dans V.

On fera également usage de l'ouvert $\mathcal{D}ef^*$ de $\mathcal{D}ef$ défini par : $u \in \mathcal{D}ef^*_x$, si et seulement u est un point régulier de $\exp_x$ (en particulier $u \in \mathcal{D}ef_x$).

Ainsi lorsque E est un sous-espace de T_xM, $\exp_x E \cap \mathcal{D}ef^*$ est une sous-variété immergée tangente à E en x. En général, cette sous-variété n'est pas géodésique (en dehors de x).

Un autre intérêt de $\mathcal{D}ef^*$ réside dans le fait standard suivant.

AFFIRMATION 2.2. — *Soit K un compact de $\mathcal{D}ef^*$. Alors les dérivées $D_u \exp_x$ et $(D_u \exp_x)^{-1}$, lorsque $x \in M$ et $u \in T_xM \cap K$, sont uniformément bornées par une constante qui ne dépend que de K (et de la géométrie de la connexion).*

Rappelons aussi qu'un champ de plans sur une variété munie d'une connexion est parallèle s'il est invariant par transport parallèle (le long de tout chemin). Un tel champ est en particulier intégrable, car la connexion est sans torsion. Il est de plus à feuilles géodésiques. En fait, on peut de la même façon définir des champs de plans parallèles le long d'une sous-variété. Il se trouve qu'une sous-variété est géodésique si et seulement si son plan tangent est parallèle (car la connexion est sans torsion). En particulier, une telle sous-variété admet une connexion induite.

2.1.1. Complète stabilité.

Par définition, si $u \in E^{s0}(x,f)$, alors $\{D_x f^i u,\ i \geq 0\}$ est contenu dans un compact de TM. Évidemment, par l'invariance de $\mathcal{D}ef$ par le groupe des transformations affines de M, si $u \in E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}ef_x$ alors $\{D_x f^i u,\ i \geq 0\} \subset \mathcal{D}ef$. On aura besoin de la condition plus forte suivante.

DÉFINITION 2.3.

- *On dira que $u \in TM$ est complètement faiblement stable si la fermeture $\overline{\{D_x f^i u,\ i \geq 0\}}$ est compacte et est contenue dans $\mathcal{D}ef$.*

- *On notera $CE^{s0}(x,f)$ l'ensemble des vecteurs de T_xM complètement faiblement stables.*

- *On définit de la même façon $C^*E^{s0}(x,f)$ comme l'ensemble des vecteurs u tels que $\overline{\{D_x f^i u,\ i \geq 0\}}$ soit un compact de $\mathcal{D}ef^*$.*

Notons que $CE^{s0}(x,f)$ est contenu dans $E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}ef$ (resp. $C^*E^{s0}(x,f)$ est contenu dans $E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}^*ef$). On montrera plus loin qu'on a en fait, génériquement, égalité.

Cette notion n'a pas d'intérêt pour l'espace stable. On peut en effet directement démontrer :

AFFIRMATION 2.4. — *On a l'inclusion $E^s(x,f) \subset C^*E^{s0}(x,f)$ (en particulier, tout vecteur stable appartient à $\mathcal{D}ef$, i.e. il détermine une géodésique complète). Plus précisément $C^*E^{s0}(x,f)$ est invariant par $E^s(x,f)$, i.e. si $u \in C^*E^{s0}(x,f)$ alors $u + E^s(x,f) \subset C^*E^{s0}(x,f)$.*

Notons la propriété d'uniformité suivante, qui découle du fait que la suite des restrictions $\left(D_x f^i{}_{|E^{s0}(x,f)}\right)$ est (uniformément) bornée.

AFFIRMATION 2.5. — *Si A est un compact de $CE^{s0}(x,f)$ (resp. $C^*E^{s0}(x,f)$), alors $\overline{\{D_x f^i u,\, u \in A,\, i \geq 0\}}$ est un compact de $\mathcal{D}ef$ (resp. $C^*E^{s0}(x,f)$).*

2.2. Un théorème d'intégrabilité.

Le théorème fondamental suivant repose sur la «linéarisabilité» des applications affines.

THÉORÈME 2.6. — *Soit $f : (M,\nabla) \to (M,\nabla)$ un difféomorphisme affine. On a les propriétés suivantes :*

(i) «*Intégrabilité*» : *pour $x \in M$, $\mathcal{E}^{s0}(x,f) = \exp_x C^*E^{s0}(x,f)$ est une sous-variété totalement géodésique (pas seulement en x) injectivement immergée dans M. On l'appellera la variété stable faible de x.*

(ii) «*Feuilletage*» : *pour $x, y \in M$,*

$$y \in \mathcal{E}^{s0}(x,f) \implies T_y\mathcal{E}^{s0}(x,f) = E^{s0}(y,f),$$

et ainsi $\mathcal{E}^{s0}(x,f)$ et $\mathcal{E}^{s0}(y,f)$ coïncident sur un ouvert de chacune d'elles.

(iii) «*Parallélisme partiel*» : *les restrictions à $\mathcal{E}^{s0}(x,f)$ des fibrés stables et super-stables sont parallèles (le long de $\mathcal{E}^{s0}(x,f)$).*

Le même énoncé est vrai en considérant $\mathcal{E}^s(x,f) = \exp_x E^s(x,f)$. La variété stable ainsi obtenue est cette fois complète.

Enfin, les mêmes énoncés sont vrais en remplaçant partout stable par instable.

Preuve. — On fera recours à une norme auxiliaire $\|\,.\,\|$ qu'on supposera ici euclidienne pour pouvoir identifier isométriquement tous les espaces tangents de M à un même espace euclidien, ce qui nous permettra de parler d'applications bornées entre ces espaces.

La preuve du théorème repose essentiellement sur deux propriétés liées respectivement au transport parallèle et la linéarisabilité des transformations affines.

Compatibilité avec le transport parallèle. — La preuve du fait suivant est standard.

LEMME 2.7. — *Soit $\{x_i\}$ une suite de M et pour tout i, $d_i : [0,1] \to \mathcal{D}ef_{x_i} \subset T_{x_i}M$ une courbe C^1. Notons $c_i = \exp_{x_i} d_i : [0,1] \to M$ la courbe ainsi obtenue dans M et $\tau_i : T_{x_i}M \to T_{d_i(1)}M$ le transport parallèle le long de c_i. Supposons que la suite des courbes (d_i) soit bornée dans la topologie C^1 (i.e. il existe une constante c telle que $\|d_i(t)\| < c$ et $\|d_i'(t)\| < c$ pour tout t et i). Supposons que l'ensemble $\{d_i(t),\ t \in [0,1],\ i \geq 0\}$ soit contenu dans un compact de $\mathcal{D}ef$. Alors la suite des transports parallèles τ_i est (uniformément) bornée, par une constante, fonction du compact de $\mathcal{D}ef$ en question, et de la norme C^1 de la suite (d_i).*

De ce lemme et de l'affirmation 2.5 on tire le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.8. — *Soient $d : [0,1] \to CE^{s0}(x,f)$ une courbe C^1 et $c = \exp_x d : [0,1] \to M$. Notons $x_i = f^i c(0)$, $y_i = f^i c(1)$ et $\tau_{f^i c} : T_{x_i}M \to T_{y_i}M$ le transport parallèle le long de $f^i c$ ainsi défini. Alors, la suite d'applications linéaires $(\tau_{f^i c})$ est bornée.*

Comme f est affine, on a la commutation :

$$D_{y_i} f^i = \tau_{f^i c} D_{x_i} f^i \tau_c^{-1}.$$

On en déduit :

AFFIRMATION 2.9. — *Si d est une courbe C^1 dans $CE^{s0}(x,f)$, et $c = \exp_x d$, alors τ_c envoie $E^{s0}(x,f)$ dans $E^{s0}(y,f)$ où $y = c(1)$. Le même fait est vrai pour les espaces stables et super-stables.*

Linéarisabilité. — Fixons x et notons $N = \exp_x C^*E^{s0}(x,f)$. Soit A un ouvert relativement compact de $C^*E^{s0}(x,f)$ et

$$K = \overline{\{D_x f^i u,\ u \in A, i \geq 0\}}.$$

Il est compact dans $\mathcal{D}ef^*$, d'après l'affirmation 2.5. Notons

$$U = \exp_x A.$$

On a la semi-linéarisation suivante dans M : $f^i \exp_x = \exp_{f^i x} D_x f^i$. Modulo l'injectivité de $\exp_x$ restreinte à A, cette relation montre que les applications $f^i : U \to f^i U$ sont conjuguées *via* les exponentielles correspondantes, aux applications linéaires

$$D_x f^i : A \subset E^{s0}(x,f) \longrightarrow D_x f^i(A) \subset E^{s0}(f^i x, f).$$

Observons maintenant que même sans injectivité, la relation de commutation précédente permet de voir que les dérivées des applications $f^i : U \to f^i U$ sont uniformément bornées. En effet, on est dans un domaine où les dérivées des exponentielles en jeu, ainsi que leurs inverses sont bornées (affirmation 2.2).

Il en résulte que si $y \in N$, alors $T_y N \subset E^{s0}(y, f)$.

Pour y assez proche de x, on peut inverser les rôles de x et y. On considère la variété $N' = C^* E^{s0}(y, f)$; si $y = \exp_x u$ avec $u \in C^* E^{s0}(x, f)$, alors $x = \exp_y -v$, où v est le vecteur tangent en y à la géodésique déterminée par u. Évidemment, $-v \in T_y N$, et donc d'après ce qui précède, $-v \in E^{s0}(y, f)$. Mais pour u assez petit, $-v$ appartient en fait à $C^* E^{s0}(y, f)$.

On en déduit en particulier l'égalité des dimensions de $E^{s0}(x, f)$ et $E^{s0}(y, f)$ et par suite, l'inclusion précédente devient une égalité :

$$E^{s0}(y, f) = T_y N.$$

Soit c une courbe C^1 dans N joignant x et y, notons

$$\tau_c : T_x M \longrightarrow T_y M$$

le transport parallèle qu'elle induit. Par l'affirmation 2.9, sur la compatibilité entre transport parallèle et espaces faiblement stables, et par l'dentification précédente de ces derniers aux espaces tangents à N, il résulte l'égalité :

$$\tau_c(T_x N) = T_y N.$$

Donc le plan tangent à N est parallèle le long d'un voisinage de x dans N. Ce voisinage est donc géodésique.

En appliquant le même résultat à N' ($= \exp_y C^* E^{s0}(y, f)$), on en déduit que N et N' coïncident sur un ouvert commun (parce qu'elles sont tangentes en y). Un raisonnement standard permet alors d'étendre les affirmations précédentes, valables sur un voisinage de x à N toute entière. Il en résulte que N est géodésique et que pour tout $y \in N$, $E^{s0}(y, f) = T_y N$. En particulier, toute self-intersection de N est tangentielle, mais ceci est impossible par géodésibilité de N. Celle-ci est donc injectivement immergée.

On a ainsi démontré le point (i) et en même temps le point (ii) du théorème. Le point (iii) découle immédiatement de la compatibilité du caractère dynamique (stable, super stable...) avec le transport parallèle (affirmation 2.9). □

Les variétés stables faibles des points de M peuvent se définir de la façon (non évidente) suivante. On définit la relation réflexive et symétrique $\sim$, par $x \sim y$, si $\mathcal{E}^{s0}(x, f)$ et $\mathcal{E}^{s0}(y, f)$ sont quelque part tangentes. Les variétés stables faibles sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence engendrée par $\sim$.

Généralement, la variété stable faible de x contient strictement $\mathcal{E}^{s0}(x, f)$ (et même $\exp_x E^{s0}(x, f) \cap \mathcal{D}ef$). Ceci peut avoir lieu même dans des cas complètement réguliers, où les variétés stables faibles sont définies par un feuilletage. Mieux, ce feuilletage peut être déterminé (dans le revêtement universel) par les translatés d'un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G. Comme exemple, il suffit de prendre un groupe H qui ne soit pas exponentiel (*i.e.* son application exponentielle n'est pas surjective), et munir G de sa connexion canonique (dans ce cas, l'exponentielle affine coïncide avec l'exponentielle algébrique, en l'élément neutre).

Les exemples des variétés affines de Hopf (voir 2.5) révèlent d'autres pathologies, qui justifient nos définitions, un peu compliquées, de $CE^{s0}(x, f)$ et $C^*E^{s0}(x, f)$.

2.3. Systèmes dynamiques généralisés.

La discussion suivante nous sera d'un grand intérêt par la suite. Appelons *système dynamique généralisé* sur une variété M, simplement, une suite (f_i) de difféomorphismes de M. L'exemple naturel (et intéressant) est celui où $f_i = g^{k_i}$, *i.e.* (f_i) est une suite de puissances d'un même difféomorphisme g, les puissance k_i étant une suite (aléatoire) d'entiers tendant vers l'infini. Cette dernière suite d'entiers peut par exemple correspondre au temps de retour à une partie K de M.

