ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DEHBIA ACHAB

Représentations des algèbres de rang 2 et fonctions zêta associées

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 2 (1995), p. 437-451

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_2_437_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 2 (1995), 437-451

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE RANG 2 ET FONCTIONS ZÊTA ASSOCIÉES

par Dehbia ACHAB

0. Introduction.

Dans un travail précédent (cf. [1], [2]), nous avons défini et étudié les fonctions zêta des représentations des algèbres de Jordan euclidiennes déployées, pour lesquelles nous avons démontré la convergence dans un demi-plan, établi un prolongement analytique et une équation fonctionnelle scalaire.

De manière plus précise, soient V une algèbre de Jordan euclidienne simple de rang m et de dimension n, E un espace euclidien de dimension N, ϕ une représentation auto-adjointe de V dans E, Ω le cône symétrique associé à V, et $G(\Omega)$ le groupe des automorphismes du cône, c'est-à-dire

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}.$$

Soit Q la forme quadratique vectorielle associée à ϕ, déterminée par

$$< Q(\xi), x >= (\phi(x)\xi \mid \xi) \quad \forall \xi \in E, \forall x \in V.$$

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) : V, E et ϕ sont définis sur $\mathbf{Q}$,

Mots-clés : Algèbres de Jordan – Algèbres de Clifford – Groupe arithmétique – Fonctions zêta.
Classification math : 20.

(H_2) La $\mathbf{Q}$-structure $V_{\mathbf{Q}}$ de V est déployée, c'est-à-dire qu'il existe un système complet de m idempotents primitifs deux à deux orthogonaux dans $V_{\mathbf{Q}}$.

Soit $F(\phi)$ le groupe algébrique défini par

$$F(\phi) = \{h \in GL(E) \mid \exists \rho(h) \in G(\Omega) \mid Q(h\xi) = \rho(h)Q(\xi) \forall \xi \in E\}.$$

Alors $\rho : F(\phi) \to G(\Omega)$ est un morphisme de groupes algébriques dont l'image est notée $G(\phi)$ (cf. [1], chapitre 1). L étant un réseau dans $E_{\mathbf{Q}}$, soit $\Gamma_\circ$ le sous-groupe arithmétique de $F(\phi)$ défini par

$$\Gamma_\circ = \{\gamma \in F(\phi) \mid \gamma(L) = L\}.$$

La fonction zêta ζ_L associée à la représentation ϕ et au réseau L a été définie (dans [1], chapitre 1) par

$$\zeta_L(s) = \sum_{l \in \Gamma_\circ \backslash L'} \det(Q(l))^{-s} \quad s \in \mathbf{C},$$

où $L' = \{l \in L \mid \det(Q(l)) \neq 0\}$.

Si $\widetilde{\Gamma_\circ}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_\circ$, on peut aussi considérer la fonction zêta

$$\widetilde{\zeta_L}(s) = \sum_{l \in \widetilde{\Gamma_\circ} \backslash L'} \det(Q(l))^{-s} \quad s \in \mathbf{C}.$$

Les séries zêta ci-dessus convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{N}{2m}$ (cf. [1], chapitre 1), admettent un prolongement analytique en tant que fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, et vérifient une équation fonctionnelle (cf. [1], chapitre 2).

Ces fonctions zêta ont déjà été étudiées dans les cas où $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ (fonction zêta de Kœcher, cf. [6]) et $V = \mathrm{Herm}(m, \mathbf{H})$ (cf. [7]).

L'objet de cet article est l'étude explicite du cas d'une algèbre de Jordan de rang 2 qui donne lieu à de nouvelles fonctions zêta. Nous allons notamment décrire les groupes $F(\phi)$ et $G(\phi)$.

1. Préliminaires.

a) Algèbres de Clifford.

Soit U un espace vectoriel réel de dimension finie n muni d'une forme quadratique non dégénérée F, soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ une base orthogonale pour F. On désigne par $T(U)$ l'algèbre tensorielle de U, et par $\mathcal{I}$ l'idéal de $T(U)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - F(x)$.

L'algèbre quotient $C(F) = T(U)/\mathcal{I}$ s'appelle l'algèbre de Clifford de F.

