

CLAUDE SABBAH

Équations différentielles à points singuliers irréguliers en dimension 2

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 5 (1993), p. 1619-1688

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1619_0

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS EN DIMENSION 2

par Claude SABBAH

A Bernard Malgrange

Sommaire

0. Introduction	1620
1. Très bonne structure formelle le long d'un diviseur à croisements normaux	1622
2. Eclatements réels et faisceaux associés	1624
3. Structure des $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexions qui admettent une très bonne décomposition formelle	1632
4. Variétés r -caractéristiques	1634
5. Variétés r -caractéristiques	1643
6. Fibration de Stokes	1647
7. Le faisceau d'irrégularité sur l'éclaté réel $\overline{X}(D)$	1655
Appendice : Existence et unicité locale pour certains systèmes intégrables non linéaires	1658
A. Théorèmes d'existence et d'unicité locale	1658
B. Le cas (REG)	1666
C. Le cas (PIR)	1670
D. Démonstration des théorèmes de la section A	1682
Bibliographie	1688

0. Introduction.

Une *connexion méromorphe* sur une variété analytique complexe X , à pôles le long d'un diviseur (réduit) $Z \subset X$ est un $\mathcal{O}_X[*Z]$ -module cohérent \mathcal{M} (où $\mathcal{O}_X[*Z]$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de Z) muni d'une connexion plate $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$.

Dans la suite de cet article (mis à part l'appendice), nous supposons que X est une surface. En effet on dispose dans ce cas de résultats (encore partiels) sur la structure formelle d'une telle connexion (après éclatements) au voisinage de tout point de Z . Des résultats analogues en toute dimension semblent pour le moment hors d'atteinte. En dimension 2 une telle connexion est alors localement libre sur $\mathcal{O}[*Z]$ et la donnée de ∇ correspond dans des coordonnées locales (x_1, x_2) à la donnée de matrices $A_1(x_1, x_2)$ et $A_2(x_1, x_2)$ à pôles le long de Z et satisfaisant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = [A_1, A_2].$$

Nous nous proposons ici de déduire d'hypothèses sur la structure formelle de \mathcal{M} des résultats sur la structure analytique de \mathcal{M} . La démarche est analogue à celle suivie en dimension 1 (voir par exemple [13]). Le théorème essentiel, dû suivant les cas à Sibuya, Gérard-Sibuya [4] et en toute généralité à Majima [10], qui est un théorème d'existence et d'unicité locale de solutions de systèmes intégrables quasi-linéaires, est démontré en appendice (en toute dimension). Nous avons cru utile de donner une démonstration analogue à celle donnée par Ramis-Sibuya [16] en dimension 1. Nous avons notamment simplifié la présentation faite par Majima des faisceaux de fonctions admettant un développement asymptotique, suivant une suggestion de J.P. Ramis.

Ce théorème permet d'obtenir, lorsque $Z = D$ est un diviseur à croisements normaux dans X , la structure locale des $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexions admettant une très bonne structure formelle (où $\overline{X}(D)$ est un éclaté réel de X et $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ est le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur $\overline{X}(D)$ qui sont holomorphes sur la partie isomorphe à $X - D$).

En un point général de D , la connexion \mathcal{M} est isomorphe à une famille analytique de connexions en dimension 1, ce qui permet de définir les (directions des) lignes de Stokes en famille. En considérant l'adhérence dans $\overline{X}(D)$ de cette famille, on obtient une surface, *a priori* singulière (ce

type de singularité a été étudié par Kostov [6]). Nous montrons, toujours sous l'hypothèse d'une très bonne structure formelle le long de D , comment obtenir une définition globale de cette surface de Stokes, munie d'une résolution partielle de ses singularités. Nous construisons cette surface comme fibre d'une fibration (topologique) sur S^1 , appelée ici *fibration de Stokes*. Par exemple, pour la connexion de rang 1 engendrée par $e^{1/f}$, cette fibration est topologiquement équivalente à la fibration de Milnor de la fonction analytique f composée avec l'inversion $t \mapsto 1/t$. L'outil de base pour la globalisation est l'ensemble des *variétés r -caractéristiques* du \mathcal{D}_X -module holonome associé à \mathcal{M} , variétés qui ont été introduites par Y. Laurent [9]. La présentation qui en est faite au § 4 ainsi que la généralisation du § 5 a été obtenue en collaboration avec F. Castro.

Supposons maintenant Z quelconque et soit $x^0 \in Z$. Si il existe une suite d'éclatements $e : \tilde{X} \rightarrow X$ à centres ponctuels au-dessus de x^0 rendant Z à croisements normaux et telle que la connexion image inverse $e^+\mathcal{M}$ admette une très bonne structure formelle le long de $e^{-1}(Z)$, nous pouvons utiliser les résultats précédents pour associer à (\mathcal{M}, x^0) une *fibration de Stokes* de base S^1 indépendante du choix de e . Nous montrons que la fibre de cette fibration est une surface (réelle) semi-analytique avec des singularités éventuelles au-dessus des points de croisement de $e^{-1}(Z)$. Dans le cas où cette surface est lisse, c'est une surface orientée dont toutes les composantes connexes ont un bord non vide : chaque composante a alors le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. Ceci est une variante topologique d'un résultat de Z. Mebkhout concernant la perversité du complexe d'irrégularité d'un \mathcal{D}_X -module holonome.

Ce complexe d'irrégularité peut s'obtenir, sous les mêmes hypothèses, comme image directe de celui de $e^+\mathcal{M}$ le long de $e^{-1}(Z)$, et ce dernier comme image directe du complexe d'irrégularité de la \mathcal{A} -connexion associée, par la projection de l'éclatement réel de \tilde{X} considéré plus haut vers \tilde{X} . Nous détaillons alors la démonstration d'un résultat annoncé par Majima [11] : ce dernier complexe n'a de cohomologie qu'en degré 0. De plus, nous montrons un résultat de \mathbf{R} -constructibilité pour ce complexe et nous précisons une stratification adaptée à l'aide de la fibration de Stokes.

Une partie de ce travail a été effectuée lors d'un séjour de l'auteur à l'université du Québec à Montréal et à l'université de Nagoya au printemps 1992.

1. Très bonne structure formelle le long d'un diviseur à croisements normaux.

1.1. — Soit X une surface analytique complexe lisse, $D \subset X$ un diviseur (réduit) à croisements normaux et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion (i.e. un $\mathcal{O}_X[*D]$ -module localement libre de type fini \mathcal{M} muni d'une connexion plate $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$). Soit $x^0 \in D$. Nous noterons

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x^0} = \widehat{\mathcal{O}_{X|D, x^0}} = \varinjlim_n (\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_D^n)_{x^0}.$$

De même nous noterons $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^0}} \mathcal{M}_{x^0}$.

