ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PASCAL GAMBLIN

Système d'Euler incompressible et régularité microlocale analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 5 (1994), p. 1449-1475
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1449_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 5 (1994), 1449-1475

SYSTÈME D'EULER INCOMPRESSIBLE ET RÉGULARITÉ MICROLOCALE ANALYTIQUE

par Pascal GAMBLIN

0. Introduction.

On modélise le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace physique $\mathbf{R}^d (d \geq 2)$ à l'aide du système d'Euler incompressible. Si on désigne par $v(t,x)$ et $p(t,x)$ respectivement la vitesse et la pression au point $x = (x^1, \cdots, x^d)$, à l'instant t, ce système s'écrit

$$(E_{\mathrm{inc}}) \begin{cases} \partial_t v + v.\nabla v = -\nabla p \\ \mathrm{div}\ v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

On s'empresse alors de calculer la pression. On dérive pour cela l'équation d'évolution et on conserve sa partie symétrique. Il vient

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j (v^i v^j) \tag{0.1}$$

si $v^1, \cdots, v^d$ désignent les composantes du champ des vitesses v. En imposant des conditions de décroissance à l'infini à la solution v du système (E_{inc}), on peut donc exprimer la pression en fonction de v. Le système d'Euler incompressible peut alors être regardé comme un système quasi-linéaire à partie principale diagonale. Illustrant ce fait, J.-Y. Chemin montre dans [2] que toute solution $C^r (r > 1)$ du système (E_{inc}) sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ possède des lignes de courant C^∞. Récemment, en remettant à l'honneur des techniques introduites par L. Lichtenstein (voir [11]), Ph. Serfati montre (voir

---

Mots-clés : Système d'Euler incompressible – Champ de vecteurs – Flot – Intégrales singulières – Front d'onde.
Classification A.M.S. : 35L60 – 76C05.

[12]) que, dans le cadre d'une approche lagrangienne, le système d'Euler peut s'écrire comme une équation différentielle ordinaire du second ordre analytique en temps et en déduit ainsi l'analyticité des lignes de courant, d'abord dans un cadre restreint (Chap. IV A), puis pour toute solution $C^r (r > 1)$ (Chap. III).

En vue de s'intéresser à la régularité des lignes de courant d'une solution pas forcément lipschitzienne de (E_{inc}), on a préféré le cadre eulérien et repris l'idée développée par J.-Y. Chemin dans le cadre C^∞ (voir [2]). Elle consiste en la remarque suivante : on suppose que le facteur pseudo-différentiel $\nabla\Delta^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (v^i v^j)$ est simplement $f(v)$ où f est une fonction analytique. Le système (E_{inc}) s'écrit alors : $\partial_t v + v.\nabla v = f(v)$ et l'action répétée du champ $\partial_t + v.\nabla$ sur cette équation fournit une estimation, de type analytique, de $(\partial_t + v.\nabla)^k v$. En fait, il faudra étudier et estimer précisément la commutation répétée du champ $\partial_t + v.\nabla$ avec l'opérateur de pression.

Ce point de vue permet de retrouver directement l'analyticité des lignes de courant de toute solution $C^r (r > 1)$ de (E_{inc}) sur $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, et d'obtenir une régularité Gevrey pour les lignes de courant d'une solution à tourbillon borné, non nécessairement lipschitzienne.

De plus, afin d'illustrer le fait que le système d'Euler incompressible (E_{inc}) possède un comportement très proche de celui d'une équation linéaire dans le domaine de l'ellipticité microlocale, on montre que le front d'onde analytique d'une solution $C^r (r > 1)$ de (E_{inc}) sur $[0, T] \times \mathbf{R}^d$ est localisé dans la variété caractéristique $\{(t, x, \tau, \xi)/\tau + v(t, x) \cdot \xi = 0\}$.

Plus précisément, on note ψ le flot d'une solution "suffisamment régulière" de (E_{inc}), ce flot étant défini par

$$\partial_t \psi(t, x) = v(t, \psi(t, x)) \ , \ \psi(0, x) = x. \tag{0.2}$$

On étudie alors la régularité en temps du flot ψ dans deux situations "modèles".

• Dans un premier temps, la dimension d ne joue aucun rôle et on considère des solutions régulières du système d'Euler (voir par exemple [10], [11]). Plus exactement, soit $v_0 \in C^r \cap L^q$ une condition initiale, avec $r > 1$ et $1 < q < +\infty$. On sait (voir par exemple [2]) qu'il existe un temps T^*, maximal, et une unique solution v de (E_{inc}) appartenant à $L^\infty_{\text{loc}}([0, T^*[, C^r) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}([0, T^*[, L^q)$.

Pour une telle solution, on a le résultat d'analyticité des lignes de courant.

THÉORÈME A. — *Soit* $v_0 \in C^r \cap L^q$ *avec* $r > 1$ *et* $1 < q < +\infty$. *Si* v *est la solution* $L^\infty_{\rm loc}([0,T^*[, C^r) \cap \mathrm{Lip}_{\rm loc}([0,T^*[, L^q)$ *de* $(E_{\rm inc})$, *il existe une constante* C_1 *positive telle que, pour tout* $T < T^*$,

(i) *pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T],C^r)} \leq C_1^k k! \|v\|^{k+1}_{L^\infty([0,T],C^r)}$,

(ii) *le flot* ψ *est analytique sur* $[0,T]$ *à valeurs* $C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$.

• Dans un second temps, on se place en dimension 2 et on considère les solutions non lipschitziennes du système d'Euler introduites par V. Yudovich (voir [13]). On rappelle pour cela les notions suivantes.

DÉFINITION 0.1. — *On appelle tourbillon du champ de vecteurs* $v = (v^1, v^2)$ *la quantité* $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$.

DÉFINITION 0.2. — *On appelle champ de vecteurs tourbillonnaire stable, et on note* σ, *tout champ de vecteurs de la forme*

$$\sigma = \left(-x^2 \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho) d\rho \ , x^1 \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho) d\rho\right)$$

où $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}\setminus 0)$ *et* $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

Ce champ σ est alors une solution stationnaire régulière de $(E_{\rm inc})$ et $\nabla\sigma \in \bigcap\limits_s H^s$.

Si $v_0 \in \sigma + L^2$ tel que $\omega_0 \in L^\infty \cap L^q (q < +\infty)$, on sait (voir [3] ou [13]) qu'il existe une unique solution v de $(E_{\rm inc})$ appartenant à $L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}, \sigma + L^2)$ telle que $\omega \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}, L^q)$. De plus $v \in L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}, C^1_*)$ et il existe un flot ψ et une constante α positive tels que pour tout $T > 0$, $\psi \in \mathrm{Lip}([0,T], C^{\exp(-\alpha T)}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$.

Pour une telle solution, on obtient une régularité Gevrey 3 des lignes de courant.

THÉORÈME B. — *Soit* $v_0 \in \sigma + L^2$ *tel que* $\omega_0 \in L^\infty \cap L^q (q < +\infty)$. *Si* v *est la solution de* $(E_{\rm inc})$ *appartenant à* $L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}\ , \sigma + L^2) \cap L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}, C^1_*)$, *il existe une constante positive* C_1 *telle que, pour tout* $T > 0$,

(i) *pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T],C^{1-\varepsilon})} \leq \left(\frac{C_1}{\varepsilon^2}\right)^{k+1} (k!)^3 \|v\|^{k+1}_{L^\infty([0,T],C^1_*)},$$

(ii) *le flot* ψ *est Gevrey 3 sur* $[0,T]$ *à valeurs* $C^{(1-\varepsilon)\exp(-\alpha T)}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$.

