ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JULIO C. REBELO

Singularités des flots holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 2 (1996), p. 411-428

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_411_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 2 (1996), 411–428

SINGULARITÉS DES FLOTS HOLOMORPHES

par Julio C. REBELO (*)

---

1. Introduction.

Un champ de vecteurs sur une variété compacte engendre un flot global dont les points fixes sont les singularités du champ. Tout germe de champ de vecteurs C^∞ au voisinage d'un point d'une variété peut évidemment se prolonger en un champ C^∞ défini globalement. Autrement dit, les singularités des champs de vecteurs différentiables des variétés compactes peuvent être quelconques.

Nous nous proposons dans ce travail de montrer que la situation est très différente dans le cas des champs de vecteurs holomorphes. De manière générale nous allons montrer que les singularités d'un champ holomorphe sur une variété compacte ne peuvent pas être très dégénérées.

Nous donnerons plusieurs énoncés allant dans cette direction mais dans cette introduction, nous nous contenterons du suivant :

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{Z}$ un champ de vecteurs holomorphe sur une surface complexe M. On suppose que $\mathcal{Z}$ engendre un flot global (ce qui est le cas si M est compacte). Si $\mathcal{Z}$ possède une singularité isolée, alors le deuxième jet de $\mathcal{Z}$ en ce point est non nul.*

Je remercie très sincèrement Étienne Ghys à qui ce travail doit beaucoup.

(*) Boursier CNPq, Brasilia.
Mots-clés : Singularité – Flot – Champ de vecteurs – Séparatrice.
Classification math. : 34A20.

2. Préliminaires.

Pour expliquer notre approche du problème, nous commencerons par quelques définitions.

DÉFINITION 2.1. — *Un flot holomorphe dans une variété complexe M est une action holomorphe du groupe additif $\mathbf{C}$:*

$$\Phi : \mathbf{C} \times M \longrightarrow M.$$

Par "action holomorphe" nous entendons une application holomorphe Φ comme ci-dessus telle que pour tout x de M, et T_1, T_2 de $\mathbf{C}$:

1. $\Phi(0, x) = x$,
2. $\Phi(T_1 + T_2, x) = \Phi(T_2, \Phi(T_1, x))$.

Un flot Φ définit un champ holomorphe $\mathcal{Z}$ sur M par :

$$\mathcal{Z}(x) = \frac{d}{dT}\Phi(T, x) \mid_{T=0} .$$

Si $\mathcal{Z}$ est nul en x, alors $\Phi(T, x) = x$ pour tout T de $\mathbf{C}$. Dans ce cas, nous dirons que x est une *singularité* de $\mathcal{Z}$ (ou du flot). Si $\mathcal{Z}(x)$ est non nul alors l'orbite de x est une sous-variété complexe (non proprement plongée) de dimension (complexe) 1.

Réciproquement, étant donné un champ holomorphe $\mathcal{Z}$ sur une variété complexe M, nous dirons que $\mathcal{Z}$ est *complet* s'il est associé à un flot holomorphe sur M. Si M est compacte alors tout champ de vecteurs holomorphe globalement défini est complet (voir par exemple [2]).

Les orbites d'un champ complet sont des quotients de $\mathbf{C}$. Ce sont donc des surfaces de Riemann isomorphes à la droite complexe $\mathbf{C}$, à un cylindre $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ ou à un tore $\mathbf{C}/\Lambda$ (où Λ est un réseau de $\mathbf{C}$).

Si $\mathcal{Z}$ est un champ non nécessairement complet sur M et si x est un point de M, le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires affirme que $\mathcal{Z}$ engendre un *flot local* au voisinage de x, dans le sens suivant :

DÉFINITION 2.2. — *Fixons un point $x \in M$. Un flot local autour de x est une application holomorphe $\Phi_{\mathrm{loc}} : V \times U \to M$, où V est un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ et U un voisinage de $x \in M$, telle que $\Phi_{\mathrm{loc}}(0, y) = y$ et*

$$\Phi_{\mathrm{loc}}(T_1 + T_2, y) = \Phi_{\mathrm{loc}}(T_2, \Phi_{\mathrm{loc}}(T_1, y))$$

dès que les deux membres sont définis.

Dans cet article, nous allons voir qu'il y a des *obstructions locales* pour qu'un champ holomorphe défini sur un ouvert puisse se prolonger en un champ *complet* défini sur une variété contenant cet ouvert.

Soit $\mathcal{Z}$ un champ de vecteurs holomorphe défini sur une variété M. Les orbites de $\mathcal{Z}$, même si elles ne sont pas paramétrées par un flot global, définissent cependant un feuilletage (singulier) de M. Les feuilles sont des surfaces de Riemann dont la topologie peut être plus complexe que celle du plan, du cylindre ou du tore. On remarque cependant que chaque feuille non singulière L est naturellement munie d'une 1-forme différentielle holomorphe, égale à 1 sur $\mathcal{Z}$. Nous noterons dT cette forme, en suggérant qu'il s'agit de la différentielle d'un temps complexe et quelquefois l'appellerons *1-forme temps*. Lorsque $\mathcal{Z}$ est complet, cette forme est en effet la différentielle du temps T (défini à une constante près) donné localement par le flot.