Soit $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$. Nous noterons $\mathcal{E}^{\widehat{\varphi}}$ la $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$ -connexion libre de rang 1, de base e telle que $\nabla e = d\widehat{\varphi} \otimes e$. Si $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{O}}_{x^0}$, la connexion est isomorphe à la connexion triviale, de sorte qu'en général $\mathcal{E}^{\widehat{\varphi}}$ ne dépend que de la classe de $\widehat{\varphi}$ dans $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D] / \widehat{\mathcal{O}}_{x^0}$.

1.2. — Nous dirons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion est régulière si elle admet localement un réseau (i.e. un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent qui l'engendre sur $\mathcal{O}_X[*D]$) stable par les champs de vecteurs logarithmiques le long de D . On a de même la notion de $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$ -connexion régulière, et toute $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$ -connexion régulière $\widehat{\mathcal{R}}_{x^0}$ provient d'une $\mathcal{O}_{X, x^0}[*D]$ -connexion régulière :

$$\widehat{\mathcal{R}}_{x^0} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^0}} \mathcal{R}_{x^0}.$$

Plus précisément, nous dirons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$)-connexion régulière est élémentaire dans les cas suivants :

- si x^0 est un point lisse de $D = \{x_1 = 0\}$, il existe une base dans laquelle la matrice de $x_1 \partial_{x_1}$ est constante et n'a qu'un seul bloc de Jordan, et la matrice de ∂_{x_2} est nulle ;
- si x^0 est un point de croisement de $D = \{x_1 x_2 = 0\}$, il existe une base dans laquelle les matrices de $x_1 \partial_{x_1}$ et $x_2 \partial_{x_2}$ sont constantes et n'ont qu'une seule valeur propre.

On voit qu'une $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$ -connexion régulière élémentaire provient d'une connexion régulière sur $\mathcal{O}_{X, x^0}[*D]$ et l'on montre comme en dimension 1 que dans les deux cas toute connexion régulière est somme directe de connexions élémentaires.

1.3. — Soit $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0}$ une $\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]$ -connexion. Nous dirons que $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0}$ admet une *bonne décomposition* si il existe une décomposition

$$\widehat{\mathcal{M}}_{x^0} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{E}^{\widehat{\varphi}_\alpha} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_\alpha$$

où A est un ensemble fini, $\widehat{\varphi}_\alpha \in \widehat{\mathcal{O}}_{x^0}[*D]/\widehat{\mathcal{O}}_{x^0}$ et de plus pour tous $\alpha \neq \beta \in A$, $\widehat{\varphi}_\alpha \neq \widehat{\varphi}_\beta$ et les diviseurs $(\widehat{\varphi}_\alpha)$ et $(\widehat{\varphi}_\alpha - \widehat{\varphi}_\beta)$ ont leur support dans D , sont ≤ 0 (au sens de l'ordre de \mathbf{Z} ou \mathbf{Z}^2) et sont totalement ordonnés pour cet ordre (cette dernière propriété n'est pas *a priori* satisfaite en un point de croisement). On peut voir qu'une telle décomposition est alors unique.

Nous dirons que $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0}$ admet une *très bonne structure* si après une ramification convenable ρ autour de D , la connexion image inverse $\rho^+ \widehat{\mathcal{M}}_{x^0}$ admet une bonne décomposition.

Enfin nous dirons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} admet une *très bonne décomposition formelle* (resp. *structure formelle*) en $x^0 \in D$ si la formalisée $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^0} \otimes \mathcal{M}$ admet une bonne décomposition (resp. structure).

Remarque. — Lorsque $D = \{x_1 = 0\}$, on peut écrire $\widehat{\varphi}_\alpha = x_1^{-m_\alpha} \cdot u_\alpha(x_1, x_2)$ avec $u_\alpha(0, 0) \neq 0$ (ou bien $u_\alpha \equiv 0$) et $m_\alpha \in \mathbf{N}$, si (x_1, x_2) sont des coordonnées centrées en x^0 . Alors la condition de très bonne décomposition implique que pour $\alpha \neq \beta$

- ou bien $u_\alpha(0, 0) \neq u_\beta(0, 0)$
- ou bien $u_\alpha(0, x_2) = u_\beta(0, x_2)$ pour tout x_2 proche de 0.

De même, si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$, on écrit $\widehat{\varphi}_\alpha = x^{-m_\alpha} u_\alpha$ avec u_α comme ci-dessus et $m_\alpha \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$. Alors les m_α sont totalement ordonnés. Les résultats suivants sont clairs :

(1.4) PROPOSITION. — Si \mathcal{M} admet une très bonne décomposition formelle en x^0 , les $\widehat{\varphi}_\alpha$ qui interviennent dans la décomposition sont dans $\mathcal{O}_{X, x^0}[*D]/\mathcal{O}_{X, x^0}$. □

Ainsi, au voisinage de x^0 , il existe un *modèle élémentaire*, c'est à dire une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M}_1 somme directe de $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexions élémentaires $\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}_\alpha$, avec $\varphi_\alpha \in \mathcal{O}_{X, x^0}[*D]/\mathcal{O}_{X, x^0}$ et \mathcal{R}_α régulière, telle que $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0} = \widehat{\mathcal{M}}_{1, x^0}$.

(1.5) PROPOSITION. — Si \mathcal{M} admet une très bonne décomposition formelle en x^0 et si \mathcal{M}_1 est un modèle élémentaire en x^0 , c'en est aussi un en tout point $y^0 \in D$ assez voisin de x^0 . \square

Soit $e : \tilde{X} \rightarrow X$ un morphisme composé d'éclatements ponctuels en nombre fini. Si $Z \subset X$ est un diviseur réduit et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion, on note $e^+\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\pi^{-1}Z]$ -module $e^*\mathcal{M}$ muni de la connexion naturellement induite par ∇ . Il est naturel de conjecturer l'énoncé suivant :

CONJECTURE. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion et $x^0 \in Z$. Il existe une suite finie d'éclatements ponctuels $e : \tilde{X} \rightarrow X$ au-dessus de x^0 telle que $\pi^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisement normaux au voisinage de $\pi^{-1}(x^0)$ et que $e^+\mathcal{M}$ admette une bonne structure formelle le long de $\pi^{-1}(Z)$ en tout point de $\pi^{-1}(x^0)$.

Ici, "bonne décomposition ou structure" est définie comme "très bonne..."; cependant aux points de croisement de D on remplace $\mathcal{O}_{\widehat{X|D}, x^0}$ par $\mathcal{O}_{\widehat{X, x^0}}$.

