ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VINCENT CAVALIER

Pseudogroupes complexes quasi parallélisés de dimension un

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 5 (1994), p. 1539-1565

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1539_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 5 (1994), 1539–1565

PSEUDOGROUPES COMPLEXES QUASI PARALLÉLISÉS DE DIMENSION UN

par
Vincent CAVALIER

0. Introduction et notations.

La structure des feuilletages transversalement parallélisables est bien connue grâce aux travaux de L. Conlon, E. Fedida et P. Molino (voir [Conl], [Fe] [Mol1], [Mol2], [Mol3], [Mol4]). P. Molino en particulier a montré le lien existant entre cette structure et celle des feuilletages riemanniens introduits par Reinhardt (cf. [Rei]). De leur côté A. Haefliger et E. Salem, par des techniques de pseudogroupes sensiblement différentes, ont complété l'étude des feuilletages riemanniens (cf. [Hae1], [Hae2], [Hae3] [HaeSal]). Il était donc naturel d'affaiblir les hypothèses de régularité de la structure transverse en lui permettant de présenter des singularités. Dans ce travail nous étudions les pseudogroupes de transformations holomorphes de génération compacte au sens de A. Haefliger qui laissent invariant un champ de vecteurs méromorphe, en dimension complexe 1 ; c'est notamment le cas des pseudogroupes d'holonomie des feuilletages transversalement holomorphes munis d'un champ feuilleté méromorphe sur des variétés compactes.

DÉFINITION 0.1. — *Un pseudogroupe $\mathcal{H}$ de transformations d'une variété T — noté $(\mathcal{H}, T)$ — est une famille de difféomorphismes locaux de T qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Si h et h' sont deux éléments de $\mathcal{H}$ leur composé (partout où cela a un sens) appartient à $\mathcal{H}$; de même h^{-1} et l'identité appartiennent à $\mathcal{H}$.*

(ii) *La restriction d'un élément de $\mathcal{H}$ à un ouvert de T appartient à $\mathcal{H}$.*

Mots-clés : Pseudogroupes complexes – Génération compacte – Parallélisme invariant.
Classification A.M.S. : 58H05.

(iii) *Si h est un difféomorphisme d'un ouvert U de T sur un ouvert V et si h coïncide avec un élément de $\mathcal{H}$ au voisinage de chaque point x de U, alors h appartient à $\mathcal{H}$.*

La *source* d'un élément h de $\mathcal{H}$ est l'ouvert de T sur lequel h est défini ; son *but* est l'image de la source. L'*orbite* d'un point x de T (notée $[x]$) est l'ensemble des points de y tels qu'il existe $h \in \mathcal{H}$ avec $h(x) = y$. Le *groupe de stabilité* d'un point x de T (noté St_x) est l'ensemble des germes en x d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que $h(x) = x$.

Si M est une variété pourvue d'un feuilletage $\mathcal{F}$, et si T est une sous-variété transverse en tout point à $\mathcal{F}$ rencontrant toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ (on dit alors que T est une *transversale* au feuilletage), on définit par glissement le long des feuilles de $\mathcal{F}$ (cf. [Hae2]) un pseudogroupe d'holonomie transverse du feuilletage.

DÉFINITION 0.2. — *Une équivalence de deux pseudogroupes $(\mathcal{H}_1, T_1)$ et $(\mathcal{H}_2, T_2)$ est une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ de difféomorphismes locaux de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ stable par composition avec les éléments de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et telle que les $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ (resp. les $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$) engendrent $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$).*

Si T_1 et T_2 sont des transversales d'un même feuilletage, les pseudogroupes d'holonomie $(\mathcal{H}_1, T_1)$ et $(\mathcal{H}_2, T_2)$ correspondants sont équivalents.

DÉFINITION 0.3. — *Un pseudogroupe $(\mathcal{H}, T)$ est de génération compacte si :*

(i) *il existe un ouvert U relativement compact dans T qui rencontre toutes les orbites de $\mathcal{H}$;*

(ii) *le pseudogroupe $\mathcal{H}$ restreint à U (qui est équivalent à $(\mathcal{H}, T)$) est engendré par un nombre fini d'éléments que l'on peut prolonger en des éléments de $\mathcal{H}$ sur les adhérences de leurs sources.*

La propriété de génération compacte est stable par équivalence de pseudogroupes. Les pseudogroupes d'holonomie des feuilletages sur des variétés compactes sont de génération compacte. Il est à noter que si $(\mathcal{H}, T)$ est de génération compacte, la propriété (ii) est vraie pour tout ouvert U relativement compact de T rencontrant toutes les orbites. On peut par exemple formuler le théorème de stabilité de Reeb de la façon suivante.

THÉORÈME 0.4. — *Soient $(\mathcal{H}, T)$ un pseudogroupe de génération compacte, x un point de T dont l'orbite est discrète et le groupe de stabilité fini ; il existe un voisinage de $[x]$ (dans l'espace des orbites) isomorphe au quotient d'un disque par un groupe fini isomorphe au groupe de stabilité de x.*

DÉFINITION 0.5. — *Un $\mathcal{H}$ chemin dans $(\mathcal{H}, T)$ est la donnée d'une famille de chemins $(C_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, paramétrés par $[0,1]$, tracés dans T et des éléments $(h_j)_{j\in\{1,\dots,n-1\}}$ de $\mathcal{H}$ tels que $h_i(C_i(1)) = C_{i+1}(0)$.*

On peut définir le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{H})$ de $(\mathcal{H}, T)$ comme groupe d'homotopie des $\mathcal{H}$ lacets dans $(\mathcal{H}, T)$. Si $(\mathcal{H}, T)$ est équivalent à l'action quasi-analytique d'un groupe G sur une variété simplement connexe, $\pi_1(\mathcal{H})$ est isomorphe à G (voir [HaeSal]).

DÉFINITION 0.6. — *Un pseudogroupe quasi parallélisé $(\mathcal{H}, T, Z)$ est la donnée d'une variété T analytique complexe de dimension 1, d'un pseudogroupe connexe $\mathcal{H}$ de transformations holomorphes locales de T, et d'un champ méromorphe Z sur T invariant par $\mathcal{H}$.*

Si Z admet un zéro ou un pôle en un point z de T, alors Z possède un zéro ou un pôle en tout point de $[z]$. Appelons T' la variété T privée des zéros et des pôles de Z, et $\mathcal{H}'$ la restriction de $\mathcal{H}$ à T'. Nous dirons que $(\mathcal{H}', T', Z)$ est la *partie régulière* de $(\mathcal{H}, T, Z)$.

DÉFINITION 0.7. — *Une équivalence de $(\mathcal{H}_1, T_1, Z_1)$ et $(\mathcal{H}_2, T_2, Z_2)$ est une équivalence de $(\mathcal{H}_1, T_1)$ et $(\mathcal{H}_2, T_2)$ qui échange Z_1 et Z_2.*

Le plan de l'article. — L'objet de ce travail est de classifier à équivalence près les pseudogroupes $(\mathcal{H}, T, Z)$ de génération compacte.

Dans le paragraphe 1, on définit *le groupe à un paramètre* d'un champ de vecteurs $\mathcal{H}$ invariant complet (qui est une action de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sur l'espace des orbites de $\mathcal{H}$). On montre qu'un pseudogroupe pourvu d'un parallélisme de Lie invariant complet est équivalent à une action de groupe (Théorème 1.6). Dans le paragraphe 2, on étudie la dynamique locale d'un champ méromorphe au voisinage d'une singularité. Dans le paragraphe 3, on remarque que si Z admet un pôle, $(\mathcal{H}, T, Z)$ est une *orbifold*, c'est-à-dire un pseudogroupe dont l'espace des orbites est localement quotient d'un disque par un groupe fini, on peut classifier ces orbifolds (Théorème 3.2). Cela nous conduit à l'étude du cas où Z est holomorphe; dans ce cas $(\mathcal{H}, T, Z)$ est un pseudogroupe *normal* (Définition 4.1). On classifie les pseudogroupes normaux (Théorème 4.2). Dans le paragraphe 4, on détermine les pseudogroupes normaux de génération compacte et l'on obtient la classification voulue (Théorème 4.11). Dans le paragraphe 5, on donne des exemples de feuilletages sur des variétés compactes dont le pseudogroupe d'holonomie est du type $(\mathcal{H}, T, Z)$.

1. Champs de vecteurs invariants complets. Pseudogroupes pouvus d'un parallélisme de Lie invariant complet.

Ici $(\mathcal{H}, T)$ désigne un pseudogroupe connexe, éventuellement analytique complexe, et Z un champ de vecteurs sur T invariant par $\mathcal{H}$, éventuellement holomorphe. On appelle φ_t le groupe local à un paramètre de Z.

Groupe à un paramètre d'un champ de vecteurs $\mathcal{H}$ invariant.

DÉFINITION 1.1. — *Une suite pour Z en un point x de paramètre t ($t \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est la donnée de n scalaires $t_1, \dots, t_n$ et de $(n-1)$ éléments $h_1, \dots, h_{n-1}$ de $\mathcal{H}$, tels que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = t$ et $\varphi_{t_n} \circ h_{n-1} \circ \varphi_{t_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}$ est une transformation locale de T définie au voisinage de x.*

DÉFINITION 1.2. — *Le champ Z est dit complet s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout x de T et tout scalaire t, il existe une suite pour Z en x de paramètre t.*

(ii) *Si x et x' sont deux points de la même orbite et si $\varphi_{t_n} \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}$ (resp. $\varphi_{t'_{n'}} \circ h'_{n'-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t'_1}$) sont des suites pour Z en x et x' de même paramètre t, alors $\varphi_{t_n} \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}(x)$ et $\varphi'_{t'n'} \circ h'_{n'-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t'_1}(x')$ sont dans la même orbite.*

La donnée sur T d'un champ Z, $\mathcal{H}$-invariant complet permet de définir sur l'espace des orbites de $\mathcal{H}$ une action du corps des scalaires que nous appellerons le *groupe à un paramètre de Z* et que nous noterons φ_t. On remarque aisément que la notion de complétude d'un champ $\mathcal{H}$ invariant est stable par équivalence de pseudogroupes.