Notre terminologie, système dynamique généralisé, au lieu de suite, suggère que l'on est en train de traiter cette dernière d'un point de vue dynamique. En effet, comme dans le cas de systèmes dynamiques classiques, on peut définir des caractères dynamiques pour les vecteurs de TM sous l'action d'un système dynamique généralisé (f_i). Par exemple $u \in T_xM$ est faiblement stable par (f_i) si $(D_xf_i(u))$ est bornée dans TM. Dans ce sens, on peut développer une théorie analogue au cas classique (2.6). Le seul défaut d'une telle théorie sera le manque d'invariance des ses objets (par quoi ?).

Considérons maintenant un système dynamique généralisé affine. Alors le théorème d'intégrabilité 2.6, se généralise, avec un énoncé identique (sauf la partie concernant les objets instables, qui ne se définissent pas naturellement ici). Le point est que dans la preuve, on n'a pas utilisé le fait que les difféomorphismes f^i étaient des puissances d'un même difféomorphisme f. Il n'a été question, en fait, que d'un système dynamique généralisé.

2.4. Questions.

On a vu qu'il est un peu délicat de manipuler les variétés stables faibles. Mais toutes ces subtilités disparaissent dans le cas des variétés stables (affirmation 2.4). Néanmoins, notre méthode ici, ne nous permet pas de comprendre le « feuilletage » stable dans son ensemble. Des interrogations sur son existence même, et ensuite sur sa structure géométrique deviennent légitimes. Tout ce qu'on peut tirer du théorème précédent est le fait suivant (sans rentrer dans les détails de sa démonstration) :

COROLLAIRE 2.10. — *Il existe un G_δ de M, où les « fibrés » stable, super stable, ainsi que leurs analogues instables, déterminent des laminations géodésiques à feuilles complètes.*

Quant à la structure géométrique de ces laminations, il semble important de considérer la question particulière suivante concernant les variétés affines plates :

QUESTION 2.11. — *Soit M^n une variété affine plate unimodulaire compacte et $f : M \to M$ un difféomorphisme affine. Les variétés stables de f sont-elles parallèles entre elles, i.e. leurs relevés dans le revêtement universel se développent-ils en plans affines parallèles de $\mathbb{R}^n$? Plus précisément supposons qu'un certain développement $\tilde{f}$ de f admet un point fixe, disons 0, et donc s'identifie à une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le feuilletage stable de f s'obtient-il à partir du feuilletage de $\mathbb{R}^n$ par espaces affines parallèles à l'espace caractéristique de A correspondant aux valeurs propres de partie réelle négative ?*

On peut traiter quelques cas particuliers de cette question, par exemple la situation du théorème 1.6 ici. La théorie de [Gro] peut être utile lorsque le feuilletage stable est supposé suffisamment différentiable. Toutefois, une telle hypothèse de régularité *a priori* n'est pas naturelle. À l'inverse, la régularité est une finalité en elle-même dans ce genre de problèmes. En effet, on peut se demander de façon générale, pour des connexions non nécessairement plates, dans quelle mesure les feuilletages stables des transformations affines sont-ils réguliers ou même localement homogènes ? Voir [BL] pour des questions proches.

2.5. Du cadre topologique au cadre mesurable.

Le théorème précédent décrit une situation proche mais assez distincte de celle de la théorie de la variété stable de Pesin (et Ruelle) [Pes]. En effet, le résultat précédent est ponctuel et ne fait pas intervenir de mesure invariante, et surtout, les différents espaces stables et instables sont en général différents des espaces de Lyapunov, car dans nos définitions ci-dessus, il n'est pas question de comportement exponentiel. L'exemple suivant montre un peu l'inaptitude du cadre topologique, et le besoin d'introduire des objets mesurables.

Prenons pour M un tore de Hopf :

$$M = \mathbb{R}^2 - \{0\}/x \mapsto 2x.$$

Sur M, le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ agit affinement. Considérons les deux flots ϕ^t et ψ^t déterminés respectivement par les groupes à un paramètre :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Les orbites de ϕ^t (resp. ψ^t) forment un feuilletage de Reeb à deux orbites (resp. une orbite) périodique. Les flots ont pourtant des propriétés dynamiques affines opposées. Ainsi, en dehors de l'orbite périodique commune de ϕ^t et ψ^t, tout autre point a une variété stable au sens de ϕ^t qui n'est rien d'autre que son orbite par ψ^t. Les variétés instables au sens de ϕ^t s'obtiennent à l'aide du flot défini par le groupe à un paramètre $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Quant au flot ψ^t, il y a identité entre ses orbites, ses variétés stables et ses variétés instables, en dehors de son orbite périodique !

On peut aussi s'amuser à considérer les objets stables faibles et stables associés au difféomorphisme affine correspondant à une matrice telle que $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ avec $\lambda < 1$.

3. DYNAMIQUE MESURABLE

Dans la présente section, on considère une variante mesurable du théorème précédent qui nous sera utile dans la preuve du théorème 1.6.

3.1. Difféomorphismes affines mesurablement partiellement hyperboliques de codimension 1.

Pour les applications relatives à la super-rigidité, l'analogue mesurable des propriétés de stabilité précédentes se définit en munissant M d'une métrique mesurable. Les définitions sont les mêmes qu'en 2.1, mais réécrivons-les pour insister sur leur dépendance de la métrique.

DÉFINITION 3.1. — *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme et $|\,.\,|$ une norme mesurable sur TM. On dira qu'un vecteur $v \in T_xM$ est stable (resp. faiblement stable) si $(|D_x f^i v|)$ tend vers* 0 *(resp. est bornée) quand i tend vers ∞. On peut étendre de la même façon les autres définitions de* 2.1.

Le caractère dynamique d'un vecteur de TM, dépend cette fois du choix de la métrique. C'est le comportement exponentiel (de Lyapunov) qui ne dépend pas de la métrique, même mesurable (voir par exemple [Fer1]). Par cela, on veut dire que les vecteurs ayant un exposant de Lyapunov non nul, sont stables au sens de n'importe quelle métrique mesurable, et ce presque partout au sens d'une mesure finie invariante. Par contre, les vecteurs à exposant de Lyapunov nul, ne sont en général pas faiblement stable (ou centraux) au sens d'une métrique continue, mais peuvent parfois l'être au sens d'une métrique mesurable. À cause de cette subtilité, on ne traitera qu'un cas particulier mesurable du théorème 2.6.

DÉFINITION 3.2. — *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme préservant une mesure finie μ et soit $|\,.\,|$ une métrique mesurable sur TM. On dira que f est partiellement hyperbolique de codimension* 1, *relativement à μ et $|\,.\,|$, si μ presque partout, l'espace stable faible de f au sens de $|\,.\,|$ est de codimension* 1.

THÉORÈME 3.3. — *Soit $f : (M,\nabla) \to (M,\nabla)$ un difféomorphisme affine, où M est une variété compacte. Supposons que f est partiellement hyperbolique de codimension* 1, *relativement à une mesure invariante μ définie par une forme volume, et à une norme mesurable $|\,.\,|$. Alors, il existe un feuilletage Lipschitz de codimension* 1, *à feuilles géodésiques, μ-presque partout tangent au fibré stable faible.*

Ce feuilletage est f-invariant et ne dépend ni de la mesure invariante μ ni de la norme $|\,.\,|$. On l'appellera le feuilletage stable faible de f et on le notera $\mathcal{E}^{s0}(f)$.

On a également un feuilletage stable $\mathcal{E}^s(f)$ et un feuilletage superstable $\mathcal{E}^{ss}(f)$ qui sont des «sous-feuilletages» mesurables de $\mathcal{E}^{s0}(f)$, à *feuilles géodésiques, et presque partout tangents respectivement au fibré stable et au fibré super-stable* (*au sens de* $(|\,.\,|, \mu)$). *Enfin* $\mathcal{E}^s(f)$ *et* $\mathcal{E}^{ss}(f)$ *sont parallèles le long des feuilles de* $\mathcal{E}^{s0}(f)$.

Ce théorème suggère la question suivante (voir aussi la question 2.11) :

QUESTION 3.4. — *Est-il vrai dans les conditions du théorème précédent, que f est « topologiquement partiellement hyperbolique » ? Plus précisément, l'espace stable stable faible topologique* (*i.e. celui défini à l'aide d'une norme continue auxiliare coïncide-t-il* (*partout*) *avec le fibré tangent du feuilletage stable faible* $\mathcal{E}^{s0}(f)$? (*Il n'est pas évident de démontrer cette coïncidence, même pour un seul point*).

Pour la preuve, on aura besoin d'une digression sur les feuilletages géodésiques de codimension 1 et ensuite d'un résultat d'uniformité de la stabilité faible.

3.2. Feuilletages géodésiques de codimension 1.

Les laminations (et en particulier les feuilletages) géodésiques de codimension 1 sur une variété M munie d'une connexion, jouissent de remarquables propriétés de régularité. Nous en énonçons quelques unes dans ce qui suit, voir [Zeg2] pour les détails, ainsi que [Sol] pour des questions proches.

Rappelons qu'une lamination de M est un « feuilletage » d'une partie fermée de M (voir [Thu]).

On munit M d'une métrique auxiliaire continue $\|\,.\,\|$. On notera les boules fermées dans M et T_xM respectivement $B_x^M(r)$ et $B_x^{TM}(r)$.

THÉORÈME 3.5. — *Soit X une partie* (*quelconque*) *de M. Soit r un réel tel que* $\exp_x$ *soit définie dans* $B_x^{TM}(r)$ *et établit un difféomorphisme sur son image, pour tout $x \in X$. Supposons donnée une application* (*quelconque*) *qui à $x \in X$ associe $L_x \subset T_xM$, un hyperplan tel que*

$$\mathcal{L}_x = \exp_x\big(L_x \cap B_x^{TM}(r)\big)$$

soit (*une hypersurface*) *géodésique.*

Supposons vérifiée la condition : si $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ s'intersectent, alors elles sont tangentes (*leur domaine d'intersection est alors un ouvert commun, à cause du caractère géodésique de ces hypersurfaces*).

Soit $x_0 \in X$. Pour x parcourant l'adhérence de $X \cap B^M_{x_0}(\frac{1}{4}r)$, les traces des hypersurfaces $\mathcal{L}_x$ permettent de définir une lamination géodésique de $B^M_{x_0}(\frac{1}{4}r)$. Cette lamination est uniformément Lipschitz : sa constante Lipschitz (sur $B^M_{x_0}(\frac{1}{4}r)$) ne dépend ni de de X ni de L, mais seulement de r et de la géométrie de la connexion.

En particulier si X est dense dans M, alors on obtient un feuilletage géodésique Lipschitz sur M. Sa constante Lipschitz ne dépend que de la géométrie de la connexion et de la métrique auxiliaire sur M. Il s'ensuit en particulier que l'espace $\mathcal{FG}$ des feuilletages géodésiques (de codimension 1) de M, muni de la topologie C^0 (ou Lipschitz) est compact.

3.3. Uniformité de la stabilité.

Par définition, pour un vecteur $u \in T_xM$, complètement faiblement stable par un difféomorphisme affine f, l'ensemble des itérés D_xf^iu reste dans un compact de $\mathcal{D}ef$ (et non, seulement, dans un compact de TM). On peut donc s'attendre à ce que l'ensemble des vecteurs complètement faiblement stable $CE^{s0}(x,f)$, soit un voisinage de 0 dans T_xM, qui peut s'effondrer en fonction de x. Le fait suivant suggère plutôt que ce phénomène ne se produit pas.

LEMME 3.6. — *Soit f un difféomorphisme affine de M et μ une mesure borélienne sur M (pas nécessairement invariante). Pour tout ϵ, il existe un compact K de mesure supérieure à $\mu(M) - \epsilon$ tel que pour tout $x \in K$, si (t_i) est la suite de ses temps de retour positifs dans K, alors le système dynamique généralisé (f^{t_i}) vérifie :*

$$E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}ef \subset CE^{s0}(x,(f^{t_i})).$$

Preuve. — À x appartenant à M, on associe

$$F_x = E^{s0}(x,f) - \mathcal{D}ef_x\,.$$

C'est une partie fermée de T_xM. Par des considérations de distance de Hausdorff (sur les compacts de TM et ensuite les fermés en général), on peut parler de continuité de cette application sur une partie de M. On peut aussi voir qu'elle satisfait au théorème de Lusin (parce qu'elle est naturellement mesurable).

On prend alors un compact K de M satisfaisant la condition de mesure et sur lequel les applications $x \mapsto F_x$ ainsi que $x \mapsto E^{s0}(x,f)$ et $x \mapsto E^s(x,f)$ soient continues. On se propose de montrer qu'il répond au lemme.