En conclusion, on déduit des théorèmes A et B le

THÉORÈME C. — *Soit v solution $L^\infty([0,T],C^r)$ avec $r>1$(resp : $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},C^1_*)$) de ($E_{\mathrm{inc}}$). Alors le front d'onde analytique (resp : Gevrey 3) des composantes de v est inclus dans la variété caractéristique $\{(t,x,\tau,\xi)/\tau+v(t,x)\cdot\xi=0\}$.*

Notations et rappels

• Si r est un réel positif non entier, on désigne par C^r l'espace des fonctions höldériennes d'ordre r et par $\|.\|_r$ la norme naturelle dans cet espace.

• On désigne par C^1_* la classe de Zygmund, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions sur $\mathbf{R}^d$, bornées, telles qu'il existe une constante C telle que, pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$, $|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|\le C|y|$. On notera $\|\cdot\|_1$ la norme naturelle dans cet espace. De plus (voir [4] chap.II), il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon\in]0,\frac{1}{2}]$, $\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\varepsilon}}\le\dfrac{C}{\varepsilon}\|u\|_1$.

• On note $\|.\|_{T,r}$ la norme dans l'espace $L^\infty([0,T],C^r)$.

• On utilise $\dfrac{D}{Dt}=\partial_t+v.\nabla=\partial_t+\sum\limits_{i=1}^{d}v^i\partial_i$.

• Si $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbf{N}^d$ et $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbf{R}^d$, on note

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\times\cdots\times x_d^{\alpha_d}\quad\text{et}\quad\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_d^{\alpha_d}.$$

• On note $F_d(z)=c_d|z|^{-d+2}$(resp : $F_2(z)=c_2\log|z|$), la solution fondamentale du laplacien en dimension $d>2$(resp : $d=2$).

• Soit Φ une partition dyadique de l'unité, i.e. une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^d\setminus 0)$ telle que $\chi=1-\sum\limits_{q\ge 0}\Phi(2^{-q}.)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. On note $\Delta_{-1}=\chi(D)$ et pour $q\ge 0$, $\Delta_q=\Phi(2^{-q}D)$ et $S_q=\sum\limits_{p\le q-1}\Delta_p$. On a la caractérisation suivante des espaces de Hölder telle qu'on peut la trouver par exemple dans [1] (les estimations sont précisées dans [4] chap. II) :

Caractérisation (0.3).

(i) Si $u\in C^r$ avec r réel positif non entier, il existe une constante C telle que $\|\Delta_q u\|_{L^\infty}\le C\|u\|_r 2^{-qr}$.

(ii) Réciproquement, soit $(u_q)_{q\ge -1}$ une suite de fonctions telle que le support de $\widehat{u_q}$ soit inclus dans la boule λB_q où $\lambda>1$ et $B_q=\{\xi\in\mathbf{R}^d/|\xi|\le 2^q\}$. On suppose que $\|u_q\|_{L^\infty}\le C2^{-qr}$ pour un certain r réel positif non entier. Alors $u = \sum_{q\geq -1} u_q$ appartient à C^r et il existe une constante K indépendante de r et λ telle que $\|u\|_r \leq K\left(\frac{1}{r-[r]} + \frac{1}{[r]+1-r}\right) C\lambda^r$.

(iii) Ceci est encore vrai si r vaut 1 et si on remplace C^r par C^1_*. Alors il existe une constante K telle que $\|u\|_1 \leq KC\lambda$.

(iv) Plus généralement, si r est un réel, on note encore C^r l'espace des distributions tempérées qui vérifient $\sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty$. Munis de la norme $\sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$, ces espaces constituent une chaîne décroissante d'espaces de Banach, l'inclusion étant continue.

1. Démonstration du théorème A.

On considère ici la solution v appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,C^r) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,L^q)$ du système d'Euler incompressible (E_{inc}) dont la condition initiale est $v_0 \in C^r \cap L^q$ avec $r > 1$ et $1 < q < +\infty$.

Il s'agit dans un premier temps d'exprimer convenablement le gradient de la pression en fonction de v, de manière à ne faire intervenir aucune troncature dans cette expression. Ceci nous permettra de définir les opérateurs qui décrivent la commutation des itérés du champ de transport $\frac{D}{Dt}$ avec l'opérateur de pression sans l'intervention intempestive de troncatures (voir définition 1.3). Pour cela, on dispose du lemme suivant où le temps, fixé, n'apparaît pas :

LEMME 1.1. — *Soit $u \in C^\sigma \cap L^q(\sigma > \frac{1}{2}$ et $q < +\infty)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Alors l'équation*

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\partial_j(u^i u^j) \tag{1.1}$$

admet une solution $p(u,u)$ bornée, unique à constante près. De plus,

$$-\nabla p(u,u)(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \int (\partial_i\partial_j\nabla F_d)(x-z)(u^i(x)-u^i(z))(u^j(x)-u^j(z))dz. \tag{1.2}$$

Preuve. — On va tout d'abord obtenir l'expression (1.2) pour des champs u très réguliers. A cet effet, on désigne par ρ une fonction radiale, positive, de classe $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, valant 1 près de 0 et telle que $\|\rho\|_{L^1} = 1$. On note

$$u_n = \rho_n * u$$

où $\rho_n = n^d \rho(n.)$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Il est alors clair que

$$\begin{aligned} &\|u_n\|_\sigma \leq \|u\|_\sigma \ , \quad \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_s = 0 \quad \text{pour tout} \quad s < \sigma, \\ &\|u_n\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^q} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^q} = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La fonction $p(u_n, u_n)$, définie par

$$\begin{aligned} p(u_n, u_n)(x) = &- \sum_{i,j} \int (\rho F_d)(x-z) \partial_i \partial_j (u_n^i u_n^j)(z) dz \\ &- \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j ((1-\rho) F_d))(x-z)(u_n^i u_n^j)(z) dz \end{aligned}$$

est une solution de

$$-\Delta p = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u_n^i u_n^j).$$

On remarque que

$$\sum_{i,j} \partial_{z_i} \partial_{z_j} \left[(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z)) \right] = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u_n^i u_n^j)(z)$$

car la divergence de u est nulle. On est maintenant en mesure d'utiliser le fait que u_n appartient à $C^\sigma (\sigma > \frac{1}{2})$ pour faire converger les intégrales qui suivent. En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} p(u_n, u_n)(x) = &- \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j (\rho F_d))\,(x-z)(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z)) dz \\ &- \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j ((1-\rho) F_d))(x-z)(u_n^i u_n^j)(z) dz. \end{aligned}$$

On déduit facilement de (1.3) que $p(u_n, u_n)$ converge uniformément vers $p(u, u)$. D'autre part, en dérivant la première expression de $p(u_n, u_n)$, on a

$$
\begin{aligned}
&- \nabla p(u_n, u_n)(x) \\
&\quad = \sum_{i,j} \int \nabla(\rho F_d)(x-z)\partial_{z_i}\partial_{z_j} \left[(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z))\right] dz \\
&\qquad + \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z)(u_n^i u_n^j)(z) dz \\
&\quad = \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla(\rho F_d))(x-z)(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z)) dz \\
&\qquad + \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z)(u_n^i u_n^j)(z) dz \\
&\quad = I_1(x) + I_2(x).
\end{aligned}
$$

Pour ce qui concerne le second terme, on a

$$
\begin{aligned}
I_2(x) = &\sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z)(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z)) dz \\
&+ 2\sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z) u_n^i(z) u_n^j(x) dz \\
&- \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(z) dz \times (u_n^i u_n^j)(x).
\end{aligned}
$$

Le troisième terme est nul. Le deuxième l'est aussi pour la raison suivante : si Φ est une fonction $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \int \Phi(x)(\partial_i\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z) u_n^i(z) u_n^j(x) dz dx \\
&\qquad = \sum_{j} \int \Phi(x)(\partial_j \nabla((1-\rho)F_d))(x-z) \operatorname{div} u_n(z) u_n^j(x) dz dx \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
-\nabla p(u_n, u_n)(x) = \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla F_d)(x-z)(u_n^i(x) - u_n^i(z))(u_n^j(x) - u_n^j(z)) dz.
$$