PROPOSITION 1.3. — *Soient $(\mathcal{H}, T)$ un pseudogroupe de génération compacte et Z un champ de vecteurs $\mathcal{H}$ invariant; alors Z est complet.*

Preuve. — Soit U un ouvert relativement compact de T rencontrant toutes les orbites de $\mathcal{H}$. La restriction de $\mathcal{H}$ à U est engendrée par un système fini $\gamma_1 \dots \gamma_n$ de générateurs que l'on peut prolonger sur les adhérences de leurs sources en des éléments $\overline{\gamma}_1 \dots \overline{\gamma}_n$ de $\mathcal{H}$. Soit φ_t le groupe à un paramètre local de Z. Par compacité de $\overline{U}$, il existe un réel strictement positif ε tel que $\varphi_t(x)$ est défini pour tout x de U et tout t (avec $|t| < \varepsilon$). On peut en outre, quitte à diminuer ε, supposer que pour tout x de U et tout t (avec $|t| < \varepsilon$) on a : si x appartient à la souce de γ_i, alors $\varphi_t(x)$ appartient à la source de $\overline{\gamma}_i$; cela implique les relations de commutation

$$\varphi_t\big(\gamma_i(x)\big) = \overline{\gamma}_i\big(\varphi_t(x)\big).$$

Prouvons alors (i). Soit t un paramètre (réel ou complexe); il existe un entier p tel que $|t/p| < \varepsilon$. Pour tout x de U, on peut définir $\varphi_{t/p}(x)$; on «ramène» $\varphi_{t/p}(x)$ dans U par un élément de $\mathcal{H}$, et on itère p fois le procédé, ce qui définit une suite pour Z en x de paramètre t.

Prouvons maintenant (ii). Appelons *longueur* d'une suite pour Z en x, $\varphi_{t_1} \circ h_1 \circ \cdots \circ h_{n-1} \circ \varphi_{t_n}$, le réel positif $|t_1| + \cdots + |t_n|$. Si deux suites pour Z en x et x' (avec $[x] = [x']$) ont le même paramètre et des longueurs inférieures à ε, l'affirmation (ii) est vraie pour ces deux suites en vertu des relations de commutation : on peut en effet écrire localement les éléments du pseudogroupe comme de mots en les γ_i et commuter.

Si $\varphi_{t_1} \circ h_1 ... \varphi_{t_n}$ et $\varphi_{\tau_1} \circ k_1 \circ \cdots \circ \varphi_{\tau_m}$ sont deux suites pour Z en x et x', (avec $[x] = [x']$), de même paramètre t, on peut, en composant une famille finie de suites de longueurs inférieure à ε, montrer que $\varphi_{t_1} \circ h_1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_m}(x)$ et $\varphi_{\tau_1} \circ k_1 \circ \cdots \circ \varphi_{\tau_m}(x')$ sont dans la même orbite. □

Remarque 1.4. — A une suite pour Z en x, on peut associer un $\mathcal{H}$-chemin de la façon suivante : à $i \in \{1, \ldots, n\}$ on associe le chemin c_i tracé dans T défini par

$$c_i(\tau) = \varphi_{\tau t_i} \circ h_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}(x) \,;$$

on a alors $h_i \circ c_i(1) = c_{i+1}(0)$. Les c_i et les h_i définissent alors un $\mathcal{H}$ chemin.

Plus généralement, si $Z_1, \ldots, Z_p$ sont des champs $\mathcal{H}$ invariants complets, on peut obtenir des $\mathcal{H}$ chemins reliant x à un point de l'orbite $\varphi^p_{t_p} \circ \cdots \circ \varphi^1_{t_1}([x])$ en composant des $\mathcal{H}$ chemins obtenus à partir des suites pour les Z_i.

Pseudogroupes pourvus d'un parallélisme de Lie invariant complet.

On suppose ici qu'il existe sur le pseudogroupe connexe $(\mathcal{H}, T)$ une algèbre de Lie $\mathcal{A}$ de champ de vecteurs $\mathcal{H}$ invariants complets; on suppose en outre que $\mathcal{A}$ est un parallélisme de T. Soit G le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche est $\mathcal{A}$. Tout point x de T admet un voisinage U_x sur lequel est définie une structure locale de groupe de Lie modelée sur celle de G, c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme ψ_x de U_x sur un voisinage de l'identité de G tel que $\psi_x(x) = 1$, et l'application tangente à ψ_x est l'isomorphisme naturel de $\mathcal{A}$ sur l'algèbre des champs invariants à gauche sur G.

LEMME 1.5. — *Soit f un difféomorphisme d'un ouvert connexe U de T sur un ouvert de T tel que $f_*(X) = X$ pour tout X de $\mathcal{A}$. S'il existe un point x tel que x et $f(x)$ sont dans la même orbite, alors f appartient à $\mathcal{H}$.*

Preuve. — On peut relier un point y de U à x par un chemin constitué de morceaux de trajectoires de champs $X_1 ... X_n \in \mathcal{A}$; il vient alors

$$[y] = \varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^n([x]) \quad \text{et} \quad [f(y)] = \varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_n}^n([f(x)]) = [y]$$

car f commute avec les φ^i et $[f(x)] = [y]$. Comme f coïncide au voisinage de y avec un élément de $\mathcal{H}$, on en déduit que f appartient à $\mathcal{H}$. □

Dans la suite, si X est un élément de $\mathcal{A}$, nous conviendrons de noter $\overline{X}$ le champ invariant à gauche sur G correspondant.

THÉORÈME 1.6. — *Si $(\mathcal{H}, T)$ est connexe et pourvu d'un parallélisme de Lie invariant complet $\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{H}, T)$ est équivalent à l'action par translations à gauche d'un sous-groupe H de G sur G. L'équivalence envoie tout X de $\mathcal{A}$ sur $\overline{X}$.*

Démonstration. — Choisissons un point base x_0 de T. Pour tout x de T, il existe $X_1, \ldots, X_n$ dans $\mathcal{A}$ et des scalaires $t_1, \ldots, t_n$ tels que :

$$\varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_n}^n([x_0]) = [x].$$

On définit un difféomorphisme local d'un voisinage de x de T dans G par

$$\theta = L \exp t_n \overline{X}_n \circ \cdots \circ \exp t_1 \overline{X}_1 \circ \psi_x,$$

où L_a désigne la translation à gauche par a.

Par construction, on a $\theta_*(X) = \overline{X}$ pour tout X de $\mathcal{A}$.

Montrons que la famille Θ constituée des θ ainsi définis est une équivalence. Cette famille est stable par composition avec les éléments de $\mathcal{H}$. Appelons Θ_x le sous-ensemble de Θ constitué des éléments dont la source contient x. Si θ_1 et θ_2 sont dans Θ_x, l'application $\theta_1 \circ \theta_2^{-1}$ coïncide au voisinage de $\theta_2(x)$ avec la translation à gauche La où $a = \theta_1(x) \cdot \theta_2^{-1}(x)$. Soit H_x le sous-ensemble de G constitué de tous les $\theta_i(x) \cdot \theta_j^{-1}(x)$ où θ_i et θ_j parcourent Θ_x ; alors H_x est un sous-groupe de G car H_x est l'ensemble des $\exp t_1 \overline{X}_1, \ldots, \exp t_n \overline{X}_n$ tels que $\varphi_{t_n}^n \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^1([x]) = [x]$, donc il est stable par composition et passage à l'inverse. En fait, H_x ne dépend pas du point x : en effet, soient θ_1 et θ_2 des éléments de Θ_x et y un point de T ; on peut trouver des X_i dans $\mathcal{A}$ et des t_i tels que $[y] = \varphi_{t_n}^n \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^1([x])$. Posons $c = \exp t_1 \overline{X}_1 \circ \cdots \circ \exp t_n \overline{X}_n$. On a :

$$\begin{cases} \theta_1 = La_1 \circ \psi_x, \quad \theta_2 = La_2 \circ \psi_x \quad \text{avec} \quad a_1 a_2^{-1} \in H_x, \\ \mu_1 = La_1 \circ Lc \circ \psi_y \quad \text{et} \quad \mu_2 = La_2 \circ Lc \circ \psi_y \quad \text{appartiennent à } \Theta_y. \end{cases}$$

Donc $a_1 a_2^{-1}$ appartient à H_y et H_y est inclus dans H_x. Par symétrie des rôles joués par x et y, les sous-ensembles H_x et H_y sont égaux.

Notons H le groupe H_x et (H.G) le pseudogroupe engendré sur G par les translations à gauche de H ; les $\theta_i \circ \theta_j^{-1}$ engendrent sur G le pseudogroupe (H.G).

Reste à montrer que les $\theta_i^{-1} \circ \theta_j$ engendrent $\mathcal{H}$ sur T. Les $\theta_i^{-1} \circ \theta_j$ engendrent sur T un pseudogroupe qui laisse invariante $\mathcal{A}$ et qui contient $\mathcal{H}$. Soient σ un $\mathcal{H}$ chemin dans T et c un chemin dans G ; nous dirons que σ est un *relèvement* de c si, pour tout t de $[0,1]$, il existe un élément θ de Θ tel que $\theta \circ \sigma$ et c coïncident au voisinage de t.

Si σ_1 et σ_2 sont des relèvements de c et si $[\sigma_1(0)] = [\sigma_2(0)]$, alors pour tout t, on a $[\sigma_1(t)] = [\sigma_2(t)]$, car l'ensemble des t de $[0,1]$ pour lesquels l'égalité est vraie est ouvert et fermé en vertu du lemme 1.5.