2. Eclatements réels et faisceaux associés.

2.1. Fonctions \mathcal{C}^∞ plates le long de D . — Soit D un diviseur à croisements normaux sur la surface X . Soit $\mathcal{P}_X^{<D}$ le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur X , plates le long de D (voir par exemple [12]). Considérons le complexe de Dolbeault $(\mathcal{P}_X^{<D} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,\bullet}, \bar{\partial})$ où \mathcal{E}_X est l'anneau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur X et $\mathcal{E}_X^{p,q}$ le faisceau des (p, q) -formes \mathcal{C}^∞ . Soit par ailleurs $\mathcal{O}_{\widehat{X|D}}$ le complété formel de \mathcal{O}_X le long de D . Le résultat qui suit est un cas particulier simple de celui de [2] (voir [11]).

(2.2) PROPOSITION. — Le complexe $(\mathcal{P}_X^{<D} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,\bullet}, \bar{\partial})$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est placé en degré 0. \square

2.3. Eclatements réels. — On suppose désormais que toutes les composantes irréductibles de D sont lisses. Nous désignerons par $\bar{X}(D)$ l'espace obtenu par éclatement réel orienté successif des composantes D_i de D (ce n'est pas l'éclatement réel du diviseur D). On dispose d'une

application $\pi : \overline{X}(D) \rightarrow X$. Si x^0 est un point lisse de D , on a $\pi^{-1}(x^0) \simeq S^1$ et si x^0 est un point de croisement $\pi^{-1}(x^0) \simeq (S^1)^2$. En coordonnées locales (x_1, x_2) , dans le premier cas, si $D = \{x_1 = 0\}$, $\overline{X}(D)$ a des coordonnées $(\rho_1, \theta_1, x_2) \in \mathbf{R}_+ \times S^1 \times \mathbf{C}$ et π est donnée par $x_1 = \rho_1 \exp(i\theta_1)$ et dans le second cas, si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$, $\overline{X}(D)$ a des coordonnées $(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \in (\mathbf{R}_+)^2 \times (S^1)^2$ et $x_1 = \rho_1 \exp(i\theta_1)$, $x_2 = \rho_2 \exp(i\theta_2)$.

Soit $\mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur $\overline{X}(D)$, plates le long de $\pi^{-1}(D)$ (voir [12]). C'est un faisceau mou et on a

$$\mathbf{R}\pi_* \mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} = \pi_* \mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} = \mathcal{P}_X^{\leq D}.$$

Soit $\overline{x}^0 \in \pi^{-1}(x^0)$. Si x^0 est un point lisse de D on peut caractériser $f \in \mathcal{P}_{\overline{X}(D), \overline{x}^0}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ comme suit, en prenant les coordonnées locales ci-dessus : f est définie et \mathcal{C}^∞ sur un voisinage ouvert U de \overline{x}^0 , nulle sur $\pi^{-1}(D)$ et

$$(2.4) \quad \forall K \text{ compact } \subset U, \forall n \in \mathbf{N}, \exists C_{K,n} > 0 \text{ tel que} \\ \|f\|_{\infty, K} \leq C_{K,n} \rho_1^n.$$

Si x^0 est un point de croisement de D ,

$$(2.5) \quad \forall K \text{ compact } \subset U, \forall n = (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2, \exists C_{K,n} > 0 \text{ tel que} \\ \|f\|_{\infty, K} \leq C_{K,n} \rho^n \text{ (déf } C_{K,n} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2}).$$

On voit alors que $\mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X[*D]$ -module et un $\pi^{-1}\overline{\mathcal{O}_X[*D]}$ -module. Par ailleurs le faisceau $\mathcal{E}_{\overline{X}(D)}$ des fonctions \mathcal{C}^∞ sur $\overline{X}(D)$ est muni d'une action des champs de vecteurs logarithmiques le long de D (on le voit en coordonnées locales) qui préserve $\mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$. Par suite $\mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ est muni d'une action de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]$ et de $\pi^{-1}\overline{\mathcal{D}_X[*D]}$. On peut ainsi considérer le complexe de Dolbeault

$$\left(\mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{E}_X} \pi^{-1}\mathcal{E}_X^{0,\bullet}, \overline{\partial} \right).$$

(2.6) LEMME. — *Ce complexe est une résolution de*

$$\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ker } \overline{\partial} : \mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} \longrightarrow \mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} \otimes \pi^{-1}\mathcal{E}_X^{0,1}.$$

Démonstration. — voir [11]. □

Du fait des formules de Cauchy, on peut caractériser $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}$ plus simplement que $\mathcal{P}_{\bar{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$: en reprenant les notations ci-dessus, $f \in \mathcal{O}_X(U - \pi^{-1}(D))$ est dans $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}(U)$ si et seulement si f satisfait (2.4) (resp. (2.5)) sur $K - \pi^{-1}(D)$. Ainsi $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}$ est un sous- $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X[*D])$ -module de $\mathcal{P}_{\bar{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$. On déduit alors du lemme ci-dessus et des résultats mentionnés plus haut :

(2.7) PROPOSITION. — Dans $D^b(\mathcal{D}_X)$ le complexe $\mathbf{R}\pi_*\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est en degré 0. □

(2.8) PROPOSITION. — $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -module plat.

Démonstration. — Soit $x^0 \in D$ et $\bar{x}^0 \in \pi^{-1}(D)$. Il s'agit de montrer que si $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{X, x^0}$ et si $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{A}_{\bar{X}(D), \bar{x}^0}^{\leq D}$ vérifient $a_1 f_1 + \dots + a_p f_p = 0$ alors (a_1, \dots, a_p) est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{A}_{\bar{X}(D), \bar{x}^0}^{\leq D}$ de vecteurs de relations entre f_1, \dots, f_p à coefficients dans \mathcal{O}_{X, x^0} . On le montre par récurrence sur p . Commençons par le cas $p = 2$. Considérons une relation $a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$. On peut supposer f_1 et f_2 premiers entre eux. On peut supposer aussi que les diviseurs (f_1) et D n'ont pas de composante en commun, de même que les diviseurs (f_2) et D , car x_1 (resp. x_1 et x_2 si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$) est inversible dans $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}^{\leq D}$.

La seule relation dans \mathcal{O}_{X, x^0} est alors la relation évidente et il s'agit de montrer que $a_1 = \lambda f_2$ et $a_2 = -\lambda f_1$ avec $\lambda \in \mathcal{A}_{\bar{X}(D), \bar{x}^0}^{\leq D}$.