On a une injection canonique de U dans $C(F)$. On sait que l'algèbre de Clifford $C(F)$ est l'algèbre associative engendrée par $e_1, \dots, e_n$, sujette aux relations

$$e_j e_k + e_k e_j = 0 \quad 1 \leq j, k \leq n \quad j \neq k$$

$$e_j^2 = F(e_j) \cdot 1 \quad \forall j, 1 \leq j \leq n.$$

Pour une partie H de $\{1, 2, \dots, n\}$, on pose

$$e_H = e_{h_1} \dots e_{h_q} \quad \text{où} \quad H = \{h_1, \dots, h_q \mid h_1 < \dots < h_q\}$$

avec $e_\varnothing = 1$. On démontre que les 2^n éléments e_H forment une base de $C(F)$ (comme espace vectoriel réel).

Dans $C(F)$, on a trois involutions :

i) $'$ définie par : $e_\nu \mapsto -e_\nu \quad 1 \leq \nu \leq n$, appelée automorphisme principal.

ii) $*$ définie par : $e_{\nu_1} \dots e_{\nu_k} \mapsto e_{\nu_k} \dots e_{\nu_1}$, appelée antiautomorphisme principal.

iii) $^-$ définie par : $\bar{a} = (a')^* = (a^*)' \quad \forall a \in C(F)$, appelée involution principale.

Les éléments de $C(F)$ de la forme $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$ (où $e_0 = 1$) sont appelés vecteurs.

Dans toute la suite on suppose F définie positive et on s'intéresse aux algèbres de Clifford associées à F et $-F$,

$$\mathcal{C}_n^+ = C(F), \quad \mathcal{C}_n^- = C(-F).$$

Remarquons que

i) $\mathcal{C}_n^+$ est l'algèbre associative engendrée par $e_1, \ldots, e_n$ sujette aux relations

$$e_j^2 = 1 \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } e_j e_k + e_k e_j = 0, \quad k \neq j.$$

ii) $\mathcal{C}_n^-$ est l'algèbre associative engendrée par $f_1, \ldots, f_n$, sujette aux relations

$$f_j^2 = -1 \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } f_j f_k + f_k f_j = 0, \quad k \neq j.$$

L'espace des vecteurs de $\mathcal{C}_n^\pm$ sera noté V_n.

Pour tout entier $1 \leq p \leq n$, on notera V_p l'espace des vecteurs de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_p^\pm = C(F_p)$, où F_p est la restriction de F au sous-espace U_p de U, qui est engendré par $e_1, \ldots, e_p$.

Un élément a de $\mathcal{C}_n^-$ est dit *transformateur* si pour tout x dans V_n, il existe y dans V_n tel que $ax = ya'$. Tout vecteur est transformateur et tout produit de transformateurs est un transformateur. Si a est un transformateur, alors le nombre $N(a) = a\bar{a}$ est un réel positif et $N(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$. De plus, tout transformateur a de $\mathcal{C}_n^-$ se décompose comme suit en produit de vecteurs

$$a = a_1 a_2 \ldots a_n \text{ où } a_p \in V_p \text{ pour tout } p, \ 1 \leq p \leq n$$

(cf. [8]).

b) Algèbres de Jordan euclidiennes de rang 2.

U étant comme ci-dessus, soit $V_n = \mathbf{R} \oplus U$ et notons B la forme bilinéaire associée à F. Sur V_n, on considère les produits suivants :

$$(\lambda, u) \circ (\mu, v) = (\lambda\mu + B(u, v), \lambda v + \mu u);$$

$$< (\lambda, u); (\mu, v) >= \lambda\mu + B(u, v).$$

Munie de ces deux produits, V_n est une algèbre de Jordan euclidienne de rang 2, de dimension $n + 1$ dont l'unité est $e = (1, 0)$ (cf. [3], [5]).

2. Construction d'une représentation de V_n dans $\mathcal{C}_n^+$.

Pour tout $\xi_- = \Sigma_H \xi_H f_H$ dans $\mathcal{C}_n^-$, on associe canoniquement l'élément $\xi_+ = \Sigma_H \xi_H e_H$ de $\mathcal{C}_n^+$.

