

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERTRAND LEMAIRE

Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 4 (1996), p. 1027-1056

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_4_1027_0

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES ORBITALES SUR $GL(N)$ ET CORPS LOCAUX PROCHES

par Bertrand LEMAIRE

Introduction.

Soient F un corps local non archimédien, ϖ_F une uniformisante de F et N un entier ≥ 2 . On note \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F et \mathcal{P}_F l'idéal maximal de \mathcal{O}_F . Soit $\underline{G} = GL(N)$ et soit $K_F = \underline{G}(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe ouvert compact maximal standard de $G = \underline{G}(F)$. Si Γ est un sous-groupe ouvert compact de G , on note $\mathcal{H}(G, \Gamma)$ l'algèbre de Hecke des fonctions complexes Γ -biinvariantes à support compact sur G munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar $dg = dg_F$ sur G telle que $\text{vol}(K_F, dg) = 1$. Soit \mathcal{B}_F la sous-algèbre d'Iwahori de $M(N, \mathcal{O}_F)$ formée des matrices triangulaires supérieures modulo \mathcal{P}_F et, pour chaque entier $i \geq 1$, soient $B_F^i = 1 + \varpi_F^i \mathcal{B}_F$ le sous-groupe de congruence modulo \mathcal{P}_F^i de $B_F = \mathcal{B}_F^\times$ et $\mathcal{H}_F^i = \mathcal{H}(G, B_F^i)$. Soient F' un corps local non archimédien et r un entier ≥ 1 . Supposons donnés un isomorphisme d'anneaux $\lambda : \mathcal{O}_F / \mathcal{P}_F^r \rightarrow \mathcal{O}_{F'} / \mathcal{P}_{F'}^r$ et une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F' telle que $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$. Alors la description explicite de \mathcal{H}_F^r donnée par Howe [Ho] permet de définir un isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \rightarrow \mathcal{H}_{F'}^r$, cf. [Le] Chap. 1. La dépendance de ζ à l'égard des choix de λ , ϖ_F , $\varpi_{F'}$ est élucidée dans [HH] Appendix 1.

Soit $G_e \subset G$ l'ouvert des éléments elliptiques (i.e. de polynôme caractéristique irréductible sur F). Pour $y \in G_e$ et $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ localement constante à support compact, soit

$$J^G(f, y) = \int_{F^\times \backslash G} f(g^{-1}yg) \frac{dg}{dz}$$

Mots-clés : Algèbre de Hecke – Intégrale orbitale – Corps locaux proches.
Classification math. : 22E50.

où $dz = dz_F$ est la mesure de Haar sur F^\times telle que $\text{vol}(\mathcal{O}_F^\times, dz) = 1$. Pour chaque entier $i \geq 1$, soit $K_F^i = 1 + \varpi_F^i M(N, \mathcal{O}_F)$ le sous-groupe de congruence modulo \mathcal{P}_F^i de K_F . Fixons un entier $n \geq 1$. Dans *A submersion principle and its applications* [HC2], Harish-Chandra, grâce à une ingénieuse formule pour les intégrales orbitales elliptiques sur G , prouve la constance locale de l'application

$$G_e \rightarrow \mathcal{H}(G, K_F^n)^*, y \mapsto J^G(\cdot, y).$$

C'est cette formule que nous reprenons ici pour transporter les intégrales orbitales elliptiques de $\underline{G}(F)$ à $\underline{G}(F')$. Précisément, fixé un élément $\gamma \in G_e$ en position standard (i.e tel que le sous-groupe parahorique H de G normalisé par $F[\gamma]^\times$ satisfait la double inclusion $B_F \subset H \subset K_F$), on produit un entier $r(\gamma, n) \geq n$ et un voisinage ouvert compact $B_F^{r(\gamma, n)}$ -biinvariant $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma, n)$ de γ dans G_e tels que si $r \geq r(\gamma, n)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_e$ où $1_{\mathcal{V}'} = \zeta(1_{\mathcal{V}})$. L'idée consiste à étudier localement, grâce aux techniques de [BK], la submersion $\zeta_P : G \times P \rightarrow G$, $(g, p) \mapsto g^{-1}\gamma gp$, où P est un sous-groupe parabolique de G . Injectée dans la formule d'Harish-Chandra, cette étude conduit à un calcul explicite des intégrales orbitales $J^G(f, \gamma)$, $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$.

Enfin, par un argument classique de descente des intégrales orbitales, on étend le résultat à tout élément $\gamma \in G$ semi-simple (au sens de [B] §9) régulier.

Un tel résultat est intéressant dans la mesure où il permet, suivant l'idée de Kazhdan [K], de comparer les corps locaux de caractéristique > 0 aux corps locaux non archimédiens de caractéristique nulle (si F est de caractéristique $p > 0$, toute extension finie F' du corps p -adique \mathbf{Q}_p de même corps résiduel que F et d'indice de ramification $e(F'/\mathbf{Q}_p) \geq r$, est r -proche de F). On l'a déjà utilisé dans [Le] Chap. 4 pour montrer la conjecture de Howe pour \underline{G} en caractéristique > 0 , à partir de la preuve de Clozel en caractéristique nulle [C]. Plus généralement, tout énoncé relatif aux intégrales orbitales de fonctions dans une algèbre de Hecke de niveau n fixé (lemme fondamental par exemple) vrai en caractéristique nulle doit pouvoir, suivant ce principe, s'étendre à la caractéristique > 0 (et réciproquement).

L'article s'organise comme suit : dans la section 2, on reprend la submersion d'Harish-Chandra [HC2] pour établir, grâce à des lemmes de

filtration montrés dans la section 1, une formule explicite pour les intégrales orbitales $J^G(f, \gamma)$ des fonctions $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$ (Lemmes 2.2.1 et 2.2.2). Cette formule implique la constance de l'application $G_e \rightarrow \mathcal{H}(G, K_F^n)^*$, $y \mapsto J^G(., y)$ au voisinage de γ dans G_e (Proposition 2.3). La notion de corps locaux proches est introduite dans la section 3 : on y prouve le théorème principal, d'abord dans le cas elliptique en position standard (Théorème 3.3) puis dans le cas semi-simple régulier (Théorèmes 3.5 et 3.6). On donne aussi une variante concrète du résultat (Remarque 3.6).

Je remercie J.-L. Waldspurger pour sa preuve du lemme 3.5.

1. Préparatifs techniques.

1.1. Rappelons quelques notations de [BK] 1.4. Soient $\gamma \in G_e$, E/F la sous-extension de $M(N, F)$ engendrée par γ et $e = e(E/F)$ l'indice de ramification de E/F . Comme $[E : F] = N$, il existe un unique \mathcal{O}_F -ordre héréditaire \mathcal{G} dans $M(N, F)$ normalisé par E^\times . Soit $J_{\mathcal{G}}$ le radical de Jacobson de \mathcal{G} et soit $v_{\mathcal{G}} : M(N, F) \rightarrow \mathbf{Z}$ la "valuation" sur $M(N, F)$ définie par $v_{\mathcal{G}}(x) = \max\{i \in \mathbf{Z} : x \in J_{\mathcal{G}}^i\}$. On pose $v = v_{\mathcal{G}}(\gamma)$.

Pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, soit $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_k(\gamma, \mathcal{G})$ l' \mathcal{O}_F -ordre (et sous- $(\mathcal{O}_E \times \mathcal{O}_E)$ -bimodule) dans $M(N, F)$ défini par

$$\mathcal{N}_k = \{g \in \mathcal{G} : \gamma g - g\gamma \in J_{\mathcal{G}}^k\}.$$

Soit $k_0 = k_0(\gamma, \mathcal{G})$ l'exposant critique de γ dans \mathcal{G} donné par

$$k_0 = \max\{k \in \mathbf{Z} : \mathcal{N}_k \not\subset \mathcal{O}_E + J_{\mathcal{G}}\}.$$

Soient $k_1 = k_0 - v \geq 0$ et $\bar{k}_1 = \frac{1}{e} k_1$. Pour les notions de *strate*, *strate pure*, *strate simple*, on renvoie à [BK] 1.5.

Si Γ est un sous-groupe algébriquement fermé de G , on note $L(\Gamma)$ l'algèbre de Lie de Γ .

1.2. Soit P un sous-groupe parabolique de G . Comme E ne contient pas d'élément nilpotent non nul, l'application

$$\zeta = \zeta_P : G \times P \rightarrow G, (g, p) \mapsto g^{-1}\gamma gp,$$

est partout submersive, cf. [HC2] Theorem 1. On note

$$\pi = \pi_P : L(G) \times L(P) \rightarrow L(G), (x, p) \mapsto x - \gamma^{-1}x\gamma + p,$$

l'application linéaire tangente à ζ au point $(1, 1)$.

Fixons un caractère $\psi_F : F \rightarrow \mathbf{C}^\times$ de conducteur \mathcal{P}_F (i.e. trivial sur \mathcal{P}_F mais pas sur \mathcal{O}_F). D'où une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\Psi_F = \psi_F \circ \text{tr}_F$ sur $L(G)$, où tr_F dénote la trace usuelle. Si R est un \mathcal{O}_F -réseau dans $L(G)$, on note R^* l' \mathcal{O}_F -réseau dual $\{g \in L(G) : \Psi_F(gx) = 1, \forall x \in R\}$. Cette définition est indépendante du choix du caractère ψ_F de conducteur \mathcal{P}_F .

Soit $\Lambda = \Lambda_\gamma$ l' \mathcal{O}_F -réseau dans $L(G)$ défini par

$$\Lambda = (\mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0})^*.$$

Comme $(J_G^{1+i})^* = J_G^{-i}$ ($i \in \mathbf{Z}$), la double inclusion $J_G \subset \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} \subset J_G^{1-k_1}$ entraîne la double inclusion $J_G^{k_1} \subset \Lambda \subset \mathcal{G}$.

LEMME 1. — *L'application π induit, par restriction pour chaque $m \in \mathbf{Z}$, un morphisme surjectif de \mathcal{O}_F -modules*

$$\pi_m : J_G^{me} \times (L(P) \cap J_G^{me+k_1}) \rightarrow \varpi_F^m \Lambda.$$

Preuve. — Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $J_G^{me} = \varpi_F^m \mathcal{G}$. Il suffit donc de montrer la surjectivité de π_0 . Comme γ normalise \mathcal{G} , l'image par π de l' \mathcal{O}_F -réseau $\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_G^{k_1})$ de $L(G) \times L(P)$ est contenue dans \mathcal{G} . Soit

$$\bar{\pi} : \mathcal{G} \times \left((L(P) \cap J_G^{k_1}) + J_G^{e+k_1} \right) \rightarrow \mathcal{G}$$

l'application déduite de π par restriction. On a

$$\begin{aligned} \left((L(P) \cap J_G^{k_1}) + J_G^{e+k_1} \right)^* &= \left\{ x \in J_G^{1-(e+k_1)} : \Psi_F(x(L(P) \cap J_G^{k_1})) = 1 \right\} \\ &= (L(N) + J_G^{1-k_1}) \cap J_G^{1-(e+k_1)} \\ &= (L(N) \cap J_G^{1-(e+k_1)}) + J_G^{1-k_1} \end{aligned}$$

car $L(P)^\perp = L(N)$; d'autre part

$$\begin{aligned} \left((1 - \text{Ad}_G(\gamma^{-1}))\mathcal{G} + J_G^{e+k_1} \right)^* &= \left\{ x \in J_G^{1-(e+k_1)} : x - \gamma^{-1}x\gamma \in J_G \right\} \\ &= \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)} \mathcal{N}_{e+k_0} \\ &= \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)} + \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} \end{aligned}$$

car $\mathcal{N}_{e+k_0} = \mathcal{O}_E + \mathcal{P}_E^e \mathcal{N}_{k_0}$, [BK] Lemma 1.4.8. Par suite

$$\begin{aligned} (\text{Im}(\bar{\pi}))^* &= \left((L(P) \cap J_G^{k_1}) + J_G^{e+k_1} \right)^* \cap \left((1 - \text{Ad}_G(\gamma^{-1}))\mathcal{G} + J_G^{e+k_1} \right)^* \\ &= \left((L(N) \cap J_G^{1-(e+k_1)}) + J_G^{1-k_1} \right) \cap \left(\mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)} + \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} \right). \end{aligned}$$

Si $b + z = a + x$ pour des éléments $b \in L(N) \cap J_G^{1-(e+k_1)}$, $z \in J_G^{1-k_1}$, $a \in \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)}$ et $x \in \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}$, alors $y = x - z \in J_G^{1-k_1}$ et comme $\mathcal{P}_E^i \mathcal{G} = J_G^i$ ($i \in \mathbf{Z}$) et $b = a + y$ est nilpotent, $a \in E \cap J_G^{1-k_1} = \mathcal{P}_E^{1-k_1}$ donc $a + x \in \mathcal{P}_E^{1-k_1} + \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} = \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}$. D'où l'égalité

$$\text{Im}(\bar{\pi})^* = \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}$$

et par dualité

$$\text{Im}(\bar{\pi}) = \Lambda.$$

En définitive,

$$\text{Im}(\pi_0) + \varpi_F J_G^{k_1} = \text{Im}(\pi_0) + \varpi_F \Lambda = \Lambda$$

d'où

$$\text{Im}(\pi_0) = \Lambda$$

grâce au lemme de Nakayama. □

Soit $H = \mathcal{G}^\times$ le groupe multiplicatif de \mathcal{G} et pour chaque entier $i \geq 1$, soit H^i le sous-groupe distingué $1 + J_G^i$ de H .