Soient maintenant deux points x et y de T et θ_1 et θ_2 des éléments de Θ tels que $\theta_1(x) = \theta_2(y)$. On a :

$$\begin{cases} \theta_1 = L \exp t_1 \overline{X}_1 \cdots \exp t_p \overline{X}_p \circ \psi_x, \\ \theta_2 = L \exp t_{p+1} \overline{X}_{p+1} \cdots \exp t_{p+q} \overline{X}_{p+q} \circ \psi_y. \end{cases}$$

Désignons par σ_1 et σ_2 les $\mathcal{H}$ chemins définis comme dans la remarque 1.4 par :

$$\varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_p}^p \quad \text{et} \quad \varphi_{t_{p+1}}^{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_{p+q}}^{p+q}.$$

Les chemins c_1 et c_2 sur G sont définis par :

$$\exp t_1 \overline{X}_1 \circ \cdots \circ \exp t_p \overline{X}_p \quad \text{et} \quad \exp t_{p+1} \overline{X}_{p+1} \circ \cdots \circ \exp t_{p+q} \overline{X}_{p+q}.$$

Les chemins σ_1 et σ_2 sont des relèvements de c_1 et c_2. Comme c_1 et c_2 ont les mêmes extrémités (1 et $\theta_1(x) = \theta_2(y)$), ils sont homotopes ; nous allons relever cette homotopie : soit c un chemin dans G voisin de c_1 ayant les mêmes extrémités ; par compacité de $[0,1]$ il existe une famille finie $t_1, \ldots, t_n$ de points de $[0,1]$ telle que $c(t)$ est tracé dans $\bigcup_i \varphi_{\sigma_1(t_i)}(U_{\sigma_1(t_i)})$ et $\sigma_1(t)$ est tracé dans $\bigcup_i U_{\sigma_1(t_i)}$. On peut alors relever c dans $\bigcup_i U_{\sigma_1(t_i)}$ en un $\mathcal{H}$ chemin σ. Il est clair alors que $\sigma(1)$ et $\sigma_1(1)$ coïncident. A l'aide d'un nombre fini de petites déformations, on peut construire un relèvement σ_2' de c_2 qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_2'(1) = \sigma_1(1), \\ \sigma_2'(0) = \sigma_2(0) = \sigma_1(0) = x_0. \end{cases}$$

On a alors $[\sigma_2'(1)] = [\sigma_2(1)] = [\sigma_1(1)]$ et par conséquent $\theta_1^{-1} \circ \theta_2$ vérifie les conditions du lemme 1.5 et appartient à $\mathcal{H}$. □

Soit $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe quasi parallélisé où Z est sans singularité. L'algèbre engendrée par Z est alors un parallélisme de Lie invariant complet de $(\mathcal{H}, T)$. Appelons ω la forme holomorphe sur T duale de Z (i.e. $\omega(Z) = 1$). Les $\mathcal{H}$-périodes de ω sont les intégrales de ω sur les $\mathcal{H}$-lacets. Le théorème 11.6 a pour corollaire :

Corollaire 1.7. — *$(\mathcal{H}, T)$ est équivalent au pseudogroupe engendré sur $\mathbb{C}$ par les translations par les $\mathcal{H}$ périodes de ω. L'équivalence échange les champs Z sur T et $\partial/\partial z$ sur $\mathbb{C}$.*

2. La dynamique d'un champ de vecteurs méromorphe au voisinage d'une singularité.

Le problème étant local, on supposera dans ce paragraphe que le champ méromorphe Z admet une singularité en le point 0 de $\mathbb{C}$.

Si Z admet une singularité, on sait [Mar] qu'il admet l'une des formes normales suivantes :

- si 0 est un pôle, on a : $Z = \dfrac{1}{z^n}\dfrac{\partial}{\partial z}$,
- si 0 est un zéro de Z, on a :

$$Z = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(zéro non dégénéré)},$$

$$Z = \frac{z^n}{1 + rz^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z}, \quad n \geq 2 \qquad \text{(zéro dégénéré)},$$

où r désigne le résidu de la forme méromorphe ω duale de Z (i.e. $\omega(Z) = 1$).

Appelons $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ le groupe des germes en 0 de transformations holomorphes qui laissent invariant le champ Z.

• Si Z a un pôle d'ordre n, $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ est égal au groupe fini de rotations engendré par la rotation d'angle $2i\pi/(n-1)$.

• Si Z s'annule en 0, $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ contient le groupe à un paramètre $\varphi_{\mathbb{C}}$ de Z.

Proposition 2.1. — *Soit Z un champ holomorphe nul en 0. Si 0 est une singularité non dégénérée,* $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ *est égal à $\varphi_{\mathbb{C}}$. Si 0 est une singularité dégénérée, alors* $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ *est le produit de $\varphi_{\mathbb{C}}$ et du groupe de rotations engendré par $z \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi/(n-1)}z$.*

Preuve. — Si la singularité est non dégénérée le résultat est clair. Supposons alors $Z = \dfrac{z^n}{1 + rz^{n-1}} \dfrac{\partial}{\partial z}$. En faisant correspondre à un élément g de $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ son jet d'ordre 1 en 0 il vient la suite exacte scindée

$$1 \to \mathrm{Diff}^1(Z, 0) \longrightarrow \mathrm{Diff}(Z, 0) \longrightarrow R_{n-1} \to 0$$

où R_{n-1} est engendré par $z \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi/(n-1)}z$, et $\mathrm{Diff}^1(Z, 0)$ est le sous-groupe constitué des éléments g tels que $g'(0) = 1$. Montrons que $\mathrm{Diff}^1(Z, 0) = \varphi_{\mathbb{C}}$. Si g appartient à $\mathrm{Diff}^1(Z, 0)$, on peut l'écrire :

$$g(z) = z + a_k z^k + \cdots .$$

En écrivant que g conserve Z, un calcul élémentaire sur les séries entières montre que $k = n$; si $a_n = 0$, on a $g(z) = z$. De la même façon on voit que l'élément φ_t de $\varphi_{\mathbb{C}}$ s'écrit :

$$\varphi_t(z) = z + tz^n + \cdots .$$

En posant $t = a_n$, on voit que φ_t est l'unique élément de $\mathrm{Diff}^1(Z, 0)$ dont le développement en série commence par $z + a_n z^n$. Le sous-groupe $\mathrm{Diff}^1(Z, 0)$ est égal à $\varphi_{\mathbb{C}}$, donc $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ est abélien et le produit semi-direct est en fait direct. □

Les sous-groupes de $\mathrm{Diff}(Z, 0)$.

Le champ holomorphe Z est supposé ici nul en 0, la forme ω est la forme duale de Z (i.e. $\omega(Z) = 1$) et r désigne le résidu de ω en 0. Si H est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, nous noterons φ_H le sous-groupe du flot $\varphi_{\mathbb{C}}$ de Z tel que le paramètre appartient à H.

Considérons un voisinage ouvert simplement connexe U de 0, dans lequel la seule singularité de Z est 0. Soit $\bar{g}$ un réprésentant d'un élément de $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ défini sur un voisinage connexe de 0 contenu ainsi que son image dans U. Soient alors z alors un point de $U - \{0\}$ et c un chemin tracé dans $U - \{0\}$ reliant z à $\bar{g}(z)$. Le complexe $\int_c \omega$ ne dépend pas du point z et du chemin c à $2i\pi r$ près ; la classe modulo $2i\pi r$ de $\int_c \omega$ ne dépend donc que du germe en 0 de $\bar{g}$. On définit ainsi une application naturelle de $\mathrm{Diff}(Z, 0)$ dans $\mathbb{C}/2i\pi r\mathbb{Z}$ qui est manifestement un homomorphisme de groupes que nous noterons Λ :

$$\Lambda(g) = \int_c \omega \mod 2i\pi r\mathbb{Z}.$$

Définition 2.2. — *On utilise les notations définies ci-dessus. Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(Z,0)$*. Le sous-groupe de $\mathbb{C}$ préimage par la surjection canonique de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}/2i\pi r\mathbb{Z}$ de l'image par Λ de G est appelé le groupe des G-périodes de ω.*

Nous désignerons par H_G le sous-groupe des G-périodes de ω constitué des complexes t tels que l'élément φ_t du flot de Z appartient à G, c'est-à-dire tels que $\varphi_{H_G} = \varphi_{\mathbb{C}} \cap G$.

Si H est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ contenant $2i\pi r$, nous désignerons par $\mathrm{Diff}^H(Z,0)$ *la préimage par Λ de $H/2i\pi r\mathbb{Z}$.*

Notons que si Z a un zéro simple en 0, l'élément φ_{H_G} est égal à G. Si Z s'annule à l'ordre $n \geq 3$ en 0, l'application dérivation au point 0 d'un élément de G donne la suite exacte

$$0 \to \varphi_{H_G} \longrightarrow G \longrightarrow K \to 0$$

où K est un sous-groupe de R_{n-1} ; en particulier si $G = \mathrm{Diff}^H(Z,0)$, le sous-groupe K est égal à R_{n-1} mais l'extension n'est en général pas triviale.