On peut alors réaliser l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_n^+$ comme l'espace E des matrices

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \quad \alpha_-, \beta_- \in \mathcal{C}_{n-1}^-$$

($\mathcal{C}_{n-1}^-$ étant la sous-algèbre de $\mathcal{C}_n^-$ engendrée par $f_1, \ldots, f_{n-1}$).

L'isomorphisme linéaire entre $\mathcal{C}_n^+$ et E est défini par

$$\Psi : E \to \mathcal{C}_n^+$$
$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \mapsto \alpha_+ + \beta_+ e_n.$$

L'algèbre de Jordan $V = V_n$ est l'espace des vecteurs de $\mathcal{C}_n^+$, c'est-à-dire les x de la forme $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$. Pour tout x dans V, notons $\hat{x}$ l'élément de E de la forme

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 + x_2 f_1 + \ldots + x_n f_{n-1} \\ x_1 - x_2 f_1 - \ldots - x_n f_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

la correspondance $x \mapsto \hat{x}$ est un isomorphisme.

Soit ϕ l'application définie par

$$\phi : V \to \mathrm{End}(E)$$
$$x \mapsto \phi(x) : \xi \mapsto \hat{x}\xi$$

où $\hat{x}\xi$ est le produit matriciel des éléments de E.

2.1. Proposition. — *ϕ est une représentation de l'algèbre de Jordan V dans E.*

Preuve. — Il est clair que ϕ est linéaire. Soient $x, y \in V$, vérifions que

$$\phi(xy) = \frac{1}{2}(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)).$$

Cela revient à montrer que

$$\widehat{xy} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$$

ce qui est vrai car, si $x = (x_0, u)$ et $y = (y_0, v)$ où $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a

$$xy = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i, x_0 v + y_0 u \right)$$

et alors

$$\begin{aligned} \widehat{xy} &= \frac{1}{2}\left(\widehat{xy} + \widehat{yx}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\alpha_- = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$, $\quad \beta_- = (x_0 y_1 + y_0 x_1) + \ldots + (x_0 y_n + y_0 x_n) f_{n-1}$.

(Le produit des coefficients des matrices de E étant celui de $\mathcal{C}_{n-1}^-$.)

□

Pour tout $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}_{n-1}^-$, on pose

$$\tilde{\xi} = \bar{\xi}^t = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta}' \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}' \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que pour $\xi, \eta \in E$, on a $\widetilde{(\xi\eta)} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}$ et alors l'application $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ est un antiautomorphisme de E.

Pour tout $\xi = \sum \xi_H e_H$, ou $\xi = \sum \xi_H f_H$ on note $\mathrm{Re}(\xi) = \xi_\varnothing$.

On considère sur E le produit scalaire

$$(\xi \mid \eta) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(\xi\tilde{\eta}).$$

Vérifions que c'est effectivement un produit scalaire. Il est clair que c'est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\xi\tilde{\eta})) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\widetilde{\eta\tilde{\xi}})) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\eta\tilde{\xi})).$$

Elle est définie positive car

$$(\xi \mid \xi) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})$$

$$f'_H = (-1)^{|H|} f_H \text{ et } f^*_H = (-1)^{\frac{|H|(|H|-1)}{2}} f_H$$

donc

$$\bar{f}_H = (-1)^{\frac{|H|(|H|+1)}{2}} f_H$$

si $\alpha = \sum \alpha_H f_H$ est dans $\mathcal{C}_{n-1}^-$, alors $\bar{\alpha} = \sum \alpha_H (-1)^{\frac{|H|(|H|+1)}{2}} f_H$ et alors

$$\mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha}) = \sum \alpha_H^2. \qquad \square$$