LEMME 2. — Pour chaque entier $m \geq 1 + \overline{k_1}$, l'application ζ induit par restriction une application surjective

$$\zeta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \rightarrow \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda), (g, p) \mapsto g^{-1} \gamma g p,$$

et il existe un système de coordonnées

$$\beta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \rightarrow J_G^{me} \times (L(P) \cap J_G^{me+k_1})$$

tel que $\pi_m \circ \beta_m = \lambda_m \circ \zeta_m$ où $\lambda_m : \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda) \rightarrow \varpi_F^m \Lambda$, $g \mapsto \gamma^{-1} g - 1$.

Preuve. — Soit un entier $m \geq 1 + \overline{k_1}$. Pour tout couple $(x, p) \in J_G^{me} \times (L(P) \cap J_G^{me+k_1})$,

$$\zeta_m(1 + x, 1 + p) = \gamma(1 + \pi_m(x, p) + \eta_m(x, p))$$

avec $\eta_m(x, p) = xp - (\gamma^{-1}x\gamma)(x+p+xp) + \left(\sum_{i=2}^{+\infty} (-1)^i \gamma^{-1}x^i\gamma\right) (1+x)(1+p)$.

Comme

$$\eta_m \left(J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1}) \right) \subset J_{\mathcal{G}}^{2me} \subset \varpi_F^{m+1}\Lambda,$$

la surjectivité de ζ_m découle du lemme 1.2.1 et du lemme de Nakayama appliqué à l'égalité

$$\text{Im}(\pi_m + \eta_m) + \varpi_F \text{Im}(\pi_m) = \text{Im}(\pi_m).$$

L'application π induit, par restriction et passage au quotient, un morphisme surjectif de k_F -espaces vectoriels où $k_F = \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ (Lemme 1.2.1)

$$\bar{\pi}_0 : (\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})) / \varpi_F (\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})) \rightarrow \Lambda / \varpi_F \Lambda.$$

Fixons un sous- \mathcal{O}_F -module \mathcal{M} de $\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})$ tel que l'espace quotient $\mathcal{M} / \varpi_F \mathcal{M}$ soit un supplémentaire de $\ker(\bar{\pi}_0)$. Fixons aussi une famille (finie) $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ de représentants des classes de $\mathcal{M} \bmod \varpi_F \mathcal{M}$. Ainsi, tout élément $z \in \Lambda$ possède un unique développement hensélien de la forme

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_F^i \pi_0(x_i(z), p_i(z)), \quad (x_i(z), p_i(z)) \in \mathcal{I}.$$

On pose alors $\mu_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_F^i (x_i(z), p_i(z))$. Si maintenant z est un quelconque élément de $L(G)$, $\varpi_F^k z \in \Lambda$ pour un entier k suffisamment grand et l'on pose $\mu(z) = \varpi_F^{-k} \mu_0(\varpi_F^k z)$ (définition clairement indépendante du choix de k). Vérifions que l'application $\mu : L(G) \rightarrow L(G) \times L(P)$ ainsi définie est bien F -linéaire. Supposons par l'absurde qu'il existe un couple $(z, z') \in L(G) \times L(G)$ et un élément $\alpha \in F$ tels que $\mu(\alpha z + z') \neq \alpha \mu(z) + \mu(z')$. Soit $d_0 \in \mathbf{Z}$ le plus grand entier d tel que $\mu(\alpha z + z') - (\alpha \mu(z) + \mu(z')) \in J_{\mathcal{G}}^{d_0} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{d_0+k_1})$. Alors

$$(x_0, p_0) = \varpi_F^{-d_0} (\mu(\alpha z + z') - (\alpha \mu(z) + \mu(z'))) \in \mathcal{M} - \varpi_F \mathcal{M}$$

et

$$\pi(\mu(\alpha z + z') - (\alpha \mu(z) + \mu(z'))) = \varpi_F^{d_0} \pi_0((x_0, p_0)) \neq 0,$$

contradiction.

En définitive, on a construit une section linéaire $\mu : L(G) \rightarrow L(G) \times L(P)$ de l'application $\pi : L(G) \times L(P) \rightarrow L(G)$ telle que $\mu(\varpi_F^d \Lambda) \subset J_G^{de} \times (L(P) \cap J_G^{de+k_1})$ pour tout $d \in \mathbf{Z}$. Soit

$$\beta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \rightarrow J_G^{me} \times (L(P) \cap J_G^{me+k_1})$$

l'application définie par $\beta_m(1+x, 1+p) = (1 + \mu \circ \eta_m)(x, p)$. Pour tout couple $(x, p) \in J_G^{me} \times (L(P) \cap J_G^{me+k_1})$ on a bien

$$\begin{aligned} \pi_m \circ \beta_m(1+x, 1+p) &= (\pi_m + \eta_m)(x, p) \\ &= \lambda_m(\gamma(1 + (\pi_m + \eta_m)(x, p))) \\ &= \lambda_m \circ \zeta_m(1+x, 1+p), \end{aligned}$$

et la relation

$$\begin{aligned} (x, p) \in J_G^{de} \times (L(P) \cap J_G^{de+k_1}) \\ \Rightarrow \eta_m(x, p) \in \varpi_F^{d+1} \Lambda \\ \Rightarrow \mu \circ \eta_m(x, p) \in J_G^{(d+1)e} \times (L(P) \cap J_G^{(d+1)e+k_1}) \end{aligned}$$

pour tout entier $d \geq m$ assure la bijectivité de β_m . □

COROLLAIRE — Pour chaque entier $m \geq 1 + \overline{k_1}$ et pour tout couple $(x_i, p_j) \in N_G(\mathcal{G}) \times P$, l'application ζ induit par restriction une application surjective

$$\zeta_m^i : H^{me} x_i \times (P \cap H^{me+k_1}) p_j \rightarrow x_i^{-1} \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda) x_i p_j, (g, p) \mapsto g^{-1} \gamma g p,$$

et il existe un système de coordonnées

$$\beta_m^i : H^{me} x_i \times (P \cap H^{me+k_1}) p_j \rightarrow J_G^{me} \times (L(x_i P x_i^{-1}) \cap J_G^{me+k_1})$$

tel que $\pi_m^i \circ \beta_m^i = \lambda_m^i \circ \zeta_m^i$ où

$$\begin{cases} \pi_m^i : J_G^{me} \times (L(x_i P x_i^{-1}) \cap J_G^{me+k_1}) \rightarrow \varpi_F^m \Lambda, (x, p) \mapsto x - \gamma^{-1} x \gamma + p \\ \lambda_m^i : x_i^{-1} \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda) x_i p_j \rightarrow \varpi_F^m \Lambda, g \mapsto \gamma^{-1} x_i g p_j^{-1} x_i^{-1} - 1. \end{cases}$$

Preuve. — Soient un entier $m \geq 1 + \overline{k_1}$ et un couple $(x_i, p_j) \in N_G(\mathcal{G}) \times P$. Comme $x_i \in N_G(H^{me+k_1}) = N_G(\mathcal{G})$, $x_i(P \cap H^{me+k_1}) p_j = (x_i P x_i^{-1} \cap H^{me+k_1}) x_i p_j$. Ainsi, en rappelant la notation $\zeta = \zeta_P$ introduite en 1.2, pour tout couple $(g, p) \in H \times P$, on a

$$\begin{aligned} \zeta_P(g x_i, p p_j) &= x_i^{-1} g^{-1} \gamma g x_i p p_j \\ &= x_i^{-1} (g^{-1} \gamma g) (x_i p x_i^{-1}) x_i p_j \\ &= x_i^{-1} \zeta_{x_i P x_i^{-1}}(g, x_i p x_i^{-1}) x_i p_j. \end{aligned}$$

Il suffit donc de remplacer dans le lemme 1.2.2 le sous-groupe parabolique P de G par son conjugué $x_i P x_i^{-1}$ et le corollaire 1.2.2 est prouvé. \square

2. Principe de submersion et “calcul” des intégrales orbitales elliptiques.

2.1. Soient P_0 le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de \underline{G} et A_0 le tore maximal diagonal de \underline{G} . Soient $P_0 = \underline{P}_0(F)$, $A_0 = \underline{A}_0(F)$ et $dp = dp_F$ la mesure de Haar sur P_0 telle que $\text{vol}(P_0 \cap K_F, dp) = 1$. Il existe une unique application linéaire $C_c^\infty(G \times P_0) \rightarrow C_c^\infty(G)$, $a \mapsto \phi_{\gamma,a}$, telle que pour toute fonction $a \in C_c^\infty(G \times P_0)$,

$$\int_G \int_{P_0} a(g,p) f(g^{-1} \gamma g p) dg dp = \int_G \phi_{\gamma,a}(g) f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, [HC1] Theorem 11. On fixe un entier $n \geq 1$. Soient κ la fonction caractéristique de $K_F \times (P_0 \cap K_F^n)$ et $\phi_\gamma = \phi_{\gamma,\kappa}$. Soit $\Delta(\varpi_F) \subset A_0$ l'ensemble des éléments de la forme $\text{diag}(1, \varpi_F^{\alpha_2}, \dots, \varpi_F^{\alpha_N})$, α_i entier, $0 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_N$. Comme $\text{Ad}_G(\delta^{-1})$, $\delta \in \Delta(\varpi_F)$, contracte le radical unipotent de P_0 , la décomposition de Cartan $G = \coprod_{\delta \in \Delta(\varpi_F)} F^\times K_F \delta K_F$ entraîne, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$, la formule d'intégration ([HC2] Theorem 3)

$$J^G(f, \gamma) = \sum_{\delta \in \Delta(\varpi_F)} \frac{\text{vol}(F^\times K_F \delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\text{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)} \int_G \phi_\gamma(g) \bar{f}(\delta^{-1} g \delta) dg$$

où $\bar{f} \in C_c^\infty(G)$ est définie par $\bar{f}(x) = \int_{K_F} f(g^{-1} x g) dg$ ($x \in G$). Puisque l'application $y \mapsto \phi_y$ est localement constante sur G_e ([HC2] Lemma 1), la formule ci-dessus implique la constance locale de l'application $G_e \rightarrow \mathcal{H}(G, K_F^n)^*$, $y \mapsto J^G(y, \cdot)$.

2.2. Dans ce numéro, on suppose que H est un sous-groupe parahorique standard de G , i.e. qu'il satisfait la double inclusion $B_F \subset H \subset K_F$. L'idée est de calculer la fonction ϕ_γ en terme du réseau Λ défini dans la section 1. Pour ce faire, on introduit une décomposition de G intermédiaire entre la décomposition de Cartan et la décomposition de Bruhat-Tits, adaptée à la filtration de H par les sous-groupes H^i , $i \geq 1$.

Pour $i \in \{1, \dots, N - 1\}$, soit $s_{i,F} \in G$ la matrice de transposition échangeant les lignes i et $i + 1$. Soit S_F le groupe engendré par les $s_{i,F}$,

$i = 1, \dots, N - 1$, et soit $D(\varpi_F) \subset A_0$ le groupe des éléments de la forme $\text{diag}(\varpi_F^{\alpha_1}, \dots, \varpi_F^{\alpha_N})$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Soit aussi l'ensemble $D^+(\varpi_F) = \langle \varpi_F \rangle \cdot \Delta(\varpi_F) \subset D(\varpi_F)$ où $\langle \varpi_F \rangle$ est identifié au groupe des éléments de la forme $\text{diag}(\varpi_F^\alpha, \dots, \varpi_F^\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{Z}$. Si $g \in G$, il existe un unique couple $(s, \delta) \in S_F \times D(\varpi_F)$ tel que $B_F g B_F = B_F s \delta B_F$ (décomposition de Bruhat-Tits); soit $s' \in S_F$ tel que $\delta' = s'^{-1} \delta s' \in D^+(\varpi_F)$; l'inclusion $S_F \subset K_F$ entraîne l'égalité $B_F g K_F = B_F s s' \delta' K_F$. On a donc montré que $G = \cup_{w \in S_F \Delta(\varpi_F)} F^\times B_F w K_F$ où $S_F \Delta(\varpi_F) = \{s\delta : s \in S_F, \delta \in \Delta(\varpi_F)\}$.

Fixons (arbitrairement) une partie $\Sigma \subset S_F \Delta(\varpi_F)$ telle que $G = \coprod_{w \in \Sigma} F^\times H w K_F$ et pour chaque $s \in S_F$, notons $\Delta(\varpi_F, s) \subset \Delta(\varpi_F)$ l'ensemble des $\delta \in \Delta(\varpi_F)$ tels que $s\delta \in \Sigma$.

Soit η la fonction caractéristique de $H \times (P_0 \cap K_F^n)$. Pour chaque $s \in S_F$, il existe une unique application linéaire $C_c^\infty(G \times P_0) \rightarrow C_c^\infty(G)$, $a \mapsto \phi_{\gamma, a}^s$ telle que pour toute fonction $a \in C_c^\infty(G \times P_0)$,

$$\int_G \int_{P_0} a(g, p) f(g^{-1} \gamma g s p s^{-1}) dg dp = \int_G \phi_{\gamma, a}^s(g) f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, [HC1] Theorem 11; on pose $\phi_\gamma^s = \phi_{\gamma, \eta}^s$.