Toujours à l'aide de (1.3), on voit que $-\nabla p(u_n, u_n)$ converge uniformément vers $-\nabla p(u, u)$. Et on conclut grâce à la remarque suivante :

Remarque 1.2. — Si V est borné et tel que son laplacien est nul, alors V est constant. □

Afin de décrire la commutation de l'opérateur d'intégrale singulière

$$-\nabla p(v,v)(t,x) = \sum_{i,j} \int (\partial_i\partial_j \nabla F_d)(x-z)(v^i(t,x)-v^i(t,z))(v^j(t,x)-v^j(t,z))dz$$

avec les itérés du champ $\frac{D}{Dt}(=\partial_t + v\cdot\nabla)$, on définit les opérateurs multilinéaires suivants :

DÉFINITION 1.3. — *Soit $K_p \in C^\infty(\mathbf{R}^d\backslash 0)$ où $p\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ tel que*

$$(1.4)_p \qquad |\partial^\alpha K_p(z)| \le A_{p+|\alpha|}|z|^{-d+1-p-|\alpha|}$$

où (A_j) est une suite croissante de réels positifs. Soit $(u_i)_{1\le i\le p}$ une suite de fonctions de classe $C^{1-\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i>0$ tels que $\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i<1$. On définit alors l'opérateur :

$$Op(K_p,u_1,\cdots,u_p)(x) = \int K_p(x-z)\prod_{i=1}^{p}(u_i(x)-u_i(z))dz.$$

On remarque que l'opérateur de pression s'écrit comme somme de tels opérateurs :

$$-\nabla p(v,v) = \sum_{i,j=1}^{d} Op(\partial_i\partial_j\nabla F_d, v^i, v^j).$$

Il s'agit d'étudier tout d'abord l'opérance de ces opérateurs sur les classes de Hölder. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4. — *On considère les noyaux de la définition 1.3 et on suppose en outre que*

$$(1.5)_p \qquad \begin{cases} K_p \text{ est homogène de degré } -d+1-p \text{ et} \\ \displaystyle\int_{S^{d-1}} K_p(z)z^\beta d\sigma(z) = 0 \text{ pour } |\beta|\le p-1. \end{cases}$$

Si $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une suite de fonctions $C^r(r>1)$ et si $\varepsilon>0$, il existe une constante $C_2>1$ telle que

$(1.6)_p$

$$||Op(K_p,u_1,.,u_p)||_r \leq C_2^p A_{p+1}\sum_{j=1}^{p}\sum_{\ell\neq j}\left(\prod_{i\notin\{j,\ell\}}||u_i||_{Lip}\right)||u_\ell||_{1+\varepsilon}||u_j||_r.$$

Preuve. — Soit $\varphi_{-1}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ radiale, $\varphi_{-1}(x)=1$ pour $|x|\geq 1$, $\varphi_{-1}(x)=0$ pour $|x|\leq\frac{1}{2}$. On pose $\varphi(x)=\varphi_{-1}(2x)-\varphi_{-1}(x)$: la fonction φ est supportée dans la couronne $\frac{1}{4}\leq|x|\leq 1$ et, pour tout x, si $\varphi_n(x)=\varphi(2^n x)$,

$$1=\sum_{n\geq -1}\varphi_n(x).$$

On décompose alors l'opérateur Op de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&Op(K_p,u_1,\cdots,u_p)(x)\\&\quad=\sum_{n\geq-1}\sum_{q_1\geq-1}\cdots\sum_{q_p\geq-1}\int(\varphi_nK_p)(x-z)\prod_{i=1}^{p}(\Delta_{q_i}u_i(x)-\Delta_{q_i}u_i(z))dz.\end{aligned}$$

Si on pose

$$\prod_q^j(x,z)=\prod_{i<j}(S_qu_i(x)-S_qu_i(z))\prod_{i>j}(S_{q+1}u_i(x)-S_{q+1}u_i(z)),$$

on a

$$\begin{aligned}Op(x)&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{n\geq-1}\sum_{q\geq-1}\int(\varphi_nK_p)(x-z)\prod_q^j(x,z)(\Delta_qu_j(x)-\Delta_qu_j(z))dz\\&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{n,q}W_{n,q}^j(x)\\&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{q}(W_q^{j,1}(x)+W_q^{j,2}(x)+W_q^{j,3}(x)),\end{aligned}$$

avec

$$W_q^{j,1} = \sum_{n>q} W_{n,q}^j,$$

$$W_q^{j,2} = \Delta_q u_j(x) \int \varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)dz,$$

$$W_q^{j,3} = -\int \varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)\Delta_q u_j(z)dz.$$

Ces trois termes ont leur spectre localisé dans la boule $(p+1)B_q$ où $B_q = \{\xi \in \mathbf{R}^d/|\xi| \leq 2^q\}$. Nous allons le constater pour $W_q^{j,1}$, le cas des deux autres étant plus aisé. On rappelle que K_p est homogène et d'intégrale nulle sur la sphère S^{d-1} et que φ_{-1} est radiale. On note

$$W_q^{j,1}(N) = \sum_{n=q+1}^{N} W_{n,q}^j$$

$$= \sum_{\substack{I\cup J=\{1,\cdots,p\}\\ I\neq\varnothing}} (-1)^{\mathrm{card} I}\left\{\Big(\varphi_{-1}(2^{N+1}\cdot)-\varphi_{-1}(2^{q+1}\cdot)\Big)K_p * \prod_{k\in I} w_k\right\}\prod_{k\in J} w_k,$$

où les w_k désignent $S_q u_i$, $S_{q+1}u_i$ ou $\Delta_q u_j$ et ont donc leur spectre dans la boule B_q. Les spectres des termes $W_q^{j,1}(N)$ étant tous inclus dans la boule $(p+1)B_q$, il en est de même pour celui de $W_q^{j,1}$ en passant à la limite en N. On utilisera donc la caractérisation (0.3) des espaces de Hölder pour étudier la régularité de Op. En vue d'estimer la norme L^∞ de $W_q^{j,1}, W_q^{j,2}$ et $W_q^{j,3}$, on démontre le lemme technique suivant.

LEMME 1.5. — *Soit $k \in \mathbf{N}$. Il existe d fonctions $\varphi_{i,k} \in C_0^\infty$ supportées dans la couronne $C_0 \supset$ supp Φ $(i=1,\cdots,d)$ telles que, pour tout $q \in \mathbf{N}$,*
(1.7)

$$\Delta_q u = 2^{-qk}\sum_{i=1}^{d} D_i^k \Delta_q^{i,k} u\,,\ \Delta_q^{i,k}u(x) = 2^{qd}\int \mathcal{F}^{-1}(\varphi_{i,k})(2^q(x-z))u(z)dz;$$

en particulier,

$$|\Delta_q u(x) - \Delta_q u(y)| \leq C_\varepsilon 2^{-qk}|x-y|^\varepsilon ||u||_{k+\varepsilon} \quad \text{pour } 0 \leq \varepsilon < 1. \tag{1.8}$$

Preuve. — On définit une partition de l'unité (χ_i) subordonnée au recouvrement de la sphère S^{d-1} par les ouverts $\{\xi \in \mathbf{R}^d/\xi_i \neq 0\}$. On prolonge les χ_i sur $\mathbf{R}^d\backslash 0$ en posant $\tilde{\chi}_i(\xi) = \chi_i(\xi|\xi|^{-1})$. On a alors

$$\begin{aligned}2^{qk}\widehat{\Delta_q u}(\xi) &= \sum_{i=1}^{d} 2^{qk}\Phi(2^{-q}\xi)\tilde{\chi}_i(\xi)\hat{u}(\xi)\\ &= \sum_{i=1}^{d} \varphi_{i,k}(2^{-q}\xi)\widehat{D_i^k u}(\xi)\end{aligned}$$

où $\varphi_{i,k}(\xi) = \dfrac{\tilde{\chi}_i(\xi)}{\xi_i^k}\Phi(\xi)$. On en déduit immédiatement (1.7). On écrit alors la différence

$$\begin{aligned}&D_i^k\Delta_q^{i,k}u(x) - D_i^k\Delta_q^{i,k}u(y)\\ &\qquad = \int \mathcal{F}^{-1}(\varphi_{i,k})(z)\left(D_i^k u(x-2^{-q}z) - D_i^k u(y-2^{-q}z)\right)dz\end{aligned}$$

et on en déduit (1.8).