Définition 2.3. — *Soit G un sous-groupe de germes en 0 de difféomorphismes analytiques qui fixent le point* 0*. L'orbite d'un point z par G est l'ensemble des points $\bar{g}(z)$, où $\bar{g}$ est un représentant de g défini sur un ouvert connexe contenant z. L'orbite d'un point z par G est dite complète si, pour tout g de G, il existe au moins un représentant $\bar{g}$ de g défini sur un voisinage connexe contenant z, et si deux quelconques de ces représentants peuvent se prolonger en sorte que l'intersection de leurs sources contienne un ouvert connexe contenant p et z.*

Proposition 2.4. — *Soient $Z = \dfrac{z}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}$ et G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(Z,0)$*. Si H_G est contenu dans la droite $2i\pi r\mathbb{R}$, pour tout voisinage V de* 0*, il existe un voisinage W de* 0 *inclus dans V dont l'image par G est incluse dans V. Si H_G n'est pas contenu dans la droite $2i\pi r\mathbb{R}$, pour tout voisinage V de 0 et tout point $z \neq 0$ de V, l'orbite de z par G n'est pas contenue dans V.*

Preuve. — Elle est évidente, car dans le premier cas G est un groupe de rotations ; dans le second, G est un groupe de similitudes de rapports différents de 1. □

Proposition 2.5. — *Soient $Z = \dfrac{z^n}{1+rz^{n-1}}\dfrac{\partial}{\partial^z}$ (avec $n \geq 2$) et G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(Z,0)$*.*

(i) *Si H_G n'est pas réduit à* 0, *l'orbite de tout point z par G s'accumule en* 0.

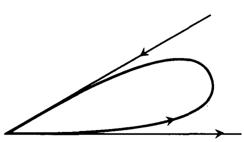
(ii) *Si H_G est contenu dans une droite passant par l'origine de $\mathbb{C}$, pour tout voisinage V de 0 il existe un point z de V dont l'orbite est contenue dans V.*

(iii) *Si H_G n'est pas contenu dans un droite, il existe un voisinage V borné de 0 tel que l'orbite de tout point de $V - \{0\}$ n'est pas contenue dans V.*

Preuve. — Supposons d'abord $r = 0$. Les éléments du flot de Z s'écrivent

$$\varphi_t(z) = \frac{z}{\sqrt[n-1]{1-(n-1)\,tz^{n-1}}}.$$

La propriété (i) en découle immédiatement. Si H_G est contenu dans la droite $\mathrm{e}^{i\theta}\mathbb{R}$, l'orbite d'un point z est contenue dans l'union des courbes déduites par les rotations d'angles $2ik\pi/(n-1)$ de la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_{\mathrm{e}^{i\theta}t}(z)$. Cette courbe est soit une demi-droite issue de l'origine, soit une courbe tracée dans le secteur angulaire $]-\theta/(n-1)+2k\pi/(n-1), \pi-\theta/(n-1)+2k\pi/(n-1)[$ comme dans la figure ci-dessous (le sens des flèches indique le sens de parcours lorsque t croît).



En particulier si $z = \rho\,\mathrm{e}^{i(\frac{1}{2}\pi-\theta)}$, l'orbite de z est contenue dans le cercle de centre 0 et de rayon ρ, ce qui entraîne (ii).

On suppose maintenant $r \neq 0$. A une demi-droite Δ issue de l'origine, on associe l'application holomorphe h_Δ de $C\backslash\Delta$ dans $\mathbb{C}$

$$h_\Delta(z) = \frac{z}{\sqrt[n-1]{1-(n-1)z^{n-1}r\operatorname{Log} z}}$$

où la détermination du logarithme est définie par Δ. On a :

$$h_{\Delta_*}\Big(z^n\frac{\partial}{\partial z}\Big) = \frac{z^n}{1+rz^{n-1}}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Si φ_{C} et ψ_{C} sont les groupes à un paramètre respectif de $z^n\dfrac{\partial}{\partial z}$ et de $\dfrac{z^n}{1+rz^{n-1}}\dfrac{\partial}{\partial z}$, on peut choisir Δ en fonction de z et de θ en sorte que la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto \psi_{te^{i\theta}}(z)$ est l'image par h_Δ de la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_{te^{i\theta}}(z)$. Les propriétés (i) et (ii) en résultent immédiatement.

Reste à prouver (iii). Comme H_G n'est pas contenu dans une droite, il existe un voisinage relativement compact U de 0 tel que $U + H_G = \mathbb{C}$. Il existe un voisinage borné V de 0 tel que $\varphi_t(z)$ est défini pour tout t dans U et tout z dans V. L'ensemble $\varphi_U(V) = \{\varphi_t(z)\,;\; t \in U, z \in V\}$ est alors borné. S'il existe un point z_0 de V ($z_0 \neq 0$) dont l'orbite par G est continue dans V, l'application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $t \mapsto \varphi_t(z_0)$ est non constante et bornée, ce qui est impossible. □

Proposition 2.6. — *Soient G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(Z,0)$, *et F un sous-groupe de G. Si un point $z \neq 0$ a une orbite complète par G qui est aussi une orbite de F, alors F est égal à G.*

Preuve. — Si $\bar{g}$ est un représentant d'un élément g de G, il existe par hypothèse un représentant $\bar{h}$ d'un élément de F tel que $\bar{h}(z) = \bar{g}(z)$. Les applications $\bar{h}$ et $\bar{g}$ coincident au voisinage de z car elles préservent Z ; on peut alors supposer que $\bar{h}$ et $\bar{g}$ sont définis sur un ouvert connexe contenant 0 et z ; le résultat est alors une conséquence du principe du prolongement analytique. □

3. Pseudogroupes quasi parallélisés de génération compacte ayant une orbite pôle.

Proposition 3.1. — *Soit $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe quasi parallélisé de génération compacte; si Z admet un pôle, $(\mathcal{H}, T)$ est une orbifold analytique compacte.*

Preuve. — Les orbites pôles sont discrètes et leurs groupes de stabilité sont finis. Par le théorème de stabilité de Reeb, on peut trouver pour tout point z régulier une fonction différentiable φ sur T invariante par $\mathcal{H}$, égale à 1 au point z et nulle au voisinage des pôles de Z. Quel que soit le vecteur réel X tangent en z à T, il existe un champ de vecteurs différentiable $\mathcal{H}$ invariant Y dont la valeur en z est X, car $\varphi\,\mathrm{Re}\,Z$ et $\varphi\,\mathrm{Im}\,Z$ engendrent l'espace tangent à T en z. Les groupes à un paramètre de ces champs définissent une famille d'automorphismes transitive sur les orbites régulières; comme les orbites voisines d'un pôle sont discrètes, toutes les orbites régulières sont discrètes et ont un groupe de stabilité trivial. En vertu du « lemme des orbites » (voir [Cav1], [MatMou], [Kau]), toutes les orbites ont un groupe de stabilité fini. L'espace des orbites de $\mathcal{H}$ est alors localement le quotient d'un disque par un groupe fini, c'est-à-dire un orbifold. □

Soit $(\mathcal{H}, T, Z)$ un orbifold compact quasi parallélisable. Le champ Z à p orbites pôles $[P_1], \dots, [P_p]$ et q orbites zéro $[O_1], \dots, [O_q]$. Les formes normales de Z au voisinage d'une orbite singulière — ainsi que les ordres des groupes de stabilité des points de ces orbites singulières — sont invariantes par équivalence de pseudogroupe. Au pôle $[P_i]$ on associe un couple d'entiers (n_i, α_i), où n_i est l'ordre de Z en P_i et α_i l'ordre du groupe de stabilité de p_i. Au zéro $[O_j]$, on associe le triplet (m_j, r_j, β_j) où m_j est l'ordre de Z, où r_j est le résidu de la forme duale de Z et où β_j est l'ordre du groupe de stabilité de O_j. Les groupes de stabilité des P_i et O_j laissent invariantes les germes de Z, P_i et O_j ; on en déduit que α_i divise $n_i + 1$ et que β_j divise $(m_j - 1)$. On peut donc associer à la classe de $(\mathcal{H}, T, Z)$ une liste d'invariants

$$\big[(n_1, \alpha_1), \dots, (n_p, \alpha_p), (m_1, r_1, \beta_1) \cdots (m_q, r_q, \beta_q)\big]$$

où α_i divise n_{i+1} et β_j divise $(m_j - 1)$.

L'espace topologique des orbites de $\mathcal{H}$ est une surface compacte T_g que l'on peut munir d'une structure holomorphe naturelle de la façon suivante : soient f une application d'un ouvert de T_g dans $\mathbb{C}$ et $[\ ]$ l'application orbitale de T (qui à z fait correspondre $[z]$) ; nous dirons que f est *holomorphe* si $\bar{f}$ est holomorphe. En particulier, si z est un point de T, et si γ est l'ordre du groupe de stabilité de z, l'application $[\ ]$ peut s'écrire $[z] = z^\gamma$ dans des coordonnées holomorphes sur T_g.

L'image de Z par $[\ ]$ est un champ méromorphe $\overline{Z}$. Si z est un point régulier de Z, alors $[z]$ est un point régulier de $\overline{Z}$. Si P_i est un pôle de Z d'ordre n_i, le champ $\overline{Z}$ admet un pôle d'ordre $(n_i + 1)/\alpha_i - 1$ en $[P_i]$. Si O_j est un zéro d'ordre m_j avec résidu r_j, le champ $\overline{Z}$ admet en $[O_j]$ un zéro d'ordre $(m_j - 1)/\beta_j + 1$ avec résidu r_j/β_j.

On associe alors à un tel pseudogroupe une surface de Riemann T_g marquée par les points $[P_i]$ et $[O_j]$ qui est de plus équipée du champ méromorphe $\overline{Z}$, image de Z par l'application orbitale. Le diviseur $\overline{D}$ de $\overline{Z}$ s'écrit :

$$\overline{D} = \sum_1^q \mu_j [O_j] - \sum_1^p \lambda_i [P_i],$$

où $\mu_j = (m_j - 1)/\beta_j + 1$ et $\lambda_i = (n_i + 1)/\alpha_i - 1$; le résidu de la forme $\overline{\omega}$

en $[O_j]$ étant alors r_j/β_j. Une équivalence entre deux tels pseudogroupes induit de façon naturelle un biholomorphisme des surfaces de Riemann marquées qui échange les champs de vecteurs.