2.2. Proposition. — *La représentation ϕ est autoadjointe pour ce produit scalaire.*

Preuve. — Montrons d'abord que pour $\xi, \eta \in E$, on a

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\xi\eta)) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\eta\xi));$$

en effet, si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{Tr}(\xi\eta) = \alpha\lambda + \beta\mu' + \beta'\mu + \alpha'\lambda' \text{ et } \mathrm{Tr}(\eta\xi) = \lambda\alpha + \mu\beta' + \mu'\beta + \lambda'\alpha'.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{Re}(\lambda\alpha) = \mathrm{Re}(\alpha\lambda), \forall \lambda, \alpha \in \mathcal{C}_{n-1}^-$, ce qui est vrai car si $\alpha = \sum \alpha_H f_H$ et $\lambda = \sum \lambda_H f_H$, alors

$$\mathrm{Re}(\alpha\lambda) = \sum \alpha_H \lambda_H = \mathrm{Re}(\lambda\alpha).$$

Montrons maintenant que la représentation est auto-adjointe, en effet

$$\begin{aligned}(\phi(x)\xi \mid \eta) &= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}\xi\tilde{\eta}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\eta}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\widetilde{(\hat{x}\eta)}) = (\xi \mid \phi(x)\eta). \qquad \square\end{aligned}$$

Revenons au produit scalaire sur V : pour $x, y \in V$ on a $< x, y >= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$. On vérifie facilement que

$$< x, y >= (\hat{x} \mid \hat{y}) \text{ pour tout } x, y \in V.$$

Soit Q la forme quadratique vectorielle associée à ϕ; $Q : E \to V$ est déterminée par

$$< Q(\xi), x >= (\phi(x)\xi \mid \xi) \forall x \in V, \xi \in E.$$

Or

$$< Q(\xi), x >= (\widehat{Q(\xi)} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\hat{x})$$

et

$$(\phi(x)\xi \mid \xi) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}\xi\tilde{\xi}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi}\hat{x}).$$

Ceci ne nous permet pas de conclure que $\widehat{Q(\xi)} = \xi\tilde{\xi}$ pour tout ξ dans E car $\xi\tilde{\xi}$ n'est pas toujours un vecteur de $\mathcal{C}_n^+$.

Notons $\mathrm{Vect}(\eta)$ la partie vecteur pour tout η dans $\mathcal{C}_n^\pm$ et soit p la projection de E sur V définie par :

Pour tout $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ dans E, on lui associe $p(\xi)$ dans V tel que

$$\widehat{p(\xi)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha) & \mathrm{Vect}(\beta) \\ \overline{\mathrm{Vect}(\beta)} & \mathrm{Re}(\alpha) \end{pmatrix}$$

alors

$$Q(\xi) = p(\xi\tilde{\xi}).$$

3. Le groupe F_n.

Dans ce qui suit, nous explicitons le sous-groupe arithmétique associé à ϕ et à un réseau L de E.

Nous commençons d'abord par décrire les groupes $F(\phi)$ et $G(\phi)$ définis dans l'introduction.

3.1. Proposition. — *L'ensemble F_n des matrices*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \text{ transformateurs dans } \mathcal{C}_{n-1}^- \text{ tels que}$$

$$\beta\bar{\alpha}' \in V_{n-1} \text{ et } N(\alpha) - N(\beta) \neq 0$$

est un groupe. Il est engendré par les $\phi(x)$, x inversible dans V.

Preuve. — Remarquons d'abord que si $\beta\bar{\alpha}' \in V_{n-1}$, alors son conjugué $\alpha'\bar{\beta} \in V_{n-1}$ et alors l'image de ce dernier par $'$, $\alpha\bar{\beta}' \in V_{n-1}$.

D'autre part, si $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$ est dans V_n, alors x est inversible si et seulement si

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \neq 0.$$

Soit $x \in V_n$ inversible, alors $\hat{x}$ appartient à F_n, en effet

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \text{ telle que } \alpha = x_0 \text{ et } \beta = x_1 + x_2 e_1 + \ldots + x_n e_{n-1}.$$

Il est clair que $\beta\alpha^* \in V_{n-1}$. De plus

$$N(\alpha) - N(\beta) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \neq 0 \text{ car } x \text{ est inversible.}$$