$\square$

Dans ce qui suit, la lettre C désigne indifféremment une constante indépendante de p et on utilisera systématiquement les estimations évidentes :

$$\int \varphi(\lambda\rho)\rho^{-\varepsilon}d\rho \leq C\lambda^{\varepsilon-1} \quad \text{et} \quad \int \varphi_{-1}(\lambda\rho)\rho^{-1-\varepsilon}d\rho \leq \frac{C}{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq 1$.

En utilisant l'estimation $(1.4)_p$ sur le noyau K_p et (1.8), et en rappelant (voir [1]) que $|S_q u(x) - S_q u(y)| \leq C|x-y|\,||u||_{Lip}$, on a

$$\begin{aligned}||W_{n,q}^j||_{L^\infty} &\leq CA_p\int \varphi(2^n\rho)\rho^{r-[r]-1}d\rho\Big(\prod_{i\neq j}||u_i||_{Lip}\Big)2^{-q[r]}||u_j||_r\\ &\leq CA_p 2^{-n(r-[r])}2^{-q[r]}\Big(\prod_{i\neq j}||u_i||_{Lip}\Big)||u_j||_r.\end{aligned}$$

On somme pour $n > q$ et on obtient

$$||W_q^{j,1}||_{L^\infty} \leq CA_p 2^{-qr}\Big(\prod_{i\neq j}||u_i||_{Lip}\Big)||u_j||_r. \tag{1.9}$$

Pour estimer la norme L^∞ de $W_q^{j,3}$, on utilise $(1.4)_p$ et (1.7). Grâce à une intégration par parties, il vient

$$W_q^{j,3}(x) = 2^{-q}\sum_{i=1}^{d}\int D_{z_i}\left(\varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)\right)\Delta_q^{i,1}u_j(z)dz.$$

D'une part,

$$\Big| \int (D_i\varphi_{-1})(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)dz \Big| \le CA_p \prod_{i\neq j} ||u_i||_{Lip}.$$

D'autre part,

$$\Big| \int \varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))D_i\Big(K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)\Big)dz \Big| \le 2^{(q+1)}CpA_{p+1} \prod_{i\neq j} ||u_i||_{Lip}.$$

D'après la caractérisation (0.3), on a $\|\Delta_q^{i,1}u_j\|_{L^\infty} \le C2^{-qr}\|u_j\|_r$. Au total, on a donc

$$||W_q^{j,3}||_{L^\infty} \le CpA_{p+1}\Big(\prod_{i\neq j}||u_i||_{Lip}\Big)||u_j||_r 2^{-qr}. \tag{1.10}$$

L'estimation de la norme L^∞ de $W_q^{j,2}$ va nécessiter l'emploi de la propriété d'annulation $(1.5)_p$. On note $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de l'ensemble A, et on a

$$\begin{aligned}
W_q^{j,2}(x) &= \Delta_q u_j(x)\int \varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_q^j(x,z)dz \\
&- \Delta_q u_j(x)\int \varphi_{-1}(2^{q+1}z)K_p(z)\Big[\prod_{i<j}(z.\nabla S_q u_i(x))\Big]\Big[\prod_{i>j}(z.\nabla S_{q+1}u_i(x))\Big]dz \\
&= \Delta_q u_j(x)\Big\{\sum_{k<j}\int\Big[\varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_{i<k}(S_qu_i(x)-S_qu_i(z)) \\
&\quad\times (S_qu_k(x)-S_qu_k(z)-(x-z).\nabla S_qu_k(x))\mathbf{1}_{[2^{-q-2},1]}(x-z) \\
&\quad\times \prod_{k<i<j}((x-z).\nabla S_qu_i(x))\prod_{i>j}((x-z).\nabla S_{q+1}u_i(x))\Big]dz \\
&+\sum_{k>j}\int\Big[\varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\prod_{i<j}(S_qu_i(x)-S_qu_i(z)) \\
&\quad\times (S_{q+1}u_k(x)-S_{q+1}u_k(z)-(x-z).\nabla S_{q+1}u_k(x))\mathbf{1}_{[2^{-q-2},1]}(x-z) \\
&\quad\times \prod_{j<i<k}(S_{q+1}u_i(x)-S_{q+1}u_i(z))\prod_{i>k}((x-z).\nabla S_{q+1}u_i(x))\Big]dz \\
&+\int\varphi_{-1}(2^{q+1}(x-z))K_p(x-z)\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x-z)\prod_q^j(x,z)dz\Big\}.
\end{aligned}$$

On a, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$(1.11) \qquad |S_q u(x) - S_q u(z) - (x-z)\cdot \nabla S_q u(x)| \le C_\varepsilon |x-z|^{1+\varepsilon} ||u||_{1+\varepsilon}.$$

En effet, il suffit d'écrire l'inégalité de Taylor :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=-1}^{N-1} (\Delta_p u(x) - \Delta_p u(z) - (x-z)\cdot \nabla \Delta_p u(x))\right| &\le C|x-z|^2 \sum_{p=-1}^{N-1} ||\partial^2 \Delta_p u||_{L^\infty} \\ &\le C|x-z|^2 2^{N(1-\varepsilon)} ||u||_{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'autre part, on majore $\sum\limits_{p=N}^{q-1} (\Delta_p u(x) - \Delta_p u(z))$ et $(x-z)\cdot \sum\limits_{p=N}^{q-1} \nabla \Delta_p u(x)$ par $C|x-z|2^{-N\varepsilon}||u||_{1+\varepsilon}$. Il suffit alors de choisir $N = -\log_2|x-z|$ pour en déduire (1.11). Il résulte alors de (1.11) que

$$\begin{aligned}||W_q^{j,2}||_{L^\infty} \le C^p A_p ||\Delta_q u_j||_{L^\infty} \Big\{ \Big(\int_{2^{-q-2}}^{1} \varphi_{-1}(\rho)\rho^{\varepsilon-1} d\rho \Big) \\ \times \sum_{k\ne j} \Big(\prod_{i\notin\{j,k\}} ||u_i||_{Lip} \Big) ||u_k||_{1+\varepsilon} + \prod_{i\ne j} ||u_i||_{Lip} \Big\}.\end{aligned}$$

D'où,

$$(1.12) \qquad ||W_q^{j,2}||_{L^\infty} \le C^p A_p 2^{-qr} \sum_{k\ne j} \Big(\prod_{i\notin\{j,k\}} ||u_i||_{Lip} \Big) ||u_k||_{1+\varepsilon} ||u_j||_r.$$

On déduit donc de (1.9), (1.10) et (1.12), et de la localisation des spectres des différents termes dans la boule $(p+1)B_q$ que

$$\begin{aligned}&||Op(K_p, u_1, \cdots, u_p)||_r \\ &\qquad \le C^p A_{p+1} (p+1)^r \sum_{j=1}^{p} \sum_{\ell\ne j} \Big(\prod_{i\notin\{j,\ell\}} ||u_i||_{Lip} \Big) ||u_\ell||_{1+\varepsilon} ||u_j||_r.\end{aligned}$$

Et l'estimation $(1.6)_p$ est établie pour une constante $C_2 > 1$ ne dépendant que de r, ε, d et des partitions utilisées.