Puisque dT est une forme fermée, son relevé au revêtement universel $\widetilde{L}$ de L est exact. Il existe donc une application bien définie (à translation près) $D\ :\widetilde{L}\longrightarrow \mathbf{C}$ dont la différentielle est le relevé de dT. L'application D est dite *application développante*; parfois nous l'appellerons aussi *application temps*. Il serait naturel de la noter T mais nous ne le ferons pas pour ne pas confondre avec le paramètre complexe. Pour un champ complet, D est bien sûr injective.

Nous introduisons maintenant une notion qui a l'avantage de pouvoir se localiser.

DÉFINITION 2.3. — *Soit U un ouvert relativement compact d'une variété complexe M et $\mathcal{Z}$ un champ de vecteurs holomorphe sur U. On dit que $\mathcal{Z}$ est semi-complet dans U s'il existe une application holomorphe (qui sera appelée le flot semi-global associé au champ)*

$$\Phi_{sg} : \Omega \subseteq \mathbf{C}\times U \longrightarrow U$$

où Ω est un ouvert contenant $\{0\}\times U$, telle que :

1. $\dfrac{d}{dT}\Phi_{sg}(T,x)\mid_{T=0}= \mathcal{Z}(x)$ *pour tout x de U.*

2. $\Phi_{sg}(T_1+T_2,x) = \Phi_{sg}(T_2,\Phi_{sg}(T_1,x))$ *dès que chaque membre est défini.*

3. *Soit x dans U et T_i une suite de nombres complexes telle que (T_i,x) est dans Ω et tend vers un point du bord de Ω. Alors $\Phi_{sg}(T_i,x)$ tend vers*

le bord de U.

Remarque 2.4. — Dans la dernière condition, dire qu'une suite tend vers le bord de U c'est dire qu'elle quitte tout compact contenu dans U.

L'intérêt de cette définition vient de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.5. — *Soit $\mathcal{Z}$ un champ de vecteurs holomorphe complet sur M. La restriction de $\mathcal{Z}$ à un ouvert U connexe et relativement compact quelconque de M est un champ semi-complet.*

Démonstration. — Soit $\Phi : \mathbf{C} \times M \longrightarrow M$ le flot de $\mathcal{Z}$. On définit Ω comme la composante connexe de $\Phi^{-1}(U)$ contenant $\{0\} \times U$ et Φ_{sg} comme la restriction de Φ à Ω.

Nous allons démontrer que cette application satisfait toutes les conditions de la définition 2.3. Les conditions 1 et 2 sont évidentes et nous vérifions 3.

Supposons par l'absurde que 3 n'est pas vérifiée. Alors, en choisissant peut-être des sous-suites, il existe une suite (T_i, x) tendant vers $(\widehat{T}, x) \in \partial\Omega$ et telle que $\Phi_{sg}(T_i, x)$ tende vers $y \in U$. Puisque Φ est un flot global il découle que $\Phi(\widehat{T}, x) = y$ et donc y appartient à l'orbite (feuille), L_x, du flot (global) Φ contenant x. Puisque $y \in U$ et U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ et un ouvert V contenant y tel que pour tout $z \in V$ et tout T tel que $|T| < \varepsilon$ on ait $\Phi(T, z) \in U$. D'autre part on peut trouver un voisinage ouvert W de x tel que $\Phi(\widehat{T}, W) \subset V$. Soit $B_\varepsilon(\widehat{T})$ la boule (dans $\mathbf{C}$) de centre $\widehat{T}$ et de rayon ε. Nous affirmons que $B_\varepsilon(\widehat{T}) \times W \subset \Phi^{-1}(U)$. En fait, il suffit de remarquer que si $T' \in B_\varepsilon(\widehat{T})$ nous pouvons écrire $T' = \widehat{T} + T''$ avec $|T''| < \varepsilon$ de sorte que, si z appartient à W, on a :

$$\Phi(T', z) = \Phi(T'', \Phi(\widehat{T}, z)) \in \Phi(T'', V) \subset U,$$

ce qui démontre l'affirmation. Puisque

$$(\widehat{T}, x) \in \partial\Omega \cap (B_\varepsilon(\widehat{T}) \times W),$$

il résulte que la réunion des deux ouverts connexes Ω et $B_\varepsilon(\widehat{T}) \times W$ est connexe. Ceci donne une contradiction avec l'hypothèse que $(\widehat{T}, x)$ appartient au bord de la composante connexe de $\Phi^{-1}(U)$ contenant $\{0\} \times U$. □

Remarque 2.6. — L'argument ci-dessus démontre en plus qu'un champ semi-complet, $\mathcal{Z}$, sur un ouvert U définit naturellement un champ semi-complet sur tout ouvert connexe et relativement compact contenu dans U.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire très simple pour qu'un champ soit semi-complet. Cette condition jouera un rôle essentiel dans la suite.

PROPOSITION 2.7. — *Soit $\mathcal{Z}$ un champ semi-complet dans un ouvert connexe et relativement compact U de M et L une orbite non singulière de $\mathcal{Z}$ dans U. Soit $c : [0,1] \to L$ un chemin plongé (injectivement) dans L. Alors l'intégrale de dT le long de c n'est pas nulle.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un chemin plongé c dans L joignant deux points x et y tel que l'intégrale de dT le long de c soit nulle. Soit W un ouvert connexe contenant c et notons L_W la composante connexe de $L \cap W$ contenant c. On peut choisir W de telle sorte que L_W soit un disque ouvert proprement plongé dans W. Soit alors $\Phi : \Omega \subset \mathbf{C} \times W \longrightarrow W$ le flot semi-global de $\mathcal{Z}$ dans W et notons Ω_x la composante connexe de $\{z \in \mathbf{C} \mid (z,x) \in \Omega\}$ qui contient 0. Nous remarquons que Ω_x est relativement compact.