THÉORÈME 3.2. — *Une classe d'équivalence de pseudogroupes quasi parallélisés $(\mathcal{H}, T, Z)$ ayant une orbite discrète dont le groupe de stabilité est fini — c'est en particulier le cas si Z admet un pôle — est la donnée des objets suivants :*

• *Une surface de Riemann compacte T_g pourvue d'un diviseur $D = \sum_1^p \alpha_i[P_i] + \Sigma_1^q \beta_j[O_j]$*

• *Un champ de vecteurs méromorphe $\overline{Z}$ sur T_g dont le diviseur s'écrit $\sum_1^q \mu_j[O_j] - \sum_1^p \lambda_i[P_i]$ (où les λ_i et les μ_j sont positifs où nuls). Le champ Z a alors p orbites pôles $[P_i]$ et q orbites zéros $[O_j]$. Les invariants de Z en $[P_i]$ et $[O_j]$ sont reliés à T_g, D et $\overline{Z}$ par les relations suivantes :*

— l'ordre de Z en $[P_i]$ est $\alpha_i(\lambda_i + 1) - 1$; l'ordre du groupe de stabilité de $[P_i]$ est α_i ;

— $[O_j]$ est un zéro d'ordre $\beta_j(\mu_j - 1) + 1$ de Z ; l'ordre du groupe de stabilité de $[O_j]$ est β_j ; le résidu de ω (forme duale de Z) en $[O_j]$ est $\beta_j \bar{r}_j$ où $\bar{r}_j$ est le résidu de la forme $\overline{\omega}$ duale de $\overline{Z}$ en $[O_j]$.

Démonstration. — Il reste seulement à reconstruire un pseudogroupe $(\mathcal{H}, T, Z)$ de génération compacte à partir T_g, D et $\overline{Z}$. Construisons T : on considère un voisinage ouvert connexe U_j de $[O_j]$ dans T_g et un revêtement ramifié $\widetilde{U}_j$ à j feuillets de U_j ; on considère un voisinage ouvert connexe V_i de $[P_i]$ et un revêtement ramifié à α_i feuillets $\widetilde{V}_i$ de V_i ; on pose enfin $W = T_g \setminus \{[O_1], \dots, [O_q], [P_1], \dots, [P_p]\}$. On définit T comme l'union disjointe de W, des $\widetilde{U}_j$ et des $\widetilde{V}_i$. On définit le champ Z par $Z = \overline{Z}$ sur W ; sur $\widetilde{V}_i$ et $\widetilde{U}_j$, Z est l'unique champ méromorphe qui se projette sur $\overline{Z}$ par l'application de revêtement. Le pseudogroupe $\mathcal{H}$ est alors le pseudogroupe engendré par l'identité sur W, les automorphismes de revêtement sur les $\widetilde{U}_j$ et les $\widetilde{V}_i$ et les projections de $\widetilde{U}_j - \widetilde{P}_j$ et $\widetilde{V}_j - \widetilde{O}_i$ dans W, où les $\widetilde{P}_j$ et les $\widetilde{O}_i$ sont les préimages des points de ramification par les projections de revêtement. Alors $(\mathcal{H}, T, Z)$ est clairement de génération compacte et totalement défini à équivalence près. □

Il est à noter que la donnée des invariants locaux de Z (ordre des pôles, des zéros des groupes de stabilité, des résidus) permet de calculer le genre g de (T_g) et les invariants locaux de $\overline{Z}$, mais ne permet pas de classifier à équivalence près $(\mathcal{H}, T, Z)$.

4. Pseudogroupes normaux et pseudogroupes normaux de générations compacte.

DÉFINITION 4.1. — *Un pseudogroupe quasi parallélisé* $(\mathcal{H}, T, Z)$ *sera dit normal si* Z *est holomorphe complet et n'a qu'un nombre fini d'orbites singulières.*

Les pseudogroupes $(\mathcal{H}, T, Z)$ de génération compacte tels que Z est holomorphe apparaissent comme des pseudogroupes normaux particuliers. Nous allons classifier ces derniers dans ce paragraphe.

Au pseudogroupe normal $(\mathcal{H}, T, Z)$, on peut associer le nombre q de ses orbites singulières $[z_k]$. Pour chacune de ces orbites singulières, on a une forme normale Z_k de Z définie par l'ordre d'annulation n_k de Z_k et le résidu r_k de la forme ω duale de Z. Le groupe de stabilité de z_k s'identifie alors à un sous-groupe G_k de $\mathrm{Diff}(Z,0)$. Le pseudogroupe $(\mathcal{H}', T', Z)$, restriction de $(\mathcal{H}, T, Z)$ à sa partie régulière, est équivalent (théorème 1.6) à un pseudogroupe engendré sur $\mathbb{C}$ par les translations par les éléments d'un sous-groupe H de $\mathbb{C}$.

Les triplets (n_k, r_k, G_k) et le sous-groupe H de $\mathbb{C}$ sont manifestement invariants par équivalence. De plus, H apparaît comme le groupe des $\mathcal{H}$ périodes de ω (i.e. des intégrales de ω sur les $\mathcal{H}$ lacets), ce qui implique les deux conditions :

- pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$, les nombres $2i\pi r_k$ appartiennent à H ;
- pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$, on a $G_k \subset \mathrm{Diff}^H(Z,0)$ (cf. définition 2.2).

THÉORÈME 4.2. — *A tout pseudogroupe normal* $(\mathcal{H}, T, Z)$ (*cf. définition* 4.1), *on peut associer une liste d'invariants*

$$\big[(n_1, r_1, G_1), \ldots, (n_q, r_q, G_q), H\big].$$

L'entier positif ou nul q *est le nombre des orbites zéros* $\{[O_1], \ldots, [O_q]\}$ *de* Z ; n_j *est l'ordre de* Z *en* $[O_j]$; r_j *est le résidu en* $[O_j]$ *de la forme méromorphe* ω *duale de* Z (*i.e* $\omega(Z) = 1$) ; G_j *est le groupe de stabilité de* $[O_j]$; H *est le groupe de* $\mathcal{H}$ *période de* ω. *La liste d'invariants vérifie les propriétés suivantes :*

- *pour tout* $j \in \{1, \ldots, q\}$, *les nombres* $2i\pi r_j$ *appartiennent à* H ;
- *le groupe des* G_j *périodes de* ω (*cf. définition* 2.2) *est inclus dans* H.

A toute liste d'invariants, on peut associer un pseudogroupe $(\mathcal{H}, T, Z)$ *normal unique à équivalence près.*

Démonstration. — Pour chaque $k \in \{1, \dots, q\}$, on considère un disque D_k de centre 0 et de rayon strictement positif tel que le champ Z_k (forme normale associée à (n_k, r_k)) a pour seule singularité 0. On pose $D_0 = \mathbb{C}$ et $Z_0 = \partial/\partial z$.

La variété T est l'union disjointe des $D_j j \in \{0, \dots, q\}$ et le champ Z est égal à z_k sur D_k. La variété T' est obtenue en enlevant à T les centres dans chaque D_k pour $k \in \{1, \dots, q\}$. Soit Σ le pseudogroupe sur T' de toutes les transformations locales holomorphes qui laissent invariant Z. Le pseudogroupe Σ agit de façon simplement transitive sur T'. Définissons $\mathcal{H}$ en restriction à T'. Dans chaque D_j, pour $j \in \{0, \dots, q\}$, on choisit un point p_j tel que $p_0 = 0$ et $p_j \neq 0$ si $j \geq 1$. Soient alors z et z' des points de D_j et D_k respectivement; l'élément h de Σ (dont le germe en z est unique) tel que $h(z) = z'$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si pour tous chemins c_j et c_k tracés dans D_j et D_k tels que

$$c_j(0) = z, \quad c_j(1) = p_j, \quad c_j(0) = p_k, \quad c_k(1) = z',$$

on a :

$$\int_{c_j} \omega + \int_{c_k} \omega \in H.$$

(En fait, il suffit que cela soit vrai pour un chemin c_j et un chemin c_k.) Cela implique en particulier que les p_j sont dans le même orbite.

Pour définir $\mathcal{H}$ sur T il suffit de poser que le groupe de stabilité du centre de chaque D_k pour $k \in \{1, \dots, q\}$ est G_k.

Par construction le groupe des $\mathcal{H}$ périodes de ω est H; réciproquement si l'intégrale de ω sur un $\mathcal{H}$ chemin tracé dans T' appartient à H les deux extrémités du chemin sont dans la même orbite.

Il faut montrer que le champ Z est complet, c'est-à-dire que Z vérifie les propriétés (i) et (ii) de la définition 1.2. La propriété (i) est clairement vraie; vérifions (ii). Soient x et x' dans la même orbite, $\varphi_{t_n} \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}$ et $\varphi_{t'_{n'}} \circ h'_{n'_{-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t'_1}$ des suites pour Z en x et x' respectivement de paramètre t. Soient σ un $\mathcal{H}$ chemin reliant x à x', c et c' les $\mathcal{H}$ chemins définis par les suites pour Z en x et x' (cf. remarque 1.4) et Δ un $\mathcal{H}$ chemin reliant $\varphi_{t_n} \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}(x)$ et $\varphi_{t'_{n'}} \circ h'_{n'_{-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t'_1}(x')$. Nous devons montrer que $\int_\Delta \omega$ est dans H. Les chemins $c' \cdot \sigma$ et $\Delta^{-1} c$ relient x à $\varphi_{t'_{n'}} \circ h'_{n'_{-1}}, \dots, \varphi_{t'_1}(x')$. On a donc l'égalité

$$\int_{c' \cdot \sigma} \omega = \int_{\delta^{-1} \cdot c} \omega \mod H$$

qui est équivalente à

$$\int_{c'} \omega + \int_{\sigma} \omega = -\int_{\delta} \omega + \int_{c} \omega \quad \bmod H.$$

Par conséquent, $\int_{c'} \omega$ et $\int_{c} \omega$ sont égales à t mod H; il en résulte $\int_{\sigma} \omega = 0$ mod H, ce qui implique le résultat. Le pseudogroupe $(\mathcal{H}, T, Z)$ est donc normal et la liste de ses invariants est la liste voulue.