Pour montrer l'existence de λ , on choisit une suite d'éclatements ponctuels (complexes) $e : \tilde{X} \rightarrow X$ au-dessus de x^0 résolvant les singularités de f_1 et f_2 et telle que les transformés stricts de $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et D ne se coupent pas ; c'est possible d'après l'hypothèse faite ci-dessus. On en déduit l'existence d'un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ d'un voisinage du diviseur exceptionnel $e^{-1}(x^0)$ et d'un $\alpha \in \mathbf{N} - \{0\}$ (resp. $\alpha \in (\mathbf{N} - \{0\})^2$) tel que dans chaque V_i l'une au moins des deux inégalités suivantes soit satisfaite :

$$\begin{aligned} |f_1 \circ e|_{V_i} &\geq |x_1|^\alpha \circ e|_{V_i} & (\text{resp. } |x|^\alpha \circ e|_{V_i}) \\ |f_2 \circ e|_{V_i} &\geq |x_1|^\alpha \circ e|_{V_i} & (\text{resp. } |x|^\alpha \circ e|_{V_i}). \end{aligned}$$

Considérons en effet le cas où $D = \{x_1 = 0\}$. Hors des transformées strictes des courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et $x_1 = 0$, $f_1 \circ e$, $f_2 \circ e$ et $x_1 \circ e$ définissent le même ensemble, à savoir $e^{-1}(x^0)$, de sorte que dans ce cas l'existence de α est claire.

Au voisinage d'un point d'intersection de $e^{-1}(x^0)$ et de la transformée stricte de $f_1 = 0$, $f_2 \circ e$ et $x_1 \circ e$ définissent aussi le même ensemble, d'où l'assertion pour la deuxième inégalité.

Au voisinage du point de $e^{-1}(0)$ sur la transformée stricte de $x_1 = 0$ on a $\{f_1 \circ e = 0\} \subset \{x_1 \circ e = 0\}$, d'où aussi la première inégalité (ou la deuxième de manière analogue) pour un α convenable.

Le cas où $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ est analogue.

On trouve ainsi un recouvrement fini $(V_i^*)_{i \in I}$ de $V - D$, où V est un voisinage ouvert assez petit de x^0 tel que sur chaque V_i^* on ait

$$|f_1|_{|V_i^*} \geq |x|_{|V_i^*}^\alpha \text{ ou } |f_2|_{|V_i^*} \geq |x|_{|V_i^*}^\alpha .$$

Soit alors U un voisinage ouvert de \bar{x}^0 dans $\bar{X}(D)$ contenu dans $\pi^{-1}(V)$ sur lequel sont définies a_1 et a_2 , et U_i^* la trace de V_i^* sur $U - \pi^{-1}(D)$. Sur chaque U_i^* on peut définir λ par au-moins une des formules $\lambda = a_1/f_2$ ou $\lambda = -a_2/f_1$ et lorsqu'elles sont toutes deux définies, elles coïncident. De plus, λ vérifie la majoration (2.4) (resp. (2.5)) sur chaque U_i^* , d'où le résultat.

On raisonne maintenant par récurrence. Soient $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{X, x^0}$ et soit $\sum a_i f_i = 0$ une relation à coefficients dans $\mathcal{A}_{\bar{X}(D), \bar{x}^0}^{\leq D}$. En appliquant le résultat précédent à f_p et au pgcd de f_1, \dots, f_{p-1} , on se ramène au cas où ce dernier est égal à 1.

Ensuite on remarque qu'il suffit de montrer la platitude de $\mathcal{A}_{\bar{X}(D), \bar{x}^0}^{\leq D}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X, x^0}[x_1^{-1}]$, si (x_1, x_2) sont des coordonnées adaptées à D . Enfin, on peut supposer que f_1, \dots, f_p sont sous forme de Weierstrass par rapport à une coordonnée x'_2 . Aussi, il suffit de montrer la platitude sur $K[x'_2]$, où $K = \mathbf{C}\{x_1\}[x_1^{-1}]$. On choisit alors une relation de Bezout $\sum_{i=1}^{p-1} h_i f_i = 1$ avec $h_i \in K[x'_2]$. On en déduit une relation

$$(2.9) \quad \sum_{i=1}^{p-1} (h_i f_p) f_i - f_p = 0.$$

Par ailleurs, on a une relation entre f_1, \dots, f_{p-1} à coefficients dans $\mathcal{A}_{\overline{X}(D), x^0}^{<D}$, à savoir

$$\sum_{i=1}^{p-1} (a_i + a_p f_p h_i) f_i = 0.$$

Par récurrence, le vecteur de composantes $(a_i + a_p f_p h_i)_{i=1, \dots, p-1}$ est combinaison de relations sur $\mathcal{O}_{X, x^0}[x_1^{-1}]$ entre f_1, \dots, f_{p-1} . Du fait de la relation (2.9) on en conclut que (a_1, \dots, a_p) est combinaison de relations sur $\mathcal{O}_{X, x^0}[x_1^{-1}]$ entre f_1, \dots, f_p . □

2.10. *Complexe de de Rham “plat” sur l’éclaté réel.* — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module à gauche et $\text{DR}_X(\mathcal{M}) = (\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}, d)$ le complexe de de Rham holomorphe. Nous allons considérer le complexe

$$\text{DR}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}(\mathcal{M}) = \left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1} \text{DR}_X(\mathcal{M}), d \right)$$

sur $\overline{X}(D)$. Nous considérerons aussi les solutions sectorielles plates de \mathcal{M} , c’est à dire le complexe

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \left(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \right).$$

On déduit des résultats précédents

(2.11) COROLLAIRE.

1. $\mathbf{R}\pi_* \text{DR}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}(\mathcal{M})$ est quasi-isomorphe (dans $D^+(\mathbf{C}_X)$) au complexe simple associé au complexe double

$$\text{DR}_X(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{DR}_{\widehat{X|D}}(\mathcal{M}).$$

2. Dans la catégorie dérivée $D^+(\mathbf{C}_X)$, on a

$$\mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \left(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \right) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{M}, \left\{ \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \right\} \right).$$

□

2.12. *Le faisceau $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$.* — Les actions des champs de vecteurs logarithmiques le long de D et leurs analogues anti-holomorphes s'étendent à $\mathcal{E}_{\overline{X}(D)}$. Si par exemple $D = \{x_1x_2 = 0\}$, et si l'on choisit des coordonnées polaires sur $\overline{X}(D)$ comme au §2.3 on a (pour $j = 1, 2$)

$$x_j \partial_{x_j} = \frac{1}{2} \left(\rho_j \partial_{\rho_j} - i \partial_{\theta_j} \right), \quad \bar{x}_j \partial_{\bar{x}_j} = \frac{1}{2} \left(\rho_j \partial_{\rho_j} + i \partial_{\theta_j} \right).$$