□

Il est maintenant temps d'appliquer le champ $\frac{D}{Dt}(= \partial_t + v.\nabla)$ à l'équation $\frac{D}{Dt}v = -\nabla p(v,v)$. On régularise tout d'abord la donnée initiale v_0 en définissant

$$v_{0,n} = \rho_n * v_0.$$

Soit (v_n) la suite associée de solutions $C_b^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d) \cap \mathrm{Lip}([0,T], L^q)$ de (E_{inc}), où T est un temps commun d'existence. On sait qu'alors, pour $s < r$,

$$\lim_{n \to +\infty} ||v_n - v||_{T,s} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} ||v_n||_{T,r} = ||v||_{T,r},$$

où $||\cdot||_{T,r}$ désigne $||\cdot||_{L^\infty([0,T],C^r)}$.

On va montrer l'existence d'une constante C_3 telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en notant $\dfrac{Dn}{Dt} = \partial_t + v_n.\nabla$, on ait l'estimation suivante pour tout $j \in \mathbf{N}$:

Estimation

$$(1.13)_j \qquad \left\| \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^j v_n \right\|_{T,r} \leq ||v_n||_{T,r} (C_3 ||v_n||_{T,r})^j \frac{j!}{(j+1)^2}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur j, l'estimation $(1.13)_0$ étant évidente. On suppose que $(1.13)_j$ est vérifiée jusqu'au rang k. On dérive alors l'équation $\dfrac{Dn}{Dt} v_n = -\nabla p(v_n, v_n)$ et on a

$$\left(\frac{Dn}{Dt} \right)^{k+1} v_n = - \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^k \nabla p(v_n, v_n).$$

La commutation de l'opérateur de pression ∇p et de $\left(\dfrac{Dn}{Dt} \right)^k$ est bien décrite par les opérateurs Op (voir la définition 1.3). En effet, on a le

Lemme 1.6. — *Soit v un champ de vecteurs $C_b^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d)$, à divergence nulle, et une suite $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ de fonctions $C_b^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d)$. Alors,* $(1.14)_p$

$$\begin{aligned}(\partial_t + v.\nabla) Op(K_p, u_1, \cdots, u_p) = &\sum_{i=1}^p Op(K_p, u_1, \cdots, (\partial_t + v.\nabla) u_i, \cdots, u_p) \\ &+ \sum_{j=1}^d Op(\partial_j K_p, u_1, \cdots, u_p, v^j).\end{aligned}$$

Preuve. — On définit l'opérateur $Op_m(x) = \int K_p^m(x-z) \times \prod_{i=1}^p (u_i(x) - u_i(z)) dz$ où $K_p^m(x) = (1 - \rho(mx)) K_p(x)$. On regarde alors

$$v.\nabla Op_m(x) = \sum_{j=1}^{d} \int (\partial_j K_p^m)(x-z) \prod_{i=1}^{p} (u_i(x) - u_i(z))(v^j(x) - v^j(z))dz$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} \int (\partial_j K_p^m)(x-z) \prod_{i=1}^{p} (u_i(x) - u_i(z)) v^j(z) dz$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{p} \int K_p^m(x-z) \prod_{i\neq k} (u_i(x) - u_i(z))((v^j \partial_j u_k)(x) - (v^j \partial_j u_k)(z))dz$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{p} \int K_p^m(x-z) \prod_{i\neq k} (u_i(x) - u_i(z))(v^j \partial_j u_k)(z) dz.$$

On intègre le deuxième terme par parties en utilisant l'annulation de la divergence de v. Puis on passe à la limite dans Op_m et $v.\nabla Op_m$. Pour obtenir $(1.14)_p$, il suffit de remarquer que ∂_t passe au travers de l'opérateur Op :

$$\partial_t Op(K_p, u_1, \cdots, u_p) = \sum_{i=1}^{p} Op(K_p, u_1, \cdots, \partial_t u_i, \cdots, u_p).$$

□

On en déduit le lemme suivant :

LEMME 1.7. — *Si on note $\tilde{\mu}_p = (\mu_{-1}, \mu_0, \cdots, \mu_p)$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a*

$(1.15)_k$

$$\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k \nabla p(v_n, v_n) = \sum_{p=0}^{k} \sum_{|\tilde{\mu}_p| = k-p} C^k_{\tilde{\mu}_p}$$
$$\times \sum_{j_{-1}, \cdots, j_p = 1}^{d} Op\left(\partial_{j_{-1}} \cdots \partial_{j_p} \nabla F_d, \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_{-1}} v_n^{j_{-1}}, \cdots, \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_p} v_n^{j_p}\right)$$

avec

$$C^k_{\tilde{\mu}_p} \leq \frac{k!}{p! \tilde{\mu}_p!}.$$

Preuve. — Elle se fait par récurrence sur k, $(1.15)_0$ n'étant autre que l'expression (1.2) de $\nabla p(v, v)$. On suppose que $(1.15)_j$ est vérifiée jusqu'au rang k. On applique $\dfrac{Dn}{Dt}$ à l'expression $(1.15)_k$. Grâce au lemme 1.6, il vient, en notant $e_i = (\delta_{-1i}, \cdots, \delta_{pi})$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker,

$$C^{k+1}_{\tilde{\mu}_p} = \sum_{i=-1}^{p} C^{k}_{\tilde{\mu}_p - e_i} \text{ avec la convention que } \mu_p \text{ est ôté si } \mu_p < 0.$$

Ainsi, $C^{k+1}_{\tilde{\mu}_p} \leq \dfrac{k!}{p!\tilde{\mu}_p!}\left(\sum\limits_{i=-1}^{p} \mu_i\right) + \dfrac{k!}{(p-1)!\tilde{\mu}_p!}$ et on conclut en remarquant que $\sum\limits_{i=-1}^{p} \mu_i = k + 1 - p$.

□

Vu le lemme 1.7, il s'agit de montrer que les dérivées successives de ∇F_d vérifient les hypothèses $(1.4)_p$ et $(1.5)_p$.

Lemme 1.8. — *Soit $K_p = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_p} \nabla F_d$. Le noyau K_p vérifie*

(i) *K_p est homogène de degré $-d + 1 - p$ et $\int_{S^{d-1}} K_p(z) z^\beta d\sigma(z) = 0$ pour $|\beta| \leq p$,*

(ii) *il existe une constante $C_4 > 1$ telle que*

$$|\partial^\alpha K_p(z)| \leq C_4^{p+|\alpha|}(p + |\alpha|)!|z|^{-d+1-p-|\alpha|}.$$

Preuve. — L'estimation (ii) se montre facilement par récurrence sur p. Pour établir la propriété d'annulation (i), on remarque, toujours par récurrence sur p, que

$$\partial_{j_0} \cdots \partial_{j_p} F_d(x) = Q_{j_0 \cdots j_p}(x)|x|^{-d-2p} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^d \backslash 0,$$

où $Q_{j_0 \cdots j_p}(x)$ est un polynôme harmonique homogène de degré $p + 1$. On en déduit que $\int_{S^{d-1}} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_p} \nabla F_d(z) d\sigma(z) = 0$ grâce à la propriété de moyenne. On raisonne alors par récurrence sur n pour montrer que $\int_{S^{d-1}} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_p} \nabla F_d(z) z^{i_1} \cdots z^{i_n} d\sigma(z)$ est nul pour $n \leq p$. Cette propriété étant vraie au rang 0, on la suppose vérifiée jusqu'au rang $m < p$. Une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} K_p(z) z^{i_1} \cdots z^{i_{m+1}} d\sigma(z) = & R^{-1} \int_{|z|=R} K_p(z) z^{i_1} \cdots z^{i_{m+1}} d\sigma_R(z) \\ & - \int_{1 \leq |z| \leq R} \partial_{i_{m+1}}(z^{i_1} \cdots z^{i_m}) K_p(z) dz \\ & - \int_{1 \leq |z| \leq R} z^{i_1} \cdots z^{i_m} \partial_{i_{m+1}} K_p(z) dz.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont nuls par hypothèse et on fait tendre R vers $+\infty$ pour conclure.