Montrons que deux pseudogroupes normaux $(\mathcal{H}, T_1, Z_1)$ et $(\mathcal{H}_2, T_2, Z_2)$ qui ont la même liste d'invariants sont équivalents. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que les orbites singulières des deux pseudogroupes sont réduites à un point. Soient T_1' et T_2' les ensembles des points réguliers de T_1 et T_2. Si z_1 et z_2 sont des points de T_1' et T_2', il existe une transformation locale holomorphe $\Phi_{z_1 z_2}$ de T_1' dans T_2' dont le germe en z_1 est unique telle que :

$$\Phi_{z_1 z_2}(z_1) = z_2, \quad \Phi_{z_1 z_2 *}(Z_1) = Z_2.$$

Choisissons p_1 et p_2 des points bases dans T_1' et T_2' respectivement. Construisons une équivalence Φ' de $\mathcal{H}_1'$ et $\mathcal{H}_2'$ de la façon suivante : soient z_1 et z_2 des points de T_1' et T_2'; on suppose qu'il existe un $\mathcal{H}_1'$ chemin c_1 reliant p_1 à z_1 et un $\mathcal{H}_2'$ chemin c_2 reliant p_2 à z_2 tels que $\int_{c_1} \omega_1$ et $\int_{c_2} \omega_2$ appartiennent à H, alors $\Phi_{z_1 z_2}$ appartient à Φ'. La famille Φ' est alors clairement une équivalence de $\mathcal{H}_1'$ et $\mathcal{H}_2'$ qui échange Z_1 et Z_2.

Prolongeons l'équivalence Φ' en une équivalence Φ de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de la façon suivante : soient a_i et b_i les points de T_1 et T_2 appartenant à l'orbite singulière correspondant au triplet (n_i, r_i, G_i) ; il existe une transformation holomorphe Φ_i d'un voisinage U_i de a_i en un voisinage V_i de b_i telle que $\Phi_i(a_i) = b_i$ et $\Phi_{i*}(Z_1) = Z_2$. On peut de plus en composant au besoin avec le flot de l'un des champs supposer que la restriction de Φ_i à $U_i - \{a_i\}$ appartient à Φ'.

La famille de transformations locales $\Phi = \Phi' \cup \{\Phi_1, \ldots, \Phi_q\}$ est alors une équivalence de $(\mathcal{H}_1, T_1, Z_1)$ et $\{;H_2, T_2, Z_2\}$. $\square$

Grâce à ce théorème, nous pouvons désigner dans la suite un pseudogroupe normal $(\mathcal{H}, T, Z)$ par sa liste d'invariants, et travailler au besoin sur les pseudogroupes «modèles», c'est-à-dire ceux construits pour montrer l'existence d'un pseudogroupe normal correspondant à une liste d'invariants.

La classification des pseudogroupes normaux de génération compacte. Une condition nécessaire pour que le pseudogroupe

$$\big[(n_1, r_1, G_1) \cdots (n_q, r_q, G_q), H\big]$$

soit de génération compacte est que le sous-groupe H soit de type fini, car $\mathcal{H}$ est de génération finie en restriction à un ouvert relativement compact rencontrant toutes les orbites. *Désormais, nous supposerons toujours que H est de type fini.*

LEMME 4.3. — *Soient $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe normal de génération compacte, z_k un point singulier seul dans on orbite, et G_k son groupe stabilité. Si $\bar{h}_{G_k}$ (cf. définition 2.2) n'est pas cocompact dans $\mathbb{C}$, dans tout voisinage W de z_k, il existe un point z différent de z_k dont l'orbite par G_k est complète, incluse dans W, et en prenant au besoin un pseudogroupe équivalent, coïncide avec son orbite par $\mathcal{H}$.*

Preuve. — L'existence dans tout voisinage W de z_k d'un point z dont l'orbite par G_k est invluse dans W est une conséquence des propositions 2.4 et 2.5 : en effet, si z_k est une singularité dégénérée c'est clair ; si elle n'est pas dégénérée, G_k est conjugué à un groupe de rotations, car H_{G_k} est inclus dans la droite $2i\pi r_k$ (où r_k est le résidu de la forme duale de Z en z_k).

Par hypothèse de génération compacte, on peut se ramener au cas où $\mathcal{H}$ est engendré par un nombre fini de générateurs $\gamma_1 \ldots \gamma_n$. Toujours par hypothèse de génération compacte, il existe un voisinage U de z_k tel que la source des p premiers contient U, et la source des autres ne rencontre pas U ; en effet, si z_k est adhérent à la source de γ_j, on peut prolonger γ_j en un élément de $\mathcal{H}$ défini sur un voisinage U_j de z_k ; l'intersection finie des U_j est alors le voisinage recherché.

Les germes en z_k des p premiers générateurs de $\mathcal{H}$ constituent un système de générateurs de G_k. Il existe alors dans U un point $z \neq z_k$ dont l'orbite par G_k est complète et incluse dans U. L'orbite de ce point par $\mathcal{H}$ est alors son orbite par G_k. □

PROPOSITION 4.4. — *Soit $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe normal de génération compacte tel que $\overline{H}$ n'est pas compact dans $\mathbb{C}$. Si z_k est un point singulier, son groupe de stabilité est conjugué à* $\mathrm{Diff}^H(Z_k, 0)$.

Preuve. — A conjugaison près, le groupe de stabilité de z_k est inclus dans $\mathrm{Diff}^H(Z_k, 0)$. Comme $\mathcal{H}$ est complet, l'orbite d'un point de z de T par $\mathcal{H}$ contient son orbite par $\mathrm{Diff}^H(Z_k, 0)$. Par le lemme 4.3, l'orbite de z par $\mathcal{H}$ est son orbite par le groupe de stabilité de G_k ; il suffit alors d'appliquer la proposition 2.6. □

PROPOSITION 4.5. — *Si $(\mathcal{H},T,Z)$ est normal et si une orbite régulière s'accumule sur une orbite singulière, toutes les orbites régulières s'accumulent sur cette orbite singulière.*

Preuve. — Soit z un point de l'orbite singulière et (x_n) une suite de points de la même orbite $[x]$ qui tend vers z. Si $[y]$ est une orbite régulière il existe un scalaire t tel que $\varphi_t([x]) = [y]$. La suite $\varphi_t(x_n)$ de points de T (définie au moins pour n assez grand) est incluse dans $[y]$ et tend vers z. □

PROPOSITION 4.6. — *Si $(\mathcal{H},T,Z)$ est de génération compacte et si une orbite régulière s'accumule sur une orbite singulière, toutes les orbites régulières s'accumulent sur toutes les orbites singulières.*

Preuve. — Soit z_1 un point d'une orbite singulière — que l'on peut supposer réduite à ce point — sur laquelle ne s'accumule aucune orbite régulière. Soit G_1 le groupe de stabilité de z_1. Les propositions 2.4 et 2.5 impliquent que H_{G_1} ne peut pas être cocompacte dans $\mathbb{C}$ (sinon les orbites des points voisins de z_1 s'accumuleraient sur z_1). Le lemme 4.3 nous permet d'affirmer qu'il existe des points réguliers, voisins de z_1, dont les orbites ne peuvent s'accumuler sur une autre orbite singulière. □

De ces deux propositions nous pouvons déduire que les pseudogroupes $(\mathcal{H},T,Z)$ normaux de génération compacte sont de l'un des trois types suivants :

- *type 1* : Z n'a pas de singularités, $(\mathcal{H},T,Z)$ est alors équivalent à l'action par translation de H sur $\mathbb{C}$. Le pseudogroupe $(\mathcal{H},T,Z)$ est de génération compacte si et seulement si H est de type fini et si le quotient de $\mathbb{C}$ par l'adhérence de H est compact.

- *type 2* : Z a des singularités et toutes les orbites régulières s'accumulent sur toutes les orbites singulières.

- *type 3* : Z a des singularités et aucune orbite régulière ne s'accumule sur aucune orbite singulière.

Les pseudogroupes du type 2.

Si $(\mathcal{H},T,Z)$ est du type 2, H est nécessairement infini. Deux cas sont alors possibles : ou bien H est contenu dans une droite, ce qui revient à dire que l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $\mathbb{C}$ n'est pas cocompacte, ou bien H n'est pas contenu dans une droite, c'est-à-dire que $\overline{H}$ est cocompact dans $\mathbb{C}$. Nous allons étudier séparément ces deux cas.

PROPOSITION 4.7. — *Si H est inclus dans une droite, une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{H}, T, Z)$ soit du type 2 est que sa liste d'invariants soit de la forme $\left[(n, r, \mathrm{Diff}^H(Z,0)), H\right]$ avec $n \geq 2$ et H infini.*

Preuve. — Comme $\overline{H}$ n'est pas cocompacte dans $\mathbb{C}$, la proposition 4.4 implique que le groupe de stabilité G_k de tout point singulier z_k est conjugué à $\mathrm{Diff}^H(Z_k, 0)$.

Le point z_k est un point critique dégénéré, car s'il était non dégénéré, le groupe G_k serait conjugué à un groupe de rotations, et en vertu de la proposition 2.4. et du lemme 4.3, aucune orbite ne pourrait s'accumuler sur z_k. On remarque également que z_k est la seule singularité, car, d'après le lemme 4.3, les points d'un voisinage V assez petit de z_k ont des orbites par G_k (donc par $\mathcal{H}$) qui sont incluses dans V, et ne peuvent donc s'accumuler que sur l'orbite de z_k. La liste d'invariants est donc du type voulu.