Soit donc $x \in K$ et $f_i = f^{t_i}$ où (t_i) est la suite des temps de retours positifs de x dans K (le système (f_i) est vu comme un système dynamique généralisé sur M et non sur K). Soit $u \in E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}ef_x$. Comme $\mathcal{D}ef_x$ est étoilé en 0, il existe une ellipse $\mathcal{E}$, d'intérieur non vide (dans $E^{s0}(x,f)$), contenue dans $E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}ef_x$ et contenant u dans son intérieur. Par ellipse, on sous-entend l'image par une application linéaire de la boule unité au sens d'une métrique euclidienne. On peut en particulier multiplier ces ellipses par des réels positifs.

Comme la suite $(D_x F_{i|E^{s0}(x,f)})$ est bornée, on peut supposer par un raisonnement par l'absurde, que $(D_x f_i u)$ et donc aussi $(f_i(x))$, convergent. Notons

$$v = \lim D_x f_i u, \quad y = \lim f(x_i).$$

Supposons dans un premier temps que $(D_x F_{i|E^{s0}(x,f)})$ ne dégénère pas, ce qui équivaut à dire que $E^s(x,f) = \{0\}$. Les ellipses $\mathcal{E}_i = D_x f_i(\mathcal{E})$ convergent alors vers une ellipse $\mathcal{E}'$ d'intérieur non vide dans $E^{s0}(y,f)$. Étant donné que u est à l'intérieur de $\mathcal{E}$, il existe $\alpha < 1$ tel que $u \in \alpha\mathcal{E}$. Il s'ensuit que v appartient à $\alpha\mathcal{E}'$.

L'hypothèse de l'absurde signifie que v appartient à $F_y = E^{s0} - \mathcal{D}_y$. Par continuité au sens de Hausdorff, tout voisinage de v dans TM, contient des points de $F_{f_i(x)}$ pour i grand. Mais un voisinage assez petit de v dans TM intersecte $E^{s0}(x,f)$ dans $\mathcal{E}_i$. Cette affirmation découle après trivialisation du fait général suivant : si une suite $(\mathcal{A}_i)$ d'ellipses de $\mathbb{R}^k$ converge vers une ellipse $\mathcal{A}'$ d'intérieur non vide, alors pour tout $\alpha < 1$ et i grand, on a $\alpha\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_i$.

Pour conclure la preuve par l'absurde, il suffit de se rappeler que $\mathcal{E}_i = D_x f_i \mathcal{E}$ est évidemment situé en dehors de $F_{f_i(x)}$. La preuve est ainsi achevée sous l'hypothèse que $E^s(x,f)$ est trivial. Dans le cas contraire, on peut raisonner modulo ce sous-espace. En effet d'après l'affirmation 2.4, $CE^{s0}(x,f)$ est saturé par $E^s(x,f)$. On peut refaire le même raisonnement, mais au lieu d'ellipses comme ci-dessus, on considère des saturés d'ellipses par $E^s(x,f)$. □

En fait, par la même preuve, on peut démontrer une variante du lemme pour $C^*E^{s0}(x,f)$ que l'on peut énoncer ainsi : la composante connexe de 0 dans $E^{s0}(x,f) \cap \mathcal{D}^*ef$ est contenue dans $C^*E^{s0}(x,(f^{t_i}))$. Il en résulte en particulier :

Affirmation 3.7. — *Avec les notations du lemme ci-dessus, il existe un réel positif r tel que $C^*E^{s0}(x,(f_i))$ (pour tout $x \in K$) contient la boule de rayon r de $E^{s0}(x,f)$ (au sens d'une métrique fixée).*

3.4. Preuve du théorème 3.3.

Notons $E^{s0}(x, f, |\,.\,|)$ l'espace stable faible au sens de la norme mesurable $|\,.\,|$. Par définition, $u \in E^{s0}(x, f, |\,.\,|)$ signifie que $(|D_x f^i u|)$ est bornée.

Soit K un compact sur lequel $|\,.\,|$ est continue. Alors évidemment, $E^{s0}(x, f, |\,.\,|)$ est contenu dans $E^{s0}(x, (f^{t_i}))$ pour tout $x \in K$, où (t_i) est la suite des temps de retour positifs de x dans K. On va montrer qu'on a en fait égalité, ce qui revient à montrer que $E^{s0}(x, (f^{t_i}))$ ne peut pas être égal à $T_x M$ (puisque $E^{s0}(x, f, |\,.\,|)$ est de codimension 1).

AFFIRMATION 3.8. — *Soit f un difféomorphisme affine (sur une variété compacte M) préservant une forme volume. Supposons que pour un point $x \in M$, on ait $E^{s0}(x, f) \neq T_x M$. Soit $(f_i = f^{k_i})$ un système dynamique généralisé déterminé par une suite d'entiers k_i tendant vers l'infini. Alors pour tout $y \in M$, on a $E^{s0}(y, (f_i)) \neq T_x M$.*

Preuve. — Supposons le contraire. Donc $(D_y f_i)$ est bornée. Comme il y a un volume préservé (ceci est nécessaire comme le montrent les exemples des variétés de Hopf affines 2.5), $((D_y f_i)^{-1})$ est également bornée. Par la construction même de la topologie du groupe de Lie Affin(M) (*cf.* [Kob]), cela entraîne que $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est contenu dans un compact de Affin(M).

La fermeture G de $\{f^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe de Lie abélien, admettant un sous-groupe dense isomorphe à $\mathbb{Z}$ (celui engendré par f). La composante neutre H de G est non triviale; autrement dit G n'est pas discret car il contient l'ensemble infini précompact $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Il existe donc un entier d tel que $f^d \in H$, et par suite G admet un nombre fini de composantes connexes. On peut en fait supposer que G est connexe. Il est donc isomorphe au produit d'un tore par un certain $\mathbb{R}^k$. Comme il contient un $\mathbb{Z}$ dense, G est un nécessairement un tore. Donc les puissances de f forme une famille équicontinue. Ceci entraîne que $E^{s0}(y, f) = T_y M$ pour tout $y \in M$, ce qui contredit notre hypothèse. □

Considérons un compact K de mesure presque totale, comme dans le lemme 3.6 et sur lequel $|\,.\,|$ est continue. Soit r la constante donnée par l'affirmation 3.7. Pour $x \in K$, notons (notations de 3.5)

$$\mathcal{L}_x = \exp_x E^{s0}\big(x, f, |\,.\,|\big) \cap B_x^{TM}(r).$$

On va vérifier que cela satisfait les conditions du théorème 3.5.

D'après ce qui précède, si (s_i) est une suite extraite des temps positifs de retour de x dans K (pas nécessairement tous les temps de retour), alors $\mathcal{L}_x$ est un voisinage de x dans $\mathcal{E}^{s0}(x, (f^{s_i}))$ (notations du théorème d'intégrabilité 2.6). Il s'ensuit que $\mathcal{L}_x$ est géodésique.

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.5, il suffit de vérifier la condition de non-intersection, *i.e.* si $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ s'intersectent, alors elles sont tangentes. Il est clair qu'il suffit de montrer cela lorsque x et y parcourent des parties de K de plus en plus denses. D'après ce qui précède et le théorème d'intégrabilité 2.6 (version systèmes dynamiques généralisés), la propriété de non-intersection est valable sur toute partie $A \subset K$ pour laquelle il existe une suite extraite commune des temps de retour (dans K) de tous ses points, *i.e.* il existe une suite (infinie) (s_i) telle que $f^{s_i}x \in K$ pour tout $x \in A$. Cette propriété découle de :

AFFIRMATION 3.9. — *Pour tout ϵ, il existe A_ϵ une partie $\frac{1}{2}\epsilon$ dense dans K tel que les suites des temps de retour des éléments des K admettent toutes, une sous-suite extraite commune (s_i).*

Preuve. — On peut supposer que le support de la restriction de μ à K est égal à K, *i.e.* que μ est positive sur les ouverts de K (on peut s'y ramener en remplaçant K par le support de la restriction de μ à K).

Considérons l'action de $f^{\times k} = f \times \ldots \times f$ sur le produit $M^k = M \times \cdots \times M$ muni de la mesure produit μ^k. Pour $\epsilon > 0$, considérons l'ensemble $A(k, \epsilon)$ des k-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ tels que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ soit une partie $\frac{1}{2}\epsilon$-dense de K.

La preuve de l'affirmation sera une simple application du théorème de récurrence de Poincaré, à condition de montrer que $A(k, \epsilon)$ est non négligeable. Proposons-nous donc de montrer ce fait pour k suffisamment grand (ϵ étant fixé).

Pour $y \in K$ et r réel, on note $B(y, r)$ la boule de K de centre x et rayon r. Notons

$$B^*(y, r) = \big\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \notin B(y, r),\ \forall i\big\}.$$

La mesure de $B^*(y, r)$ est m_y^k où $m_y = \mu(K - B(y, r))$.

Notons $A^*(\epsilon, k)$ le complémentaire de $A(\epsilon, k)$ dans K^k.

Soit $\{y_1, \ldots, y_N\}$ un $\frac{1}{4}\epsilon$ réseau de K de cardinal N. Évidemment, si $(x_1, \ldots, x_k)$ est dans $A^*(\epsilon, k)$, alors il existe j tel que $x_i \notin B(y_j, \frac{1}{4}\epsilon)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. En d'autres termes, $A^*(\epsilon, k)$ est contenue dans la réunion des $B^*(y_j, \frac{1}{4}\epsilon)$. En particulier,

$$\mu^k\big(A^*(\epsilon,k)\big) \leq \sum_{j=1}^{i=N} m_{y_j}^k.$$

Soit $m_0 = \max\{m_{y_j},\ j \leq N\}$. Alors $\mu^k(A^*(\epsilon,k)) \leq N m_0^k$. Il s'ensuit que

$$\mu^k(A(\epsilon,k)) \geq \mu(K)^k - N m_0^k.$$

Mais $m_0 < \mu(K)$, car μ est pleine sur K. Il en découle que $A(\epsilon,k)$ est non négligeable pour k assez grand. □

Fin de la preuve du théorème 3.3. — Comme la famille des sous-variétés $(\mathcal{L}_x)$ était définie à partir de f seule (plus exactement à partir de $E^{s0}(x,f,|\,.\,|)$), lorsque l'on agrandit le compact K, la nouvelle famille ainsi obtenue est une extension de la famille initiale. De cette façon, on définit la famille $(\mathcal{L}_x)$ pour x parcourant une partie $X \subset M$ de mesure totale, et en particulier dense. On obtient ainsi par le théorème 3.5, un feuilletage géodésique $\mathcal{E}^{s0}(f)$.

Par ailleurs, on a la caractérisation suivante de $\mathcal{E}^{s0}(f)$. Pour tout $x \in M$ et toute suite $\{t_i\}$, l'espace stable faible $E^{s0}(x,(f^{t_i}))$ est contenu dans $T_x\mathcal{E}^{s0}(f)$. En effet, sinon $E^{s0}(x,(f^{t_i}))$ serait transverse à $\mathcal{E}^{s0}(f)$ et couperait par suite une certaine sous-variété $\mathcal{L}_y$, avec $y \in X$, ce qui est interdit par le théorème d'intégrabilité 2.6 (version généralisée). Ceci montre que $\mathcal{E}^{s0}(f)$ ne dépend pas de $|\,.\,|$ et μ.

Le reste de la preuve du théorème est direct. □

4. ACTIONS AFFINES DES RÉSEAUX DES GROUPES DE LIE SEMISIMPLES DE RANG SUPÉRIEUR : SUPER-RIGIDITÉ

Rappelons à présent l'énoncé du théorème de super-rigidité des cocycles de Zimmer :

THÉORÈME 4.1 (voir [Zim1], [Lew]). — *Soit Γ un réseau d'un groupe de Lie simple G de rang ≥ 2 (e.g. $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$). Soit $h : \Gamma \to \mathrm{Diff}(M^m)$, une action différentiable de Γ, préservant une mesure ergodique μ sur une variété compacte M de dimension m. Alors, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, il existe un champ de repères mesurable $r : M \to \mathrm{Rep}(M)$ et une représentation $\theta : G \to \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$, tels que la matrice $c(x,A)$ de D_xh_A par rapport aux repères r_x et $r_{h_A(x)}$ soit de la forme $c(x,A) = k(x,A)\theta(A)$, où $k(x,A)$ appartient au groupe orthogonal $O(m)$.*

4.1. Actions des réseaux de $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ sur des variétés de dimension $m < 2n$.