On pose alors

$$\mathcal{A}_{\overline{X}(D)} = \begin{cases} \text{Ker } \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_1} \cap \text{Ker } \partial_{\bar{x}_2} & \text{si } D = \{x_1 = 0\} \\ \text{Ker } \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_1} \cap \text{Ker } \bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_2} & \text{si } D = \{x_1x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -module, sur lequel on peut étendre l'action de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ en posant $\partial_{x_j} = \exp(-i\theta_j)\partial_{\rho_j}$. On a donc $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} = \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \cap \mathcal{P}_{\overline{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$. On a une caractérisation de $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ par développements asymptotiques :

(2.13) PROPOSITION. — Soit $U = U_1 \times U_2$ un ouvert de $\overline{X}(D)$. On a $f \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}(U)$ si et seulement si f est holomorphe dans $U - \pi^{-1}(D)$ et admet pour $i = 1, 2$ un développement asymptotique le long de D_i , i.e. il existe des fonctions $a_n(\rho_2, \theta_2) \in \mathcal{A}_{\overline{D_1(0)}}(U_1)$ et $b_n(\rho_1, \theta_1) \in \mathcal{A}_{\overline{D_2(0)}}(U_2)$ telles que pour tout compact de U et tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une constante $C_{K,n}$ avec

$$\left| f(x) - \sum_0^n a_p(x_2)x_1^p \right| \leq C_{K,n} |x_1|^{n+1}$$

et

$$\left| f(x) - \sum_0^n b_p(x_1)x_2^p \right| \leq C_{K,n} |x_2|^{n+1}$$

sur $K - \pi^{-1}(D)$. □

Si localement $D = D_1 \cup D_2$, notons \mathcal{I}_Z , pour $Z = D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ et $D_1 \cup D_2$, l'idéal de $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ engendré par les images inverses des équations de Z et posons

$$\mathcal{A}_{\overline{X}(D)|Z} \widehat{} = \varinjlim_k \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} / \mathcal{I}_Z^k.$$

On a une application naturelle $T_Z : \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \rightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)|Z} \widehat{}$. On a alors l'analogie du lemme de Borel-Ritt (voir [10, thm 2.2 p. 27]).

(2.14) PROPOSITION (Borel-Ritt).

1. Si $D = \{x_1 = 0\}$, on a une suite exacte de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ -modules sur $\pi^{-1}(D)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \xrightarrow{T_D} \pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow 0.$$

2. Si $D = \{x_1x_2 = 0\}$, en restriction à $\pi^{-1}(0)$,

(a) pour Z comme ci-dessus, T_Z est surjective;

(b) on a une suite exacte

$$(2.15) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \xrightarrow{T_D} \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D}} \longrightarrow 0;$$

(c) le complexe de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D_1}} \oplus \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D_2}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D_1 \cap D_2}} \longrightarrow 0$$

n'a de cohomologie qu'en degré 0 et on a un isomorphisme $\text{Ker } \varphi \simeq \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D}}$ qui identifie ψ et T_D .

Remarques.

1. Dans le second cas on peut décrire plus explicitement $\mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|Z}}$ lorsque $Z = D_1, D_2$ ou $D_1 \cap D_2$. On a $\mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D_1 \cap D_2}} = \pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{X, D_1 \cap D_2}}$ et $\mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D_1}}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{A}_{\overline{D_1}}(U \cap D_1)[[x_1]]$$

où $\overline{D_1}$ est l'éclaté réel de D_1 le long de $D_1 \cap D_2$.

2. Dans le premier cas on a $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{X|D}} = \mathcal{A}_{\widehat{\overline{X}(D)|D}}$, de sorte que la suite exacte (2.15) existe sur $\overline{X}(D)$ alors que la description donnée au point (c) ne vaut que pour les points de croisement.

Esquisse de démonstration de la proposition 2.14 — Tout germe \mathcal{C}^∞ de $\mathcal{E}_{\overline{X}(D)}$ admet un développement asymptotique en ρ, θ (ou en ρ_1, θ_1 à coefficients \mathcal{C}^∞ en ρ_2, θ_2, \dots). La condition d'“holomorphic” sur $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ montre que ces développements ne dépendent de ρ, θ que via $x_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $x_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. On en déduit le premier point de la remarque ci-dessus.

On peut alors utiliser une méthode analogue à celle du cas d'une variable pour montrer les points (1) et (2.a) de la proposition, pour $Z = D_1, D_2$ ou $D_1 \cap D_2$.

Pour le point (2.c), la surjectivité de φ résulte de ce qui précède. Pour montrer que $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi$, il suffit, d'après la surjectivité de T_{D_1} et celle de T_{D_2} , de montrer que si $u_{\widehat{X}}|_{D_1}$ est une section locale de $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)|D_1}$ avec $T_{D_2}u_{\widehat{X}} = 0$, il existe une section locale u de $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}$ avec $T_{D_1}u = u_{\widehat{X}}|_{D_1}$ et $T_{D_2}u = 0$. Si $u_{\widehat{X}}|_{D_1}$ est définie au voisinage de θ^0 , on se ramène au cas où $\theta^0_1 = 0$, puis on écrit $u_{\widehat{X}}|_{D_1} = \sum a_n(x_2)x_1^n$ et par hypothèse $T_{D_2}a_n = 0$ pour tout n . On pose, au voisinage de θ^0 , $u = \sum \varphi_n(x_1, x_2)x_1^n$ avec

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \begin{cases} a_n(x_2) \left(1 - e^{-1/x_1 c_{n,n-1}}\right) & \text{si } x_1 |a_n(x_2)| \neq 0 \\ a_n(x_2) & \text{si } x_1 = 0 \\ 0 & \text{si } a_n(x_2) = 0 \end{cases}$$

où $c_{n,n-1} > 0$ est tel que $|a_n(x_2)| \leq c_{n,n-1} |x_2|^{n-1}$. Alors u vérifie les propriétés requises : le fait que $T_{D_1}u = u_{\widehat{X}}|_{D_1}$ est standard. Pour voir que $T_{D_2}u = 0$, on écrit pour $m \in \mathbb{N}$ sur $K - \pi^{-1}(D)$ (K compact)

$$\sum \varphi_n(x_1, x_2)x_1^n = \sum_1^m + \sum_{m+1}^\infty.$$

Du fait de la platitude des a_n , on peut majorer $|\sum_1^m|$ par $C_{K,m} |x_2|^m$. Quant au deuxième terme, on utilise la majoration

$$\left| \sum_{m+1}^\infty \varphi_n(x_1, x_2)x_1^n \right| \leq \sum_{m+1}^\infty |x_1 x_2|^{n-1}.$$

Enfin le fait que u soit C^∞ résulte de la proposition 2.13.