LEMME 1. — Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$J^G(f, \gamma) = \sum_{s \in S_F} \sum_{\delta \in \Delta(\varpi_F, s)} \frac{\text{vol}(F^\times H \delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\text{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp) \text{vol}(H, dg)} \int_G \phi_\gamma^s(g) \bar{f}(\delta^{-1} s^{-1} g s \delta) dg.$$

Preuve. — On reprend les arguments de la preuve du théorème 3 de [HC2]. Soit $\delta \in \Delta(\varpi_F)$. Comme $\delta^{-1} p \delta \in K_F^n$ pour $p \in P_0 \cap K_F^n$, pour chaque $s \in S_F$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$\begin{aligned} & \int_H f(\delta^{-1} s^{-1} g^{-1} \gamma g s \delta) dg \\ &= \text{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)^{-1} \int_H \int_{P_0 \times K_F^n} f(\delta^{-1} s^{-1} g^{-1} \gamma g s p \delta) dg dp \\ &= \text{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)^{-1} \int_G \phi_\gamma^s(g) f(\delta^{-1} s^{-1} g s \delta) dg. \end{aligned}$$

Or, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,

$$J^G(f, \gamma) = \sum_{s \in S_F} \sum_{\delta \in \Delta(\varpi, s)} \frac{\text{vol}(F^\times H \delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\text{vol}(H, dg)} \int_H \bar{f}(\delta^{-1} s^{-1} g^{-1} \gamma g s \delta) dg$$

et comme K_F^n est distingué dans K_F , $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n) \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$.
D'où le lemme 2.2.1. \square

Pour chaque $s \in S_F$, soit dp^s la mesure de Haar sur $P_0^s = sP_0s^{-1}$ image de la mesure dp par l'isomorphisme de variétés ϖ_F -adiques $P_0 \rightarrow P_0^s$, $p \mapsto sps^{-1}$. Ainsi $\text{vol}(P_0^s \cap K_F, dp^s) = \text{vol}(P_0 \cap K_F, dp) = 1$.

LEMME 2. — Soit $m = m(\gamma, n)$ le plus petit entier $\geq \sup\{1 + \bar{k}_1, n - \bar{k}_1\}$. Pour chaque $s \in S_F$ et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_G \phi_\gamma^s(g) f(g) dg = d(\gamma, s) \sum_{(i,j)} \int_{x_i^{-1} \gamma (1 + \varpi_F^m \Lambda) x_i p_j^s} f(g) dg$$

avec

$$d(\gamma, s) = \frac{\text{vol}(H^{me}, dg) \text{vol}(P_0^s \cap H^{me+k_1}, dp^s)}{\text{vol}(1 + \varpi_F^m \Lambda, dg)},$$

les couples (x_i, p_j^s) parcourant un système de représentants dans $H \times (P_0^s \cap K_F^n)$ des classes de $H^{me} \backslash H \times (P_0^s \cap H^{me+k_1}) \backslash (P_0^s \cap K_F^n)$.

Preuve. — Soient $s \in S_F$ et $f \in C_c^\infty(G)$. La condition sur m entraînant l'inclusion $H^{me+k_1} \subset K_F^n$ et puisque s normalise K_F^n , on a

$$\begin{aligned} \int_G \phi_\gamma^s(g) f(g) dg &= \int_H \int_{P_0 \cap K_F^n} f(g^{-1} \gamma g p^s) dg dp^s \\ &= \sum_{(i,j)} \int_{H^{me} x_i} \int_{(P_0^s \cap H^{me+k_1}) p_j^s} f(g^{-1} \gamma g p^s) dg dp^s, \end{aligned}$$

les couples (x_i, p_j^s) étant pris comme dans l'énoncé. On conclut grâce au corollaire 1.2.2 appliqué au sous-groupe parabolique P_0^s de G pour chaque couple (x_i, p_j^s) . \square

2.3. Le G -entrelacement $\{g \in G : g^{-1}(\gamma + J_G^{1+k_0})g \cap (\gamma + J_G^{1+k_0}) \neq \emptyset\}$ de la strate simple $[\mathcal{G}, -v, -(1+k_0), \gamma]$ coïncidant avec $E^\times(1 + \mathcal{P}_E \mathcal{N}_{k_0})$ ([BK] Theorem 1.5.8), le centralisateur dans G de tout élément $y \in \gamma + J_G^{1+k_0}$ est compact modulo F^\times donc $\gamma + J_G^{1+k_0} \subset G_e$. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma, n) \subset \gamma + J_G^{1+k_0}$ le voisinage ouvert compact de γ dans G_e donné

par $\mathcal{V} = \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)$, l'entier $m = m(\gamma, n)$ étant défini dans l'énoncé du lemme 2.2.2.

PROPOSITION. — Soit $y \in \mathcal{V}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$J^G(f, y) = J^G(f, \gamma).$$

Preuve. — Quitte à conjuguer γ dans G , on peut supposer que H est un sous-groupe parahorique standard de G . Soit $E_1 = F[y]$ l'extension de F engendrée par y . Il est clair que $v_G(y) = v$ et que E_1^\times normalise l'ordre \mathcal{O}_F -ordre \mathcal{G} . Comme les strates $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), y]$ et $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), \gamma]$ sont pures et équivalentes, $\mathcal{P}_{E_1}^d \mathcal{N}_k(y, \mathcal{G}) = \mathcal{P}_E^d \mathcal{N}_k(\gamma, \mathcal{G})$ pour tout $d \in \mathbf{Z}$ et tout entier $k \geq 1 + k_0$, [BK] Prop. 2.1.3. Par suite, $k_0(y, \mathcal{G}) = k_0$ car $\mathcal{O}_{E_1} \subset \mathcal{N}_{1+k_0}(\gamma, \mathcal{G}) \subset \mathcal{O}_E + J_G$, donc $k_1(y, \mathcal{G}) = k_1$ et $\Lambda_y = \Lambda$. On conclut grâce aux lemmes 2.2.1 et 2.2.2 en remarquant que l'inclusion $(1 + \varpi_F^m \Lambda)^2 \subset 1 + \varpi_F^m \Lambda$ entraîne l'égalité $y(1 + \varpi_F^m \Lambda) = \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)$. \square

3. Corps locaux proches.

3.1. Rappel des résultats de Howe.

Fixons un entier $r \geq 1$. Si (e_1, \dots, e_N) désigne la base canonique de F^N , soient s_{ϖ_F} la matrice définie par $s_{\varpi_F}(e_1) = \varpi_F e_N, s_{\varpi_F}(e_N) = \varpi_F^{-1} e_1, s_{\varpi_F}(e_i) = e_i$ pour $2 \leq i \leq N - 1$, et t_{ϖ_F} la matrice définie par $t_{\varpi_F}(e_1) = \varpi_F e_N, t_{\varpi_F}(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq N$. Ainsi les $s_{i,F}, s_{\varpi_F}, t_{\varpi_F}$ engendrent le groupe de Weyl affine $W(\varpi_F)$. Pour $x = s_{i,F}$ ($i = 1, \dots, N - 1$), $x = s_{\varpi_F}, t_{\varpi_F}, t_{\varpi_F}^{-1}$ ou $x \in B_F$, on pose

$$f_x = \frac{1}{\text{vol}(B_F^r x B_F^r, dg)} \mathbf{1}_{B_F^r x B_F^r}.$$

Ces fonctions f_x engendrent l'algèbre de Hecke \mathcal{H}_F^r , [Ho] Chap. 3, Theorem 2.1. De plus, Howe donne une liste de relations définissant \mathcal{H}_F^r , obtenues grâce au lemme suivant, que nous utiliserons (implicitement) très souvent par la suite.

LEMME [Ho] Chap. 3, Prop. 2.2. — Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G . Pour $g \in G$, notons f_g^Γ la fonction caractéristique de $\Gamma g \Gamma$ divisée par le volume de $\Gamma g \Gamma$. Soient $x, y \in G$ tels que

$$\frac{\text{vol}(\Gamma x \Gamma, dg) \text{vol}(\Gamma y \Gamma, dg)}{\text{vol}(\Gamma, dg)} = \text{vol}(\Gamma x y \Gamma, dg).$$

Alors $f_x^\Gamma * f_y^\Gamma = f_{xy}^\Gamma$.

3.2. On reprend les résultats du chapitre 1 de [Le] tels qu'ils ont été résumés et éclaircis par Henniart dans [HH] Appendix 1.

Soit F' un corps local non archimédien. Supposons donnés un isomorphisme d'anneaux $\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \rightarrow \mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$, et une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F' vérifiant l'égalité $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$. Soit $\tilde{\lambda} : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \rightarrow \mathcal{P}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^{r+1}$ l'isomorphisme de groupes défini par $\tilde{\lambda}(\varpi_F x) = \varpi_{F'} \lambda(x)$ pour $x \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$. Cet isomorphisme est compatible avec les structures de modules sur $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$ et $\mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$, au sens où $\tilde{\lambda}(ax) = \lambda(a)\tilde{\lambda}(x)$ pour $(a, x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}$. D'où un isomorphisme de groupes $\beta = \beta_{\lambda, \tilde{\lambda}} : B_F/B_F^r \rightarrow B_{F'}/B_{F'}^r$, défini comme suit composante par composante : pour tout $b = (b_{i,j}) \in B_F$, $\beta(b \bmod B_F^r) = b' \bmod B_{F'}^r$, où $b' = (b'_{i,j}) \in B_{F'}$ est tel que $b'_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r = \lambda(b_{i,j} \bmod \mathcal{P}_F^r)$ si $i \leq j$ et $b'_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1} = \tilde{\lambda}(b_{i,j} \bmod \mathcal{P}_F^{r+1})$ si $i > j$.

Alors il existe un (unique) isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \rightarrow \mathcal{H}_{F'}^r$, tel que $\zeta(f_{s_{i,F}}) = f_{s_{i,F'}}$ ($i = 1, \dots, N-1$), $\zeta(f_{s_{\varpi_F}}) = f_{s_{\varpi_{F'}}}$, $\zeta(f_{t_{\varpi_F}}) = f_{t_{\varpi_{F'}}}$, $\zeta(f_{t_{\varpi_F}^{-1}}) = f_{t_{\varpi_{F'}^{-1}}}$ et pour tout $b \in B_F$, $\zeta(f_b) = f_{b'}$ où $b' \in B_{F'}$ est tel que $\beta(b \bmod B_F^r) = b' \bmod B_{F'}^r$, cf. [Le] pour les détails.

Plus précisément, soit $T_r(F) = (\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r, \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}, \epsilon_F)$ le triplet introduit par Deligne dans [D] §1, où $\epsilon_F : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \rightarrow \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^r$ est l'épimorphisme naturel. Un isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$ est la donnée d'un isomorphisme d'anneaux $\tau : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \rightarrow \mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$, et d'un isomorphisme de groupes $\tilde{\tau} : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \rightarrow \mathcal{P}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^{r+1}$ tels que $\tilde{\tau}(ax) = \tau(a)\tilde{\tau}(x)$ pour $(a, x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\epsilon_{F'} \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \epsilon_F$. Ainsi, les choix de λ , ϖ_F , $\varpi_{F'}$ induisent (via λ et $\tilde{\lambda}$) un isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$, la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$, étant équivalente à l'égalité $\epsilon_{F'} \circ \tilde{\lambda} = \lambda \circ \epsilon_F$ ⁽¹⁾. Clairement, cet isomorphisme ne dépend pas vraiment de ϖ_F et $\varpi_{F'}$ (vérifiant la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$) mais seulement de $\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$. Mais pour tout couple d'uniformisantes $(\alpha_F, \alpha_{F'})$ induisant le même isomorphisme de triplets $(\lambda, \tilde{\lambda}) : T_r(F) \simeq T_r(F')$, on obtient le même isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \rightarrow \mathcal{H}_{F'}^r$. En effet, soit $(\alpha_F, \alpha_{F'})$ un tel couple, donc de la forme $(\alpha_F, \alpha_{F'}) = (\varpi_F u_F, \varpi_{F'} u_{F'})$ avec $\lambda(u_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = u_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$, et soit

⁽¹⁾ Réciproquement, tout isomorphisme de triplets $(\tau, \tilde{\tau}) : T_r(F) \simeq T_r(F')$ est de la forme $\tilde{\tau}(\alpha_F) = \alpha_{F'} \tau(a)$ ($a \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$) pour un choix d'uniformisantes α_F de F et $\alpha_{F'}$ de F' telles que $\tilde{\tau}(\alpha_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}) = \alpha_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$.

$\eta : \mathcal{H}_F^r \rightarrow \mathcal{H}_{F'}^r$, l'isomorphisme d'algèbres induit par $\lambda, \alpha_F, \alpha_{F'}$. Il est clair que $\zeta(f_x) = \eta(f_x)$ pour $x = s_{i,F}$ ($i = 1, \dots, N - 1$) et $x \in B_F$. Comme B_F normalise B_F^r , pour tout $x \in B_F$, on a l'égalité $f_{s_{\omega_F} x} = f_{s_{\omega_F}} * f_x$. Or $s_{\alpha_F} = s_{\omega_F} b$ avec $b = \text{diag}(u_F, 1, \dots, 1, u_F^{-1}) \in B_F$, par conséquent

$$\zeta(f_{s_{\alpha_F}}) = \zeta(f_{s_{\omega_F}} * f_b) = \zeta(f_{s_{\omega_F}}) * \zeta(f_b) = f_{s_{\omega_{F'}}} * f_{b'} = f_{s_{\omega_{F'}}} b'$$

pour tout $b' \in B_{F'}$ tel que $b' \bmod B_{F'}^r = \beta(b \bmod B_F^r)$. Comme on peut prendre $b' = \text{diag}(u_{F'}, 1, \dots, 1, u_{F'}^{-1})$, on obtient

$$\zeta(f_{s_{\alpha_F}}) = f_{s_{\alpha_{F'}}} = \eta(f_{s_{\alpha_F}}).$$

De la même manière, on montre que ζ coïncide avec η sur $f_{t_{\alpha_F}}$ et $f_{t_{\alpha_F}^{-1}}$. En définitive, ζ et η coïncident sur tous les générateurs de \mathcal{H}_F^r , donc $\zeta = \eta$.