Pour $n \leq m < 2n$, à conjugaison près (à la source et au but) il existe deux représentations non triviales de $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$,

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \longmapsto \begin{pmatrix} (A^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons d'autre part que dans le théorème de super-rigidité, on peut passer d'une représentation à une représentation conjuguée, en effectuant un changement de repère. On en déduit :

Affirmation 4.2 (voir [Fer1]). — *Soit Γ un réseau de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ agissant différentiablement en préservant une mesure sur une variété compacte M de dimension m telle que $n \leq m < 2n$. Alors, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, il existe un champ de repères mesurable : $r : M \to \mathrm{Rep}(M)$ et une partition de M en trois parties mesurables M_0, M_1 et M_2 tels que le cocycle dérivé $c(x, A)$ soit de la forme :*

- $c(x, A) = \begin{pmatrix} k_1(x, A) & 0 \\ 0 & k_2(x, A) \end{pmatrix}$ *si* $x \in M_0$;
- $c(x, A) = \begin{pmatrix} k_1(x, A)A & 0 \\ 0 & k_2(x, A) \end{pmatrix}$ *si* $x \in M_1$;
- $c(x, A) = \begin{pmatrix} k_1(x, A)(A^*)^{-1} & 0 \\ 0 & k_2(x, A) \end{pmatrix}$ *si* $x \in M_2$,

où $\begin{pmatrix} k_1(x, A) & 0 \\ 0 & k_2(x, A) \end{pmatrix}$ *appartient au groupe orthogonal* $O(m)$.

4.2. Élimination de la partie M_0.

Le fait que M_0 soit non triviale signifie qu'au-dessus de M_0, l'action de Γ préserve une métrique riemannienne mesurable, celle rendant le repère r orthonormé. Dans le cas où l'action conserve une « structure rigide », un résultat dû à Zimmer [Zim3] montre que préserver une métrique mesurable entraîne celle d'une métrique régulière, *i.e.* l'action se factorise à travers l'action d'un groupe de Lie compact. En voici un énoncé particulier :

Proposition 4.3. — *Avec les notations ci-dessus, supposons de plus que l'action est affine et que M_0 est non négligeable. Alors l'action se factorise à travers l'action (affine) d'un groupe de Lie compact.*

Preuve. — Notons d'abord que par définition de la topologie du groupe des transformations affine de M (voir [Kob]), pour B et B' compacts du fibré des repères $\mathrm{Rep}(M)$, l'ensemble

$$\{f \in \mathrm{Affin}(M),\ df(B) \cap B' \neq \emptyset\}$$

est un compact de $\mathrm{Affin}(M)$.

Soit K un compact contenu dans M_0 avec $\mu(K) > (1/2)\mu(M_0)$ et tel que le repère mesurable r soit continu sur K. Ainsi $B = \{r_x,\ x \in K\}$ est un compact du fibré des repères $\mathrm{Rep}(M)$. Notons B' le saturé de B par l'action du groupe orthogonal $O(m)$ agissant sur $\mathrm{Rep}(M)$.

Remarquons maintenant que pour tout $f = h_A$, $A \in \Gamma$, l'intersection $fK \cap K$ est non vide, car $\mu(K) > \frac{1}{2}\mu(M_0)$. Ainsi f appartient au compact $\{f \in \mathrm{Affin}(M),\ df(B) \cap B' \neq \emptyset\}$. Donc l'action est bien contenue dans un groupe compact. □

5. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES ET CONSÉQUENCES DYNAMIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

L'une des conséquences remarquables du théorème de super-rigidité est le fait que pour une action d'un réseau de rang supérieur Γ, la nature algébrique d'un élément $A \in \Gamma$, dicte les propriétés dynamiques du difféomorphisme correspondant h_A.

5.1. Éléments partiellement hyperboliques de codimension 1.

On déduit du théorème de super-rigidité (affirmation 4.2) :

AFFIRMATION 5.1. — *Soit Γ un réseau de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$, agissant en respectant une mesure μ sur une variété M^m avec $m < 2n$ et telle que l'action ne préserve pas de métrique mesurable, i.e. $M_0 = \emptyset$. Alors pour tout élément $A \in \Gamma$ diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) avec une seule valeur propre > 1, le difféomorphisme associé h_A est partiellement hyperbolique de codimension* 1.

Données. — Désormais, Γ est un réseau de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ agissant affinement sur une variété munie d'une connexion sans torsion (M^m, ∇) avec $m < 2n$. On supposera de plus que l'action ne préserve pas de métrique riemannienne, *i.e.* M_0 est vide, et que l'action préserve une la mesure μ lisse (*i.e.* définie par une forme volume lisse).

5.2. Sous-groupes de Cartan.

L'exploitabilité de l'affirmation précédente découle d'un résultat classique de [PR] affirmant qu'un réseau d'un groupe de Lie simple G contient beaucoup d'éléments semi-simples. Plus précisément, la trace de Γ sur un certain sous-groupe de Cartan de G est un réseau de ce sous-groupe de Cartan.

Le groupe des matrices diagonales

$$D = \Big\{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ \lambda_i > 0,\ \prod \lambda_i = 1\Big\}$$

est un sous-groupe de Cartan canonique de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Quitte à changer Γ par un conjugué, on peut supposer que $D \cap \Gamma$ est un réseau de D.

5.3. Notations.

Soit $r(x) = \big(e_1(x), \ldots, e_n(x), e_{n+1}(x), \ldots, e_m(x)\big)$ le champ de repères donné par la super-rigidité.

Pour $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on notera E_u le champ de directions déterminé par $e_u = \sum \alpha_i e_i$. Plus généralement, pour un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^n$, on notera E_H le champ de plans engendré par les directions E_u, $u \in H$.

Enfin, pour simplifier, dans la suite nous noterons E et N les sous-fibrés (presque partout supplémentaires) engendrés respectivement par $\{e_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ et par $\{e_i,\ n+1 \leq i \leq m\}$

5.4. Éléments partiellement hyperboliques de codimension 1.

La preuve du fait suivant est directe :

AFFIRMATION 5.2. — *Soient*

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}\big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big) \in D \cap \Gamma, \\ I^s(A) &= \big\{i \leq n,\ \lambda_i(A) < 1\big\}, \\ I^{ss}(A) &= \big\{i \leq n,\ \lambda_i(A) = \inf \lambda_j\big\}. \end{aligned}$$

Alors :

- *le fibré stable (resp. le fibré faiblement stable) de A est égal à E_H (resp. $E_H \bigoplus N$) où $H \subset \mathbb{R}^n$ est engendré par $\{e_i,\ i \in I^s(A)\}$;*
- *le fibré super-stable de A est égal à E_H où H est engendré par $\{e_i,\ i \in I^{ss}(A)\}$.*

Un énoncé analogue est valable pour les objets instables.

AFFIRMATION 5.3. — *Soit $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$. Alors il existe $A = A_{ij} \in \Gamma \cap D$ tel que $\lambda_i < \lambda_\ell < 1 < \lambda_j$ pour tout $\ell \notin \{i,j\}$. En d'autres termes, on a $I^s(A) = \{1,\ldots,n\} - \{j\}$ et $I^{ss}(A) = \{i\}$.*

En particulier A_{ij} est partiellement hyperbolique de codimension 1. Son fibré super-stable est E_{e_i}.

Preuve. — L'application

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in D \longmapsto \big(\log(\lambda_1),\ldots,\log(\lambda_n)\big) \in \mathbb{R}^n$$

établit un isomorphisme entre D et l'hyperplan

$$LD = \Big\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n),\ \sum \zeta_\ell = 0\Big\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Cet isomorphisme envoie $D \cap \Gamma$ sur un réseau de LD. La contrainte imposée à A_{ij} se transforme linéairement dans LD :

$$\zeta_i < \zeta_l < 0 < \zeta_j, \quad \forall \ell \notin \{i,j\}.$$

Un réseau contient nécessairement des points de cet ensemble. □

5.5. Parallélisme.

AFFIRMATION 5.4. — *Soient A_{ij} et A_{ik} deux éléments de $\Gamma \cap D$ comme dans l'affirmation ci-dessus avec $i \neq j \neq k$. L'ouvert Ω_{ijk} où les feuilletages stables faibles (voir 3.3) de A_{ij} et A_{ik} sont transverses est de mesure totale et est invariant par ces deux feuilletages stables faibles. Dans Ω_{ijk}, le fibré E_{e_i} coïncide presque partout avec un fibré parallèle.*

Preuve. — L'ouvert Ω_{ijk} est de mesure totale car presque partout les champs e_i sont linéairement indépendants. L'invariance de Ω_{ijk} par les feuilletages stables faibles de A_{ij} et A_{ik} est un fait général : le lieu de tangence de deux feuilletages géodésiques de codimension 1 est saturé par (chacun de) ces feuilletages. □

Le parallélisme de E_{e_i} découle du fait suivant :

LEMME 5.5. — *Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages Lipschitz transverses d'une variété U munie d'une connexion et X un champ de directions mesurable, parallèle (presque partout) le long de chacun de deux feuilletages. Plus précisément, pour presque tout x, les restrictions de X à $\mathcal{F}_1(x)$ et $\mathcal{F}_2(x)$ coïncident presque partout avec des champs parallèles le long des ces feuilles. Alors X coïncide presque partout avec un champ parallèle sur U.*

Preuve. — Notons d'abord que la preuve du lemme est directe si X est différentiable. En effet dans ce cas le parallélisme s'exprime par le fait que l'image de la dérivé covariante $\nabla X : TM \to TM$ est contenue dans le sous-fibré en droite $\mathbb{R}X$. Le parallélisme partiel, le long d'une sous-variété, signifie que l'inclusion précédente est valable le long de cette sous-variété.

Regardons maintenant le cas mesurable. La question étant locale, on peut supposer que la situation topologique est triviale. On peut remplacer U par U' de mesure totale, tel que pour tout $x \in U'$, la restriction de X à $\mathcal{F}_1(x) \cap U'$ et $\mathcal{F}_2(x) \cap U'$ sont parallèles (*i.e.* invariants par transport parallèle entre les points des ces ensembles). On peut aussi exiger que les dernières intersections soient de mesure totale respectivement dans $\mathcal{F}_1(x)$ et $\mathcal{F}_2(x)$. Tout cela provient de la régularité Lipschitz (et donc la continuité absolue) des feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. En particulier, par parallélisme, la restriction de X à $\mathcal{F}_1(x) \cap U'$ (resp. à $\mathcal{F}_2(x) \cap U'$) s'étend uniquement par continuité à $\mathcal{F}_1(x)$ (resp. à $\mathcal{F}_2(x)$).

Pour se ramener au cas différentiable, on remplace X par un champ $\overline{X}$ sur U défini de la manière suivante. On choisit $x \in U'$ et on prend $\overline{X}$ égal au prolongement par continuité de X sur $\mathcal{F}_1(x)$. Pour $y \in \mathcal{F}_1(x)$, on étend $\overline{X}$ sur $\mathcal{F}_2(y)$ par parallélisme, *i.e.* en transportant parallèlement le vecteur $\overline{X}(y)$ le long de $\mathcal{F}_2(y)$. En général, ceci ne définit pas un champ (univalué), mais d'après ce qui précède, c'est bien le cas dès que y appartient à $\mathcal{F}_1(x) \cap U'$. Ceci s'étend à toutes les feuilles $\mathcal{F}_2(y)$ par densité de $\mathcal{F}_1(x) \cap U'$ dans $\mathcal{F}_1(x)$. On peut facilement voir que $\overline{X}$ est différentiable et de plus coïncide presque partout avec X (par régularité Lipschitz des feuilletages). □

6. CONSTRUCTION DE Ω

On reprend les notations de la section précédente. Soit Ω l'ensemble (ouvert) des points au voisinage desquels tous les champs de directions E_{e_i} coïncident presque partout avec un champ parallèle.

AFFIRMATION 6.1. — *L'ensemble Ω est un ouvert Γ-invariant de mesure totale, sur lequel tous les champs de direction E_u, pour $u \in \mathbb{R}^n$, ainsi que les champs de plans E_H, pour H sous-espace de $\mathbb{R}^n$, sont parallèles.*

Preuve. — Évidemment, d'après ce qui précède, Ω contient l'intersection $\bigcap \Omega_{ijk}$. Par parallélisme, dès que les champs E_{e_i} sont linéairement indépendants en un point, ils le seront dans sa composante connexe dans Ω.

Donc les champs E_{e_i} sont partout linéairement indépendants dans Ω, car c'est le cas presque partout. Par définition des Ω_{ijk}, il s'ensuit que $\Omega \subset \Omega_{ijk}$. Ainsi $\Omega = \bigcap \Omega_{ijk}$.

Montrons maintenant que Ω est Γ-invariant. En effet, Ω peut aussi se définir par le fait que c'est l'ouvert maximal où tous les fibrés super-stables des éléments partiellement hyperboliques de codimension 1 du sous-groupe de Cartan $D \cap \Gamma$, sont parallèles (car ce sont exactement les fibrés de la forme E_H où H est un hyperplan engendré par des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Il est facile de voir que si $A \in \Gamma$, alors les fibrés super-stables des éléments de $\mathrm{Ad}(A)(D \cap \Gamma)$ sont des combinaisons linéaires des E_{e_i}. Par exemple, le fibré super-stable de $AA_{ij}A^{-1}$ est E_u où u est la i-ème ligne de A (vue comme matrice $n \times n$). Donc ces fibrés super-stables (des éléments de $Ad(A)(D \cap \Gamma)$) sont également parallèles dans Ω. Ainsi Ω est contenu dans $A(\Omega)$. Le même raisonnement donne l'égalité $\Omega = A(\Omega)$. □

6.1. Feuilletages locaux déterminées par P, N et $E_H \bigoplus N$.

La preuve de l'affirmation suivante est directe :

AFFIRMATION 6.2. — *Dans Ω, le champ de n-plans P est parallèle et détermine donc un feuilletage $\mathcal{P}$. Tous les champs E_H de plans parallèles (où H est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$) sont tangents à $\mathcal{P}$.*

Dans Ω, N détermine un feuilletage géodésique $\mathcal{N}$ supplémentaire de $\mathcal{P}$, qui n'est rien d'autre que l'intersection des feuilletages stables faibles de tous les éléments A_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ partiellement hyperboliques de codimension 1.