Enfin il est classique que $\text{Im } \psi$ s'identifie à $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)|D}$ (voir par exemple [5, p. 41]), ce qui montre (2.c) puis (2.b). □

(2.16) PROPOSITION. — $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -module plat.

Démonstration. — Au vu des résultats ci-dessus et de la proposition 2.8 le résultat est vrai sur la partie lisse de D . Aux points de croisement, il suffit alors de montrer que les faisceaux $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)|D_j}$ sont $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -plats ou encore $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{X}|D_j}$ -plats. Cela résulte de la platitude de \mathcal{A}_{D_j} sur $\pi_{|D_j}^{-1}\mathcal{O}_{D_j}$, facile puisque D_j est de dimension 1. □

3. Structure des $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexions qui admettent une bonne décomposition formelle.

Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion (i.e. un $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -module localement libre de type fini, muni d'une connexion plate $\nabla : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \pi^{-1}\Omega_X^1 \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$). Soit $\theta^0 \in \pi^{-1}(x^0)$ et posons $\widehat{\mathcal{A}}_{\theta^0} = \widehat{\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}}$. Posons $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}, \theta^0} = \widehat{\mathcal{A}}_{\theta^0} \otimes_{\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. C'est donc une $\widehat{\mathcal{A}}_{\theta^0}[*D]$ -connexion. On peut alors définir la notion de très bonne décomposition formelle en θ^0 pour une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion. Notons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} définit une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$.

(3.1) THÉORÈME. — Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion qui admet une très bonne décomposition formelle en θ^0 :

$$(*) \quad \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}, \theta^0} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\alpha \in A} \left(\mathcal{E}^{\widehat{\varphi}_\alpha} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_\alpha \right)$$

Pour tout $\alpha \in A$, choisissons une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion régulière \mathcal{R}_α relevant $\widehat{\mathcal{R}}_\alpha$. L'isomorphisme formel $(*)$ se relève en un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}[*D]$ -connexions

$$(*_{\theta^0}) \quad \mathcal{M}_{\mathcal{A}, \theta^0} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\alpha \in A} \left[\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes_{(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)_{\theta^0}} (\pi^{-1}\mathcal{R}_\alpha)_{\theta^0} \right].$$

Remarque. — Une version de ce théorème, qui généralise à plusieurs variables un résultat de Sibuya, a été montrée par Majima [10, thm III.2.1 p. 121].

Structure des \mathcal{A} -connexions régulières. — Une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion localement libre est régulière si sa formalisée l'est.

(3.2) PROPOSITION. — Soit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ une $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}[*D]$ -connexion régulière. Alors il existe (localement sur D) une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion régulière et un isomorphisme au voisinage de tout $\theta^0 \in (S^1)^n$:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}, \theta^0} \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \pi^{-1}\mathcal{R} \right)_{\theta^0}.$$

Démonstration. — Soit $\theta^0 \in (S^1)^2$ et soit m' une base de $\mathcal{R}_{\mathcal{A},\theta^0}$, \widehat{m}' la base induite de

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{A},\theta^0} = (\pi_D^{-1} \widehat{\mathcal{O}}_{X|D})^{\theta^0} \otimes_{(\pi^{-1} \mathcal{O}_X)_{\theta^0}} \mathcal{R}_{\mathcal{A},\theta^0}.$$

D'après le §1.2, il existe une base \widehat{m} dans laquelle la matrice \widehat{A}_i de $x_i \partial_{x_i}$ est constante, avec $i = 1, 2$ si D a deux composantes et $i = 1$ si D n'en a qu'une et dans ce dernier cas la matrice \widehat{B}_2 de ∂_{x_2} est nulle. Soit $\widehat{\Phi}$ la matrice de changement de base $\widehat{m} = \widehat{\Phi} \cdot \widehat{m}'$ et relevons-la en $\Phi \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\overline{X}(D),\theta^0}[*D])$ en utilisant Borel-Ritt (2.14). Considérons enfin la base $m = \Phi \cdot m'$. La matrice A_i de $x_i \partial_{x_i}$ vérifie $A_i = A_i^0 + C_i$ avec $\widehat{C}_i = 0$ et A_i^0 constante, et la matrice B_2 de ∂_{x_2} vérifie $\widehat{B}_2 = 0$. Cherchons une matrice $\Psi \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\overline{X}(D),\theta^0})$ telle que $\widehat{\Psi} = \text{Id}$ et telle qu'après le changement de base $m_1 = \Psi \cdot m$ la matrice de $x_i \partial_{x_i}$ soit A_i^0 et celle de ∂_{x_2} soit nulle. La matrice Ψ cherchée est donnée par une solution du système

$$x_i \partial_{x_i} \Psi = \text{ad}_{A_i^0}(\Psi) - \Psi \cdot C_i \quad (i = 1, 2)$$

ou de

$$\begin{aligned} x_1 \partial_{x_1} \Psi &= \text{ad}_{A_1^0}(\Psi) - \Psi \cdot C_1 \\ \partial_{x_2} \Psi &= \Psi \cdot B_2 \end{aligned}$$

qui relève $\widehat{\Psi} = \text{Id}$. Puisque $\widehat{\Psi}$ est solution du système formel associé, le théorème A.6 donne l'existence de Ψ . □

Démonstration du théorème 3.1. — Elle est analogue à celle du cas d'une variable, aussi nous ne ferons que l'esquisser (voir par exemple [13, p. 210]). Elle se fait par récurrence sur card A .

Fixons $\alpha_0 \in A$ tel que $m_{\alpha_0} = \max \{m_\alpha \mid \alpha \in A\}$. On pose, pour tout α , $\varphi_\alpha = h_\alpha \cdot x^{-m_\alpha} \cdot \widehat{\mathcal{U}}_\alpha(x, y)$ avec $\widehat{\mathcal{U}}_\alpha(0, 0) = 1$ et on relève $\widehat{\mathcal{U}}_\alpha$ en \mathcal{U}_α . Notons

$$A_{\alpha_0} = \{ \alpha \in A \mid m_\alpha = m_{\alpha_0} \text{ et } h_\alpha = h_{\alpha_0} \}.$$

Supposons d'abord que $A_{\alpha_0} \neq A$. Nous allons relever à $\mathcal{A}_{\overline{X}(D),\theta^0}$ la décomposition de $\widehat{\mathcal{M}}$ relative à la décomposition de A en $A_{\alpha_0} \cup (A - A_{\alpha_0})$. Il existe donc une base de la connexion dans laquelle la matrice Ω s'écrit