Mentionnons pour finir la remarque d'Henniart relative au cas $N = 1$, [HH] Appendix 1 : soient $U_F = \mathcal{O}_F^\times$ et $U_{F'}^r = 1 + \mathcal{P}_F^r$. Les choix de $\lambda, \omega_F, \omega_{F'}$ induisent un isomorphisme de groupes $\lambda^\times : F^\times / U_F^r \rightarrow F'^\times / U_{F'}^r$ qui coïncide avec λ sur U_F et envoie ω_F sur $\omega_{F'}$. Pour $N = 1$, $GL(N, F) = F^\times$ et l'isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \rightarrow \mathcal{H}_{F'}^r$, s'obtient à partir de λ^\times en identifiant \mathcal{H}_F^r avec $\mathbf{C}[F^\times / U_F^r]$ et $\mathcal{H}_{F'}^r$ avec $\mathbf{C}[F'^\times / U_{F'}^r]$. Or dans [D] 3.4.3, Deligne montre que l'isomorphisme de triplets $(\lambda, \lambda) : T_r(F) \simeq T_r(F')$ induit un isomorphisme de groupes $F^\times / U_F^r \simeq F'^\times / U_{F'}^r$, qui n'est autre que λ^\times .

3.3. On montre dans ce numéro le théorème principal de l'article. Comme en 2.2, on suppose que H est un sous-groupe parahorique standard de G (i.e., quitte à conjuguer γ dans G , on suppose que γ est en position standard). Nous reviendrons en 3.6 sur cette hypothèse.

Si Ω est une partie compacte B_F^r -biinvariante de $\underline{G}(F)$, on note (abusivement) $\zeta(\Omega)$ la partie de $\underline{G}(F')$ définie par $\mathbf{1}_{\zeta(\Omega)} = \zeta(\mathbf{1}_\Omega)$; on étend naturellement cette notation à toute partie Ω union infinie de doubles classes $B_F^r g B_F^r, g \in \underline{G}(F)$.

LEMME 1. — Soit Γ un sous-groupe compact de $\underline{G}(F)$ contenant B_F^r . Alors $\Gamma' = \zeta(\Gamma)$ est un sous-groupe compact de $\underline{G}(F')$ contenant $B_{F'}^r$, et ζ induit par restriction un isomorphisme d'algèbres (et même d'anneaux) $\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma) \simeq \mathcal{H}(\underline{G}(F'), \Gamma')$.

Preuve. — Il est clair que Γ' est une partie compacte $B_{F'}^r$ -biinvariante de $\underline{G}(F')$, stable par multiplication (si $x' \in \Gamma', y' \in \Gamma'$, alors $f_{x'} * f_{y'}$ est une fonction ≥ 0 supportée par $B_{F'}^r x' B_{F'}^r y' B_{F'}^r$; or $\zeta^{-1}(\text{Supp}(f_{x'} * f_{y'})) = \text{Supp}(\zeta^{-1}(f_{x'}) * \zeta^{-1}(f_{y'})) \subset \Gamma$ donc $B_{F'}^r x' B_{F'}^r y' B_{F'}^r \subset \zeta(\Gamma) = \Gamma'$) et

contenant $B_{F'}^r$. Quant à la structure de groupe, il reste à vérifier que $x' \in \Gamma' \Rightarrow x'^{-1} \in \Gamma'$. Soit $x' = b'_1 w_{\varpi_{F'}} b'_2 \in \Gamma'$, $b'_i \in B_{F'}$ ($i = 1, 2$), $w_{\varpi_{F'}} \in W(\varpi_{F'})$, et pour $i = 1, 2$, soit $b_i \in \zeta^{-1}(b'_i B_{F'}^r)$. Puisque B_F normalise $B_{F'}^r$, on a

$$\zeta^{-1}(B_{F'}^r x' B_{F'}^r) = B_F^r b_1 w_{\varpi_F} b_2 B_F^r \subset \Gamma,$$

donc $b_2^{-1} w_{\varpi_F}^{-1} b_1^{-1} \in \Gamma$ et

$$x'^{-1} \in B_{F'}^r b_2^{-1} w_{\varpi_{F'}}^{-1} b_1^{-1} B_{F'}^r = \zeta(B_F^r b_2^{-1} w_{\varpi_F}^{-1} b_1^{-1} B_F^r) \subset \Gamma'.$$

Soit $e_\Gamma \in \mathcal{H}_F^r$ l'idempotent $\text{vol}(\Gamma, dg_F)^{-1} \mathbf{1}_\Gamma$. Comme $\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma) = e_\Gamma * \mathcal{H}_F^r * e_\Gamma$,

$$\zeta(\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma)) = \zeta(e_\Gamma) * \mathcal{H}_F^r * \zeta(e_\Gamma)$$

avec $\zeta(e_\Gamma) = \text{vol}(\Gamma', dg_{F'})^{-1} \mathbf{1}_{\Gamma'}$. Donc $\zeta(\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma)) = \mathcal{H}(\underline{G}(F'), \Gamma')$. \square

Soit $H' = \zeta(H)$ et soit \mathcal{G}' l' $\mathcal{O}_{F'}$ -ordre héréditaire dans $M(N, F')$ tel que $\mathcal{G}'^\times = H'$. Soit $W(\varpi_F) \rightarrow W(\varpi_{F'})$, $w_{\varpi_F} \mapsto w_{\varpi_{F'}}$, l'isomorphisme de groupes défini par $s_{i,F} \mapsto s_{i,F'}$ ($i = 1, \dots, N-1$), $s_{\varpi_F} \mapsto s_{\varpi_{F'}}$ et $t_{\varpi_F} \mapsto t_{\varpi_{F'}}$.

Les lemmes suivants nous permettront plus loin (cf. la preuve du théorème 3.3) de transporter les formules d'intégration des lemmes 2.2.1 et 2.2.2 de F à F' .

LEMME 2. — Soient $d \in \{1, \dots, r\}$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $g \in \underline{G}(F)$ et une décomposition $K_F^d g K_F^d = \prod_{\sigma \in I} K_F^d g_\sigma$. Il existe une décomposition $\zeta(K_F^d g K_F^d) = \prod_{\sigma \in I} K_{F'}^d g'_\sigma$ telle que pour chaque $\sigma \in I$,

$$\zeta(K_F^d g_\sigma w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d g'_\sigma w_{\varpi_{F'}}^{-1} H^{re}.$$

Preuve. — Soit une décomposition $g = k_1 \delta_{\varpi_F} k_2$, $k_i \in K_F$ ($i = 1, 2$), $\delta_{\varpi_F} \in D^+(\varpi_F)$. Alors $K_F^d g K_F^d = k_1 K_F^d \delta_{\varpi_F} K_F^d k_2$ et l'on peut fixer un système de représentants $\{k_\sigma\}_{\sigma \in I}$ dans K_F^d des classes de $(K_F^d \cap \delta_{\varpi_F}^{-1} K_F^d \delta_{\varpi_F}) \backslash K_F^d$ tel que pour chaque $\sigma \in I$, $K_F^d g_\sigma = k_1 K_F^d \delta_{\varpi_F} k_\sigma k_2 = K_F^d k_1 \delta_{\varpi_F} k_\sigma k_2$. Fixons aussi un système de représentants $\{h_\mu\}_{\mu \in J}$ dans H^{re} des classes de $(H^{re} \cap w_{\varpi_F} K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}) \backslash H^{re}$ et une décomposition

$$K_F^d \delta_{\varpi_F} K_F^d k_2 w_{\varpi_F}^{-1} H^{re} = \prod_{\rho \in R} K_F^d x_\rho H^{re}.$$

Alors ([S] Prop. 3.1)

$$\mathbf{1}_{K_F^d \delta_{\omega_F} K_F^d} * \mathbf{1}_{K_F^d k_2 w_{\omega_F}^{-1} H^{re}} = \sum_{\rho \in R} m_\rho \mathbf{1}_{K_F^d x_\rho H^{re}}$$

où

$$m_\rho = |\{(\sigma, \mu) \in I \times J : K_F^d x_\rho = K_F^d \delta_{\omega_F} k_\sigma k_2 w_{\omega_F}^{-1} h_\mu\}|.$$

Pour chaque $\rho \in R$, la relation ([S] Prop. 3.2)

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F) m_\rho &= |\{(\sigma, \mu) \in I \times J : K_F^d x_\rho H^{re} \\ &= K_F^d \delta_{\omega_F} k_\sigma k_2 w_{\omega_F}^{-1} h_\mu H^{re}\}| \end{aligned}$$

entraîne l'égalité

$$m_\rho = \frac{\text{vol}(K_F^d w_{\omega_F}^{-1} H^{re}, dg_F)}{\text{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F)} |\{\sigma \in I : K_F^d x_\rho H^{re} = K_F^d \delta_{\omega_F} k_\sigma k_2 w_{\omega_F}^{-1} H^{re}\}|.$$

Posons $\alpha_\rho = |\{\sigma \in I : K_F^d x_\rho H^{re} = K_F^d \delta_{\omega_F} k_\sigma k_2 w_{\omega_F}^{-1} H^{re}\}|$. On a $|I| = \sum_{\rho \in R} \alpha_\rho$.

Pour $i = 1, 2$, soit $k'_i \in \zeta(K_F^d k_i)$, et soit un système de représentants $\{k'_\sigma\}_{\sigma \in I}$ dans $K_{F'}^d$, des classes de $(K_{F'}^d \cap \delta_{\omega_{F'}}^{-1} K_{F'}^d \delta_{\omega_{F'}}) \backslash K_{F'}^d$. Des relations

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{K_{F'}^d \delta_{\omega_{F'}} K_{F'}^d} * \mathbf{1}_{K_{F'}^d k'_2 w_{\omega_{F'}}^{-1} H'^{re}} &= \zeta(\mathbf{1}_{K_F^d \delta_{\omega_F} K_F^d}) * \zeta(\mathbf{1}_{K_F^d k_2 w_{\omega_F}^{-1} H^{re}}) \\ &= \sum_{\rho \in R} m_\rho \zeta(\mathbf{1}_{K_F^d x_\rho H^{re}}) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{vol}(K_{F'}^d w_{\omega_{F'}}^{-1} H'^{re}, dg_{F'})}{\text{vol}(\zeta(K_F^d x_\rho H^{re}), dg_{F'})} = \frac{\text{vol}(K_F^d w_{\omega_F}^{-1} H^{re}, dg_F)}{\text{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F)} \quad (\rho \in R),$$

on déduit, pour chaque $\rho \in R$, l'égalité

$$|\{\sigma \in I : K_{F'}^d \delta_{\omega_{F'}} k'_\sigma k'_2 w_{\omega_{F'}}^{-1} H'^{re} = \zeta(K_F^d x_\rho H^{re})\}| = \alpha_\rho.$$

Par conséquent, quitte à permuter les éléments du système $\{k'_\sigma\}_{\sigma \in I}$, on peut supposer que pour chaque $\sigma \in I$,

$$\zeta(K_F^d \delta_{\omega_F} k_\sigma k_2 w_{\omega_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d \delta_{\omega_{F'}} k'_\sigma k'_2 w_{\omega_{F'}}^{-1} H'^{re}.$$

Alors les $g'_\sigma = k'_1 \delta_{\omega_{F'}} k'_\sigma k'_2$ ($\sigma \in I$) vérifient les propriétés voulues. □

LEMME 3. — Soient $d \in \{1, \dots, r\}$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $g \in \underline{G}(F)$, et soit $g' \in \underline{G}(F')$ tel que $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$. Pour tout $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G})$,

$$\text{vol}(\zeta(hH^{re}) \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \text{vol}(hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F).$$

Preuve. — Pour tout $x \in \underline{G}(F)$, l'hypothèse $B_F \subset H \subset K_F$ et la condition $d \leq r$ assurent que $K_F^d x H^{re}$ est une partie H^{re} -biinvariante de $\underline{G}(F)$. Comme K_F^d normalise H^{re} , le lemme 3.1 entraîne l'égalité $\zeta(K_F^d w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$. De même, pour $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G}) = N_{\underline{G}(F)}(H^{re})$, l'hypothèse $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$ entraîne l'égalité $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} h H^{re}) = K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} \zeta(h H^{re})$. Soit $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G})$ et soit $h' \in \zeta(h H^{re}) \subset N_{\underline{G}(F')}(\mathcal{G}')$. Alors $\zeta(h H^{re}) = h' H'^{re}$, $\zeta(h^{-1} H^{re}) = h'^{-1} H'^{re}$, et

$$\begin{aligned} h H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1} \neq \emptyset &\iff K_F^d w_{\varpi_F}^{-1} H^{re} \cap K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} h^{-1} H^{re} \neq \emptyset \\ &\iff K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re} \cap K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} h'^{-1} H'^{re} \neq \emptyset \\ &\iff h' H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Si $h H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1} = \emptyset$, alors

$$\text{vol}(h' H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \text{vol}(h H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F) = 0.$$

Sinon, il existe $h_1 \in h H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}$, $h'_1 \in h' H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}$, et

$$\begin{cases} h H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1} = (H^{re} \cap w_{\varpi_F} K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}) h_1 \\ h' H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1} = (H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}} K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1}) h'_1. \end{cases}$$

Or, clairement

$$\text{vol}(H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \text{vol}(H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.3. \square

Soit $r(\gamma, n)$ le plus petit entier $\geq m(\gamma, n) + \bar{k}_1$ où (rappel) $m(\gamma, n)$ est le plus petit entier $\geq \sup\{1 + \bar{k}_1, n - \bar{k}_1\}$.