Soit $\mathbb{R}P^{*(n-1)}$ l'espace des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des hyperplans H de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident avec l'espace caractéristique associé aux valeurs propres négatives d'un certain élément A de Γ, diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). On notera $\mathcal{F}_H$ le feuilletage stable faible associé à A. En effet, ceci ne dépend que de H. Par exemple, si $A = A_{ij}$, alors l'hyperplan correspondant est engendré par $\{e_\ell, \ell \neq j\}$.

AFFIRMATION 6.3.

(i) *$\mathcal{F}_H$ est tangent à $E_H \bigoplus N$.*

(ii) *$\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}P^{*(n-1)}$.*

Preuve. — Le point (i) se démontre comme dans l'affirmation ci-dessus. Le point (ii) provient du fait que l'action de Γ sur $\mathbb{R}P^{*(n-1)}$ est minimale (toutes ses orbites sont denses) (voir [Zim1]). □

6.2. Feuilletages globaux de M.

Soit $\mathcal{F}G$ l'espace des feuilletages géodésiques de codimension 1 de M. On a donc une application :

$$\phi : H \in \mathcal{D} \longmapsto \mathcal{F}_H \in \mathcal{F}G.$$

AFFIRMATION 6.4. — *L'application ϕ s'étend de manière unique en une application continue $\phi : H \in \mathbb{R}P^{*(n-1)} \to \mathcal{F}_H \in \mathcal{F}G$. Dans Ω, $\mathcal{F}_H$ est tangent à $E_H \bigoplus N$.*

Preuve. — Considérons une suite $H_i \in \mathcal{D}$ convergeant vers H telle que $\mathcal{F}_{H_i}$ converge vers un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}G$. Cela existe par compacité de $\mathcal{F}G$ (*cf.* 3.5). Il est facile de voir que sur Ω, $\mathcal{F}$ est tangent à $E_H \bigoplus N$. Ce dernier champ est localement Lipschitz sur Ω (E_H étant parallèle et N étant Lipschitz). Il est donc uniquement intégrable et par conséquent la restriction de $\mathcal{F}$ sur Ω ne dépend pas de la suite approximante H_i. Par densité de Ω dans M, $\mathcal{F}$ est bien défini. D'où le prolongement par continuité de ϕ. □

COROLLAIRE 6.5. — *Pour tout V sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (de dimension quelconque), $E_V \bigoplus N$ est tangent à un feuilletage géodésique $\mathcal{F}_V$ sur Ω. Il s'obtient comme intersection des $\mathcal{F}_H$, où H est un hyperplan contenant V. Le feuilletage $\mathcal{N}$ est l'intersection de tous ces feuilletages.*

6.3. Complétude relative de Ω.

Dans le complémentaire Ω^c_{ijk}, les feuilletages stables faibles de A_{ij} et A_{ik} sont tangents. Comme ils sont géodésiques et de codimension 1, ces deux feuilletages sont identiques sur Ω^c_{ijk}, qui est en particulier saturé par (chacun de) ces feuilletages. Mais *a priori*, il n'est pas clair que $\Omega^c - \Omega^c_{ijk}$ soit également saturé par les feuilletages stables faibles de A_{ij} et A_{ik}. Nous allons montrer que c'est le cas, en montrant qu'en fait $\Omega = \Omega_{ijk}$ pour tous i, j, k : tous les feuilletages stables faibles présent coïncident sur Ω^c.

PROPOSITION 6.6. — *Les ensembles Ω et Ω^c sont saturés par tous les feuilletages $\mathcal{F}_H$, pour H hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Tous ces feuilletages coïncident sur Ω^c.*

Preuve. — Il s'agit de montrer que tous les feuilletages $\mathcal{F}_H$ sont deux à deux tangents sur Ω^c. Reformulons pour cela le lemme 5.5 sous la forme :

LEMME 6.7. — *Sur l'ouvert où deux feuilletages $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_{H'}$ sont transverses, tout champ de directions E_u pour $u \in H \cap H'$ coïncide presque partout avec un champ de directions parallèle.*

Supposons donc qu'en un point $x \in \Omega^c$, il existe deux hyperplans H et H' tels que $\mathcal{F}_H(x)$ et $\mathcal{F}_{H'}(x)$ soient transverses. Alors, par continuité de ϕ, la même propriété de transversalité est vraie en remplaçant H et H' par des hyperplans proches H_0 et H'_0. Mais alors l'ensemble des directions ainsi obtenues à l'aide des intersections $H_0 \cap H'_0$ est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}P^{(n-1)}$. En particulier, cet ensemble engendre $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit, d'après le lemme précédent, que tous les champs E_u sont parallèles au voisinage de x. Ceci contredit le fait que x appartient à Ω^c. □

7. STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE DE $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{N}$

On aura besoin du lemme suivant dont la preuve est directe :

LEMME 7.1.

1) *Une variété U^n, munie d'une connexion admettant n champs de directions indépendants parallèles, est plate. Plus précisément, sa structure affine est modelée sur* $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$.

2) *Pour $u \in \mathbb{R}P^{n-1}$, une direction de $\mathbb{R}^n$, soit D_u le champ de directions parallèle sur $\mathbb{R}^n$ qu'elle détermine. Soit h un homéomorphisme continu entre deux ouverts U_1 et U_2 de $\mathbb{R}^n$ envoyant $D_u \mid U_1$ sur $D_u \mid U_2$, pour toute direction u. Alors h est la restriction d'un élément de* Homet^n.

COROLLAIRE 7.2. — *Les feuilles de $\mathcal{P}$ sont plates et modelées sur* $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$.

7.1. Structure transverse de $\mathcal{N}$.

Une application d'holonomie locale de $\mathcal{N}$ peut se réaliser comme un homéomorphisme h entre deux ouverts de deux feuilles $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$.

D'après 6.4, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la somme $E_u \bigoplus N$ est intégrable (et de plus géodésique). Ceci se traduit simplement par le fait que l'holonomie h de $\mathcal{N}$ envoie la restriction de E_u à $\mathcal{P}_0$ sur la restriction de E_u à $\mathcal{P}_1$. Mais ces restrictions sont des champs de droites parallèles, qui déterminent les structures modelées sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$) des feuilles $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$. On applique le lemme précédent pour en déduire que h (lue dans des cartes affines) appartient à Homet^n.

Pour voir que $\mathcal{N}$ est lisse (dans Ω), il suffit de considérer des holonomies locales h_i, où $i = 1, \dots m - n$, entre un ouvert V de $\mathcal{P}_0$ et des ouverts d'autres feuilles $\mathcal{P}_i$, en position générale par rapport à $\mathcal{P}_0$. La feuille $\mathcal{N}(x)$ d'un point $x \in V$ est alors la sous-variété géodésique passant par les points $h_i(x)$ (de M) pour $i = 1, \ldots, m-n$. Le feuilletage $\mathcal{N}$ est donc complètement (localement) déterminé par les h_i. Il est donc lisse.

7.2. Courbures.

AFFIRMATION 7.3. — *Notons R le tenseur courbure de M. Si X, Y, Z sont des vecteurs tangents à M, dont au moins deux sont tangents à P, alors $R(X,Y)Z = 0$.*

De plus, il existe une forme bilinéaire antisymétrique q et forme symétrique p telles que pour X tangents à P et Y, Z tangents à M, on a :

$$R(Y,Z)X = q(Y,Z)X, \quad R(X,Y)Z + R(X,Z)Y = p(Y,Z)X.$$

Ces formes sont Γ-invariantes.

Preuve. — Soit K un compact de Ω sur lequel la norme $|\,.\,|$ est continue et X_i des champs $|\,.\,|$-unitaires et colinéaires aux champs de directions E_{e_i}. Soit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in D \cap \Gamma$. Alors $|A^k(X)|$ se comporte comme λ^k. La preuve des égalités énoncées consiste à choisir judicieusement A. Par exemple, pour montrer que $R(X_i, X_j)Z = 0$ pour tout $Z \in TM$, on se ramène d'abord au cas où Z est dans N. Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $A^k(R(X_i, X_j)Z)) = R(A^k X_i, A^k X_j)A^k Z$ se comporte comme $(\lambda_i \lambda_j)^k$. On choisit A de telle façon que $\lambda_i \lambda_j$ soit plus petit que $\lambda_k = \inf \lambda_\ell$. Donc si $R(X_i, X_j)Z \neq 0$, il aura un comportement décroissant, sous l'action de A, plus rapide que la décroissance super-stable (*i.e.* maximale) de A.

L'existence de q et p se démontre de la même façon. Par exemple pour montrer que si $X \in P$, alors $R(Y,Z)X$ est colinéaire à X, on se ramène au cas où $Y, Z \in N$ (d'après ce qu'on vient de montrer) et $X = X_i$. On constate alors que si X_i est super-stable par A, alors $R(Y,Z)X_i$ l'est également. On choisit ensuite A de telle manière que son fibré super-stable soit de dimension 1. □

7.3. Structure transverse de $\mathcal{P}$.

On démontre dans ce qui suit que ∇ est projetable sur l'espace quotient des feuilles de $\mathcal{P}$. Un champ X transverse à $\mathcal{P}$ qui est projetable sur l'espace local des feuilles (de $\mathcal{P}$) est caractérisé par le fait que $[X, Z]$ est tangent à P pour tout champ Z tangent à P. Ici, comme P est parallèle, on peut remplacer le dernier crochet $[X, Z]$ par la dérivée covariante $\nabla_Z X$ ou $\nabla_X Z$.

Soient donc X et Y deux champs tangents projetables et montrons qu'il en va de même pour $\nabla_X Y$. Soit donc Z un champ tangent à P. On a :

$$\nabla_Z(\nabla_X Y) = \nabla_X(\nabla_Z Y) + \nabla_{[Z,X]}Y + R(Z,X)Y.$$

Utilisant l'hypothèse que X et Y sont projetables, on voit que les deux dérivées covariantes du second membre appartiennent à P. Pour le terme de courbure, $R(Z,X)Y$, on sait d'après 7.3, que cela est un multiple de Z. Il s'ensuit que $\nabla_Z(\nabla_X Y)$ appartient à P et par suite que $\nabla_X Y$ est projetable.

Ceci démontre l'énoncé de 1.6 concernant la structure transverse affine de $\mathcal{P}$.

Remarque 7.4. — Le fait que $\mathcal{P}$ soit transversalement affine n'est pas conséquence du simple fait qu'il soit parallèle.

7.4. Les formes q et p.

Pour montrer que les formes q et p sont basiques ($=$ invariantes par holonomie $=$ projetables) il suffit de montrer que leurs dérivées covariantes ∇q et ∇p s'annulent sur TM. Remarquons d'abord que ces formes qui sont définies sur TM s'annulent sur P et on peut les voir comme des formes sur N. Leurs dérivés sont donc des tenseurs de la forme

$$T : TM \times N \times N \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La restriction d'un tel tenseur à $P \times N \times N$ est nul. En effet, on a

$$\lambda_i^k T(X_i, Y, Z) = T(A^k X_i, AY, AZ) = T(X_i, Y, Z)$$

où A est comme dans la preuve de 7.3.

Remarquons enfin que q et p sont clairement nulles si $\mathcal{N}$ aussi était parallèle. On peut se demander si la réciproque est vraie. Par exemple, si M est plate (donc q et p sont trivialement nulles), $\mathcal{N}$ est-il parallèle ? Il s'agit d'une question globale (*cf.* 9.1).

8. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1.6

Les objets Ω, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, q et p ont été construits et leurs propriétés démontrées dans les deux sections précédentes. On en tire en particulier que si $m = n$, alors $\Omega = M$. Lorsque $m = n+1$, $\mathcal{P}$ se prolonge par 3.5, en un feuilletage de codimension 1 de M. Ce prolongement reste parallèle puisque Ω est de mesure totale. Il garde également sa structure projective transverse, puisque la preuve de son existence n'utilise que le parallélisme de $\mathcal{P}$ et les relations de nullité de certaines courbures (la preuve n'utilisait pas l'existence de $\mathcal{N}$). De même par construction la forme p s'étend partout dans ce cas. La forme q est nulle pour des raisons de dimension.