Soient maintenant $x, y \in V$ inversibles et montrons que $\hat{x}\hat{y} \in F_n$; en effet,

$$\hat{x}\hat{y} = \begin{pmatrix} x_0 & \underline{\mathrm{x}} \\ \bar{\underline{\mathrm{x}}} & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & \underline{\mathrm{y}} \\ \bar{\underline{\mathrm{y}}} & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},$$

tels que

$$\underline{\mathrm{x}} = x_1 + \ldots + x_n f_{n-1}, \alpha = x_0 y_0 + \underline{\mathrm{x}}\bar{\underline{\mathrm{y}}}, \beta = x_0 \underline{\mathrm{y}} + y_0 \underline{\mathrm{x}}.$$

Vérifions que $\alpha\beta^* \in V_{n-1}$; en effet

$$\alpha\beta^* = x_0^2 y_0 \underline{\mathrm{y}} + x_0 y_0^2 \underline{\mathrm{x}} + x_0 \underline{\mathrm{x}}\bar{\underline{\mathrm{y}}}\underline{\mathrm{y}} + y_0 \underline{\mathrm{x}}\bar{\underline{\mathrm{y}}}\underline{\mathrm{x}},$$

il est clair que les trois premiers termes sont dans V_{n-1}, quant au dernier, il existe z dans V_{n-1} tel que $y_0 \underline{\mathrm{x}}\bar{\underline{\mathrm{y}}}\underline{\mathrm{x}} = y_0 z \underline{\mathrm{x}}' \underline{\mathrm{x}}$ et appartient donc à V_{n-1}.

De plus, on montre que

$$N(\alpha) - N(\beta) = (x_0^2 - N(\underline{\mathrm{x}}))(y_0^2 - N(\underline{\mathrm{y}}) = q(x)q(y) \neq 0.$$

Nous allons maintenant montrer que si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \in F_n, x \in V_n$ inversible, alors $\hat{x}\xi \in F_n$. En effet,

$$\hat{x}\xi = \begin{pmatrix} x_0 & \underline{\mathrm{x}} \\ \bar{\underline{\mathrm{x}}} & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix}$$

tels que $\lambda = x_0\alpha + \underline{\mathrm{x}}\beta'$ et $\mu = x_0\beta + \underline{\mathrm{x}}\alpha'$.

Il est clair que μ et λ sont des transformateurs de $\mathcal{C}_{n-1}^{-}$, montrons que $\mu\lambda^* \in V_{n-1}$. En effet,

$$\mu\lambda^* = x_0^2\beta\alpha^* + x_0 N(\beta)\underline{x} + x_0\underline{x}N(\alpha) + \underline{x}\alpha'\bar{\beta}\underline{x}$$

les trois premiers termes sont dans V_{n-1} car $\beta\alpha^*$ et $\underline{x}$ le sont, quant au dernier terme, comme $\alpha'\bar{\beta}$ est dans V_{n-1}, alors il existe y dans V_{n-1} tel que $\underline{x}\alpha'\bar{\beta}\underline{x} = N(\underline{x})y$ et appartient donc à V_{n-1}.

De plus, en utilisant le fait que $\alpha\bar{\beta}' = \beta\bar{\alpha}'$ et $\beta'\bar{\alpha} = \alpha'\bar{\beta}$, on montre que

$$N(\lambda) - N(\mu) = (x_0^2 - N(\underline{x}))(N(\alpha) - N(\beta)) = q(x)(N(\alpha) - N(\beta)) \neq 0.$$

Nous avons donc montré que le groupe engendré par les $\phi(x), x$ inversible dans V, est contenu dans F_n. Il reste à montrer que tout ξ de F_n s'écrit comme produit d'un nombre fini de $\hat{x}, x$ inversible dans V.

Pour cela, nous allons utiliser le fait que tout transformateur a de $\mathcal{C}_{n-1}^{-}$ se décompose $a = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ où $a_p \in V_p$, pour tout $1 \leq p \leq n-1$.

On a : $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ et $\beta = \beta_1 \dots \beta_{n-1}$ tels que $\alpha_p, \beta_p \in V_p$. Donc $\alpha = a\alpha_{n-1}$ et $\beta = b\beta_{n-1}$ où $a, b \in T_{n-2}^{-}$ (T_n^{-} désignant l'ensemble des transformateurs de $\mathcal{C}_n^{-}$).

Comme $N(\alpha) - N(\beta) \neq 0$, alors $N(\alpha)$ et $N(\beta)$ ne sont pas simultanément nuls.