THÉORÈME — Supposons $r \geq r(\gamma, n)$. Alors le voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma, n)$ de γ dans $\underline{G}(F)_e$ (cf. 2.3) est B_F^r -biinvariant, $\mathcal{V}' = \zeta(\mathcal{V})$ est contenu dans $\underline{G}(F')_e$ et pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$,

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Preuve. — Soit $m = m(\gamma, n)$. Comme $r \geq m + \overline{k_1}$,

$$B_F^r \subset H^{re} \subset H^{me+k_1} \subset 1 + \varpi_F^m \Lambda.$$

Par suite $H^{me+k_1} \mathcal{V} H^{me+k_1} = \gamma H^{me+k_1} (1 + \varpi_F^m \Lambda) H^{me+k_1} = \mathcal{V}$, donc a fortiori $B_F^r \mathcal{V} B_F^r = \mathcal{V}$ et la définition de \mathcal{V}' a un sens. La démonstration du théorème 3.3 s'organise comme suit : (i) Relèvement de la strate simple $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), \gamma]$ puis de l' \mathcal{O}_F -réseau Λ_γ ; (ii) Relèvement des formules d'intégration des lemmes 2.2.1 et 2.2.2.

(i) Soit $\mathcal{I} = \{g \in \underline{G}(F) : g^{-1}(\gamma + J_G^{1+k_0})g \cap (\gamma + J_G^{1+k_0}) \neq \emptyset\}$ le $\underline{G}(F)$ -entrelacement de la strate simple $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), \gamma]$. Comme $E^\times \subset N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G}) = N_{\underline{G}(F)}(H^{1+k_1})$, la formule $\mathcal{I} = E^\times (1 + \mathcal{P}_E \mathcal{N}_{k_0})$ ([BK] Theorem 1.5.8) entraîne l'égalité $H^{1+k_1} \mathcal{I} H^{1+k_1} = \mathcal{I}$. Par suite, \mathcal{I} est l'union des doubles classes $H^{1+k_1} g H^{1+k_1} \subset \underline{G}(F)$ telles que

$$\gamma H^{1+k_1} g H^{1+k_1} \cap H^{1+k_1} g H^{1+k_1} \gamma \neq \emptyset,$$

donc $\zeta(\mathcal{I})$ est l'union des doubles classes $H'^{1+k_1} g' H'^{1+k_1} \subset \underline{G}(F')$ telles que

$$\zeta(\gamma H^{1+k_1}) g' H'^{1+k_1} \cap H'^{1+k_1} g' \zeta(H^{1+k_1} \gamma) \neq \emptyset$$

et finalement

$$\zeta(\mathcal{I}) = \{g' \in \underline{G}(F') : g'^{-1} \zeta(\gamma H^{1+k_1}) g' \cap \zeta(\gamma H^{1+k_1}) \neq \emptyset\}.$$

Ainsi $\zeta(\mathcal{I}) = \zeta(E^\times (1 + \mathcal{P}_E \mathcal{N}_{k_0}))$ est une partie compacte modulo F'^\times qui contient le centralisateur dans $\underline{G}(F')$ de tout élément de $\zeta(\gamma H^{1+k_1})$. Par conséquent $\zeta(\gamma H^{1+k_1}) \subset \underline{G}(F')_e$ donc $\mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_e$.

Soit $y' \in \zeta(\gamma H^{1+k_1})$ et soit $E' = F'[y'] \subset M(N, F')$ l'extension (de degré N) de F' engendrée par y' . Comme $y' H'^{1+k_1} = \zeta(\gamma H^{1+k_1}) = \zeta(H^{1+k_1} \gamma) = H'^{1+k_1} y'$, $y' \in N_{\underline{G}(F')}(H'^{1+k_1}) = N_{\underline{G}(F')}(\mathcal{G}')$ donc E'^\times normalise l' $\mathcal{O}_{F'}$ -ordre \mathcal{G}' . D'autre part, $v_{\mathcal{G}'}(y') = v$ car $\zeta(\underline{G}(F) \cap (J_G^v - J_G^{v+1})) = \underline{G}(F') \cap (J_{\mathcal{G}'}^v - J_{\mathcal{G}'}^{v+1})$. Par conséquent, $[\mathcal{G}', -v, -(1 + k_0), y']$ est une strate pure dans $M(N, F')$. L'étape suivante consiste à montrer que cette strate est simple, précisément à établir l'égalité $k_0(y', \mathcal{G}') = k_0$.

La donnée du triplet $T_r(F)$ équivaut à celle de la $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$ -algèbre \mathbf{Z} -graduée $A_r(F) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathcal{P}_F^i / \mathcal{P}_F^{i+r}$, munie des morphismes $\epsilon_{F,i,j} : \mathcal{P}_F^{j+1} / \mathcal{P}_F^{j+r+1} \rightarrow \mathcal{P}_F^{i+1} / \mathcal{P}_F^{i+r}$ ($i \leq j$) déduits par passage aux quotient des inclusions naturelles. Pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, l'isomorphisme de groupes

$$\lambda_i : \mathcal{P}_F^i / \mathcal{P}_F^{i+r} \rightarrow \mathcal{P}_{F'}^i / \mathcal{P}_{F'}^{i+r}, x \mapsto \varpi_{F'}^i \lambda(\varpi_F^{-i} x)$$

est compatible avec les structures de modules sur $\mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r}$ et $\mathcal{P}_{F'}^i/\mathcal{P}_{F'}^{i+r}$ au sens où $\lambda_i(ax) = \lambda(a)\lambda_i(x)$ pour $(a, x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r}$. De plus, pour tout couple $(i, j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\lambda_{i+j}(xz) = \lambda_i(x)\lambda_j(z)$ pour $(x, z) \in \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r} \times \mathcal{P}_F^j/\mathcal{P}_F^{j+r}$, et si $i \leq j$, la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$ assure l'égalité $\epsilon_{F',i,j} \circ \lambda_j = \lambda_i \circ \epsilon_{F,i,j}$. Ainsi, les choix de $\lambda, \varpi_F, \varpi_{F'}$ induisent (via les morphismes $\lambda_i, i \in \mathbf{Z}$) un isomorphisme d'algèbres graduées $A_r(F) \simeq A_r(F')$ ⁽²⁾.

Soient $f = f(E/F)$ le degré résiduel de l'extension E/F . L' \mathcal{O}_F -ordre héréditaire \mathcal{G} est principal, d' \mathcal{O}_F -période $e(\mathcal{G} \mid \mathcal{O}_F) = e$ (cf. [BK] 1.1) et satisfait la double inclusion $\mathcal{B}_F \subset \mathcal{G} \subset M(N, \mathcal{O}_F)$. Donc \mathcal{G} est l'ensemble des matrices $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq e} \in M(N, F)$ décomposées en blocs $f \times f$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} X_{i,j} \in M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j \geq i \\ X_{i,j} \in \varpi_F M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j < i, \end{cases}$$

et pour $k \in \mathbf{Z}$ de la forme $k = de + s, d \in \mathbf{Z}, 0 \leq s \leq e - 1, J_{\mathcal{G}}^k$ est l'ensemble des matrices $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq e} \in M(N, F)$ décomposées en blocs $f \times f$ vérifiant les conditions ([BK] 2.5.2)

$$\begin{cases} X_{i,j} \in \varpi_F^d M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j - i \geq s \\ X_{i,j} \in \varpi_F^{d+2} M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j - i < s - e \\ X_{i,j} \in \varpi_F^{d+1} M(f, \mathcal{O}_F) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $z_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$ la matrice $(Z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq e}$ décomposée en blocs $f \times f$: $Z_{i,i+1} = 1_{f \times f}$ ($i = 1, \dots, e - 1$), $Z_{e,1} = \varpi_F 1_{f \times f}$ et $Z_{i,j} = 0_{f \times f}$ si $j \neq i + 1 \bmod e\mathbf{Z}$ (où $1_{f \times f}$ et $0_{f \times f}$ désignent respectivement les éléments diagonaux $\text{diag}(1, \dots, 1)$ et $\text{diag}(0, \dots, 0)$ de $M(f, F)$). Le sous-groupe $\langle z_{\varpi_F} \rangle$ de $W(\varpi_F)$ engendré par z_{ϖ_F} normalise \mathcal{G} , on a $N_{\underline{\mathcal{G}}(F)}(\mathcal{G}) = \langle z_{\varpi_F} \rangle \cdot H$ (produit semi-direct) et $J_{\mathcal{G}}^k = z_{\varpi_F}^k \mathcal{G}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Soit $\mu_k : J_{\mathcal{G}}^k/J_{\mathcal{G}}^{k+re} \rightarrow J_{\mathcal{G}'}^k/J_{\mathcal{G}'}^{k+re}$ l'isomorphisme de groupes défini composante par composante : pour tout $x = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in J_{\mathcal{G}}^k, \mu_k(x +$

(2) Clairement, cet isomorphisme ne dépend pas vraiment de ϖ_F et $\varpi_{F'}$ (vérifiant la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$) mais seulement de $\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$, donc seulement de l'isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$ donné par $\lambda = \lambda_0$ et $\tilde{\lambda} = \lambda_1$.

$J_{\mathcal{G}}^{k+re} = x' + J_{\mathcal{G}}^{k+re}$ où $x' = (x'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in J_{\mathcal{G}}^k$ est tel que

$$\begin{cases} x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+r} = \lambda_d(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+r}) & \text{si } \left[\frac{j-1}{f} \right] - \left[\frac{i-1}{f} \right] \geq s \\ x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+2+r} = \lambda_{d+2}(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+2+r}) & \text{si } \left[\frac{j-1}{f} \right] - \left[\frac{i-1}{f} \right] < s - e \\ x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+1+r} = \lambda_{d+1}(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+1+r}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

[] désignant la partie entière. Pour tout couple $(k, t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\mu_{k+t}(xz) = \mu_k(x)\mu_t(z)$ pour $(x, z) \in J_{\mathcal{G}}^k/J_{\mathcal{G}}^{k+re} \times J_{\mathcal{G}}^t/J_{\mathcal{G}}^{t+re}$. En particulier, pour $g \in N_{\underline{\mathcal{G}}(F)}(\mathcal{G})$ décomposé en $g = z_{\varpi_F}^k h$, $k \in \mathbf{Z}$, $h \in H$, on a

$$\mu_k(g + J_{\mathcal{G}}^{k+re}) = \mu_k(z_{\varpi_F}^k H^{re})\mu_0(hH^{re}) = z_{\varpi_{F'}}^k H'^{re} \zeta(hH^{re}) = z_{\varpi_{F'}}^k \zeta(hH^{re})$$

d'où $\mu_k(g + J_{\mathcal{G}}^{k+re}) = \zeta(g + J_{\mathcal{G}}^{k+re})$.

Soit un couple $(k, t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $k \leq 1 + k_0$. Comme

$$\mathcal{P}_E^t \mathcal{N}_k = \{g \in J_{\mathcal{G}}^t : \gamma g - g\gamma \in J_{\mathcal{G}}^{t+k}\},$$

l'inégalité $k - v \leq 1 + k_1$ assure que $\mathcal{P}_E^t \mathcal{N}_k + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1} = \mathcal{P}_E^t \mathcal{N}_k$. Or, pour tout $g \in J_{\mathcal{G}}^t$,

$$\begin{cases} \gamma g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0} = \gamma(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) = (\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) \\ g\gamma + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0} = (g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})\gamma = (g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}). \end{cases}$$

Comme $1 + k_1 \leq re$, les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) = \zeta(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) = \gamma' + J_{\mathcal{G}'}^{1+k_0} \\ \mu_{v+t}(\gamma g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0}) = \mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})\mu_t(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) \\ \mu_{v+t}(g\gamma + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0}) = \mu_t(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})\mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) \end{array} \right\} \text{ pour tout } g \in J_{\mathcal{G}}^t$$

entraînent l'égalité

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{P}_E^t \mathcal{N}_k) &= \{g' \in J_{\mathcal{G}'}^t : y'g' - g'y' \in J_{\mathcal{G}'}^{t+k}\} \\ &= \mathcal{P}_{E'}^t \mathcal{N}_k(y', \mathcal{G}'). \end{aligned}$$

En particulier, $\mu_0(\mathcal{N}_{k_0}) = \mathcal{N}_{k_0}(y', \mathcal{G}')$ et $\mu_0(\mathcal{N}_{k_0+1}) = \mathcal{N}_{k_0+1}(y', \mathcal{G}')$. L'inclusion $E'^{\times} \subset \zeta(E^{\times}(1 + \mathcal{P}_E \mathcal{N}_{k_0}))$ impliquant l'égalité $\mu_0(\mathcal{O}_E + J_{\mathcal{G}}) = \mathcal{O}_{E'} + J_{\mathcal{G}'}$, on en déduit que $k_0(y', \mathcal{G}') = k_0$.

Quant au réseau $\Lambda = \Lambda_{\gamma}$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}/J_{\mathcal{G}}^{1-k_1+re} & \times & J_{\mathcal{G}}^{k_1-re}/J_{\mathcal{G}}^{k_1} & \xrightarrow{tr_F} & \mathcal{P}_F^{1-r}/\mathcal{P}_F^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ J_{\mathcal{G}'}^{1-k_1}/J_{\mathcal{G}'}^{1-k_1+re} & \times & J_{\mathcal{G}'}^{k_1-re}/J_{\mathcal{G}'}^{k_1} & \xrightarrow{tr_{F'}} & \mathcal{P}_{F'}^{1-r}/\mathcal{P}_{F'}^1, \end{array}$$

les flèches verticales désignant les isomorphismes de groupes $\mu_{1-k_1} \times \mu_{k_1-re}$ et λ_{1-r} . Comme $\mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} \subset J_G^{1-k_1}$ et $\mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0} + J_G^{1-k_1+re} = \mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}$, on a par dualité $\Lambda = (\mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0})^* \subset J_G^{k_1-re}$ et $\Lambda + J_G^{k_1} = \Lambda$. Le diagramme ci-dessus entraîne donc l'égalité

$$\begin{aligned} \mu_{k_1-re}(\Lambda) &= (\mu_{1-k_1}(\mathcal{P}_E^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}))^* \\ &= (\mathcal{P}_{E'}^{1-k_1} \mathcal{N}_{k_0}(y', \mathcal{G}'))^* \\ &= \Lambda_{y'}. \end{aligned}$$

On pose $\Lambda' = \mu_{k_1-re}(\Lambda) (= \mu_0(\Lambda))$.