Nous affirmons que l'application

$$\Phi_x : z \in \Omega_x \longmapsto \Phi(z,x) \in L_W$$

est un revêtement et donc un difféomorphisme puisque L_W est simplement connexe. En effet, c'est bien sûr un difféomorphisme local et il suffit de vérifier qu'elle est propre. Ceci résulte immédiatement de la définition 3 : si une suite T_i de Ω_x tend vers un point du bord de Ω_x, la suite $\Phi_x(T_i)$ tend vers le bord de W et donc vers le bord de L_W puisque celui-ci est proprement plongé dans W.

Par définition de la forme dT, l'image réciproque $\Phi_x^* \, dT$ n'est autre que la forme dz sur $\mathbf{C}$. Considérons donc $\overline{c}$ un relevé de c dans Ω_x. Puisque l'intégrale de dz le long de $\overline{c}$ est nulle il résulte que $\overline{c}$ est un lacet. Il en est donc de même pour c. Ce qui contredit notre hypothèse. □

Nous dirons que la fonction D est *semi-injective* pour dire que l'intégrale de dT le long des chemins plongés ne s'annule pas. Sauf avis du contraire, dans la suite tous les chemins seront supposés plongés . La proposition 2.7 dit précisément que l'application D associée à un champ semi-complet est semi-injective.

Résumons notre méthode. D'après ce que nous venons de voir, pour montrer le théorème de l'introduction, il suffit de montrer le théorème 2.8, dont l'énoncé est purement local.

THÉORÈME 2.8. — *Soit $\mathcal{Z}$ un champ de vecteurs holomorphe défini au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^2$, *possédant une singularité isolée en* 0, *et dont le deuxième jet est nul. Soit B une boule suffisamment petite centrée en* 0. *Alors il existe une feuille L de la restriction de $\mathcal{Z}$ à B sur laquelle l'application développante D n'est pas semi-injective.*

Un germe de singularité de champ de vecteurs holomorphe sera dit *interdit* s'il n'est pas semi-complet dans les voisinages arbitrairement petits de la singularité. La combinaison des propositions 2.5 et 2.7 entraîne qu'un champ défini sur un ouvert et ayant une singularité *interdite* ne peut être prolongé en un champ complet sur aucune variété M, en particulier ne peut être prolongé en un champ globalement défini sur aucune variété compacte M.

Nous définissons *l'ordre* d'un champ en une singularité (dit aussi l'ordre de la singularité) comme le degré du plus petit coefficient non nul du développement en série de entière du champ.

Remarque 2.9. — Il existe des champs de vecteurs semi-complets qui présentent une singularité isolée et dont le premier jet est nul : l'hypothèse du théorème 2.8 ne peut être affaiblie au premier jet.

3. Dimension 1.

Sur une surface de Riemann on peut décrire tous les flots holomorphes. En effet, en vertu du théorème d'uniformisation de Riemann, cela revient à décrire les flots sur la sphère, le plan et le disque. Dans les deux derniers cas on s'occupe aussi de savoir si un tel flot peut commuter avec un sous-groupe discret d'automorphismes ; ce qui n'arrive généralement pas. Cependant il n'est pas clair que les flots semi-globaux des surfaces de Riemann sont faciles à décrire, et c'est précisément le but de cette section.

Nous allons donc commencer par le cas unidimensionnel. Nous avons un germe de champ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}$ et nous demandons s'il définit un flot semi-global dans ce voisinage. Notre réponse à cette question sera la proposition 3.1. Cependant nous expliquerons d'abord un cas particulier car la preuve de la proposition 3.1 n'est qu'une généralisation naïve de ce cas.

L'exemple que nous expliquerons est celui du (germe de) champ $x^k\, \partial/\partial x$, $k \geq 3$. Si on essaie d'intégrer ce champ par un calcul explicite, on verra la présence d'une racine "$(k-1)$-ième" dans l'expression trouvée. Cependant la fonction racine "$(k-1)$-ième" n'a pas de définition globale sur $\mathbf{C}$. Il est donc naturel de chercher quelles implications ce phénomène possède sur la structure d'un flot.

En fait on a la :

PROPOSITION 3.1. — *Soit f un germe en 0 de fonction holomorphe non nulle tel que*

$$f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = 0$$

où $f^{(i)}$ dénote la dérivée d'ordre i. On pose $X = f\, \partial/\partial x$. Alors X ne définit pas un flot semi-global au voisinage de l'origine.

D'abord nous expliquerons le cas particulier $f = x^k$, $k \geq 3$. Nous avons donc l'équation différentielle :

$$\frac{\partial x}{\partial T} = x^k. \tag{1}$$

Comme voisinage de 0 (l'origine de $\mathbf{C}$) prenons B_ε, la boule (disque) de rayon $\varepsilon > 0$. Nous allons démontrer que l'application développante associée à ce champ et à B_ε n'est pas semi-injective.