1) si $N(\alpha) \neq 0$, comme $N(\alpha) = N(a)N(\alpha_{n-1})$ alors $N(a)$ et $N(\alpha_{n-1})$ sont non nuls. De plus,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{N(\alpha)}\bar{\alpha}\beta \\ \dfrac{1}{N(\alpha)}\bar{\alpha}'\beta' & 1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_{n-2} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_{n-2} \end{pmatrix}$.

On a donc montré, dans le cas où $N(\alpha) \neq 0$, que l'élément $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ de F_n est dans le groupe engendré par les $\phi(x), x \in V$, inversible.

2) Si $N(\alpha) = 0$, alors $\alpha = 0$ et notre matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$, avec $N(\beta) \neq 0$. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} \in F_{n-1}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

Le groupe F_n opère sur E par multiplication à gauche

$$\xi \mapsto g\xi \quad \forall g \in F_n, \quad \xi \in E.$$

On a

$$\forall g \in F_n,\ \exists\ \rho(g) \in G(\Omega) \ \text{ tel que } \ Q(g\xi) = \rho(g)Q(\xi), \quad \forall \xi \in E$$

Ω désignant le cône symétrique associé à l'algèbre de Jordan V, c'est-à-dire le cône de Lorentz et $G(\Omega)$ étant le groupe des automorphismes du cône défini dans l'introduction.

Pour $g \in F_n, \rho(g)$ opère sur V par

$$x \mapsto g\hat{x}\tilde{g} \ \text{ pour tout } \ x \text{ dans } V;$$

en effet, pour tout x dans V et tout ξ dans E, on a

$$(\widehat{Q(g\xi)} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}g\xi\tilde{\xi}\tilde{g})$$

$$(g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}\hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}\hat{x}g)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi}\tilde{g}\hat{x}g) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(g\xi\tilde{\xi}\tilde{g}\hat{x})$$

ce qui implique que $(\widehat{Q(g\xi)} \mid \hat{x}) = (g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g} \mid \hat{x})$ et alors $\widehat{Q(g\xi)} = g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}$.

Notons G_n le sous-groupe de F_n formé des $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ tels que $N(\alpha) - N(\beta) = 1$. On sait, (cf. [8]), que le groupe G_n est un revêtement à deux feuillets du groupe orthochrone $SO_\circ(1,n)$ et $\rho(G_n) = SO_\circ(1,n)$.

Pour tout $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ dans F_n, notons $\Delta(g) = N(\alpha) - N(\beta)$. Si F_n^+ désigne le sous-groupe de F_n formé des g tels que $\Delta(g) > 0$, alors tout g dans F_n^+ s'écrit $g = \Delta(g)^{\frac{1}{2}}\, g_1$ où g_1 est dans G_n. Par suite, si on note $\rho(g)$ la transformation de V qui à x dans V associe y dans V tel que $\hat{y} = g\hat{x}\tilde{g}$, on montre que pour tout g dans $F_n^+, \rho(g)$ appartient à $G(\Omega)$, car

$$G(\Omega) = \mathbf{R}_+^* \times \Lambda_{n+1} \text{ où } \Lambda_{n+1} = SO_\circ(1,n) \cup hSO_\circ(1,n)$$

h étant la matrice diagonale d'ordre $n+1$ dont les n premiers termes sont égaux à 1 et le dernier à -1. Remarquons que h conserve le cône de Lorentz, et $\mathrm{Det}(h) = -1$.

La composante connexe $G(\Omega)^\circ$ de l'identité de $G(\Omega)$ s'écrit

$$G(\Omega)^\circ = \mathbf{R}_+^* \times SO_\circ(1,n).$$

Nous avons donc

$$\rho(F_n^+) = G(\Omega)^\circ$$

et d'après la théorie générale (cf. [1] chapitre 1), on a montré que si $F(\phi)^\circ$ est la composante connexe de l'identité de $F(\phi)$ (pour la topologie usuelle), alors

$$\rho(F(\phi)^\circ) = G(\Omega)^\circ$$

donc

$$\rho(F_n^+) = \rho(F(\phi)^\circ).$$

Nous avons déjà vu que pour tout g dans F_n^+, il existe $\rho(g)$ dans $G(\Omega)$, opèrant sur V comme ci-dessus, tel que

$$Q(g\xi) = \rho(g)Q(\xi) \text{ pour tout } \xi \text{ dans } E.$$

Le groupe F_n^+ est donc contenu dans le groupe $F(\phi)$.