(ii) Soit $\gamma' \in \mathcal{V}' \subset \zeta(\gamma H^{1+k_1})$. Comme $re - me \geq k_1$, $\mu_{-me}(\Lambda) = \mu_0(\Lambda) = \Lambda'$ et donc $\zeta(1 + \varpi_F^m \Lambda) = 1 + \varpi_F^m \mu_{-me}(\Lambda) = 1 + \varpi_F^m \Lambda'$.

Soient $g \in \underline{G}(F)$ et χ la fonction caractéristique de la double classe $K_F^n g K_F^n$. Rappelons la notation $\bar{\chi} = \int_{K_F} \text{Ad}_G^*(g)(\chi) dg$. Comme $\text{vol}(K_F, dg) = 1$,

$$\bar{\chi} = \frac{1}{[K_F : K_F^n]} \sum_{\tau \in T} \mathbf{1}_{k_\tau K_F^n g K_F^n k_\tau^{-1}},$$

les $k_\tau \in K_F$ parcourant un système de représentants des classes de $K_F \text{ mod } K_F^n$. Soit $g' \in \underline{G}(F')$ tel que $\zeta(K_F^n g K_F^n) = K_{F'}^n g' K_{F'}^n$, et, pour chaque $\tau \in T$, soit $k'_\tau \in K_{F'}$ tel que $\zeta(k_\tau K_F^n) = k'_\tau K_{F'}^n$, (condition impliquant l'égalité $\zeta(k_\tau^{-1} K_F^n) = k'_\tau{}^{-1} K_{F'}^n$). Alors $K_{F'} = \prod_{\tau \in I} k'_\tau K_{F'}^n$, et puisque K_F normalise K_F^n , pour chaque $\tau \in T$,

$$\zeta(k_\tau K_F^n g K_F^n k_\tau^{-1}) = k'_\tau K_{F'}^n g' K_{F'}^n k'_\tau{}^{-1}.$$

Donc $\zeta(\bar{\chi}) = \overline{\zeta(\chi)}$ et par linéarité $\zeta(\bar{f}) = \overline{\zeta(f)}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Continuons avec la fonction $\chi = \mathbf{1}_{K_F^n g K_F^n}$. Soit $w_{\varpi_F} \in \Sigma \subset W(\varpi_F)$. Fixons une décomposition $K_F^n g K_F^n = \prod_{\sigma \in I} K_F^n g_\sigma$ et (grâce au lemme 3.3.2) une décomposition $\zeta(K_F^n g K_F^n) = \prod_{\sigma \in I} K_F^n g'_\sigma$ telle que pour chaque $\sigma \in I$,

$$\zeta(K_F^n g_\sigma w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^n g'_\sigma w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}.$$

Écrivons $w_{\varpi_F} = s \delta_{\varpi_F}$ avec $s \in S_F$, $\delta_{\varpi_F} \in \Delta(\varpi_F, s)$. Reprenons la notation $P_0^s = s \underline{P}_0(F) s^{-1}$ et posons $s' = w_{\varpi_{F'}} \delta_{\varpi_{F'}}^{-1} \in S_{F'}$, $P_0^{s'} = s' \underline{P}_0(F') s'^{-1}$. Soit un couple $(x, p) \in H \times (P_0^s \cap K_F^n)$ et soient $x' \in H'$, $p' \in P_0^{s'} \cap K_{F'}^n$, tels

que $\zeta(xH^{re}) = x'H'^{re}$ et $\zeta(pH^{re}) = p'H'^{re}$. Fixons une décomposition $1 + \varpi_F^m \Lambda = \prod_{\rho \in R} h_\rho H^{re}$. Comme $xp \in N_{\underline{G}(F)}(H^{re})$,

$$x^{-1}\gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)xp = \prod_{\rho \in R} x^{-1}\gamma h_\rho xp H^{re},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp} \chi(w_{\varpi_F}^{-1}g_F w_{\varpi_F}) dg_F \\ = \sum_{\sigma, \rho} \int_{x^{-1}\gamma h_\rho xp H^{re}} \mathbf{1}_{K_F^n g_\sigma}(w_{\varpi_F}^{-1}g_F w_{\varpi_F}) dg_F \\ = \sum_{\sigma, \rho} v_{\sigma, \rho} \end{aligned}$$

avec

$$v_{\sigma, \rho} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{vol}(x^{-1}\gamma h_\rho xp H^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^n g_\sigma)w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x'^{-1}\gamma'(1 + \varpi_{F'}^m \Lambda')x'p' &= \zeta(x^{-1}\gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)xp) \\ &= \prod_{\rho \in R} \zeta(x^{-1}\gamma h_\rho xp H^{re}), \end{aligned}$$

et pour chaque couple $(\sigma, \rho) \in I \times R$ (Lemme 3.3.3),

$$\text{vol}(\zeta(h^{-1}\gamma h_\rho xp H^{re}) \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^n g'_\sigma)w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = v_{\sigma, \rho}.$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{x'^{-1}\gamma'(1+\varpi_{F'}^m\Lambda')x'p'} \zeta(\chi)(w_{\varpi_{F'}}^{-1}g_{F'} w_{\varpi_{F'}}) dg_{F'} \\ = \int_{x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp} \chi(w_{\varpi_F}^{-1}g_F w_{\varpi_F}) dg_F. \end{aligned}$$

Quand (x, p) parcourt une famille de représentants des classes de $H \times (P_0^s \cap K_F^n) \bmod H^{me} \times (P_0^s \cap H^{me+k_1})$, (x', p') parcourt une famille de représentants des classes de $H' \times (P_0^{s'} \cap K_{F'}^n) \bmod H'^{me} \times (P_0^{s'} \cap H'^{me+k_1})$. Quant à la constante $d(\gamma, s)$ définie dans l'énoncé du lemme 2.2.2, les relations $\zeta(H^{me}) = H'^{me}$, $\zeta(H^{me+k_1}) = H'^{me+k_1}$, $\zeta(1 + \varpi_F^m \Lambda) = 1 + \varpi_{F'}^m \Lambda'$ entraînent l'égalité $d(\gamma', s') = d(\gamma, s)$.

Pour chaque $\delta_{\varpi_F} \in \Delta(\varpi_F)$,

$$\frac{\text{vol}(F'^{\times} H' \delta_{\varpi_{F'}} K_{F'}, \frac{dg_{F'}}{dz_{F'}})}{\text{vol}(\underline{P}_0(F') \cap K_{F'}^n, dp_{F'}) \text{vol}(H', dg_{F'})} = \frac{\text{vol}(F^{\times} H \delta_{\varpi_F} K_F, \frac{dg_F}{dz_F})}{\text{vol}(\underline{P}_0(F) \cap K_F^n, dp_F) \text{vol}(H, dg_F)}$$

car $\zeta(F^{\times} H \delta_{\varpi_F} K_F) = F'^{\times} H' \delta_{\varpi_{F'}} K_{F'}$, $\zeta(K_F^n) = K_{F'}^n$ et $\zeta(H) = H'$, et l'ensemble $\{w_{\varpi_{F'}} : w_{\varpi_F} \in \Sigma\} \subset W(\varpi_{F'})$ paramétrise les doubles classes $F'^{\times} H' \backslash \underline{G}(F') / K_{F'}$. En définitive, par linéarité de l'application $\mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n) \rightarrow \mathbf{C}$, $f \mapsto J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$, et compte tenu de la relation $\zeta(f) = \zeta(f)$ montrée plus haut, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$, les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 impliquent l'égalité

$$J^{\underline{G}(F')}(f, \gamma) = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma).$$

Fin de la démonstration du théorème 3.3. □

3.4. Soient $(\underline{P}, \underline{A})$ une paire parabolique de \underline{G} définie sur F , \underline{U} le radical unipotent de \underline{P} et \underline{M} le centralisateur de \underline{A} dans \underline{G} . On pose $P = \underline{P}(F)$, $A = \underline{A}(F)$, $U = \underline{U}(F)$ et $M = \underline{M}(F)$. Soit K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A) , i.e. tel que $G = K_P P$ et $P \cap K_P = (M \cap K_P)(U \cap K_P)$. Soient dk_P et du les mesures de Haar sur K_P et U telles que $\text{vol}(K_P, dk_P) = \text{vol}(U \cap K_P, du) = 1$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on définit le terme K_P -invariant $f^P \in C_c^\infty(M)$ de f suivant P par la formule

$$f^P(m) = \delta_P^{1/2}(m) \int_{K_P} \int_U f(k_P^{-1} m u k_P) dk_P du \quad (m \in M)$$

où $\delta_P^{1/2} : P \rightarrow \mathbf{Q}^\times$ est le caractère module sur P (si dp est une mesure de Haar à droite ou à gauche sur P , alors $\delta_P(p_1) = d(p_1 p p_1^{-1}) / dp$ pour tout $p_1 \in P$).

Soit $M_e \subset M$ l'ouvert des éléments elliptiques dans M . Pour $y \in M_e$ et $f \in C_c^\infty(M)$, soit

$$J^M(f, y) = \int_{A \backslash M} f(m^{-1} y m) \frac{dm}{da}$$

où dm et da sont les mesures de Haar sur M et A telles que $\text{vol}(\underline{M}(\mathcal{O}_F), dm) = \text{vol}(\underline{A}(\mathcal{O}_F), da) = 1$.

Soit $G_r \subset G$ l'ouvert des éléments semi-simples réguliers (i.e. de polynôme caractéristique produit de polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts dans $F[T]$). Soit $|\cdot|_F$ la valeur absolue sur F normalisée par

$|\varpi_F|_F = q^{-1}$ où q est le cardinal du corps résiduel de F . Si $y \in M_e \cap G_r$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ et toute mesure de Haar dg_y sur le centralisateur $G_y = F[y]^\times$ de y dans G , on a la formule de descente (cf. [La] Prop. 4.3.11),

$$\int_{G_y \backslash G} f(g^{-1}yg) \frac{dg}{dg_y} = |D_{M \backslash G}(y)|_F^{-1/2} \int_{G_y \backslash M} f^P(m^{-1}ym) \frac{dm}{dg_y}$$

où $D_{M \backslash G}(y) = \det_{L(M) \backslash L(G)}(1 - \text{Ad}_G(m^{-1}))$. En particulier, l'intégrale orbitale $J^M(f^P, y)$ ne dépend pas des choix de P, K_P . Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$J^G(f, y) = J^M(f^P, y).$$

La définition a un sens car M (en tant que centralisateur dans G de la sous- F -algèbre déployée maximale de $F[y]$) est l'unique sous-groupe de Levi de G tel que $y \in M_e$.

3.5. Version du théorème 3.3 pour les éléments semi-simples réguliers (en position standard).

Soit $\gamma \in G_r$. Quitte à remplacer γ par l'un de ses conjugués dans G , on suppose que le groupe multiplicatif A de la sous- F -algèbre déployée maximale de $F[\gamma]$ est un sous-tore standard de A_0 , i.e. l'ensemble des matrices diagonales de la forme

$$\text{diag}(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{N_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{N_2}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{N_d}) \quad (a_i \in F^\times)$$

pour une suite N_1, \dots, N_d d'entiers > 0 tels que $\sum_{i=1}^d N_i = N$. Soient \underline{A} le

sous-tore de \underline{A}_0 tel que $A = \underline{A}(F)$, $\underline{M} = \prod_{i=1}^d GL(N_i) \subset \underline{G}$ le centralisateur de \underline{A} dans \underline{G} et \underline{P} le sous-groupe parabolique de \underline{G} de composante de Levi \underline{M} contenant \underline{P}_0 . Posons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in M = \underline{M}(F)$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Si $N_j \geq 2$, $\gamma_j \in GL(N_j, F)_e$ et l'on définit l' \mathcal{O}_F -ordre \mathcal{G}_j dans $M(N_j, F)$, l' \mathcal{O}_F -réseau Λ_{γ_j} dans $M(N_j, F)$ et les entiers $m(\gamma_j, n)$, $r(\gamma_j, n)$, comme en 1.2, 2.2 et 3.3. Si $N_j = 1$, on pose $\mathcal{G}_j = \Lambda_{\gamma_j} = \mathcal{O}_F$ et $m(\gamma_j, n) = r(\gamma_j, n) = n$. Soit alors $m(\gamma, n)$ le plus petit entier m tel que $m \geq \sup\{m(\gamma_i, n) : i = 1, \dots, d\}$ et $\prod_{i=1}^d \gamma_i(1 + \varpi_F^m \Lambda_i) \subset M_e \cap G_r$, et

soit $\mathcal{V}(\gamma, n) = \prod_{i=1}^d \gamma_i(1 + \varpi_F^{m(\gamma, n)} \Lambda_{\gamma_i})$. Enfin, soit $\overline{k}_1(\gamma) = \sup\{\overline{k}_1(\gamma_i) : i =$

$1, \dots, d\}$ avec

$$\begin{cases} \overline{k_1}(\gamma_i) = \frac{1}{e(F[\gamma_i]/F)} (k_0(\gamma_i, \mathcal{G}_i) - v_{\mathcal{G}_i}(\gamma_i)) & \text{si } N_i \geq 2 \\ \overline{k_1}(\gamma_i) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quitte à remplacer (à nouveau) γ par l'un de ses conjugués dans M , on suppose que $M \cap B_F \subset \prod_{i=1}^d \mathcal{G}_i^\times \subset M \cap K_F$. Un tel γ est dit *en position standard*.