Quant à l'affirmation sur l'ergodicité, elle se déduit directement de la théorie de la variété stable de Pesin [Pes]. Ici, la preuve peut être radicalement simplifiée, puisque les problèmes de continuité absolue ne se posent pas car les fibrés stables et instables sont différentiables.

9. STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE DANS LE CAS PLAT

Il est possible que le théorème 1.2 soit vrai sans aucune restriction de dimension lorsque l'on suppose que M est plate. Par cela, on veut dire que si M est une variété affine plate munie d'une action affine et préservant le volume d'un réseau Γ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (où $n \geq 3$) alors, à revêtement fini près, M est affinement difféomorphe à un produit $\mathbb{T}^n \times S$ où S est une variété affine plate et $\mathbb{T}^n$ est le tore affine (euclidien) de dimension n. De plus, l'action de Γ préserve les facteurs, et sur S elle préserve une métrique riemannienne.

Ceci est d'autant plus vraisemblable lorsque, de plus, $\dim M < 2n$, comme le suggèrent les développements antérieurs.

Commençons par une étude de la structure locale de $\mathcal{N}$, basée sur ces propriétés décrites dans 1.6.

9.1. Modèles locaux.

Soit V un sous-espace affine de $\mathbb{R}^m$. Notons $\mathcal{L}_V$ le feuilletage singulier de $\mathbb{R}^m$ dont les feuilles sont les plans affines de dimension $\dim(V) + 1$ qui contiennent V. Si $\mathrm{dir}(V)$ est le sous-espace vectoriel direction de V et $V = a + \mathrm{dir}(V)$, alors la feuille d'un point x est le plan affine $a + (\mathbb{R}x \oplus \mathrm{dir}(V))$. Le lieu singulier de $\mathcal{L}_V$ est exactement V.

AFFIRMATION 9.1. — *Dans un ouvert U de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, soit $\overline{\mathcal{N}}$ un feuilletage géodésique dont $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ est une feuille et qui est transverse au feuilletage parallèle $\overline{\mathcal{P}}$ défini par le facteur $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'holonomie de $\overline{\mathcal{N}}$ soit des restrictions d'homothéties de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

(i) *ou bien $\overline{\mathcal{N}}$ est parallèle, i.e. $\mathcal{N}$ est défini par le facteur $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$;*

(ii) *ou bien il existe un hyperplan affine V de $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ tel $\overline{\mathcal{N}}$ soit la restriction de $\mathcal{L}_V$ à U.*

Preuve. — Supposons que $\overline{\mathcal{N}}$ est défini au voisinage de 0. Pour $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ proches de 0, la feuille de $(x, 0)$ coupe $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ en un point $(f(x), y)$. Par hypothèse, f est dans Homet^n ; mais comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = \lambda_y x$ pour un certain λ_y. Choisissons une base $y_1, \dots, y_{m-n}$ de $\mathbb{R}^{m-n}$ proche de 0 et notons $\lambda_i = \lambda_{y_i}$. La feuille $\overline{\mathcal{N}}_x$ s'identifie alors à

$$\begin{aligned}&\Big\{(x,0) + \sum \alpha_i(\lambda_i x - x, y_i),\ (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}\Big\}\\ &\quad = \Big\{\Big(1 + \sum \alpha_i(\lambda_i - 1))x, \sum \alpha_i y_i\Big),\ (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}\Big\}.\end{aligned}$$

On définit le sous-espace affine V de $\mathbb{R}^{m-n}$ par

$$V = \Big\{\sum \alpha_i y_i,\ \sum \alpha_i(\lambda_i - 1) + 1 = 0\Big\}.$$

Il est clair que V est l'intersection commune de toutes les feuilles de $\overline{\mathcal{N}}$, qui est un hyperplan affine (de ces feuilles) dès que pour un certain i, $\lambda_i \neq 1$, *i.e.*, dès que les feuilles de $\overline{\mathcal{N}}$ ne sont pas parallèles à $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. □

Remarquons le fait suivant :

AFFIRMATION 9.2. — *Plaçons-nous dans le cas* (ii) *de l'affirmation précédente. Fixons V et écrivons-le $V = a + \mathrm{dir}(V)$. Soit H un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Le feuilletage $\overline{\mathcal{F}_H}$ de codimension 1 de $\mathbb{R}^m$, somme de $\mathcal{L}_V$ et du feuilletage par parallèles à H, est égal à $\mathcal{L}_{a+H\oplus \mathrm{dir}(V)}$. En particulier, le lieu singulier de $\overline{\mathcal{F}_H}$ contient celui de $\mathcal{L}_V$.*

Le lieu de tangence de tous les feuilletages $\overline{\mathcal{F}_H}$ lorsque H parcourt l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ est $a + \mathbb{R}^n \times \mathrm{dir}(V)$. De plus, connaissant tous les feuilletages $\overline{\mathcal{F}_H}$, on peut retrouver $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$.

9.2. Modèles globaux.

THÉORÈME 9.3. — *Soit M une variété affine plate compacte munie d'une action affine et préservant un volume d'un réseau Γ de* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ *($n \geq 3$). Alors, on a $\Omega = M$ et de plus le groupe d'holonomie* $\mathrm{Hol}(M)$ *de M (défini à conjugaison par une transformation affine près) est tel que :*

(i) *ou bien* $\mathrm{Hol}(M)$ *préserve les directions de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$,*

(ii) *ou bien* $\mathrm{Hol}(M)$ *préserve la direction de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et préserve le $(m-n-1)$ plan $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n-1} \times \{0\}$.*

De plus, lorsque M est unimodulaire et $m = n + 1$, alors seule la possibilité (i) *peut se présenter.*

Preuve. — Dans une carte affine de Ω, la structure de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ est comme précédemment. Mieux, dans une carte affine U de M, les feuilletages $\mathcal{F}_H$ (notations de 6.4) sont soit parallèles, soit isomorphes aux feuilletages $\overline{\mathcal{F}_H}$ décrits dans l'affirmation précédente. Mais la donnée de ces feuillages permet de reconstituer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$, sur la carte affine U de M.

Comme les feuilletages $\mathcal{F}_H$ sont non singuliers (dans M), on en déduit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ s'étendent à la carte U de M. On en tire de façon standard $\Omega = M$.

On déduit également de ce qui précède que tous les feuilletages $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_H$ sont analytiques dans M.

Considérons l'application développante $d : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^m$. Il résulte de l'analyticité que les relevés $\widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{\mathcal{N}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}_H}$ de tous les feuilletages précédents sont l'image réciproque d'un même modèle sur $\mathbb{R}^m$. En effet, si un modèle est valable quelque part, alors son image réciproque par d donne des feuilletages qui coïncident sur un ouvert de $\widetilde{M}$ avec $\widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{\mathcal{N}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}_H}$. Par analyticité, ils coïncident partout.

Il en résulte que le groupe d'holonomie respecte un modèle dans $\mathbb{R}^m$. Modulo une transformation affine (en fait une translation ici) on peut supposer, lorsque $\mathcal{N}$ n'est pas parallèle, que V est égal à $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n-1} \times \{0\}$. Ceci montre que l'une des conditions (i) ou (ii) doit se réaliser.

Si $m = n+1$ et $\mathcal{N}$ n'est pas parallèle, alors $\dim V = 0$, *i.e.* l'holonomie fixe un point, disons 0. Le flot radial $\overline{\phi^t}(x) = \exp(t)x$ sur $\mathbb{R}^m$ passe en un flot ϕ^t sur M. Donc M ne peut pas être unimodulaire, car ce flot contracte non trivialement le volume (pour $t > 0$). □

Il semble qu'en toute codimension, et sans condition d'unimodularité *a priori*, seule la possibilité (i) puisse avoir lieu.

10. DÉBUT DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1.2

Dans la présente section, on démontre 1.2 sous une hypothèse de «complétude» de l'application développante $d_{\mathcal{P}} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ de la structure transverse affine de $\mathcal{P}$. Mais d'abord :

10.1. Cas où $m = n$.

La variété M est alors affine, compacte, modelée sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$. D'après [Fri], elle est :

- soit un tore euclidien ;
- soit une variété de Hopf, *i.e.* $M = \mathbb{R}^n - \{0\}/x \mapsto \lambda x$, où $\lambda \neq \pm 1$.

Le groupe d'automorphismes affine de M est alors le groupe de Lie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agissant naturellement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Un réseau $\Gamma \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ agit *via* son inclusion. Mais Γ ne peut pas respecter une forme volume sur M. C'est un fait standard qu'on démontre de la manière suivante (cette preuve sera reproduite plus tard dans une situation plus compliquée).

Supposons le contraire et soit $\widetilde{\omega}$ le relèvement de cette forme dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Soit $\mathrm{d}v$ la forme volume canonique de $\mathbb{R}^n$ (elle est invariante par Γ mais pas par $x \mapsto \lambda x$). Écrivons $\widetilde{\omega} = f\,\mathrm{d}v$; alors $\theta = \mathrm{d}(\log f)$ est une 1-forme (fermée) Γ-invariante, bien définie sur M. On montre enfin qu'une telle forme n'existe pas (soit directement, soit en utilisant le lemme 10.1).

Désormais, nous supposerons $m = n + 1$.

10.1.1. Hypothèse de complétude.

On suppose maintenant que l'application développante $d_{\mathcal{P}} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ (de la structure transverse affine de $\mathcal{P}$) est une fibration sur son image et que de plus, le groupe d'holonomie de cette structure préserve une structure riemannienne sur cette image.

Ceci équivaut au fait que $\mathcal{P}$ soit défini par une forme fermée non singulière (image réciproque de la forme volume de la métrique invariante sur l'image de $d_{\mathcal{P}}$.

Deux cas peuvent alors se présenter :

- toutes les feuilles sont compactes, ou bien
- elles sont toutes denses.

Nous allons tout de suite démontrer le théorème 1.2 lorsque toutes les feuilles sont compactes. Le reste de la section sera consacré à se ramener à ce cas, en montrant que l'autre cas (où les feuilles sont denses) est absurde.

10.2. Cas où toutes les feuilles de $\mathcal{P}$ sont compactes.

Supposons que toutes les feuilles de $\mathcal{P}$ sont compactes. L'espace de ces feuilles est alors le cercle S^1, muni d'une structure affine Γ invariante.

Mais une structure affine sur S^1 est soit le quotient de $\mathbb{R}$ par une translation, soit le quotient de $]0, \infty[$ par une homothétie. Par nullité de la cohomologie $H^1(\Gamma)$ (*cf.* [Zim1]), Γ agit trivialement sur S^1, *i.e.* Γ préserve individuellement les feuilles de $\mathcal{P}$.

On peut désintégrer la forme volume Γ-invariante pour obtenir des formes invariantes sur les feuilles de $\mathcal{P}$. On se ramène au cas précédent $m = n$ (car les feuilles de $\mathcal{P}$ sont géodésiques et on peut donc parler de connexion induite) et on déduit qu'à revêtement fini près, les feuilles de $\mathcal{P}$ sont des tores euclidiens. Il en résulte qu'à indice fini près $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

De plus, M est la suspension d'un difféomorphisme affine A de $\mathbb{T}^n$, *i.e.* $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Comme $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ agit sur M, A doit être normalisé par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Ceci entraîne que $A = \pm 1$. Donc, à revêtement fini près, M est difféomorphe à $\mathbb{T}^n \times S^1$.

Reste à montrer, qu'on peut s'arranger (*i.e.* choisir S^1) de telle façon que l'action de Γ soit le produit de l'action usuelle sur $\mathbb{T}^n$ par l'action triviale sur S^1.

Effectivement ceci est vrai, car les actions de Γ sur les différentes feuilles de $\mathcal{P}$ sont conjuguées, et ce de manière unique pour des feuilles proches. Le point est que, deux actions affines de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^n$, sont uniquement et affinement conjuguées (l'unicité provient du fait que le centralisateur de l'action usuelle de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^n$ est trivial). En particulier, des actions proches, sont conjuguées, à l'aide de translations de $\mathbb{T}^n$ proches.

De façon plus détaillée, paramétrons les feuilles de $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}_t$ avec $t \in S^1$. Leurs structures affines (induites de M, car elles sont géodésiques) dépendent continûment de t et sont uniformisées à l'aide d'une famille continue de difféomorphismes affines $f_t : \mathcal{P}_t \to \mathbb{T}^n$. En transportant par f_t, on obtient une famille continue d'actions affines de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^n$. On peut donc remplacer f_t par g_t unique et dépendant continûment de t, tel que g_t conjugue les actions de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ respectivement sur $\mathcal{P}_t$ et $\mathbb{T}^n$. Donc

$$\phi : (x, t) \in \mathbb{T}^n \times S^1 \longrightarrow \big(g_t(x), t\big) \in \mathbb{T}^n \times S^1$$

conjugue l'action donnée de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ avec l'action produit.