Nous voulons donc déterminer l'intégrale de la forme temps le long des chemins plongés. Nous choisissons un point $x_0 \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$ comme extrémité fixe de ces chemins. Il s'agit de résoudre l'équation (1) avec la condition initiale $(0, x_0)$. Il est alors naturel d'introduire la fonction :

$$D(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z^k}. \tag{2}$$

Clairement la fonction D n'est pas bien définie car elle dépend du chemin qui joint x_0 à x. Il se passe bien le phénomène que nous avons décrit dans la section précédente : la fonction D est définie sur le revêtement universel de $B_\varepsilon \setminus \{0\}$. Il est peut-être plus facile de restreindre le domaine de définition de D à $B_\varepsilon \backslash \mathbf{R}^+$, i.e. la boule privée de son intersection avec le demi-axe positif des abscisses. L'avantage de ce choix est qu'il permet d'abréger les notations. Pour voir que D n'est pas semi-injective dans ce domaine nous choisissons un point $x_0' \in B_\varepsilon \backslash \mathbf{R}^+$ tel que $x_0' = \alpha x_0$ (où α est une racine ($\neq 1$) d'ordre $(k-1)$ de l'unité, qui existe car $k \geq 3$) appartienne, lui aussi, à $B_\varepsilon \backslash \mathbf{R}^+$. Nous joignons x_0 à x_0' par un chemin c *entièrement* contenu dans $B_\varepsilon \backslash \mathbf{R}^+$. Nous allons déterminer l'intégrale de dT sur c. Nous rappelons que $dT = dz/z^k$ (voir équation 2), donc :

$$\int_c dT = \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{x_0'^{k-1}} - \frac{1}{x_0^{k-1}}\right) = 0.$$

L'application D n'est donc pas semi-injective. Ceci prouve que le germe du champ $x^k \partial/\partial x$ ne définit pas un flot semi-global au voisinage de 0. Par conséquent il ne peut pas être prolongé en un champ complet sur une surface de Riemann. □

Remarque 3.2. — Il peut être utile de remarquer que les champs $x\,\partial/\partial x$ et $x^2\,\partial/\partial x$ définissent des flots semi-globaux dans la boule (disque) unité B. En fait au premier champ correspond le flot semi-global :

$$\Phi_{sg}(T, x) = e^T x,$$

et au deuxième le flot semi-global :

$$\Phi_{sg}(T, x) = \frac{x}{1 - Tx}.$$

Cas général.

Nous allons adapter maintenant l'argument que nous avons utilisé pour le champ homogène pour démontrer la proposition 3.1. Tout d'abord nous choisissons un $\varepsilon > 0$ et nous nous plaçons à l'intérieur de B_ε, (i.e. la boule (disque) de centre l'origine et de rayon ε). Nous choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'origine soit la seule singularité de X dans B_ε. Nous allons démontrer qu'il existe deux points distincts, arbitrairement proches de l'origine, tels que l'intégrale de dT le long d'un chemin entièrement contenu dans B_ε qui les joint est nulle. Après division par une constante nous fixons $f = x^k + ax^{k+1} + \cdots$

Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Si l'application développante associée au champ X est semi-injective dans la boule B_ε alors celle associée au champ $\lambda^{-1}X(\lambda x)$, la conjugaison de X par l'homothétie $x \longmapsto \lambda x$, est semi-injective dans la boule de rayon $\varepsilon/|\lambda|$ (et réciproquement). En faisant la normalisation $\lambda = \varepsilon$ il résulte que la semi-injectivité de D, i.e. l'application développante associée au champ X, dans la boule de rayon λ, équivaut à celle de l'application développante associée a $\lambda^{-1}X(\lambda x)$, dans la boule unité B. Nous remarquons que :

$$X(\lambda x) = f(\lambda x)\frac{\partial}{\partial x} = (\lambda^k x^k + a\lambda^{k+1}x^{k+1} + \cdots)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Comme λ est constant la semi-injectivité de l'application développante associée à $\lambda^{-1}X(\lambda x)$ dans B est équivalente à celle associée à $\lambda^{-k}X(\lambda x)$, notée D_λ, dans B.

Donc nous avons deux formes holomorphes fermées, à savoir dx/x^k et $dx/\lambda^{-k}f(\lambda x)$. En résumé nous voulons démontrer que si $|\lambda|$ est assez petit, il existe deux points distincts dans B tels que l'intégrale de la deuxième forme sur un chemin plongé joignant ces deux points s'annule.

Nous fixons un point $x \neq 0$ dans B et faisons la normalisation $D_\lambda(x) = D(x) = 0$. Nous choisissons V un voisinage simplement connexe de x tel que $\alpha x \notin V$, (où α est une racine de l'unité différente de 1, d'ordre $k-1$). Dans V nous considérons l'application $D_\lambda : V \longrightarrow \mathbf{C}$ qui à $y \in V$ associe l'intégrale de la forme $dx/\lambda^{-k}f(\lambda x)$ sur un chemin quelconque entièrement contenu dans V joignant x à y.

AFFIRMATION. — *Il existe θ et λ_0 positifs tels que si $|\lambda| \leq \lambda_0$ alors :*

$$B_\theta \subseteq D_\lambda(V)$$

où B_θ est la boule de centre 0 et rayon θ.