$\square$

Les lemmes 1.7 et 1.8 joints à la proposition 1.4 permettent de conclure que l'estimation $(1.13)_{k+1}$ est vérifiée. En effet, grâce à l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k \nabla p(v_n, v_n)\right\|_{T,r} &\leq \sum_{p=0}^{k} \sum_{|\tilde{\mu}_p|=k-p} \frac{k!}{p!\tilde{\mu}_p!}(C_2C_4)^{p+1}(p+1)! \\ &\quad \times \sum_{j_{-1},\cdots,j_p=1}^{d} \left(\prod_{i=-1}^{p} \left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_i} v_n^{j_i}\right\|_{T,r}\right) \\ &\leq \sum_{p=0}^{k} \sum_{|\tilde{\mu}_p|=k-p} \frac{k!}{\tilde{\mu}_p!}(C_2C_4)^{p+1}(p+1) \\ &\quad \times d^{p+2} \prod_{j=-1}^{p} \left(||v_n||_{T,r}(C_3||v_n||_{T,r})^{\mu_j} \frac{\mu_j!}{(\mu_j+1)^2}\right).\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{|\tilde{\mu}_p|=k-p} \left(\prod_{j=-1}^{p} \frac{1}{(\mu_j+1)^2}\right) \leq \frac{20^{p+2}}{(k-p+1)^2}. \tag{1.16}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k \nabla p(v_n, v_n)\right\|_{T,r} &\leq \frac{(20d)^2C_2C_4}{C_3} ||v_n||_{T,r}(C_3||v_n||_{T,r})^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+2)^2} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{20dC_2C_4}{C_3}\right)^p \left(\frac{k+2}{k+1-p}\right)^2.\end{aligned}$$

Et finalement,

$$\left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k+1} v_n\right\|_{T,r} \leq ||v_n||_{T,r}(C_3||v_n||_{T,r})^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+2)^2}$$

en prenant C_3 assez grand, indépendant de k.

Fin de la récurrence.

Fin de la démonstration du théorème A

On montre simultanément, par récurrence sur j, que

(a) $\left(\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^j v_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty([0,T], C^{r-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^j v_n = \left(\frac{D}{Dt}\right)^j v$ dans $\mathcal{D}'([0,T]\times \mathbf{R}^d)$.

Ceci est évidemment vrai au rang $j=0$. On suppose que cela est vrai jusqu'au rang k et, grâce à la multilinéarité de Op, au lemme 1.7 et à la proposition 1.4, on majore

$$\left\| \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k+1} v_n - \left(\frac{Dm}{Dt}\right)^{k+1} v_m \right\|_{T,r-\varepsilon}$$

par une somme de termes de la forme

$$\prod_{i=-1}^{\ell-1} \left\| \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_i} v_n \right\|_{T,r-\varepsilon} \times \prod_{i=\ell+1}^{p} \left\| \left(\frac{Dm}{Dt}\right)^{\mu_i} v_m \right\|_{T,r-\varepsilon} \times \left\| \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_\ell} v_n - \left(\frac{Dm}{Dt}\right)^{\mu_\ell} v_m \right\|_{T,r-\varepsilon}$$

où $\mu_i \leq k-p \leq k$.

On utilise alors les estimations (1.13) pour conclure que le point (a) est vrai au rang $k+1$.

Le point (b) est alors facile à démontrer.

Enfin, les estimations (1.13) permettent de conclure la démonstration de la première partie du théorème A.

Quant à la partie (ii) du théorème, elle se montre facilement par récurrence à l'aide de la première partie.

□

2. Démonstration du théorème B.

On désigne ici par v la solution appartenant à $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \sigma + L^2) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, C^1_*)$ du système d'Euler incompressible (E_{inc}) dont la condition initiale est $v_0 \in \sigma + L^2$ avec $\omega_0 \in L^\infty \cap L^q (q < +\infty)$. En particulier, v appartient à $\bigcap_{\varepsilon>0} C^{1-\varepsilon}([0,T] \times \mathbf{R}^2)$ pour tout $T > 0$.

On régularise tout d'abord la condition initiale v_0 en définissant

$$v_{0,n} = \rho_n * v_0.$$

Soit (v_n) la suite associée de solutions $C_b^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^2)$ pour tout $T > 0$. On sait qu'alors (voir [3]), pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} ||v_n - v||_{T,1-\varepsilon} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} ||v_n||_{T,1} = ||v||_{T,1}. \tag{2.1}$$

D'après le lemme 1.1, l'opérateur de pression s'écrit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$-\nabla p(v_n, v_n) = \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j \nabla F_2)(x - z)(v_n^i(x) - v_n^i(z))(v_n^j(x) - v_n^j(z))dz.$$

En suivant les grandes lignes de la première partie, on étudie tout d'abord l'opérance des opérateurs Op (voir la définition 1.3) sur des espaces de Hölder $C^{1-\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$.

PROPOSITION 2.1. — *Avec les notations de la définition 1.3, on considère une suite $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ de fonctions $C^{1-\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = \varepsilon < 1$. Alors, il existe une constante C_5 indépendante de ε et de p telle que*

$(2.2)_p$

$$||Op(K_p, u_1, \cdots, u_p)||_{1-\varepsilon} \leq \left((1-\varepsilon)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_i}\right)\right) C_5 A_p \prod_{i=1}^{p} ||u_i||_{1-\varepsilon_i}\, .$$

Preuve. — Cette fois-ci, on n'utilise pas un découpage de Littlewood - Paley. Dans ce qui suit, la lettre C désigne indifféremment une constante indépendante de p et de ε_i. On estime tout d'abord la norme L^∞ de Op. On a

$$\begin{aligned} Op(K_p, u_1, \cdots, u_p)(x) = &\int_{|z|\leq 1} K_p(z) \prod_{i=1}^{p} (u_i(x) - u_i(x - z))dz \\ &+ \int_{|z|>1} K_p(z) \prod_{i=1}^{p} (u_i(x) - u_i(x - z))dz, \end{aligned}$$

$$\|Op\|_{L^\infty} \leq CA_p \left\{ \left(\int_0^1 \rho^{-\varepsilon} d\rho \right) \prod_{i=1}^p ||u_i||_{1-\varepsilon_i} + \left(\int_1^{+\infty} \rho^{-p} d\rho \right) \prod_{i=1}^p ||u_i||_{L^\infty} \right\}$$
$$\leq CA_p \Big(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{p-1} \Big) \prod_{i=1}^p ||u_i||_{1-\varepsilon_i}.$$

Lorsque $|x-y|<1$, on a

$$Op(x) - Op(y) = \int_{|z| \leq |x-y|} K_p(z) \prod_{i=1}^p (u_i(x) - u_i(x-z)) dz$$

$$- \int_{|z| \leq |x-y|} K_p(z) \prod_{i=1}^p (u_i(y) - u_i(y-z)) dz$$

$$+ \sum_{j=1}^p \int_{|z|>|x-y|} K_p(z) \prod_{i=1}^{j-1} (u_i(y) - u_i(y-z)) \prod_{i=j+1}^p (u_i(x) - u_i(x-z))$$

$$\times (u_j(x) - u_j(y) + u_j(y-z) - u_j(x-z)) dz.$$

On en déduit

$$|Op(x) - Op(y)| \leq 2CA_p \left(\int_0^{|x-y|} \rho^{-\varepsilon} d\rho \right) \prod_{i=1}^p ||u_i||_{1-\varepsilon_i}$$

$$+ \sum_{j=1}^p A_p (2||u_j||_{1-\varepsilon_j} |x-y|^{1-\varepsilon_j}) \left(\int_{|x-y|}^{+\infty} \rho^{-1-(\varepsilon-\varepsilon_j)} d\rho \right) \prod_{i \neq j} ||u_i||_{1-\varepsilon_i}$$

$$\leq CA_p \prod_{i=1}^p ||u_i||_{1-\varepsilon_i} \Big(\frac{1}{1-\varepsilon} |x-y|^{1-\varepsilon} + \sum_{j=1}^p |x-y|^{1-\varepsilon_j} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_j} |x-y|^{\varepsilon_j - \varepsilon} \Big).$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