Remarquons maintenant que dans Ω, on peut naturellement conjuguer les actions de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur des feuilles de $\mathcal{P}$ proches. On réalise cela en suivant le feuilletage transverse $\mathcal{N}$. En effet, l'application d'holonomie suivant $\mathcal{N}$, $h : \mathcal{P}_{t_1} \to \mathcal{P}_{t_2}$ entre deux feuilles de $\mathcal{P}$ proches dans Ω, établit une homothétie entre ces feuilles qui conjuguent les actions de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ dessus.

Par unicité de la conjugaison, il résulte que la conjugaison ϕ envoie $\{x\} \times S^1$ sur la feuille $\mathcal{N}(x)$. En particulier, $\mathcal{N}$ est défini partout, *i.e.* $\Omega = M$.

En résumé $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ agit de la façon usuelle sur $\mathbb{T}^n \times S^1$, en respectant une connexion ∇ telle que le facteur $\mathbb{T}^n$ soit parallèle et le facteur S^1 soit géodésique.

L'action respecte également la connexion plate ∇_0. La différence $T = \nabla - \nabla_0$ est un 2-tenseur invariant. On montre aisément que ce tenseur s'annule quand on l'applique à un couple de vecteurs dont l'un est tangent à $\mathbb{T}^n$. Le seul terme non trivial est $T(X, X)$ où X est le champ naturel sur S^1. Les orbites de X sont paramétriquement géodésiques au sens de ∇_0 et géométriquement géodésiques au sens de ∇. Il s'ensuit que $T(X, X) = \nabla_X X = fX$, où f est une fonction Γ invariante, donc équivalente à une fonction sur S^1. Cette fonction décrit le défaut de caractère géodésique paramétrique de S^1 ; en termes géométriques, f est liée au défaut de platitude de $\mathcal{N}$. □

Désormais, les feuilles de $\mathcal{P}$ seront supposées denses. Ceci entraîne en particulier que $\Omega = M$. Le reste de la présente section est consacré à montrer que cette supposition est absurde.

10.3. Forme volume de $\mathcal{P}$.

Soit ω la forme volume Γ invariante sur M. Comme $\mathcal{P}$ est défini par une forme fermée, on peut construire naturellement une forme volume Γ-invariante α sur les feuilles de $\mathcal{P}$. Si η est la forme définissant $\mathcal{P}$, on prendra $\alpha = i_X\omega$, où X est un vecteur tel que $\eta(X) = 1$.

D'autre part, étant donné qu'elles sont modelées sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$, les feuilles de $\mathcal{P}$ admettent une forme volume affine, définie à constante près. Sur le revêtement universel d'une telle feuille, il s'agit de l'image réciproque de la forme canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, le rapport de cette forme avec α est une fonction f définie à constante multiplicative près. La 1-forme $\beta = \mathrm{d}(\log f)$ est une forme fermée, bien définie sur M.

LEMME 10.1. — *Soit θ une 1-forme Γ-invariante sur M. Alors θ s'annule sur $T\mathcal{P}$.*

Preuve. — Sinon, dans un ensemble (ouvert) non négligeable $U \subset M$, $K_x = \mathrm{Ker}(\theta_x) \cap T_x\mathcal{P}$ est un hyperplan de $T_x\mathcal{P}$. Dans le repère r donné par la super-rigidité (4.2), K_x s'identifie à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi une application mesurable Γ-équivariante $U \to \mathbb{R}P^{*(n-1)}$. Ce dernier espace étant muni de l'action projective de Γ, l'image de cette application admet une mesure finie Γ-invariante. Le lemme de Furstenberg affirme que ceci est impossible (*cf.* [Zim1]). □

10.4. Structure euclidienne des feuilles de $\mathcal{P}$.

On déduit du lemme précédent que la forme volume affine des feuilles est bien définie. Clairement, cela veut dire que les feuilles sont modelées sur $(\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, *i.e.* la structure affine des feuilles est uniformisée par une structure euclidienne. Bien sûr, tout cela dépend continûment des données. En effet, la structure conforme des feuilles est déterminée par la donnée des champs parallèles E_u pour $u \in \mathbb{R}^n$ (5.3). Le facteur de distorsion conforme est déterminée par la forme volume α.

Par compacité de M, la structure plate des feuilles de $\mathcal{P}$ est complète.

Remarque 10.2. — Le fait que la structure affine des feuilles de $\mathcal{P}$ soit euclidienne est probablement valable dans une situation plus générale que celle qu'on est en train de regarder. Voici deux suggestions :

(i) Considérons la forme $\sigma = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$. C'est une forme volume mesurable sur $\mathcal{P}$, invariante par Γ. On pourrait montrer que si σ est localement intégrable, alors les feuilles sont unimodulaires.

(ii) Si les champs e_i étaient suffisamment réguliers, on pourrait considérer les dérivés $\nabla_{e_i} e_j$. En appliquant des éléments A dans Γ judicieusement choisis, on obtiendrait que ces dérivés sont nuls. Il s'ensuivrait en particulier que $\mathcal{P}$ est paramétré par une action de $\mathbb{R}^n$.

10.5. Stabilisateur des feuilles.

AFFIRMATION 10.3. — *Un sous-groupe d'indice fini de* Γ (*disons* Γ *lui-même pour simplifier*) *préserve individuellement les feuilles de* $\mathcal{P}$.

Considérons l'image réciproque $\widetilde{\Gamma}$ de Γ. Par définition, la projection $\widetilde{M} \to M$ induit une homomorphisme surjectif $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$; plus précisément, on a une suite exacte $\pi_1(M) \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$.

Comme $\widetilde{\Gamma}$ respecte toute la structure, on a un homomorphisme $\widetilde{\Gamma} \to \mathrm{Affin}(\mathbb{R})$ $(= \mathrm{Homet}^1)$. Comme le deuxième groupe dérivé de $\mathrm{Affin}(\mathbb{R})$ est trivial, le deuxième groupe dérivé $\widetilde{G} = [[\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}], [\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}]]$ agit trivialement sur $\mathbb{R}$ et ainsi préserve individuellement les feuilles de $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Maintenant l'épimorphisme $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ induit un épimorphisme de $\widetilde{G}$ sur le deuxième groupe dérivé de Γ. Mais ce dernier est d'indice fini dans Γ (*cf.* [Zim1]). Pour simplifier les notations, on supposera qu'il est égal à Γ ; on aura donc un épimorphisme $\widetilde{G} \to \Gamma$.

Retournons maintenant à M : le groupe $\widetilde{G}$ se projette surjectivement sur Γ. Donc Γ préserve individuellement les feuilles de $\mathcal{P}$.

10.6. Action de Γ sur une feuille de $\mathcal{P}$.

Toutes les feuilles de $\mathcal{P}$ sont difféomorphes et les actions de Γ sur ces feuilles sont naturellement isomorphes. Choisissons donc une feuille $\mathcal{P}_0$. Son revêtement universel affine est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On peut donc parler de la partie linéaire d'une transformation affine de $\mathcal{P}_0$. Ceci détermine un homomorphisme

$$\ell : \mathrm{Affin}(\mathcal{P}_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Il se trouve que ℓ restreint à Γ est l'identité : $\Gamma \to \Gamma \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Il suffit, pour le voir, de se rappeler qu'un élément $A \in \Gamma$ transforme les champs de directions parallèles E_u (où $u \in \mathbb{R}^n$) par la formule $A(E_u) = E_{A(u)}$.

À indice fini près (*i.e.* modulo la torsion) le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{P}_0)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$. L'action de $\mathrm{Affin}(\mathcal{P}_0)$ sur $\pi_1(\mathcal{P}_0)$ est la restriction de sa représentation *via* ℓ, dans $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ agit sur $\pi_1(\mathcal{P}_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Un sous-groupe discret non trivial de $\mathbb{R}^n$ est un réseau dans un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas de $\pi_1(\mathcal{P}_0)$, ce dernier sous-espace est Γ-invariant. Par irréductibilité de la représentation de Γ, on a : soit $\pi_1(\mathcal{P}_0)$ est trivial, soit $\pi_1(\mathcal{P}_0)$ est un réseau de $\mathbb{R}^n$. Dans ce dernier cas, toutes les feuilles de $\mathcal{P}$ sont compactes, ce qui contredit notre hypothèse. Reste donc à traiter le cas cas où les feuilles de $\mathcal{P}$ sont simplement connexes, *i.e.* isomorphes à $\mathbb{R}^n$. L'action de Γ sur une feuille s'obtient donc à partir d'une représentation $\Gamma \to \mathrm{Affin}(\mathbb{R}^n)$, dont la partie linéaire est l'identité. Il est connu, par la nullité de la 1-cohomologie de Γ (*cf.* [Zim1]), qu'une telle représentation est conjuguée à une représentation linéaire, *i.e.* admet un point fixe global. Ce point fixe est par ailleurs unique par irréductibilité.

Retournons au feuilletage $\mathcal{P}$. Ce qui précède nous permet de choisir un point de chaque feuille. En fait, si x est un de ces points choisis, alors les autres points des autres feuilles sont situés sur la feuille $\mathcal{N}(x)$ (de dimension 1). Donc, une feuille de $\mathcal{P}$ coupe la transversale $\mathcal{N}(x)$ en un seul point. Ceci implique que les feuilles de $\mathcal{P}$ sont compactes, contredisant notre hypothèse. □

11. HYPOTHÈSE DE COMPLÉTUDE

Nous allons vérifier dans ce qui suit notre hypothèse de complétude précédente 10.1.1, concernant l'application développante $d_{\mathcal{P}} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$.

11.1. Cas non plat.

Supposons que M n'est pas plate. Alors la forme bilinéaire symétrique basique $p : TM \times TM \to \mathbb{R}$ n'est pas identiquement nulle. Elle permet de construire une métrique riemannienne lisse, mais qui peut éventuellement s'annuler, sur les courbes transverses à $\mathcal{P}$, et ce de manière invariante par holonomie. On obtient également une mesure transverse μ, qui n'est pas nécessairement pleine, mais qui est finie sur les compacts (transverses).

Soit U l'ouvert de M où $p \neq 0$. Si $U = M$, le feuilletage $\mathcal{P}$ sera transversalement riemannien, *i.e.* défini par une forme fermée non singulière (voir [God]). Il en résulte que l'espace des feuilles $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{P}}$ s'identifie à $\mathbb{R}$ muni d'une métrique riemannienne $\pi_1(M)$-invariante. On peut aussi voir que cet espace se réalise comme un intervalle I de $\mathbb{R}$, muni de l'action affine du groupe d'holonomie de la structure transverse de $\mathcal{P}$, et qui respecte également une métrique riemannienne (sur I). Il est clair que le groupe d'holomonie ne contient pas d'homothéties (non triviales) qui fixent des points intérieurs de I. On peut facilement déduire de la co-compacité du groupe d'holonomie sur I qu'exactement l'un des deux cas suivants, peut se produire : ou bien $I = \mathbb{R}$, ou bien après conjugaison $I = \,]0, \infty[$. Dans le premier cas, le groupe d'holonomie agit par translation ; dans le second, par homothéties fixant 0. Dans les deux cas $\mathcal{P}$ est défini par une forme fermée.

Considérons maintenant le cas où $U \neq M$. Alors U est un ouvert saturé par $\mathcal{P}$, et les feuilles de $\overline{U}$ sont sans holonomie, car elle sont contenues dans le support de μ. Il découle alors du théorème de Sacksteder [God] que $\overline{U}$ ne contient pas de minimal exceptionnel, et par suite, $\overline{U} - U$ contient une feuille compacte. Comme, elle est sans holonomie, le théorème de stabilité de Reeb entraîne que cette feuille possède un voisinage produit maximal. Une feuille au bord de ce voisinage admet une holonomie triviale d'un côté. Comme $\mathcal{P}$ est transversalement affine, l'holonomie d'une telle feuille est triviale (des deux côtés). Par le théorème de stabilité, ceci contredit le fait que la feuille soit au bord d'un voisinage produit maximal. Il s'ensuit que toutes les feuilles de $\mathcal{P}$ sont compactes. Mais ceci suffit largement pour construire une mesure comme au premier cas, et ainsi d'arriver à la même description.

11.2. Cas plat.

On suppose maintenant que M est plate. Nous allons montrer qu'ou bien, on peut se ramener à une situation analogue au cas non plat ci-dessus, ou bien M est unimodulaire. Dans ce dernier cas la complétude découlera de 9.3 et du théorème 1.8 qui sera démontré au paragraphe suivant.

Notons comme ci-dessus ω la forme volume Γ-invariante. étant donnée que M est plate, elle possède une forme volume définie à constante près. L'obstruction à l'unimodularité de M est alors mesurée par une 1-forme fermée Γ-invariante β. D'après 10.1, β s'annule sur $T\mathcal{P}$.

Si β est identiquement nulle, M est unimodulaire (on appliquera alors 9.3 et 1.8). Sinon, on se sert de β comme de la forme quadratique p dans le cas non plat ci-dessus.