Soient $B_{F, \underline{M}}^r = \underline{M}(F) \cap B_F^r = \prod_{i=1}^d B_{F, \mathcal{G}_i}^r$ et $\mathcal{H}_{F, \underline{M}}^r = \otimes_{i=1}^d \mathcal{H}_{F, \mathcal{G}_i}^r$ l'algèbre de Hecke des fonctions complexes $B_{F, \underline{M}}^r$ -biinvariantes à support compact sur $\underline{M}(F)$ munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar dm_F sur $\underline{M}(F)$ telle que $\text{vol}(\underline{M}(\mathcal{O}_F), dm_F) = 1$. L'isomorphisme de triplets $(\lambda, \tilde{\lambda}) : T_r(F) \rightarrow T_r(F')$ induit comme en 3.2 un isomorphisme d'algèbres $\zeta_{\underline{M}} = \otimes_{i=1}^d \zeta_i : \mathcal{H}_{F, \underline{M}}^r \rightarrow \mathcal{H}_{F', \underline{M}}^r$.

Soit \underline{U} le radical unipotent de \underline{P} et soit du_F la mesure de Haar sur $\underline{U}(F)$ telle que $\text{vol}(\underline{U}(\mathcal{O}_F), du_F) = 1$.

LEMME. — Soit $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_{F'}^r$,

$$\int_{\underline{U}(F')} \zeta(f)(w_{\varpi_F}, u_{F'}) du_{F'} = \int_{\underline{U}(F)} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F.$$

Preuve (Waldspurger). — Notons \underline{P}^- le sous-groupe parabolique de \underline{G} opposé à \underline{P} et \underline{U}^- son radical unipotent. Soit $\delta_{\varpi_F} \in \Delta(\varpi_F) \cap A$ l'élément diagonal

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{N_1}, \underbrace{\varpi_F, \dots, \varpi_F}_{N_2}, \dots, \underbrace{\varpi_F^{d-1}, \dots, \varpi_F^{d-1}}_{N_d}).$$

Pour $m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, $\text{Ad}_G \delta_{\varpi_F}^m$ dilate $\underline{U}(F)$ et contracte $\underline{U}^-(F)$. Posons $B_{F, \underline{U}}^r = \underline{U}(F) \cap B_F^r$, $B_{F, \underline{P}^-}^r = \underline{P}^-(F) \cap B_F^r$ et

$$I_F^m(f) = \int_{\delta_{\varpi_F}^m B_{F, \underline{U}}^r \delta_{\varpi_F}^{-m}} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F \quad (m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, f \in C_c^\infty(G)).$$

Soit une fonction $f \in C_c^\infty(G)$. Comme $w_{\varpi_F}^{-1} \text{Supp}(f) \cap \underline{U}(F)$ est une partie compacte de $\underline{U}(F)$, il existe un entier $m_0 = m_0(f) \geq 0$ tel que pour tout entier $m \geq m_0$, on a

$$\int_{\underline{U}(F)} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F = I_F^m(f) = I_F^{m_0}(f).$$

L'élément $\text{diag}(1, \dots, 1, \varpi_{F'}, \dots, \varpi_{F'}, \dots, \varpi_{F'}^{d-1}, \dots, \varpi_{F'}^{d-1})$ de $\underline{A}(F')$ coïncidant avec l'image $\delta_{\varpi_{F'}}$ de δ_{ϖ_F} par l'isomorphisme de groupes $W(\varpi_F) \rightarrow W(\varpi_{F'})$ défini en 3.3, il suffit donc de prouver que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_F^r$ et tout entier $m \geq 0$, $I_{F'}^m(\zeta(f)) = I_F^m(f)$ où I_F^m est la distribution sur $\underline{G}(F')$ obtenue en remplaçant F par F' dans la définition de I_F^m . Fixons un entier $m \geq 0$ et soit $\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}$ la fonction caractéristique de la double classe $B_F^r \delta_{\varpi_F}^m B_F^r$. Puisque $B_F^r = B_{F, \underline{U}}^r B_{F, \underline{P}^-}^r$ et $\delta_{\varpi_F}^m B_{F, \underline{P}^-}^r \delta_{\varpi_F}^{-m} \subset B_F^r$, pour tout $x \in G$ et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$f * \varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(x \delta_{\varpi_F}^m) = \int_{x \delta_{\varpi_F}^m B_{F, \underline{U}}^r \delta_{\varpi_F}^{-m} B_{F, \underline{P}^-}^r} f(g) dg = \int_{\delta_{\varpi_F}^m B_{F, \underline{U}}^r \delta_{\varpi_F}^{-m} B_{F, \underline{P}^-}^r} f(xg) dg.$$

Sur l'ouvert (dense) $\underline{U}(F) \underline{P}^-(F)$ de G , la mesure $dg = dg_F$ se décompose en $dg_F = du_F dp_F^-$ où dp_F^- est la mesure de Haar à droite sur $\underline{P}^-(F)$ telle que

$$\text{vol}(B_{F, \underline{P}^-}, dp_F^-) = \text{vol}(B_F, dg_F)$$

en posant $B_{F, \underline{P}^-} = \underline{P}^-(F) \cap B_F$. Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_F^r$, on a

$$f * \varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(w_{\varpi_F} \delta_{\varpi_F}^m) = \text{vol}(B_{F, \underline{P}^-}^r, dp_F^-) I_F^m(f) = \frac{\text{vol}(B_F, dg_F)}{[B_{F, \underline{P}^-} : B_{F, \underline{P}^-}^r]} I_F^m(f)$$

et

$$\zeta(f) * \zeta(\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})(w_{\varpi_{F'}} \delta_{\varpi_{F'}}^m) = \zeta(f * \varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})(w_{\varpi_{F'}} \delta_{\varpi_{F'}}^m) = f * \varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(w_{\varpi_F} \delta_{\varpi_F}^m).$$

Puisque $\zeta(\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})$ est la fonction caractéristique de la double classe $B_{F'}^r \delta_{\varpi_{F'}}^m B_{F'}^r$ et

$$\frac{\text{vol}(B_{F'}, dg_{F'})}{[B_{F', \underline{P}^-} : B_{F', \underline{P}^-}^r]} = \frac{\text{vol}(B_F, dg_F)}{[B_{F, \underline{P}^-} : B_{F, \underline{P}^-}^r]},$$

le lemme 3.5 est prouvé. □

THÉORÈME. — Supposons $r \geq m(\gamma, n) + \overline{k_1}(\gamma)$. Alors le voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma, n)$ de γ dans $\underline{M}(F)_e \cap \underline{G}(F)_r$ est $B_{F, \underline{M}}^r$ -biinvariant, $\mathcal{V}' = \zeta_{\underline{M}}(\mathcal{V})$ est contenu dans $\underline{G}(F')_r$, $\mathcal{V}'_* = \{g'^{-1} \gamma' g : g' \in \underline{G}(F'), \gamma' \in \mathcal{V}'\}$ est ouvert dans $\underline{G}(F')_r$ et pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'_*$,

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Preuve. — Pour $i = 1, \dots, d$, posons $e_i = e(F[\gamma_i]/F)$, $\mathcal{V}_i = \gamma_i(1 + \varpi_F^{m(\gamma_i, n)} \Lambda_{\gamma_i})$, $\mathcal{V}'_i = \zeta_i(\mathcal{V}_i)$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq re_i$, $H_i^k = 1 + J_{\mathcal{G}_i}^k$, $H_i'^k = \zeta_i(H_i^k)$. Il est clair que $B_{F, \underline{M}}^r \mathcal{V} B_{F, \underline{M}}^r = \mathcal{V}$ et que \mathcal{V}' est contenu dans $\underline{M}(F')_e$. Pour que \mathcal{V}' soit contenu dans $\underline{G}(F')_r$, il faut et il suffit que pour tout couple d'entiers (i, j) , $1 \leq i \neq j \leq d$ tel que $N_i = N_j$ et tout $g' \in GL(N_i, F')$, on ait $g'^{-1} \mathcal{V}'_i g' \cap \mathcal{V}'_j = \emptyset$. Supposons qu'il existe un couple d'entiers (i, j) , $1 \leq i \neq j \leq d$ tel que $N_i = N_j$, et posons $N_\bullet = N_i$, $\underline{G}_\bullet = GL(N_\bullet)$ et $\zeta_\bullet = \zeta_i$. Comme $H_i'^{re_i} \mathcal{V}'_i H_i'^{re_i} = \mathcal{V}'_i$ et $H_j'^{re_j} \mathcal{V}'_j H_j'^{re_j} = \mathcal{V}'_j$, le $\underline{G}_\bullet(F')$ -entrelacement

$$\mathcal{I}'_{i,j} = \{g' \in \underline{G}_\bullet(F') : g'^{-1} \mathcal{V}'_i g' \cap \mathcal{V}'_j \neq \emptyset\}$$

est une partie $(H_i'^{re_i}, H_j'^{re_j})$ -biinvariante de $\underline{G}_\bullet(F')$ qui coïncide avec l'union des doubles classes $H_i'^{re_i} g' H_j'^{re_j} \subset \underline{G}_\bullet(F')$ telles que $\mathcal{V}'_i g' H_j'^{re_j} \cap H_i'^{re_i} g' \mathcal{V}'_j \neq \emptyset$. Supposons par l'absurde que $\mathcal{I}'_{i,j} \neq \emptyset$. Alors $e_i = e_j$, donc $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j$ (puisque γ est en position standard) et $H_i'^{re_i} = H_j'^{re_j}$. Notons $\Gamma = H_i'^{re_i}$ et $\Gamma' = H_i'^{re_i}$. Comme $\mathcal{V}'_i \subset N_{\underline{G}(F')}(\Gamma')$ et $\mathcal{V}'_j \subset N_{\underline{G}(F')}(\Gamma')$, pour $\gamma'_i \in \mathcal{V}'_i$, $\gamma'_j \in \mathcal{V}'_j$ et $g' \in \underline{G}_\bullet(F')$, on a

$$\begin{cases} \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' \gamma'_i g' \Gamma') = y_i \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g' \Gamma') \\ \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g' \gamma'_j \Gamma') = \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g' \Gamma') y_j \end{cases}$$

pour tout $y_i \in \zeta_\bullet^{-1}(\gamma'_i \Gamma')$ et tout $y_j \in \zeta_\bullet^{-1}(\gamma'_j \Gamma')$; par conséquent

$$\emptyset \neq \zeta_\bullet^{-1}(\mathcal{I}'_{i,j}) \subset \{g \in \underline{G}_\bullet(F) : g^{-1} \mathcal{V}_i g \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset\}$$

ce qui contredit le fait que \mathcal{V} est contenu dans $\underline{G}(F)_r$. Donc $\mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_r$.

Soit $F'[T]_N$ la variété $\varpi_{F'}$ -adique des polynômes unitaires de degré N . L'application "polynôme caractéristique" $p_{F'} : \underline{G}(F') \rightarrow F'[T]_N$ induit une submersion $\underline{G}(F')_r \rightarrow p_{F'}(\underline{G}(F')_r)$ de fibres les orbites de $\underline{G}(F')_r$. Comme $p_{F'}(\mathcal{V}')$ est ouvert dans $F'[T]_N$, \mathcal{V}'_\ast est ouvert $\underline{G}(F')_r$. Il suffit de montrer le théorème 3.5 pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$.

Comme $\mathcal{V} \subset \underline{M}(F)_e \cap \underline{G}(F)_r$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\underline{G}(F))$,

$$J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma) = J^{\underline{M}(F)}(f^{P(F)}, \gamma)$$

où $f^{P(F)} \in C_c^\infty(\underline{M}(F))$ désigne le terme K_F -invariant de f suivant $\underline{P}(F)$. De même, pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$ et toute fonction $f' \in C_c^\infty(\underline{G}(F'))$,

$$J^{\underline{G}(F')}(f', \gamma') = J^{\underline{M}(F')}(f'^{P(F')}, \gamma').$$

Soit $K_{F, \underline{M}}^n = \underline{M}(F) \cap K_F^n$. Comme $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n) \Rightarrow f^{P(F)} \in \mathcal{H}(\underline{M}(F), K_{F, \underline{M}}^n)$ et pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$ et toute fonction $\phi \in \mathcal{H}(\underline{M}(F), K_{F, \underline{M}}^n)$