Démonstration de l'affirmation. — Évidemment, on a $D_\lambda(x) = 0$ et la dérivée de D_λ en y est de la forme $y^k + \lambda g(y)$ où $g(y) = ay^{k+1} + \cdots$. Soit $V' \subset V$ le disque de centre x et de rayon $\delta > 0$ (assez petit). Si $\lambda_0 > 0$ et δ sont assez petits, alors pour tout y de V' et λ tel que $|\lambda| \leq \lambda_0$, la dérivée de D_λ en y reste dans un disque de centre x^k et de rayon $|x|^k/10$. Il en résulte que si $|\lambda| \leq \lambda_0$, l'image $D_\lambda(V')$ contient un disque B_θ de rayon indépendant de λ. □

Par ailleurs lorsque λ tend vers 0 l'intégrale de la forme $dT = dx/\lambda^{-k}f(\lambda x)$ sur le chemin c joignant x à αx tend vers celle de la forme dx/x^k qui vaut 0. Donc si λ est assez petit cette valeur de l'intégrale appartient à B_θ. Autrement dit, il existe un point x' de V tel que l'intégrale de dT sur un chemin c' joignant x à x' et contenu dans V soit égale à l'intégrale de dT sur c. Soit c'' le chemin joignant x' à αx obtenu par juxtaposition de l'inverse de c' et de c. Il est clair que c'' est un chemin plongé et que l'intégrale de dT sur c'' est nulle.

La preuve de la proposition 3.1 est terminée. □

Remarque 3.3. — Nous remarquons que le champ $x^k\partial/\partial x$ définit un flot semi-global sur un secteur d'angle plus petit que $2\pi/(k-1)$. En effet

un calcul explicite nous mène à l'expression
$$\Phi_{sg}(T,x) = \frac{x}{(1-(k-1)Tx^{k-1})^{1/k}}.$$

Puisque le domaine de définition du flot semi-global est un secteur angulaire d'angle plus petit que $2\pi/(k-1)$, il découle que dans ce domaine nous pouvons définir une détermination de la fonction racine $(k-1)$-ième, ce qui donne un sens à l'expression du flot semi-global si x reste dans ce domaine. La vérification que cette formule satisfait toutes les conditions de la définition 2.3 est maintenant évidente.

4. Le cas des surfaces complexes.

Les flots holomorphes des surfaces complexes ont été très étudiés et des phénomènes riches sont déjà présents. Cependant quelquefois ils satisfont des propriétés typiques de la dimension 2 qui nous permettent de les étudier de façon plus complète.

Dans ce qui suit le k-ième jet d'un champ X en un point p sera noté $J^k(X)(p)$.

Dans cette section nous donnons la preuve du théorème 4.1. Nous rappelons au lecteur son énoncé.

THÉORÈME 4.1. — *Soit X un germe bi-dimensionnel de champ de vecteurs holomorphe ayant une singularité isolée en* 0 *(i.e. en l'origine de $\mathbf{C}^2$), telle que $J^2(X)(0) = 0$. Alors, si B est une boule suffisamment petite centrée en* 0, *il existe une feuille L de la restriction de $\mathcal{Z}$ à B dont l'application développante D n'est pas semi-injective.*

Démonstration. — Nous rappelons que pour une singularité isolée d'un champ holomorphe dans une surface complexe M le résultat principal de [1] affirme l'existence d'un germe de courbe analytique $\mathcal{C}$ contenant la singularité et invariante par X. Un tel germe de courbe s'appelle une *séparatrice* de X. Dans la suite le mot courbe signifiera germe de courbe.

Par ailleurs un théorème bien connu de Puiseux assure qu'une telle courbe est paramétrée, c'est-à-dire qu'elle est réalisée par l'image d'une application $A : y \longmapsto (a(y), b(y))$ d'un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{C}^2$ avec $(a(0), b(0)) = (0,0)$, où a et b sont holomorphes. Ce paramétrage peut être supposé irréductible, de sorte que nous pouvons supposer qu'il est injectif dans un (petit) voisinage de $0 \in \mathbf{C}$.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème et supposons par l'absurde que X définisse un flot semi-global au voisinage de 0.

Nous prenons un voisinage U de 0 dans $\mathbf{C}$ tel que l'application A soit injective dans U et que $A(U)$ soit contenu dans le voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ où le champ X définit un flot semi-global. En tout point p appartenant à $U \setminus \{0\}$ l'application A est aussi un difféomorphisme local d'un voisinage de $p \in \mathbf{C}$ sur un voisinage *dans* $\mathcal{C}$ de $A(p)$. Donc dans $U \setminus \{0\}$ nous pouvons définir le champ $A^*X(y)$ par :

$$A^*X(y) = d\,A^{-1}_{A(y)}.X(A(y)). \tag{3}$$

Clairement ce champ est analytique dans $U \setminus \{0\}$. Nous l'étendons à U en le définissant comme *zéro* en 0 (i.e. 0 est une singularité de A^*X). Nous affirmons que A^*X est encore analytique dans U et de plus $J^2(A^*X)(0) = 0$. Pour y parvenir il suffit de vérifier que :

$$\lim_{y\to 0} \frac{|A^*X(y)|}{|y|^2} = 0. \tag{4}$$

En fait, (4) entraîne en particulier que A^*X est continu en 0 et grâce au théorème d'extension de Riemann il résulte que le champ en question est aussi holomorphe en 0. Par ailleurs la limite (4) nous assure la nullité des deux premiers termes de la série de Taylor de A^*X ce qui signifie que $J^2(A^*X)(0) = 0$.

Pour démontrer (4) nous allons chercher à estimer le module de $A^*X(y)$. D'après (3), si $\lim\limits_{y\to 0} |A(y)|/|y^k| = c(\neq 0, \infty)$, alors la dérivée de $d\,A^{-1}_{A(y)}$ est de l'ordre de $1/y^{k-1}$.

Cependant $X(A(y))$, avec l'hypothèse $J^2X(0) = 0$, est au moins de l'ordre de y^{3k}. Donc $d\,A^{-1}_{A(y)}.X(A(y))$ est au moins de l'ordre de y^{2k+1}. Comme $k \geq 1$ on en déduit (4).