12. UN RÉSULTAT DE COMPLÉTUDE DE VARIÉTÉS AFFINES PLATES. PREUVE DE 1.8

Pour alléger l'exposé, on ne va traiter que le cas $p = 1$, et de plus en supposant que le groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}(M)$ est contenu dans

$$(\mathrm{Homet}^n \times \mathrm{Homet}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$$

(au lieu de $(\mathrm{Sim}^n \times \mathrm{Sim}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$). C'est en fait ce cas particulier qu'on appliquera pour achever la preuve de 1.2 dans le cas plat.

Notons que pour $p = 0$, la structure affine est euclidienne et que pour $n = p = 1$, la structure affine est modelée sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,1}$ (le plan lorentzien plat). La complétude dans ce cas est un résultat classique, qui n'est qu'un cas particulier du théorème d'Y. Carrière [Car].

12.1. Discompacité partielle.

La preuve de Carrière fonctionne dès que la discompacité du groupe d'holonomie est ≤ 1. Cela veut dire que sous l'action du groupe d'holonomie, un ellipsoïde plein dégénère vers un ellipsoïde de codimension ≤ 1.

Ce n'est pas le cas ici (lorsque $n > 1$) mais, ça l'est partiellement, *i.e.* en se limitant à certains sous-espaces. Ce seront les 2-plans affines de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de la forme $\pi = D \times \mathbb{R}$, où D est une droite affine de $\mathbb{R}^n$. On dira que π est un plan affine *scindé.*

Remarquons que la partie linéaire d'un élément

$$A \in (\mathrm{Homet}^n \times \mathrm{Homet}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$$

respecte la direction de π et y induit une transformation linéaire de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$. Comme A est unimodulaire, on a $\lambda_1^n \lambda_2 = 1$. Donc une seule des deux valeurs propres λ_1 et λ_2 a une valeur absolue < 1. On en déduit :

Affirmation 12.1. — *Soit $\pi = D \times \mathbb{R}$ un plan scindé et A_i une suite divergente d'éléments de* $(\mathrm{Homet}^n \times \mathrm{Homet}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$. *Soit ϵ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^{n+1}$ et supposons que la suite des ellipsoïdes $\epsilon_i = \frac{1}{2} A_i(\epsilon)$ passe par un compact K de π. Alors, quitte à passer à une sous-suite, ϵ_i converge vers une droite affine passant par K et dont la direction est soit* $\{0\} \times \mathbb{R}$, *soit la direction de D.*

12.2. Méthode de Carrière.

Soit $d : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application développante. Soit $\pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un plan affine scindé. Soit x un point de l'image réciproque $d^{-1}(\pi)$. Notons $C(x, \pi)$ la composante connexe de x dans $d^{-1}(\pi)$. Le contrôle de la dégénérescence ci-dessus permet d'appliquer la méthode de Carrière à des triangles contenus dans $C(x, \pi)$. Ceci donne, par le raisonnement de Carrière :

Affirmation 12.2. — *L'application d envoie difféomorphiquement $C(x, \pi)$ sur une bande semi complète de π, i.e. une partie de π de la forme $I \times \mathbb{R}$ ou de la forme $D \times I$, où I est un intervalle de D ou de $\mathbb{R}$.*

12.3. Scindement de $\widetilde{M}$.

Notons comme précédemment $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\widetilde{\mathcal{N}}$ les feuilletages de $\widetilde{M}$ déterminés respectivement par les facteurs $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$, et notons également $\widetilde{P}$ et $\widetilde{N}$ leurs fibrés tangents respectifs.

On peut définir intrinsèquement $C(x, u)$ où $u \in T_x\widetilde{\mathcal{P}}$ comme $C(x, \pi)$ où le plan affine π est défini, comme l'image *via* d du plan $\mathbb{R}u \bigoplus \widetilde{N}(x)$.

De l'affirmation précédente, on tire que la restriction du couple $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\widetilde{\mathcal{N}}$ à $C(x, u)$ (pour tous x et $u \in \widetilde{P}_x$) forme un produit global.

Il n'est pas difficile de voir, en faisant varier x dans $\widetilde{\mathcal{P}}_x$ et ensuite dans $\widetilde{M}$, que (dans $\widetilde{M}$) les feuilletages $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\widetilde{\mathcal{N}}$ forment un produit. On en déduit :

Affirmation 12.3. — *La variété $\widetilde{M}$ admet un scindement $\widetilde{M} = \widetilde{S} \times I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\widetilde{S}$ se développe dans* $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

12.4. Méthode de Fried.

La structure affine de $\widetilde{S}$ est modelée sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$. Les variétés compactes ayant ce type de structure ont été classifiées par D. Fried [Fri]. Il a démontré que leur revêtement universel est soit $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Ici, $\widetilde{S}$ ne se projette pas nécessairement sur une feuille compacte de M, mais la méthode de Fried peut bien s'y appliquer.

AFFIRMATION 12.4. — *L'application d envoie difféomorphiquement $\widetilde{S}$ sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ou $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \{0\}$).*

Preuve. — Pour $x \in \widetilde{M}$, on considère la boule ouverte maximale $B(x)$ contenue dans $\widetilde{\mathcal{P}}_x$. Ceci a un sens car la structure affine de $\widetilde{\mathcal{P}}_x$ est modelée sur $(\mathrm{Homet}^n, \mathbb{R}^n)$. On considère ensuite le voisinage $V(x) = B(x) \times I$, où I est l'intervalle de $\mathbb{R}$ donné par l'affirmation précédente. On notera

$$\tfrac{1}{2}V(x) = \left(\tfrac{1}{2}B(x)\right) \times I,$$

où $\frac{1}{2}B(x)$ est l'homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ de $B(x)$.

Remarquons que $V(y) = V(x)$ si $y \in \widetilde{\mathcal{N}}_x$ et que $V(x)$ s'envoie difféomorphiquement par d sur un objet analogue dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Si pour un x, $B(x)$ est de « rayon » infini, alors $\widetilde{S}$ est complète. Sinon, il existe $u_x \in T_x\widetilde{P}$ tel que $\exp_x tu_x$ existe et appartient à $B(x)$ pour $t \in [0, T_x[$; mais $\exp_x T_x u_x$ n'existe pas (dans $\widetilde{M}$).

La compacité de M entraîne la propriété standard suivante, qui traduit le fait que la géodésique définie par u_x passe une infinité de fois dans un petit voisinage d'un certain point. Il existe y et une suite infinie $A_i \in \pi_1(M)$ et $t_i \to T_x$ tels que

$$\exp_x t_i u_x \in V_i = A_i\left(\tfrac{1}{2}V(y)\right) = \tfrac{1}{2}V\left(A_i(y)\right).$$

On peut en fait supposer que $y = x$.

L'idée de Fried était la suivante. On constate que pour i grand, V_i devient très petit (comparé à $V(x)$). En effet, V_i est nécessairement contenu dans $V(x)$, car sinon la géodésique $\exp_x tu_x$ existerait au-delà de T_x dans $V(x) \cup 2V_i$. De plus le centre de V_i (ou plutôt son âme) passe près de $\exp_x t_i u_x$, donc le rayon (horizontal) de V_i tend vers 0.

Il en résulte que $W_i = A_i^{-1}(V(x))$ contient largement $A_i^{-1}(V_i) = \frac{1}{2}V(x)$. Évidemment, les W_i se développent injectivement dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

De plus les W_i convergent vers une partie $D(x) \times I$, qui se développent injectivement sur le produit d'un demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^n$ par I. On en déduit en particulier que la géodésique $\exp_x tu_x$, définie par la propriété ci-dessus, est unique. De plus lorsque y parcourt $\widetilde{\mathcal{P}}_x$, les images par d des géodésiques $\exp_y tu_y$, convergent vers un même point de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, disons 0 (on démontre cela en considérant l'intersection des demi-espaces $\overline{d(D(y))}$ où $y \in \widetilde{\mathcal{P}}_x$). On en déduit alors que $\widetilde{\mathcal{P}}_x$ se développe difféomorphiquement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. □

Il s'ensuit que $\widetilde{M}$ est affinement difféomorphe à $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I$.

12.5. Fin de la preuve.

En définitive, M est un quotient affine de l'un des espaces suivants : $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^n \times I$ ou $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'intervalle I est affinement diffómorphe à $\mathbb{R}$, $]0, \infty[$ ou $]0, 1[$. Il s'agit d'exclure tous les cas sauf celui de $\mathbb{R}^{n+1}$. La preuve consiste simplement à montrer que les stabilisateurs des autres espaces dans $(\mathrm{Homet}^n \times \mathrm{Homet}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$ n'y agissent pas de façon co-compacte.

Les éléments de $(\mathrm{Homet}^n \times \mathrm{Homet}^1) \cap \mathrm{SAffin}(n+1, \mathbb{R})$ sont paramétrés par $(\lambda, t, s) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, agissant sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par

$$\big((\lambda, t, s), (x, y)\big) \longmapsto (\lambda x + t, \lambda^{-n} y + s).$$

Les éléments préservant $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ sont de la forme $(\lambda, s, 0)$. Le groupe qu'ils engendrent n'agit pas uniformément sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$. On traite de la même façon les autres cas.

Remarquons maintenant que tout élément (λ, t, s) avec $\lambda \neq 1$ admet un point fixe dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Il en découle que $\pi_1(M)$ ne contient que des translations, *i.e.* M est un tore euclidien.

Remarque 12.5. — La partie linéaire de

$$\big(\mathrm{Sim}(\mathbb{R})^n \times \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^p)\big) \cap \mathrm{SAffin}(n + p, \mathbb{R})$$

est un produit direct $K \cdot T$, où K est compact et T est un groupe diagonal de dimension 1 (un groupe à un paramètre). Rappelons que le rang d'un sous-groupe algébrique de $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ est la dimension du tore déployé maximal qu'il contient. C'est une notion algébrique, différente de la discompacité, surtout pour des groupes non semi-simples. La preuve précédente suggère, par analogie au critère de complétude de Carrière, « discompacité $\leq 1 \Rightarrow$ complétude », que la condition rang ≤ 1 de la clôture de Zariski du groupe d'holonomie d'une variété affine plate unimodulaire, assure sa complétude.

BIBLIOGRAPHIE

[BL] Y. Benoist, F. Labourie, Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Invent. Math., 111 (1993), 285–308.

[Car] Y. Carrière, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, Invent. Math., 95 (1989), 615–628.

[Fer] R. Feres, Connections preserving actions of lattices in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, Israel. J. Math., 2, 135 (1992), 1–21.

[Fer2] R. FERES, Actions of discrete linear groups and Zimmer's conjecture, J. Diff. Geom., 42 (1995), 554–576.

[Fri] D. FRIED, Closed similarity manifolds, Comment. Math. Helv., 55 (1988), 555–565.

[Goe] E. GOETZE, Connection preserving actions of connected and discrete Lie groups, J. Diff. Geom., 40 (1994), 595–620.

[God] C. GODBILLON, Feuilletages, Études géométriques, Birkhäuser, 1991.

[Gro] M. GROMOV, Rigid transformation groups, Géometrie différentielle, D. Bernard et Choquet–Bruhat. éd., Travaux en cours 33, Hermann, Paris, 1988.

[Kob] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Springer–Verlag, 1972.

[Lew] J. LEWIS, The algebraic hull of a measurable cocycle, preprint.

[Pes] Y.B. PESIN, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, Uspekhi Mat. Nauk., 32, 4 (1997), 55–114; english transl. Russian Math. Surveys 32, 4 (1977), 55–112.

[P–R] G. PRASAD, M.S. RAGHUNATHAN, Cartan subgroups and lattices in semisimple groups, Ann. Math., 96 (1972), 296–317.

[Sol] B. SOLOMON, On foliations of $\mathbb{R}^{n+1}$ by minimal hypersurfaces, Comment. Math. Helvetici, 61 (1986), 67–83.

[Thu] W. THURSTON, The geometry and topology of 3–manifolds, Lecture notes, Princeton University, 1978.

[Zeg1] A. ZEGHIB, Feuilletages géodésiques appliqués, Math. Annalen, 298 (1994), 729–759.

[Zeg2] A. ZEGHIB, Geodesic foliations in Lorentz 3–manifolds, preprint, 1994.

[Zeg3] A. ZEGHIB, Le groupe affine d'une variété riemannienne compacte, Comm. Ana. Geom., 5 (1997), 123–135.

[Zim1] R. ZIMMER, On connection–preserving actions of discrete linear groups, Erg. Th. Dynam. Systems, 6 (1986), 639–644.

[Zim2] R. ZIMMER, Ergodic theory and semisimple Lie groups, Birkhäuser, Boston, 1984.

[Zim3] R. ZIMMER, Lattices in semisimple groups and invariant geometric structures on compact manifolds, Discrete Groups in Geometry and Analysis, R. Howe, ed., Birkhäuser, Boston, 1987, 152–210.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1996,
accepté le 8 novembre 1996.

Abdelghani ZEGHIB,
École Normale Supérieure de Lyon
UMPA, UMR 128 CNRS
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).
zeghib@umpa.ens–lyon.fr