□

On montre alors l'existence d'une constante C_6 telle qu'on ait, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $j \in \mathbf{N}$, l'estimation suivante :

Estimation. — Pour tout $\varepsilon < \dfrac{1}{2(j+1)}$, pour tout $T > 0$,

$$(2.3)_j \qquad \left\| \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^j v_n \right\|_{T,1-\varepsilon(j+1)} \leq ||v_n||_{T,1-\varepsilon} (C_6 \varepsilon^{-1} ||v_n||_{T,1-\varepsilon})^j \frac{j!}{(j+1)^2}.$$

On raisonne bien sûr par récurrence sur j, l'estimation $(2.3)_0$ étant évidente. On suppose $(2.3)_j$ vérifiée jusqu'au rang k. On rappelle que

$$\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k+1} v_n = -\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k} \nabla p(v_n, v_n).$$

Le lemme 1.7 et la proposition 2.1 fournissent l'estimation suivante :

pour $\varepsilon < \dfrac{1}{2(k+2)}$ et $T > 0$,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k} \nabla p(v_n, v_n)\right\|_{T,1-\varepsilon(k+2)} &\leq \sum_{p=0}^{k} \sum_{|\tilde{\mu}_p|=k-p} \frac{k!}{p!\tilde{\mu}_p!}\varepsilon^{-1}4^{p+1}C_5C_4^{p+1}(p+1)! \\ &\quad \times \sum_{j_{-1},\cdots,j_p=1}^{d} \left(\prod_{i=-1}^{p} \left\|\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_i} v_n^{j_i}\right\|_{T,1-\varepsilon(\mu_i+1)}\right) \\ &\leq \frac{4(20d)^2C_5C_4}{C_6}||v_n||_{T,1-\varepsilon}\left(\frac{C_6}{\varepsilon}||v_n||_{T,1-\varepsilon}\right)^{k+1} \\ &\quad \times \frac{(k+1)!}{(k+2)^2}\sum_{p=0}^{k}\left(4\frac{20d\varepsilon C_4}{C_6}\right)^p\left(\frac{k+2}{k+1-p}\right)^2,\end{aligned}$$

en utilisant la remarque (1.16) et le fait que

$$(1-\varepsilon(k+2))^{-1} + \sum_{i=-1}^{p} \frac{1}{(k+2)\varepsilon - (\mu_i+1)\varepsilon} \leq 4^{p+1}\varepsilon^{-1}.$$

On en déduit $(2.3)_{k+1}$ en choisissant C_6 assez grand, indépendant de k.

Fin de la récurrence.

Fin de la démonstration du théorème B

De la même manière que dans la preuve du théorème A, on montre simultanément, par récurrence sur j, que

(a) $\left(\left(\dfrac{Dn}{Dt}\right)^{j} v_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty([0,T], C^{1-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{j} v_n = \left(\frac{D}{Dt}\right)^{j} v$ dans $\mathcal{D}'([0,T]\times\mathbf{R}^2)$.

Le point (b) s'obtient en utilisant le fait que v_n et v sont à divergence nulle.

Il suffit alors de rappeler que $\|v\|_{T,1-\varepsilon} \leq \dfrac{C}{\varepsilon}\|v\|_{T,1}$ et il existe donc une constante C_7 telle que, pour tout $\varepsilon < \dfrac{1}{2(j+1)}$, pour tout $T > 0$,

$$(2.4)_j \qquad \left\| \left(\frac{D}{Dt}\right)^j v \right\|_{T,1-\varepsilon(j+1)} \leq \frac{C_7}{\varepsilon}\|v\|_{T,1}(C_7\varepsilon^{-2}\|v\|_{T,1})^j j!\ .$$

On pose enfin $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{j+1}$, ce qui permet de conclure la démonstration de la première partie du théorème B.

Quant à la partie (ii) de ce théorème, en définissant ψ_n comme le flot associé à v_n, on a

$$\partial_t^k \psi_n = \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k-1} v_n(t, \psi_n(t,x)).$$

On conclut grâce à la partie (i) par récurrence et passage à la limite.

$\square$

Remarque. — Il est difficile de savoir si la régularité Gevrey 3 apparaît pour des "raisons techniques" ou si elle est optimale.

3. Front d'onde.

Dans cette troisième partie, on va illustrer les théorèmes A et B en termes de localisation du front d'onde analytique ou Gevrey des composantes de la vitesse v solution de $(E_{\rm inc})$.

On rappelle tout d'abord la définition suivante (voir [9]).

DÉFINITION 3.1. — *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $s \in [1, +\infty[$. On appelle front d'onde Gevrey s (analytique si $s = 1$) de u, noté $WF_s u$, le complémentaire dans $\mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d \backslash 0)$ de l'ensemble des (x_0, ξ_0) tels qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0, un voisinage conique Γ de ξ_0 et une suite bornée (u_N) de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ égale à u dans $\mathcal{U}$ et vérifiant*

$$(3.1) \qquad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C\left(\frac{C(N+1)^s}{|\xi|}\right)^N \text{ pour tout } \xi \in \Gamma \text{ et tout } N \in \mathbf{N}^*.$$

Remarque. — On peut considérer $u_N = \chi_N u$ où (χ_N) est une suite de fonctions $C_0^\infty(K)$ valant 1 sur $\mathcal{U}$ et vérifiant

$$|\partial^{\alpha+\beta}\chi_N| \leq C_\alpha (C_\alpha N)^{|\beta|} \text{ pour tout } \alpha \text{ et } |\beta| \leq N. \tag{3.2}$$

On va démontrer le résultat général suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit $Z = (Z_1, \cdots, Z_d)$ un champ de vecteurs dont les coefficients sont continus, et on note $\mathcal{Z}(x, \partial) = \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\partial_i$. Soit u une fonction L^∞. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *il existe une suite (Z_n) de champs de vecteurs C^∞ telle que $\lim_{n\to+\infty} Z_n = Z$ dans L^∞, et une suite (u_n) de fonctions C^∞ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ dans L^∞ ;*

(ii) *il existe deux constantes C_0 et C_1, et $s \geq 1$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$\begin{aligned} ||\mathcal{Z}_n^k(Z_{i,n})||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s, \quad i = 1, \cdots, d, \\ ||\mathcal{Z}_n^k(\text{div } \mathcal{Z}_n)||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s, \\ ||\mathcal{Z}_n^k(u_n)||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Alors $WF_s u \subset \left\{(x, \xi) \in T^*\mathbf{R}^d \backslash 0 / \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\xi_i = 0\right\}$.

Remarques 3.3

• Dans le cas du système d'Euler incompressible (E_{inc}), vue l'annulation de la divergence de la solution v, les estimations (3.3) du théorème 3.2 ne sont autres que les estimations (1.13) et (2.4).

• Dans le cas d'une équation quasilinéaire

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{d} Z_i(t, x, u)\partial_i u + Z_0(t, x, u) = 0, \tag{Q}$$

où les Z_i sont analytiques en (t, x, u) (pour $i = 0, \cdots, d$), le front d'onde analytique d'une solution C^1 de (Q) est inclus dans la variété caractéristique $\{(t, x, \tau, \xi)/\tau + Z(t, x, u(t, x)).\xi = 0\}$.

En effet, on régularise la donnée initiale u_0 et on obtient une suite (u_n) de solutions C^∞ associées aux données initiales régularisées. En dérivant l'équation (Q) (comme on l'a fait pour le système d'Euler), on obtient des estimations de type analytique pour la norme Lipschitz de $P_n^k(u_n)$ où $P = \partial_t + \mathcal{Z}(t,x,u,\partial)$.