(Théorème 3.3),

$$J^{\underline{M}(F')}(\zeta_{\underline{M}}(\phi), \gamma') = J^{\underline{M}(F)}(\phi, \gamma),$$

il suffit de montrer que $\zeta(f)^{\underline{P}(F')} = \zeta_{\underline{M}}(f^{\underline{P}(F)})$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Soit $D_{\underline{M}}^+(\varpi_F) = \prod_{i=1}^d D_i^+(\varpi_F) \subset D(\varpi_F)$ où $D_i^+(\varpi_F)$ est défini comme en 2.2 en remplaçant \underline{G} par le groupe $GL(N_i)$. Soit $m \in \underline{M}(F)$. Fixons une décomposition $m = k_1 \delta_{\varpi_F} k_2$, $k_i \in \underline{M}(\mathcal{O}_F)$ pour $i = 1, 2$, $\delta_{\varpi_F} \in D_{\underline{M}}^+(\varpi_F)$. Comme $\delta_{\underline{P}(F)}(k_2) = 1$, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$,

$$\begin{aligned} f^{\underline{P}(F)}(m) &= \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m) \int_{\underline{U}(F)} \bar{f}(k_1 \delta_{\varpi_F} k_2 u_F k_2^{-1} k_2) du_F \\ &= \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m) \int_{\underline{U}(F)} \bar{f}_{k_1, k_2}(\delta_{\varpi_F} u_F) du_F \end{aligned}$$

où \bar{f}_{k_1, k_2} est la fonction définie par $\bar{f}_{k_1, k_2}(g) = \bar{f}(k_1 g k_2)$ ($g \in \underline{G}(F)$). Pour $i = 1, 2$, soit $k'_i \in \underline{M}(\mathcal{O}_{F'})$ tel que $\zeta_{\underline{M}}(k_i K_{F, \underline{M}}^n) = k'_i K_{F', \underline{M}}^n$, et soit $\delta_{\varpi_{F'}} \in D_{\underline{M}}^+(\varpi_{F'})$ l'image de δ_{ϖ_F} par l'isomorphisme de groupes $W(\varpi_F) \rightarrow W(\varpi_{F'})$ défini en 3.3. Ainsi, $m' = k'_1 \delta_{\varpi_{F'}} k'_2 \in \zeta_{\underline{M}}(K_{F, \underline{M}}^n m K_{F, \underline{M}}^n)$ et

$$\delta_{\underline{P}(F')} (m') = \delta_{\underline{P}(F')} (\delta_{\varpi_{F'}}) = \delta_{\underline{P}(F)} (\delta_{\varpi_F}) = \delta_{\underline{P}(F)} (m).$$

De plus, comme K_F normalise K_F^n , pour $\phi \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$, la fonction ϕ_{k_1, k_2} est encore dans $\mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$ et $\zeta(\phi_{k_1, k_2}) = \zeta(\phi)_{k'_1, k'_2}$. Par conséquent, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$, le lemme 3.5 entraîne l'égalité

$$\begin{aligned} \delta_{\underline{P}(F')}^{1/2}(m') \int_{\underline{U}(F')} \zeta(\bar{f})_{k'_1, k'_2}(\delta_{\varpi_{F'}} u_{F'}) du_{F'} \\ = \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m) \int_{\underline{U}(F)} \bar{f}_{k_1, k_2}(\delta_{\varpi_F} u_F) du_F. \end{aligned}$$

On conclut grâce à la relation $\zeta(\bar{f}) = \overline{\zeta(f)}$ (pour $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$), déjà montrée au cours de la preuve du théorème 3.3. □

3.6. On a travaillé, en 3.5 comme en 3.3, avec un élément $\gamma \in G_r$ en position standard. Sans cette hypothèse sur γ , on a un résultat analogue au théorème 3.5, la précision sur r en moins.

THÉORÈME. — Soit $\gamma \in G_r$. Si r est suffisamment grand, $\zeta(B_F^r \gamma B_F^r) \subset \underline{G}(F')_r$ et pour tout $\gamma' \in \zeta(B_F^r \gamma B_F^r)$,

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Preuve. — On se ramène à la situation de 3.5. Soit $g \in G$ tel que $\tilde{\gamma} = g^{-1} \gamma g$ est en position standard. Supposons $r \geq \tilde{r} = m(\tilde{\gamma}, n) + \bar{k}_1(\tilde{\gamma})$ et que $g^{-1} B_F^r g \subset B_F^{\tilde{r}}$ (condition vérifiée si r est suffisamment grand). Soient \underline{M} le sous-groupe de Levi standard de \underline{G} associé à $\tilde{\gamma}$ en 3.5, $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}(\tilde{\gamma}, n) \subset \underline{M}(F)_e \cap \underline{G}(F)_r$, $\tilde{\mathcal{V}}' = \zeta_{\underline{M}}(\tilde{\mathcal{V}})$ et $\tilde{\mathcal{V}}'_* = \text{Ad}_{\underline{G}(F')}(\tilde{\mathcal{V}}')$. Grâce au théorème 3.5, il suffit de montrer que $\zeta(B_F^r \gamma B_F^r) \subset \tilde{\mathcal{V}}'_*$.

Soient $\tilde{\gamma}' \in \zeta(B_F^{\tilde{r}} \tilde{\gamma} B_F^{\tilde{r}})$ et $g' \in \zeta(B_F^{\tilde{r}} g B_F^{\tilde{r}})$. Comme

$$\begin{aligned} B_F^{\tilde{r}} g' B_F^{\tilde{r}} \tilde{\gamma}' B_F^{\tilde{r}} g'^{-1} B_F^{\tilde{r}} &= \text{Supp}(f_{g'} * f_{\tilde{\gamma}'} * f_{g'^{-1}}) \\ &= \zeta(\text{Supp}(f_g * f_{\tilde{\gamma}} * f_{g^{-1}})) \\ &= \zeta(B_F^{\tilde{r}} g B_F^{\tilde{r}} \tilde{\gamma} B_F^{\tilde{r}} g^{-1} B_F^{\tilde{r}}), \end{aligned}$$

quitte à remplacer $\tilde{\gamma}'$ par $x'_1 \tilde{\gamma}' x'_2$ pour des $x'_i \in B_F^{\tilde{r}}$ ($i = 1, 2$), on peut supposer que $B_F^{\tilde{r}} g' \tilde{\gamma}' g'^{-1} B_F^{\tilde{r}} = \zeta(B_F^{\tilde{r}} g \tilde{\gamma} g^{-1} B_F^{\tilde{r}})$. Alors,

$$\zeta(B_F^{\tilde{r}} \gamma B_F^{\tilde{r}}) = \zeta(B_F^{\tilde{r}} g \tilde{\gamma} g^{-1} B_F^{\tilde{r}}) = B_F^{\tilde{r}} g' \tilde{\gamma}' g'^{-1} B_F^{\tilde{r}}.$$

Posons $g = b_1 w_{\varpi_F} b_2$ avec $b_i \in B_F$ ($i = 1, 2$), $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, et $g' = b'_1 w_{\varpi_{F'}} b'_2$ avec $b'_i \in \zeta(b_i B_F^{\tilde{r}})$ ($i = 1, 2$). Puisque B_F normalise $B_F^{\tilde{r}}$, on a

$$\begin{aligned} g^{-1} B_F^{\tilde{r}} g &\subset B_F^{\tilde{r}} \Leftrightarrow w_{\varpi_F}^{-1} B_F^{\tilde{r}} w_{\varpi_F} \subset B_F^{\tilde{r}} \\ &\Leftrightarrow w_{\varpi_{F'}}^{-1} B_F^{\tilde{r}} w_{\varpi_{F'}} \subset B_F^{\tilde{r}} \\ &\Leftrightarrow g'^{-1} B_F^{\tilde{r}} g' \subset B_F^{\tilde{r}}, \end{aligned}$$

d'où $\zeta(B_F^{\tilde{r}} \gamma B_F^{\tilde{r}}) \subset g'^{-1} B_F^{\tilde{r}} \tilde{\gamma}' B_F^{\tilde{r}} g' \subset \tilde{\mathcal{V}}'_*$

et le théorème 3.6 est prouvé. □

Remarque. — On peut reformuler le théorème 3.6 de manière plus concrète. Fixons un système de représentants $\mu_F^{\times} \subset \mathcal{O}_F^{\times}$ des classes de $\mathcal{O}_F^{\times} \text{ mod } (1 + \mathcal{P}_F)$ et soit $\mu_F = \mu_F^{\times} \cup \{0\}$ (si F est de caractéristique > 0 , on peut prendre pour μ_F le corps de représentants dans \mathcal{O}_F du corps résiduel de F). Alors, tout $x \in F$ possède un (unique) développement hensélien de la forme $x = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_{\nu}(x) \varpi_F^{\nu}$, $\mu_{\nu}(x) \in \mu_F$.

Soit $\gamma \in G_r$. Écrivons $\gamma = bw_{\varpi_F}c$ avec $b = (b_{i,j}) \in B_F$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $c = (c_{i,j}) \in B_F$, et $w_{\varpi_F} = \delta_{\varpi_F}s$ avec $\delta_{\varpi_F} = \text{diag}(\varpi_F^{\alpha_1}, \dots, \varpi_F^{\alpha_N}) \in D(\varpi_F)$, $s \in S_F$. Soit $\sigma = \sigma_s$ la permutation de $\{1, \dots, N\}$ donnée par $se_i = e_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) où (rappel) e_1, \dots, e_N désigne la base canonique de F^N . Posant $\gamma = (\gamma_{i,j})$, on a

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^N \varpi_F^{\alpha_k} b_{i,k} c_{\sigma^{-1}(k),j}.$$

Soient $(B_F^r \gamma B_F^r)_{i,j} = \{g_{i,j} : g = (g_{k,l}) \in B_F^r \gamma B_F^r\} \subset F$, $\nu_r(\gamma_{i,j}) = \sup\{\nu \in \mathbf{Z} : (B_F^r \gamma B_F^r)_{i,j} \subset \varpi_F^\nu M(N, \mathcal{O}_F) \subset B_F^r \gamma B_F^r\}$. Puisque B_F normalise B_F^r et $b^{-1}M(N, \mathcal{O}_F)c^{-1} = M(N, \mathcal{O}_F)$,

$$\begin{aligned} \nu_r(\gamma) &= \inf\{\nu \in \mathbf{Z} : w_{\varpi_F} + \varpi_F^\nu M(N, \mathcal{O}_F) \subset B_F^r w_{\varpi_F} B_F^r\} \\ &= \nu_r(w_{\varpi_F}). \end{aligned}$$

Pour chaque $\mu \in \mu_F^\times$, soit $\mu' \in \mathcal{O}_{F'}^\times$, tel que $\mu' \bmod \mathcal{P}_{F'}^r = \lambda(\mu \bmod \mathcal{P}_F^r)$. Posant $\mu' = 0$ si $\mu = 0$, soit $\mu_{F'} = \{\mu' : \mu \in \mu_F\}$. Soient $b' = (b'_{i,j}) \in \zeta(bB_F^r)$, $c' = (c'_{i,j}) \in \zeta(cB_F^r)$ et $\gamma' = b'w_{\varpi_{F'}}c'$. Posant $\gamma' = (\gamma'_{i,j})$, on a

$$\begin{aligned} \gamma'_{i,j} &= \sum_{k=1}^N \varpi_{F'}^{\alpha_k} b'_{i,k} c'_{\sigma^{-1}(k),j} \\ &\equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \bmod \mathcal{P}_{F'}^{\nu_r(\gamma_{i,j})}. \end{aligned}$$

Soit un entier $\tilde{r} \geq 1$. Comme $\nu_r(\gamma_{i,j}) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$, si r est suffisamment grand, pour chaque couple d'indices (i, j) , on a $\nu_r(\gamma_{i,j}) \geq \nu_{\tilde{r}}(\gamma)$. Dans ces conditions, posant $\beta = \nu_{\tilde{r}}(\gamma)$, pour chaque couple d'indices (i, j) , on a

$$\gamma'_{i,j} \equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \bmod \mathcal{P}_{F'}^\beta,$$

et puisque $\nu_{\tilde{r}}(\gamma') = \nu_{\tilde{r}}(w_{\varpi_{F'}}) = \beta$,

$$\gamma' + \varpi_{F'}^\beta M(N, \mathcal{O}_{F'}) \subset B_{F'}^{\tilde{r}} \gamma' B_{F'}^{\tilde{r}} = \zeta(B_{F'}^{\tilde{r}} \gamma B_{F'}^{\tilde{r}}).$$

D'où la variante suivante du théorème 3.6 : soit $\gamma \in G_r$. Il existe un entier β tel que si r est suffisamment grand, alors pour tout $\gamma' = (\gamma'_{i,j}) \in \underline{G}(F')$ tel que $\gamma'_{i,j} \equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \bmod \mathcal{P}_{F'}^\beta$, on a $\gamma' \in \underline{G}(F')_r$ et

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$. □

BIBLIOGRAPHIE

- [B] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique : Algèbre VIII*, Hermann, Paris, 1958.
- [BK] C. BUSHNELL, P. KUTZKO, The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups, *Ann. of Math. Studies*, 129, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [Bo] A. BOREL, *Linear algebraic groups (second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., 126, Springer, New York, 1991.
- [C] L. CLOZEL, Orbital integrals on p -adic groups : a proof of the Howe conjecture, *Ann. of Math.*, 129 (1989), 237-251.
- [D] P. DELIGNE, Les corps locaux de caractéristique p , limites de corps locaux de caractéristique zéro, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Coll. Travaux en cours, Paris (1984), 119-157.
- [HC1] HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on reductive p -adic groups, *Lectures Notes in Math.*, 162, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [HC2] HARISH-CHANDRA, A submersion principle and its applications in *Papers dedicated to the memory of V.K. Patodi*, Indian Academy of Sciences, Bangalore, and the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1980), 95-102 (Collected papers IV, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984, 439-446).
- [HH] G. HENNIART, R. HERB, Automorphic induction for $GL(n)$ (over local non-archimedean fields), prépublication U. de Paris-Sud, à paraître dans *Duke Math. J.* (mais sans l'Appendix 1).
- [Ho] R. HOWE, Harish-Chandra homomorphism for p -adic groups, *Regional Conferences Series in Math.*, 59 (1985), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [K] D. KAZHDAN, Representations of groups over close local fields, *J. Analyse Math.*, 47 (1986), 175-179.
- [La] G. LAUMON, *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [Le] B. LEMAIRE, Thèse, Univ. de Paris-Sud, 8 février 1994.
- [S] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton U. Press, Princeton, 1971.
- [V] M.-F. VIGNÉRAS, Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p -adique, *J. Fac. Sci. U. of Tokyo*, 28 (3) Sec. 14 (1982), 945-961.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1995,
accepté le 20 novembre 1995.

Bertrand LEMAIRE,
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bât. 425
91405 Orsay cedex (France).