3.2. Proposition. — *Le noyau* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *du morphisme* $\rho : F(\phi) \to G(\Omega)$, *est un sous-groupe du groupe orthogonal* $O(E)$ *et* $F(\phi)^\circ$ *s'écrit*

$$F(\phi)^\circ = F_n^+ K \text{ où } K \text{ est un sous-groupe fermé de } \mathrm{Ker}(\rho).$$

Par suite, si L *est un réseau de* E, *alors le sous-groupe* $\widetilde{\Gamma_\circ}$ *de* F_n^+ *défini par*

$$\widetilde{\Gamma_\circ} = \{\gamma \in F_n^+ \mid \gamma(L) = L\}$$

est d'indice fini dans $\Gamma_\circ = \{\gamma \in F(\phi) \mid \gamma(L) = L\}$.

Preuve. — Soit g tel que $\rho(g) = \mathrm{id}$, alors $Q(g\xi) = Q(\xi)$ pour tout ξ dans E, donc

$$\mathrm{ReTr}(g\xi\tilde{\xi}\tilde{g}) = \mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi})$$

ce qui implique

$$(g\xi \mid g\xi) = (\xi \mid \xi) \text{ pour tout } \xi \text{ dans } E$$

g est donc bien dans le groupe orthogonal $O(E)$.

Comme $\rho(F(\phi)^\circ) = \rho(F_n^+)$, alors les quotients $F(\phi)^\circ/F(\phi)^\circ \cap \mathrm{Ker}(\rho)$ et $F_n^+/F_n^+ \cap \mathrm{Ker}(\rho)$ sont isomorphes. Par suite, comme le noyau $\mathrm{Ker}(\rho)$ est compact, alors $\widetilde{\Gamma}_\circ$ est d'indice fini dans le sous-groupe

$$\Gamma_1 = \{\gamma \in F(\phi)^\circ \mid \gamma(L) = L\}.$$

De plus, comme $F(\phi)$ est un groupe algébrique (cf. [1] chapitre 1), alors, d'après un théorème de Whitney, il admet un nombre fini de composantes connexes pour la topologie usuelle, il s'ensuit que $F(\phi)^\circ$ est d'indice fini dans $F(\phi)$ et alors Γ_1 (donc $\widetilde{\Gamma_\circ}$) est d'indice fini dans $\Gamma_\circ$. En effet, notons $h_1, \ldots, h_k$ un système de représentants de $F(\phi)/F(\phi)^\circ$ et soit $\gamma \in \Gamma_\circ$.

Si γ est dans $F(\phi)^\circ$ alors $\gamma \in \Gamma_1$ et alors $\gamma\Gamma_1 = \Gamma_1$.

Si γ est dans un certain $h_i F(\phi)^\circ$ alors il existe $\gamma_i \in F(\phi)^\circ$ tel que $\gamma = h_i\gamma_i$. Alors

$$\Gamma_\circ/\Gamma_1 = \{\Gamma_1, h_1\gamma_1\Gamma_1, \ldots, h_k\gamma_k\Gamma_1\};$$

en effet, remarquons d'abord que les γ_i vérifient $\gamma_i(L) = h_i^{-1}(L)$. Soit $\gamma\Gamma_1 \in \Gamma_\circ/\Gamma_1$ tel que γ ne soit pas dans Γ_1, alors il existe $1 \leq i \leq k$ et γ_i' dans $F(\phi)^\circ$ tels que $\gamma = h_i\gamma_i'$ et on a

$$\gamma_i(L) = \gamma_i'(L) = h_i^{-1}(L)$$

donc $\gamma_i^{-1}\gamma_i' \in F(\phi)^\circ$ et $\gamma_i^{-1}\gamma_i'(L) = L$ et alors $\gamma_i^{-1}\gamma_i'$ est dans Γ_1, ce qui entraîne $\gamma_i\Gamma_1 = \gamma_i'\Gamma_1$. D'où

$$\gamma\Gamma_1 = h_i\gamma_i'\Gamma_1 = h_i\gamma_i\Gamma_1$$

et $\Gamma_\circ/\Gamma_1$ est fini. □

Nous en déduisons que $\widetilde{\Gamma_\circ}$ est un sous-groupe arithmétique de $F(\phi)$.