D'après la proposition 3.1 nous savons maintenant que l'application développante associée à A^*X n'est pas semi-injective dans le revêtement universel de $U \setminus \{0\}$. Pour finir la preuve du théorème 4.1, il suffit de montrer que cette non semi-injectivité entraîne celle de l'application développante, $D_{A(U)}$, associée à X sur $A(U) \setminus \{0\}$, ce qui donne une contradiction avec notre hypothèse.

Soit dT_X la 1-forme associée au champ X sur $A(U)$ et soit dT_{A^*X} celle associée au champ A^*X dans U. Par construction l'image réciproque, $A^*\,dT_X$, de dT_X par A n'est autre que dT_{A^*X}. Si c est un chemin plongé dans U le long duquel l'intégrale de dT_{A^*X} s'annule, il en est de même pour l'intégrale de dT_X le long du chemin (plongé car A est injective) $A(c) \subset A(U)$.

Ceci achève la preuve du théorème 4.1. □

Cet argument montre un peu mieux. En fait, il nous permet d'énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. — *Un (germe de) champ semi-complet, X, autour de $0 \in \mathbf{C}^2$, ayant en 0 une singularité isolée et tel que $J^1(X)(0) = 0$, est tel que toutes ses séparatrices sont lisses.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}$ une séparatrice de X et $A : U \subset \mathbf{C} \longrightarrow A(U) \subset \mathcal{C}$ un paramétrage de Puiseux. Il suffit de voir que, si A est singulière en 0, le champ A^*X défini sur U comme ci-dessus satisfait encore (4). Supposons alors que l'ordre de A en 0 est $k \geq 2$. Alors la dérivée $dA^{-1}_{A(y)}$ est de l'ordre $1/y^{k-1}$ et $X(A(y))$ est d'ordre au moins y^{2k} donc $dA^{-1}_{A(y)}.X(A(y))$ est d'ordre au moins y^{k+1}. On en déduit (4) car $k \geq 2$. □

5. Presque-séparatrices.

D'après le théorème 4.1, il est naturel de demander ce qui se passe en dimension plus grande. Pour cela, nous développerons une notion de presque-séparatrice qui nous permettra d'obtenir dans cette section un résultat valable en dimension quelconque (bien que moins puissant que le théorème 4.1). Rappelons en effet qu'il existe des germes de singularités isolées qui ne possèdent pas de séparatrice, dès que la dimension est au moins 3 (cf. [3]).

DÉFINITION 5.1. — *Une presque-séparatrice lisse pour un germe de champ X est une courbe lisse contenant l'origine telle que, lorsqu'on la ramène par un biholomorphisme local sur le premier axe coordonné de $\mathbf{C}^n$, le champ X dans ces nouvelles coordonnées a les propriétés suivantes :*

1. *Le premier axe de coordonnée est invariant par le champ X^k, formé par la première composante homogène non nulle du développement de Taylor de X.*

2. *La restriction de X^k au premier axe de coordonnée n'est pas identiquement nulle.*

Le lemme suivant montre que tout germe de champ holomorphe dont la première composante homogène non nulle a une singularité isolée, possède une presque-séparatrice lisse qui est une droite.

LEMME 5.2. — *Soit X^k un (germe de) champ homogène de degré $k > 2$ et supposons que l'origine soit une singularité isolée de X^k. Alors X^k possède une droite invariante. En particulier, l'application développante induite par X^k sur cette droite n'est pas semi-injective.*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que le champ X^k possède une droite invariante, car ceci réduit la deuxième affirmation à la proposition 3.1. Pour vérifier l'existence de cette droite nous écrivons
$$X^k = P_1(z_I)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_n(z_I)\frac{\partial}{\partial z_n}$$
où $z_I = (z_1, \ldots, z_n)$.

Puisque les P_i sont homogènes et 0 est une singularité isolée, $(P_1, \ldots, P_n)$ induit une transformation de $\mathbf{C}P^{n-1}$. Chercher une droite invariante par X^k revient alors à chercher un point fixe pour cette transformation. Soit $z_I = [z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbf{C}P^{n-1}$, écrit en coordonnées homogènes de $\mathbf{C}P^{n-1}$. Un point fixe dans ces conditions équivaut à une solution pour le système de $(n-1)$ équations polynomiales homogènes :
$$[P_1(z_I) : \ldots : P_n(z_I)] = [z_1 : \ldots : z_n].$$

Le théorème de Bezout entraîne l'existence de solutions pour ce dernier. □

Nous donnons le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 5.3. — *Soit X un (germe de) champ de vecteurs holomorphe à n variables. Soit X^k la composante homogène, de degré k, du premier jet non nul de X en l'origine. Supposons que $k \geq 3$ et que l'origine soit une singularité isolée de X^k. Alors le (germe de) champ X est interdit.*

Démonstration. — Pour démontrer ce théorème nous utiliserons une méthode analogue à celle de la section 3.

Écrivons X sous la forme :
$$X = f_1(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_n(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

On suppose que les f_i sont définis dans la boule unité B de $\mathbf{C}^n$. Le champ X^k s'écrit :
$$X^k = P_1(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_n(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

où les P_i sont des polynômes homogènes de degré k.