Réciproquement le pseudogroupe $\left[(n, r, \mathrm{Diff}^H(Z,0)), H\right]$ avec $n \geq 2$ et H infini est de génération compacte. En effet considérons des générateurs $g_1, \ldots, g_k$ de $\mathrm{Diff}^H(Z,0)$ et un voisinage V de 0 sur lequel on peut définir des représentants de $g_1, \ldots, g_k$ (notés $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k$). Soit W un voisinage de 0 relativement compact dans V; alors W rencontre toutes les orbites et $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k$ peuvent être prolongés sur les adhérences de leurs sources. Le pseudogroupe engendré par $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k$ est donc de génération compacte et sa liste d'invariant est bien celle voulue. □

Étudions maintenant le cas où $\overline{H}$ est cocompact dans $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 4.8. — *Si $\overline{H}$ est cocompact dans $\mathbb{C}$ une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{H}, T, Z)$ soit du type 2 et que sa liste d'invariants soit de la forme $\left[(n_1, r_1, G_1), \ldots, (n_q, r_q, G_q), H\right]$ où $q \geq 1$ et $\overline{H}_{G_k}$ est cocompact dans $\mathbb{C}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$.*

Preuve. — Considérons le pseudogroupe modèle correspondant à la liste d'invariants. Si $\overline{H}_{G_k}$ n'est pas cocompact dans $\mathbb{C}$, l'hypothèse de génération compacte implique comme nous l'avons vu qu'il existe des points $z \neq 0$, $z \in D_k$ dont l'orbite par $\mathcal{H}$ serait réduite à leurs orbites par G_k, ce qui est impossible. Supposons alors que chaque $\overline{H}_{G_k}$ soit cocompact dans $\mathbb{C}$; on peut supposer que pour $k \geq 1$, les D_k rencontrent toutes les orbites et que leur union est un ouvert relativement compact de T. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, q\}$, il existe un voisinage V_k du centre de D_k tel que le groupe G_k a un système fini de générateurs dont des représentants sont définis sur un voisinage de $\overline{V}_k$. Soit $(\bar{g}_{k_i})_{i \in I_k}$ ce système de générateurs.

Le pseudogroupe $(\mathcal{H}', T', Z)$ ($\mathcal{H}$ restreint à sa partie régulière) est lui-même de génération compacte car $\overline{H}$ est cocompact dans $\mathbb{C}$. Il existe des couronnes Δ_k relativement compactes dans T' incluses dans $D_k - \{0\}$ telles que $\bigcup_{k=1}^{q} \Delta_k$ rencontre toutes les orbites de $\mathcal{H}'$ et telles que $V_k \cup \Delta_k = D_k$. Il existe alors une famille finie $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de générateurs de $\mathcal{H}'$ que l'on peut prolonger sur un voisinage de l'adhérence de leurs sources. La famille

$$\bigcup_{k=1}^{q} (\bar{g}_{k_i})_{i \in I_k} \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

engendre un pseudogroupe $\mathcal{H}_1$ de génération compacte inclus a priori dans $\mathcal{H}$. En fait $\mathcal{H}_1$ est égal à $\mathcal{H}$. Pour cela, il suffit de s'assurer que l'orbite de chaque point régulier de l'union des V_k rencontre l'union des Δ_k. Or cela est vrai en vertu des propositions 2.4 et 2.5. □

Les pseudogroupes du type 3.

Si $(\mathcal{H}, T, Z)$ est du type 3, $\overline{H}$ ne peut pas être cocompact dans $\mathbb{C}$. De plus, si H est infini, Z ne peut avoir de singularité dégénérée (cf. propositions 2.3 et 2.4). Nous allons étudier les deux cas H infini et $H = \{0\}$.

PROPOSITION 4.9. — *Les pseudogroupes du type 3 tels que H est infini sont ceux dont la liste d'invariants s'écrit*

$$\Big[\big(1, r_1, \mathrm{Diff}^H(Z_1, 0)\big), \big(1, r_2, \mathrm{Diff}^H(Z_2, 0)\big), H\Big],$$

où r_1/r_2 est un réel négatif.

Preuve. — Si H est infini, le champ Z ne peut avoir que des singularités non dégénérées; de plus, les résidus $r_1, \dots, r_q$ de ω sont portés par une droite; quitte à multiplier Z par un scalaire, on peut les supposer réels. L'hypothèse de génération compacte implique que chaque G_k est égal à $\mathrm{Diff}^H(Z, 0)$; en effet tout représentant d'un élément de $\mathrm{Diff}^H(Z, 0)$ restreint à T' appartient à H ; or $\overline{H}_{G_k}$ n'est pas cocompact dans $\mathbb{C}$ donc, dans tout voisinage V du 0 de D_k, il existe un point $z \neq 0$ dont l'orbite par G_k est incluse dans V ; l'hypothèse de génération compacte implique que pour V assez petit, l'orbite du point z est en fait son orbite par G_k. Considérons alors le pseudogroupe modèle correspondant à la liste d'invariants. Il doit exister un ouvert U relativement compact dans $\bigcup D_k$ qui rencontre toutes les orbites. Donc $U \cap D_k$ est relativement compact dans D_k. Posons :

$$E_k = \Big\{ \int_{pk}^{z} \omega \, ; \; z \in U \cap D_k - \{0\} \Big\}.$$

Dire que U rencontre toutes les orbites est équivalent à dire que $\bigcup_{k=0}^{q} E_k = \mathbb{C}$.

Si $k = 0$, E_0 est un ouvert borné de $\mathbb{C}$; si $k \neq 0$, E_k est contenu dans un ouvert de la forme $[-\infty, \alpha[\times \mathbb{R}$ ou $]\alpha, \infty] \times \mathbb{R}$, selon que r_k est positif ou négatif. Cela implique que Z a au moins deux singularités; l'une où le résidu de ω est positif, l'autre où il est négatif. Supposons alors que les résidus de ω au centre de D_k et D_ℓ soient de même signe; cela implique que pour tout voisinage V_k du centre de D_k et tout voisinage V_ℓ du 0 de D_ℓ, il existe un point z_k de V_k et un point z_ℓ de V_ℓ qui sont dans la même orbite; cela est incompatible avec la propriété de génération compacte car, pour z_k suffisamment proche du centre de D_k, l'orbite de z_k par $\mathcal{H}$ est l'orbite de z_k par G_k qui est un groupe de rotations. Le pseudogroupe $\mathcal{H}$ a donc deux orbites singulières et sa liste d'invariant est bien du type voulu.

Réciproquement, un pseudogroupe dont la liste d'invariants est de ce type est de génération compacte : sur les disques D_1 et D_2, $\mathcal{H}$ est engendré par les groupes $\mathrm{Diff}^H(Z_1, 0)$ et $\mathrm{Diff}^H(Z_2, 0)$ qui sont des groupes de rotations. On recolle les deux disques par l'application (multiforme) φ de D_1 dans D_2 telle que $\varphi(z) = Cz^{r_1/r_2}$, où C est choisi en sorte que $\varphi(p_1) = p_2$. Au voisinage de chaque point, φ coïncide avec un élément du pseudogroupe. Les éléments de $\mathrm{Diff}^H(Z_1, 0)$, $\mathrm{Diff}^H(Z_2, 0)$ et φ constituent un système de générateurs que l'on peut prolonger sur les adhérences de leurs sources. □

Proposition 4.10. — *Les pseudogroupes du type* 3 *tels que* $H = \{0\}$ *sont ceux dont la liste d'invariants est de la forme* $\left[(n, 0, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)), \{0\}\right]$ *où* $n \geq 2$.

Preuve. — Les résidus des ω sont nécessairement tous nuls; donc toutes les singularités de Z sont dégénérées. Les groupes de stabilité des orbites singulières sont des groupes finis de rotations; la proposition 4.4 implique que $G_k = \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z_k, 0)$. De plus, par un raisonnement analogue à celui de la proposition 4.9, on voit que $G_k = \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z_k, 0)$ et qu'il ne peut y avoir plus d'une orbite singulière. Il doit y avoir au moins une orbite singulière, sinon $\mathcal{H}$ serait le pseudogroupe engendré par l'identité sur $\mathbb{C}$ qui n'est pas de génération compacte.

Réciproquement, le pseudogroupe modèle dont la liste d'invariants est $[(n, 0, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)), \{0\}]$ a une orbite singulière dont le groupe de stabilité est fini. Il est équivalent au pseudogroupe correspondant dans la classification du théorème 3.2 à :

- la sphère S^2 munie du diviseur $(n-1) \setminus \{$ pôle Sud $\}$;
- le champ $\overline{Z}$ s'écrit $z^2\partial/\partial_z$ dans la carte pôle Nord. □

On peut rassembler les résultats obtenus dans le paragraphe 4 en un théorème de classification.

THÉORÈME 4.11. — *On utilise dans la formulation de ce théorème les notations de la définition* 2.2 *du théorème* 4.2 *et la définition* 4.1.

Soit $(\mathcal{H}, T, Z)$ *un pseudogroupe quasi parallélisé de génération compacte où le champ* Z *n'admet pas de pôle. Le pseudogroupe* $(\mathcal{H}, T, Z)$ *est alors un pseudogroupe normal* (*cf.* définition 4.1). *Il est défini à équivalence près par une liste d'invariants*

$$\big[(n_1, r_1, G_1), \dots, (n_q, r_q, G_q), H\big]$$

(*cf.* théorème 4.2), *où pour tout* $j \in \{i, \dots, q\}$, *les nombres* $2i\pi r_j$ *appartiennent à* H *et les groupes des* G_j, *périodes de la forme* ω *duale de* Z (*i.e.* $\omega(Z) = 1$), *sont inclus dans* H.