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

où $\widehat{\Omega}_{12} = 0, \widehat{\Omega}_{21} = 0, \widehat{\Omega}_{11}$ (resp. $\widehat{\Omega}_{22}$) est formée de blocs diagonaux du type

$$\text{Id} \cdot d\varphi_\alpha + (a_1 \text{Id} + N_1)dx_1 + (a_2 \text{Id} + N_2)dx_2$$

avec $\alpha \in A_{\alpha_0}$ (resp. $\alpha \in A - A_{\alpha_0}$), $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ de partie réelle dans $[0, 1[$ par exemple et N_1, N_2 sont des matrices nilpotentes. On est amené à résoudre les systèmes portant sur les matrices inconnues S_{12} (de la taille de Ω_{12}) et S_{21} (de celle de Ω_{21}) :

$$dS_{12} = -\Omega_{12} + (\Omega_{11}S_{12} - S_{12}\Omega_{22}) + S_{12}\Omega_{21}S_{12}$$

$$dS_{21} = -\Omega_{21} + (\Omega_{22}S_{21} - S_{21}\Omega_{11}) + S_{21}\Omega_{12}S_{21}$$

avec de plus $\widehat{S}_{12} = 0$ et $\widehat{S}_{21} = 0$. On vérifie que ces systèmes sont intégrables (du fait de l'intégrabilité de Ω). On peut les écrire sous la forme du système (Σ) de l'appendice (voir §A.1). Les $\Lambda^{(k)}$ sont ici de la forme $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ avec $\alpha \in A_{\alpha_0}$ et $\beta \in A - A_{\alpha_0}$; en particulier on a $m^{(k)} = m_{\alpha_0}$ pour tout k (en prenant les notations du §A.1). L'hypothèse de très bonne décomposition formelle implique que l'hypothèse du théorème A.6 est satisfaite car Ω_{12} et Ω_{21} sont à éléments dans $\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D}$. On peut donc trouver des solutions S_{12} et S_{21} qui satisfont $\widehat{S}_{12} = 0$ et $\widehat{S}_{21} = 0$.

Si $A = A_{\alpha_0}$, on remplace \mathcal{M}_A par $\mathcal{E}^{-\varphi_{\alpha_0}} \otimes \mathcal{M}_A$, qui vérifie l'hypothèse de très bonne décomposition formelle. Si cette connexion est régulière, on applique la proposition 3.2. Sinon, en notant $m'_{\alpha'_0} = \max \{m_{\alpha, \alpha_0} \mid \alpha \in A\}$, on a $A_{\alpha'_0} \neq A$ et on peut décomposer cette connexion. □

4. Variétés r -caractéristiques.

La notion de variété r -caractéristique d'un \mathcal{D} -module holonome le long d'une hypersurface lisse a été introduite par Y. Laurent [9]. Nous allons l'utiliser pour donner un sens intrinsèque et global aux exposants $\widehat{\varphi}_\alpha$ qui apparaissent dans la bonne décomposition formelle d'une connexion méromorphe (lorsqu'elle en admet une). Ceci nous permettra de donner une démonstration rapide des propositions 1.4 et 1.5. Nous allons d'abord rappeler la construction des variétés r -caractéristiques en toute généralité. Pour plus de précisions, nous renvoyons à [17]. Les définitions ci-dessous ont été introduites dans [7] et [9].

4.1. *Multi-filtration de l'anneau \mathcal{D}_X .* — Soit X une variété analytique complexe et Y une hypersurface lisse et connexe de X . Notons $F.(\mathcal{D}_X)$ la filtration croissante de l'anneau des opérateurs différentiels par le degré des opérateurs. Elle est indexée par \mathbf{N} et on a $F_0(\mathcal{D}_X) = \mathcal{O}_X$. Nous poserons $F_k(\mathcal{D}_X) = \{0\}$ pour $k \leq -1$.

Notons $V.(\mathcal{D}_X)$ la filtration croissante de \mathcal{D}_X , indexée par \mathbf{Z} , associée à l'hypersurface Y . On a par définition, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et $x \in X$

$$V_k(\mathcal{D}_X)_x = \left\{ P \in \mathcal{D}_{X,x} \mid P \cdot \mathcal{I}_{Y,x}^j \subset \mathcal{I}_{Y,x}^{j-k} \forall j \in \mathbf{Z} \right\}$$

où \mathcal{I}_Y est l'idéal de Y dans X et $\mathcal{I}_Y^\ell = \mathcal{O}_X$ pour $\ell \leq 0$.

Soit r un rationnel > 0 , avec $r = \ell_0/\ell_1$, où ℓ_0 et ℓ_1 sont des entiers ≥ 0 premiers entre eux (et $\ell_1 \neq 0$). On considère la filtration croissante ${}^r(FV)_\lambda$ de \mathcal{D}_X indexée par \mathbf{Z} :

$${}^r(FV)_\lambda(\mathcal{D}_X) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\{(s_0, s_1) \in \mathbf{Z}^2 \mid \ell_0 s_0 + \ell_1 s_1 \leq \lambda\}} F_{s_0}(\mathcal{D}_X) \cap V_{s_1}(\mathcal{D}_X).$$

Soit (t, y_1, \dots, y_p) un système de coordonnées locales tel que $Y = \{t = 0\}$. L'ordre d'un opérateur P pour la filtration ${}^r(FV)(\mathcal{D}_X)$ est noté $\text{ord}_r(P)$. Si P est le monôme $t^\alpha y^\beta \partial_t^\gamma \partial_y^\delta$ où β et δ sont des multi-indices, on a

$$\text{ord}_r(P) = \ell_0(|\delta| + \gamma) + \ell_1(\gamma - \alpha).$$

4.2. *r -gradué.* — L'anneau $\text{gr}^r(FV)(\mathcal{D}_X)$ est commutatif car r est non nul. Pour l'identifier, commençons par considérer l'anneau bi-gradué $\text{gr}^F \text{gr}^V \mathcal{D}_X$. L'anneau $\text{gr}^V \mathcal{D}_X$ s'identifie à l'anneau des opérateurs différentiels sur le fibré normal $N_Y X$ de Y dans X , opérateurs qui sont à coefficients polynomiaux dans les fibres de $N_Y X \rightarrow X$ (voir par exemple [17] ou [9]). L'anneau $\text{gr}^F \text{gr}^V \mathcal{D}_X$ est donc l'anneau des fonctions sur le cotangent $T^*(N_Y X)$ à coefficients polynomiaux dans les fibres du morphisme composé

$$T^*(N_Y X) \longrightarrow N_Y X \longrightarrow Y.$$

L'interprétation suivante sera aussi utile : on a $\text{gr}^F \text{gr}^V \mathcal{D}_X = \text{gr}^V \text{gr}^F \mathcal{D}_X$ (voir une justification au §4.3 ci-dessous), où $V \text{gr}^F \mathcal{D}_X$ est la filtration de $\text{gr}^F \mathcal{D}_X$ naturellement induite par $V \mathcal{D}_X$; cet anneau est alors aussi, de manière naturelle, l'anneau des fonctions sur le fibré normal $N_{T^*_Y X} T^* X$

dans T^*X de l'espace conormal T_Y^*X de Y dans X , à coefficients polynomiaux dans les fibres du morphisme composé

$$N_{T_Y^*X}T^*X \longrightarrow T_Y^*X \longrightarrow Y.$$

Pour le voir, considérons la filtration $V \operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$. On a par construction

$$V \operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} V \operatorname{gr}_k^F \mathcal{D}_X.$$