Soit B^1 la boule unitaire de $\mathbf{C}$. Nous définissons un champ de vecteurs $\overline{X}$ dans $B \times B^1 \subset \mathbf{C}^{n+1}$, de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n, \lambda)$, par :

$$\overline{X}(z_1, \ldots, z_n, \lambda) = \frac{1}{\lambda^k} f_1(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^k} f_n(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}$$

pour $\lambda \neq 0$ et,

$$\overline{X}(z_1, \ldots, z_n, 0) = P_1(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_n(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

On remarque que $\overline{X}$ est un champ de vecteurs holomorphe dans $B \times B^1$. Le champ $\overline{X}$ est horizontal, i.e. tangent aux hyperplans $\lambda = \mathrm{Cst}$ et l'axe vertical $\{0\} \times B^1$ est constitué de singularités de $\overline{X}$.

Lorsque l'on restreint le champ $\overline{X}$ à $B \times \{\lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$, le champ obtenu est un multiple constant du conjugué de X par l'homothétie de $\mathbf{C}^n$ de rapport λ. Si nous trouvons une feuille du feuilletage $\overline{\mathcal{F}}$ engendré par $\overline{X}$ sur un niveau $\lambda = \mathrm{Cst} \neq 0$ sur laquelle l'application développante n'est pas semi-injective, alors nous pourrons conclure que X est interdit.

Puisque $k \geq 3$, nous savons que X^k est interdit. Autrement dit, il existe une feuille de $\overline{X}$ au niveau $\lambda = 0$ sur laquelle l'application développante n'est pas semi-injective. Il s'agit de montrer que ceci entraîne la même propriété sur une feuille voisine avec $\lambda \neq 0$. Précisons cela.

Après un changement de coordonnées linéaire, nous supposons que la droite $\Delta = \{z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0\}$ est une séparatrice de X^k, et nous considérons l'arc de cercle $c_0 = \{(e^{i\theta}/2, 0, \ldots, 0), \theta \in [0, 2\pi/(k-1)]\}$, de rayon $1/2$. Nous savons que l'intégrale de la 1-forme temps de X^k sur c_0 est nulle.

Soit V_0 le voisinage compact de c_0 dans la droite Δ constitué des points $(re^{i\theta}, 0, \ldots, 0)$ avec $1/4 \leq r \leq 3/4$ et $-1/10 \leq \theta \leq 2\pi/(k-1) + 1/10$.

Rappelons que $\overline{\mathcal{F}}$ désigne le feuilletage de $B \times B^1$ défini par $\overline{X}$. On remarque que $\overline{\mathcal{F}}$ est transverse aux hyperplans $\{z_1 = \mathrm{Cst}\}$ dans un voisinage de V_0 de la forme $V_0 \times B_\varepsilon$, où B_ε est la boule de rayon ε de $\mathbf{C}^n$. Pour $|\lambda| \leq \varepsilon$, soit L_λ la feuille de la restriction de $\overline{\mathcal{F}}$ à $V_0 \times B_\varepsilon$ passant par $(1/2, 0, \ldots, 0, \lambda) \in \mathbf{C}^{n+1}$.

Si $|\lambda|$ est assez petit, la projection de L_λ sur la droite Δ est un difféomorphisme holomorphe sur son image, et cette image contient la courbe c_0. On peut donc définir une unique courbe c_λ, pour $|\lambda|$ assez petit, contenue dans L_λ et se projetant sur c_0.

Nous notons $d\overline{T}$ la 1-forme temps du champ $\overline{X}$.

AFFIRMATION 1. — *L'intégrale de $d\overline{T}$ le long de c_λ tend vers* 0 *lorsque λ tend vers* 0.

En effet, cette intégrale tend évidemment vers celle de $d\overline{T}$ sur c_0. D'autre part, la restriction de $d\overline{T}$ à $B \times \{0\}$ est bien sûr la 1-forme temps du champ X^k. Nous savons donc que l'intégrale de $d\overline{T}$ sur c_0 est nulle.

Pour chaque λ (avec $|\lambda|$ assez petit), considérons l'ouvert U_λ de L_λ qui se projette dans Δ sur le disque de centre $(1/2, 0, \ldots, 0)$ (origine de c_0) et de rayon $1/100k$. Comme U_λ est simplement connexe, on peut considérer l'application développante définie sur U_λ et normalisée de façon à être 0 en $(1/2, 0, \ldots, 0, \lambda)$. Clairement, par continuité de D_λ par rapport à λ, on a :

AFFIRMATION 2. — *Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|\lambda|$ assez petit, l'image de U_λ par D_λ contient le disque de centre* 0 *et de rayon η.*

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. En effet, si $|\lambda|$ est assez petit, nous savons, d'après l'affirmation 1, que l'intégrale de $d\overline{T}$ sur c_λ est de module plus petit que η. D'après l'affirmation 2, il existe un chemin c'_λ, d'origine $(1/2, 0, \ldots, 0, \lambda)$, contenu dans U_λ et tel que :

$$\int_{c_\lambda} d\overline{T} = \int_{c'_\lambda} d\overline{T}.$$

En mettant bout à bout c_λ et c'_λ, on construit un arc c''_λ sur lequel l'intégrale de $d\overline{T}$ est nulle. Il est clair que, si $|\lambda|$ est assez petit, c''_λ n'est pas un lacet. Ainsi nous avons trouvé une feuille de $\overline{\mathcal{F}}$ au niveau $\lambda \neq 0$ sur laquelle l'application développante n'est pas semi-injective. Par conséquent X est une singularité interdite. □

La même preuve que précédemment donne le résultat suivant, légèrement plus général que le théorème 5.3 :