Une telle liste d'invariants correspond à un pseudogroupe de génération compacte si et seulement si :

- H *est de génération finie*;
- *si* $H = \{0\}$, *il n'y a qu'une singularité et la liste d'invariants est* $\big[(n, 0, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)), \{0\}\big]$ *avec* $n \geq 2$;
- *si* H *est infini et si son adhérence* $\overline{H}$ *n'est pas cocompacte dans* $\mathbb{C}$, *la liste d'invariants est de l'une des formes suivantes* :

$$\Big[\big(1, r_1, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)\big), \big(1, r_2, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)\big), H\Big]$$

où r_1/r_2 *est un réel négatif, ou bien*

$$\Big[\big(n, r, \mathrm{Diff}^{\{0\}}(Z, 0)\big), H\Big] \quad \text{avec } n \geq 2 ;$$

- *si* $\overline{H}$ *est cocompact dans* $\mathbb{C}$, *le nombre* q *des orbites singulières est un entier positif ou nul arbitraire et la liste d'invariants est de la forme* $[(n_1, r_1, G_1), \dots, (n_q, r_q, G_q), H]$, *où* $\overline{H}_{G_j}$ (*cf.* définition 2.2) *est cocompact dans* $\mathbb{C}$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, q\}$.

Il est à noter que les pseudogroupes correspondant à $H = \{O\}$ ont une orbite discrète dont le groupe de stabilité est fini et peuvent donc être classifiés également à l'aide du théorème 3.2.

Le groupe fondamental d'un pseudogroupe normal.

Soient $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe normal et $(\mathcal{H}', T', Z)$ sa restriction à sa partie régulière. Il existe un homomorphisme surjectif normal du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{H}')$ sur $\pi_1(\mathcal{H})$ induit par l'injection de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{H}$. On sait (cf. [HaeSal]) que $\pi_1(\mathcal{H}')$ s'identifie au groupe H de la liste d'invariant de $(\mathcal{H}, T, Z)$, car $\mathcal{H}'$ est équivalent au pseudogroupe défini par l'action de H sur $\mathbb{C}$ par translations. On peut décrire de façon plus précise l'homomorphisme de $\pi_1(\mathcal{H}')$ dans $\pi_1(\mathcal{H})$: si c est un $\mathcal{H}'$ lacet de base P dans T', il lui correspond par l'équivalence un chemin σ tracé dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma(1) - \sigma(0)$ est un élément de H. La classe d'homotopie de ce chemin est déterminée par le complexe $\sigma(1) - \sigma(0)$. Deux $\mathcal{H}'$ lacets c et γ de même base sont donc des homotopes si et seulement si $\int_c \omega = \int_\gamma \omega$ (où ω est la forme duale de Z). Soit $[2i\pi r_1, \ldots, 2i\pi r_q]$ le sous-groupe de H engendré par les résidus de ω. Si un $\mathcal{H}'$ lacet c est tel que $\int_c \omega = 2i\pi r_j$, il est homotope dans $\mathcal{H}'$ à un lacet tracé dans T' qui fait le tour d'une singularité de Z ; il est donc homotope dans $\mathcal{H}$ à un lacet trivial. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathcal{H}') \arrow[rr, "b"] \arrow[d, "s_1"'] & & H \arrow[d, "s_3"] \\ \pi_1(\mathcal{H}) \arrow[r, "s_2"] & H/[2i\pi r_1, \ldots, 2i\pi r_q] & \end{tikzcd}$$

où s_1, s_2 et s_3 sont surjectives et b bijective. L'homomorphisme s_2 est alors bijectif et l'on a la proposition suivante :

THÉORÈME 4.12. — *Soient $(\mathcal{H}, T, Z)$ un pseudogroupe normal, H le groupe des $\mathcal{H}$ périodes de la forme ω duale de Z et $[2i\pi r_1, \ldots, 2i\pi r_q]$ le sous-groupe de H engendré par les résidus de ω. Les groupes $\tau_1(\mathcal{H})$ et $H/[2i\pi r_1, \ldots, 2i\pi r_q]$ sont isomorphes.*

5. Quelques exemples de feuilletages dont le pseudogroupe d'holonomie transverse est du type $(\mathcal{H}, T, Z)$.

Considérons un champ X holomorphe au voisinage du 0 de $\mathbb{C}^2$ qui appartient au domaine de Poincaré Dulac, c'est-à-dire

$$X = \lambda_1 z_1 (1 + \cdots) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 (1 + \cdots) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

où λ_1/λ_2 n'est pas un réel négatif.

On sait (cf. [Mar]) que X a l'une des formes normales suivantes :

$$X = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \text{ou bien} \tag{*}$$

$$X = \lambda\Big(z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + (pz_2 + z_1^p)\frac{\partial}{\partial z_2}\Big) \quad \text{où } p \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Dans les deux cas X est transverse à la sphère de centre 0 et de rayon 1, et par conséquent induit sur elle un flot transversalement holomorphe. Dans les deux cas il existe un champ feuilleté Z non colinéaire à X :

- si X est du type (*), alors $Z = z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$,
- si X est du type (**), alors $Z = z_1^p \dfrac{\partial}{\partial z_2}$.

Le pseudogroupe d'holonomie transverse du feuilletage est alors du type $(\mathcal{H}, T, Z)$ et il est de génération compacte. La liste d'invariants de ce pseudogroupe est alors dans le cas (*) :

$$\Big[\Big(1, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, G_1\Big), \Big(1, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, G_2\Big), H\Big]$$

où H est le sous-groupe engendré par $2i\pi\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1)$ et $2i\pi\lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2)$, et G_j, pour $j = 1$ ou 2, est égal à $\mathrm{Diff}^H(Z, 0)$.

Dans le cas (**), la liste d'invariants est :

$$\big[(p+1, -1, G), H\big],$$

où H est engendré par $2i\pi$ et $G = \mathrm{Diff}^H(Z, 0)$.

Dans le cas (*), on obtient un pseudogroupe du type 2 si λ_1/λ_2 n'est pas réel, et un pseudogroupe du type 3 si λ_1/λ_2 est réel. Dans le cas (**) le pseudogroupe est toujours du type 2.

BIBLIOGRAPHIE

[Cam] C. CAMACHO, On the local structure of conformal mapping and holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$, Astérisque, 59–60 (1978).

[Cav1] V. CAVALIER, Feuilletages transversalement holomorphes de codimension complexe 1, Thèse 3ème cycle, Montpellier, 1978.

[Cav2] V. CAVALIER, Feuilletages transversalement holomorphes quasi transversalement parallélisables, Thèse d'État, Montpellier, 1987.

[Conl] L. CONLON, Transversally parallelisable foliations, Trans. Am. Math. Society, 194 (1974), 79–102.

[FarKra] H.M. FARKAS and I. KRA, Riemann surfaces, Graduate text in Mathematics n° 71, Springer Verlag, New York, 1980.

[Fed] E. FEDIDA, Sur les feuilletages de Lie, C.R.A.S., 272 A (1971), 999–102.

[Hae1] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv., 32 (1958), 248–329.

[Hae2] A. HAEFLIGER, Groupoïde d'holonomie et classifiants, Structure transverse des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque, (1984), 70–97.

[Hae3] A. HAEFLIGER, Pseudogroups of local isométries, Proc. Coll. in Differential Geometry, Research Notes in Math. 131, Pitman (1985), 179–197.

[Hae4] A. HAEFLIGER, Leaf closures in riemannian foliations, Fête of Topology, Papers dedicaced to I. Tamura, Academic Press (1988), 3–32.

[Hae5] A. HAEFLIGER, Feuilletages Riemanniens, Exposé au Séminaire Bourbaki, 41ème année 1988–89, n° 707.

[HaeSal] A. HAEFLIGER and E. SALEM, Pseudogroupes d'holonomie des feuilletages Riemanniens sur des variétés 1 connexes, Géométrie Différentielle (Paris 1986), 141–160, Travaux en cours, 33, Hermann Paris, 1988.

[HaeQua] A. HAEFLIGER et D. QUACH, Appendice : une présentation du groupe fondamental d'une orbifold, structure transverse des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque 116 (1984), 98–107.

[Kau] B. KAUP, Ein Geometrisches Endlichkeitskriterium für untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, 0)$ und holomorphe 1 codimensionale Blätterungen., Comm. Math. Helv., 53 (1978), 295–299.

[Mar] J. MARTINET, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno), Séminaire Bourbaki, novembre 1980, exposé 564.

[MatMou] J.F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Département de Mathématiques, Université de Dijon 1979.

[Mol1] P. MOLINO, Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier, 25–2 (1975), 279–289.

[Mol2] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages Riemanniens, Indagationes Mathematicæ, 44, 1 (1982).

[Mol3] P. MOLINO, Étude des feuilletages transversalement complets et applications, Ann. École Normale Sup., Paris (1977).

[Mol4] P. MOLINO, Riemannians Foliations, Progress in Math., Birkhauser, Boston, 1988.

[Ree] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1952.

[Rei] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle–like metrics, Ann. of Math., 69 (1959), 119–132.

[Sal1] E. SALEM, Une généralisation du théorème de Myers–Steenrod aux pseudogroupes d'isométries locales, Ann. Inst. Fourier, 38-2 (1987), 185–200.

[Sal2] E. SALEM, Feuilletages Riemanniens et pseudogroupes d'isométries, Thèse, Université de Genève, 1987.

[Sat] I. SATAKE, The Gauss–Bonnet formula for V manifolds, J. Math. Society of Japan, 9 (1957), 464–492.

Manuscrit reçu le 15 février 1993,
révisé le 27 juillet 1994.

Vincent CAVALIER,
G.D.R. 144, UA 1407 du C.N.R.S.
Université Montpellier II
Département de Mathématiques, case 051
Place E. Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 (France).