4. Fonction zêta de la représentation ϕ.

Prenons le réseau $M = \sum_{H\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})} \mathbf{Z}e_H$ dans l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_n^+$ et considérons son image $L = \psi^{-1}(M)$ dans E. Nous obtenons un réseau dans E.

Nous avons vu ci-dessus, que la forme quadratique vectorielle Q associée à ϕ est telle que pour tout ξ dans E, $Q(\xi)$ est en quelque sorte la partie-vecteur de $\xi\tilde{\xi}$.

Plus précisément, si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, alors

$$\widehat{Q(\xi)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}) & \mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}'+\beta\bar{\alpha}') \\ \overline{\mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}'+\beta\bar{\alpha}')} & \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Si on note det le déterminant de l'algèbre de Jordan V, qui est donné par

$$\det(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$$

alors

$$\det(Q(\xi)) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})^2 - N[\mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}'+\beta\bar{\alpha}')] = \|\xi\|^4 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\xi \mid \xi)^2.$$

Finalement, la fonction zêta associée à la représentation ϕ et au réseau L est donnée par

$$\zeta_L(s) = \sum_{l\in\widetilde{\Gamma}_\circ\backslash L'} [\|\xi\|^4 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\xi \mid \xi)^2]^{-s} \quad s\in\mathbf{C}.$$

Soit $V_\mathbf{Q}$ la $\mathbf{Q}$-structure de V définie par $V_\mathbf{Q} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}e_i$. La représentation ϕ est définie sur $\mathbf{Q}$ et on a le théorème suivant :

4.1. Théorème. — *La série $\zeta_L(s)$ converge absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > 2^{n-2}$, *elle admet un prolongement analytique en tant que fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta_L(2^{n-2}-s) = \mathrm{vol}(L)\pi^{2^{n-1}-4s}\frac{\Gamma_\Omega(s)}{\Gamma_\Omega(2^{n-2}-s)}\zeta_L(s)$$

où Γ_Ω est la fonction gamma du cône de Lorentz.

Preuve. — La convergence est une conséquence du théorème 1 de [1], chapitre 1 (on remarquera que dans ce cas, $V_{\mathbf{Q}}$ est déployée car la forme quadratique

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$$

admet des solutions rationnelles non triviales, cf [1], chapitre 4). Quant au prolongement analytique et l'équation fonctionnelle, ils découlent du théorème 2 de [1], chapitre 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ACHAB, Fonction zêta des représentations des algèbres de Jordan, thèse Université Paris 6, 1993.

[2] D. ACHAB, Fonction zêta d'une représentation d' algèbre de Jordan, C.R.A.S, Paris, t. 316, Série I (1993), 977-982.

[3] J.L. CLERC, Représentations d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, J. reine angew. Math., 423 (1992), 47-71.

[4] J. FARAUT et A. KORANYI, Analysis on symmetric cones (preprint).

[5] J. FARAUT et G. TRAVAGLINI, Generalized Bessel Functions, Journal of Funct. Analysis, 71, No. 1 (1987).

[6] M. KŒCHER, Uber Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. reine angew. Math., 192 (1953), 1-23.

[7] A. KRIEG, Kœcher-Maass- Series for Modular Forms of Quaternions, Manuscripta Math., 66 (1990), 431-451.

[8] R. TAKAHASHI, Série discrète pour les groupes de Lorentz $SO_0(2n,1)$, Colloque sur les fonctions sphériques et la théorie des groupes, Nancy, 1971.

[9] P.L. WATERMAN, Mobius Transformations in Several Dimensions, Adv. Math., 101 (1993), 87-113.

Manuscrit reçu le 9 mai 1994.

Dehbia ACHAB,
Université de Paris VI
Mathématiques
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).