THÉORÈME 5.4. — *Si un germe possède une presque-séparatrice lisse et si son ordre est supérieur ou égal à 3 au point singulier, alors ce germe est interdit.*

6. Généralisation : champs quasi-homogènes.

Nous finissons ce travail en donnant une généralisation des résultats de la section précédente. Comme d'habitude soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe dans $\mathbf{C}^n$. Soit $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un n-uple de nombres naturels ayant l'unité pour seul facteur commun, et soit d un autre nombre naturel. Nous considérons l'action Ψ qui à $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et à $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ associe $\Psi_\lambda(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda^{\alpha_1} z_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} z_n) \in \mathbf{C}^n$. Le champ X sera dit *quasi-homogène* de *degré* d et *multi-indice* $\tilde{\alpha}$ si :

$$\Psi_\lambda^* X = \lambda^{d-1} X.$$

Il est évident que si $\tilde{\alpha} = (1, \ldots, 1)$ nous retrouvons les champs homogènes de degré d de la section précédente. Nous voulons étendre le théorème 5.3 de façon à être applicable à ce genre de singularité.

LEMME 6.1. — *Soit X un champ quasi-homogène de degré $d > 2$ et multi-indice $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Alors il existe $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que la courbe $\lambda \longmapsto (\lambda^{\alpha_1} z_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} z_n)$ est invariante par X.*

Démonstration. — Écrivons X sous la forme :

$$X = P_1(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_n(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

La condition de quasi-homogénéité signifie que, pour $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$P_i(\lambda^{\alpha_1} z_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} z_n) = \lambda^{\alpha_i - 1 + d} P_i(z_1, \ldots, z_n).$$

Cela entraîne en particulier que les P_i sont des polynômes et qu'on peut définir des polynômes homogènes $\widetilde{P}_i$ de même degré d par :

$$\widetilde{P}_i(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\alpha_i z_i^{\alpha_i - 1}} P_i(z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_n^{\alpha_n}).$$

Soit $\mathcal{H}$ l'application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ définie par :

$$\mathcal{H}(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_n^{\alpha_n}).$$

Clairement $\mathcal{H}$ envoie les droites de $\mathbf{C}^n$ passant par l'origine sur les courbes de la forme $\lambda \longmapsto (\lambda^{\alpha_1} z_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} z_n)$.

Soit $\widetilde{X}$ le champ :

$$\widetilde{X} = \widetilde{P_1}(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \widetilde{P_n}(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

C'est un champ homogène à singularité isolée.

Il est clair qu'en chaque point $\mathbf{z}$ de $\mathbf{C}^n$, la différentielle de $\mathcal{H}$ envoie le vecteur $\widetilde{X}(\mathbf{z})$ sur le vecteur $X(\mathbf{z})$. Autrement dit, $\mathcal{H}$ envoie les orbites de $\widetilde{X}$ sur celles de X.

D'après le lemme 5.2, il existe une droite invariante par $\widetilde{X}$. Son image par $\mathcal{H}$ est donc une courbe invariante par X, comme nous le désirions. □

Nous appellerons *monôme vectoriel* un champ de vecteurs de la forme $z_1^{p_1} z_2^{p_2} \dots z_n^{p_n} \partial/\partial z_i$. Son *degré* par rapport à un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n - \alpha_i + 1$.

THÉORÈME 6.2. — *Soit X^d un germe de champ de vecteurs holomorphe quasi-homogène de multi-indice $\tilde{\alpha}$ et degré $d > 2$ ayant une singularité isolée en l'origine de $\mathbf{C}^n$. Soit X un champ tel que le développement de Taylor de $X - X^d$ n'est formé que de monômes vectoriels de degrés par rapport à $\tilde{\alpha}$ strictement supérieurs à d. Alors X est interdit.*

Démonstration. — C'est presque la même que celle du théorème 5.3; la seule modification étant la définition du champ $\overline{X}$ de $\mathbf{C}^{n+1}$. Écrivons :

$$X = f_1(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + f_n(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}$$

et

$$X^d = P_1(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + P_n(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Alors nous définissons un champ $\overline{X}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ par :

$$\overline{X}(z_1, \dots, z_n, \lambda) = \frac{1}{\lambda^d} \left[\frac{1}{\lambda^{\alpha_1 - 1}} f_1(\lambda_I z_I) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \frac{1}{\lambda^{\alpha_n - 1}} f_n(\lambda_I z_I) \frac{\partial}{\partial z_n} \right]$$

pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$, avec $\lambda_I z_I = (\lambda^{\alpha_1} z_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} z_n)$ et

$$\overline{X}(z_1, \dots, z_n, 0) = P_1(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + P_n(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

La fin de la preuve est analogue à celle du théorème 5.3. Au lieu de considérer un arc de courbe c_0 dans une droite invariante de la partie homogène, on considère une courbe c_0 contenue dans une courbe invariante, par la partie quasi-homogène, obtenue par le lemme. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CAMACHO & P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Annals of Math., 115 (1982).

[2] J. DIEUDONNÉ, Éléments d'analyse, Tome 4, Gauthier-Villars, 1971.

[3] X. GOMEZ-MONT & I. LUENGO, Germs of holomorphic vector fields in $\mathbf{C}^3$ without a separatrix, Inv. Math., 109 (1992).

Manuscrit reçu le 16 juin 1995,
accepté le 20 novembre 1995.

Julio C. REBELO,
UMPA & UMR 128 du CNRS
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).
jrebelo@umpa.ens-lyon.fr