L'estimation de la norme L^∞ de P_n^k (div $\mathcal{Z}_n$) s'obtient alors gratuitement à l'aide de la précédente et de la formule de récurrence :

$$P_n^k \text{ (div } \mathcal{Z}_n) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \sum_{i_0+..+i_p=k-p} C_{i_0..i_pk} \sum_{j_0,\cdots,j_p=1}^{d} \partial_{j_p} P^{i_p} Z_{j_{p-1}} \times \cdots \times \partial_{j_0} P^{i_0} Z_{j_p}$$

où

$$C_{i_0\cdots i_pk} \leq \frac{k!}{i_0!\cdots i_p!}(p+1).$$

Et on retrouve dans ce cas, de manière simple, le résultat d'Hanges et Trêves (voir [8]).

Preuve du théorème 3.2. — Soit $(x_0,\xi_0) \in T^*\mathbf{R}^d\backslash 0$ tel que $\mathcal{Z}(x_0,\xi_0) \neq 0$ où $\mathcal{Z}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\xi_i$ est le symbole de $\mathcal{Z}(x,D)$.

On désigne par K un voisinage compact de x_0 et V un voisinage conique fermé de ξ_0, tels que $|\mathcal{Z}_n(x,\xi)| \geq C|\xi|$ dans $K \times V$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et C une constante indépendante de n.

Dans la suite, on travaille avec Z_n et u_n qu'on note, pour simplifier, Z et u. Il s'agit d'estimer $|\hat{u}_N(\xi)|$ pour $\xi \in V$ avec $u_N = \chi_N u$.

$$\begin{aligned}
\hat{u}_N(\xi) &= \int e^{-ix\xi}\chi_N(x)u(x)dx \\
&= -\int \mathcal{Z}(x,D)(e^{-ix\xi})\frac{\chi_N(x)u(x)}{\mathcal{Z}(x,\xi)}dx \\
&= -\int e^{-ix\xi}\; {}^t\mathcal{Z}(x,D)\left(\frac{\chi_N(x)u(x)}{\mathcal{Z}(x,\xi)}\right)dx.
\end{aligned}$$

On effectue de la sorte N intégrations par parties et on obtient

$$\hat{u}_N(\xi) = \int e^{-ix\xi}R^N(x,\xi,D)(\chi_N(x)u(x))dx,$$

avec

$$R(x,\xi,D)W = -{}^t\mathcal{Z}(x,D)\left(\frac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)}W(x)\right)$$

et

$$-{}^t\mathcal{Z}(x,D) = \mathcal{Z}(x,D) - i \text{ div } \mathcal{Z}.$$

On note maintenant, pour $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ élément de $\mathbf{N}^j$,

$$\mathcal{Z}^{\tilde{\alpha}_j} \cdot W = \prod_{\ell=1}^{j} \mathcal{Z}^{\alpha_\ell}(W).$$

On montre alors par récurrence sur j que

$(3.4)_j$

$$R^j(W) = \sum_{|\tilde{\mu}_j|+|\tilde{\mu}_n|+n+q=j} C^{n,q}_{\tilde{\mu}_j,\tilde{\mu}_n,j} \left(\mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_n} \cdot \text{div } Z\right) \left(\mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_j} \cdot \frac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)}\right) \mathcal{Z}^q(W),$$

avec

$$C^{n,q}_{\tilde{\mu}_j,\tilde{\mu}_n,j} \leq \frac{j!}{\tilde{\mu}_j!\tilde{\mu}_n!n!q!}.$$

D'autre part, toujours par récurrence sur j, on montre que

$$(3.5)_j \quad \mathcal{Z}^j(\chi_N) = \sum_{q=1}^{j} \sum_{|\tilde{\mu}_q|=j-q} C^j_{\tilde{\mu}_q} \sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{d} \left(\prod_{i=1}^{q} \mathcal{Z}^{\mu_i}(Z_{j_i})\right) \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_q} \chi_N$$

avec, comme dans (1.15), $C^j_{\tilde{\mu}_q} \leq \dfrac{j!}{q!\tilde{\mu}_q!}$.

L'estimation (3.2) donne

$$|\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_q} \chi_N| \leq C_0(C_0N)^q \leq C_0 e^N C_0^q q! \quad \text{pour } q \leq N$$

car $N^q/q! \leq e^N$. On déduit de $(3.5)_j$ et de l'estimation (3.3) du théorème 3.2 l'existence d'une constante C assez grande et indépendante de N telle que,

$$(3.6)_j \qquad \text{pour tout } j \leq N, \quad ||\mathcal{Z}^j(\chi_N)||_{L^\infty} \leq C^{j+1} e^N (j!)^s.$$

Il suffit maintenant de remarquer que, dans $(3.4)_j$, le terme $\mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_j} \cdot \dfrac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)}$ est homogène en ξ de degré $-j$. La formule de Leibniz assure d'autre part, que

$$(3.7)_j \qquad ||\mathcal{Z}^j(\frac{1}{\mathcal{Z}(\cdot,\xi)})||_{L^\infty} \leq C^{j+1} \frac{(j!)^s}{(j+1)^2} |\xi|^{-1} \text{ pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

Cette estimation est montrée par récurrence sur j en utilisant (3.3). On réunit $(3.4)_j$, $(3.6)_j$, (3.3) et $(3.7)_j$ pour prouver l'existence d'une constante C indépendante de N et ξ telle que

$$||R^N(x,\xi,D)(\chi_N u)||_{L^\infty} \leq C(C|\xi|^{-1})^N(N!)^s,$$

et finalement

$$|\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C(C|\xi|^{-1})^N(N!)^s.$$

Cette dernière estimation est donc vérifiée par les fonctions u_n avec une constante C ne dépendant que des constantes C_0 et C_1, et des voisinages K et V. Elle est donc aussi vérifiée par la fonction bornée $u = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, P. GÉRARD, Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, Orsay Publications (1989).

[2] J.Y. CHEMIN, Régularité des trajectoires d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace, J. Math. Pures et Appliquées, 71 (1992), 407-417.

[3] J.Y. CHEMIN, Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel, Inventiones Math., 103 (1991), 599-629.

[4] J.Y. CHEMIN, Une facette mathématique de la mécanique des fluides I, Preprint de l'Ecole Polytechnique, Mars 1993.

[5] J.Y. CHEMIN, Sur quelques problèmes mathématiques posés par les équations relatives à un fluide parfait incompressible, livre à paraître.

[6] P. GAMBLIN, Système d'Euler et régularité microlocale analytique. Séminaire E.D.P. Ecole Polytechnique, Exposé n° XX de Janvier 1993.

[7] P. GAMBLIN, Thèse de Doctorat (Chap. I), Université d'Orsay, Février 1993.

[8] N. HANGES, F. TREVES, On the analyticity of solutions of first order nonlinear PDE, Trans. of the Amer. Math. Soc., 331 (1992), 627-638.

[9] L. HÖRMANDER, The analysis of linear PDO, T.I.

[10] T. KATO, On classical solutions of the two-dimensional non stationnary Euler equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 27 (1968), 188-200.

[11] L. LICHTENSTEIN, Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogenerunzusammendrückbarer, reibunggsloser Flüssigkeiten und die Helmoltzochen

Wirbelsatze, Mathematische Zeitschrift, 23 (1925), 89-154; 26 (1927), 196-323; 28 (1928), 387-415 et 32 (1930), 608-725.

[12] P. SERFATI, Thèse de doctorat (Chap. III et Chap. IV A), Université Paris VI, septembre 1992.

[13] V. YUDOVICH, Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid, Zh. Vych. Math., 3 (1963), 1032-1066.

Manuscrit reçu le 24 mai 1994.

Pascal GAMBLIN,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex (France).