Si P est une section locale de $\operatorname{gr}_k^F \mathcal{D}_X$ qu'on écrit dans des coordonnées locales

$$P = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(t, y) \tau^{\alpha_1} \eta^{\alpha'}$$

l'ordre pour V d'un monôme $a_\alpha(t, y) \tau^{\alpha_1} \eta^{\alpha'}$ = $t^\ell b_\alpha(t, y) \tau^{\alpha_1} \eta^{\alpha'}$ (avec $b(0, y) \neq 0$) est $\alpha_1 - \ell = k - (|\alpha'| + \ell)$. Ainsi, au décalage près de k sur chaque $\operatorname{gr}_k^F \mathcal{D}_X$ et en changeant les indices en leurs opposés, la filtration V induit sur $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$ la filtration par les puissances de l'idéal de T_Y^*X dans T^*X , d'où l'assertion.

Maintenant, les considérations du §4.3 ci-dessous montrent que $\operatorname{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$ s'identifie à l'anneau $\operatorname{gr}^F \operatorname{gr}^V \mathcal{D}_X$ lorsqu'on munit ce dernier de sa r -graduation naturelle.

4.3. *Anneau de Rees.* — La filtration ${}^r(FV)(\mathcal{D}_X)$ n'est pas bornée à gauche, aussi il est utile de considérer non seulement le gradué mais tout autant l'anneau de Rees

$$\mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Z}} {}^r(FV)_\lambda(\mathcal{D}_X) w^\lambda \subset \mathcal{D}_X[w, w^{-1}].$$

C'est un faisceau cohérent d'anneaux ([17]). On a

$$\operatorname{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X) = \mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X) / w \mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$$

et

$$\mathcal{D}_X = \mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X) / (w - 1) \mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X).$$

Cet anneau s'interprète comme l'anneau de la déformation plate de \mathcal{D}_X sur son gradué pour ${}^r(FV)$.

De même, on peut considérer l'anneau de Rees associé à la bifiltration $F\mathcal{D}_X \cap V\mathcal{D}_X$:

$$\mathcal{R}_{FV} \mathcal{D}_X \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{(k, \ell) \in \mathbf{Z}^2} (FV)_{k, \ell} \mathcal{D}_X u^k v^\ell \subset \mathcal{D}_X[u, v, u^{-1}, v^{-1}].$$

On vérifie que cet anneau est plat sur $\mathbf{C}[u, v]$. La restriction à $u = v = 0$ peut donc se calculer de différentes manières : en restreignant d'abord à $u = 0$ puis à $v = 0$ on trouve $\text{gr}^V \text{gr}^F \mathcal{D}_X$; en faisant l'inverse on trouve $\text{gr}^F \text{gr}^V \mathcal{D}_X$; de même, en restreignant d'abord à la courbe $\mathbf{C}[u, v] \rightarrow \mathbf{C}[w]$ définie par $u \mapsto w^{\ell_0}, v \mapsto w^{\ell_1}$, on obtient $\mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$ (voir [17]) puis en restreignant à $w = 0$ on obtient $\text{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$.

4.4. *La fonction d'Euler.* — Toujours pour r rationnel > 0 , $\text{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$ est muni d'une section globale Θ , qui, dans les coordonnées locales ci-dessus, s'écrit $\Theta = t\tau$. Elle définit une fonction

$$T^*N_Y X \longrightarrow \mathbf{C}.$$

4.5. *Module de Rees.* — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Une filtration croissante ${}^rG(\mathcal{M})$ indexée par \mathbf{Z} est dite *bonne* pour ${}^r(FV)(\mathcal{D}_X)$ si le module de Rees

$$\mathcal{R}_{rG}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Z}} {}^rG_\lambda(\mathcal{M})w^\lambda \subset \mathcal{M}[w, w^{-1}]$$

est un module cohérent sur l'anneau $\mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$. Le module gradué $\text{gr}{}^rG(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_{rG}(\mathcal{M})/w\mathcal{R}_{rG}(\mathcal{M})$ est alors cohérent sur $\text{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$.

Inversement, tout $\mathcal{R}_{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$ -module gradué sans $\mathbf{C}[w]$ -torsion est de la forme $\mathcal{R}_{rG}(\mathcal{M})$ pour une unique filtration de \mathcal{M} , et un tel module est cohérent si et seulement si cette filtration est bonne.

4.6. *Pentes le long d'une hypersurface lisse.* — Nous allons rappeler la notion de *pen*te introduite par Y. Laurent [8], [9] et nous allons donner quelques compléments. Le résultat suivant est montré dans [9] :

(4.7) PROPOSITION. — *Si r est un rationnel > 0 , le support du module gradué $\text{gr}{}^rG(\mathcal{M})$ est soit vide, soit une variété involutive r -homogène de $T^*(N_Y X)$. De plus, le cycle défini par ce module est indépendant de la bonne filtration ${}^rG(\mathcal{M})$ choisie. \square*

Rappelons que $T^*(N_Y X)$ est muni de deux actions de \mathbf{C}^* : la première est l'action cotangente de l'action de \mathbf{C}^* dans les fibres de $N_Y X \rightarrow Y$ et la seconde est l'action dans les fibres de $T^*(N_Y X) \rightarrow N_Y X$. En coordonnées locales :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x, \mathbf{y}, \xi, \boldsymbol{\eta}) &= (\lambda^{-1}x, \mathbf{y}, \lambda\xi, \boldsymbol{\eta}) \\ \mu \cdot (x, \mathbf{y}, \xi, \boldsymbol{\eta}) &= (x, \mathbf{y}, \mu\xi, \mu\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

On définit alors l'action " r -homogène" de \mathbf{C}^* en faisant agir $t \in \mathbf{C}^*$ par (λ, μ) avec $\lambda = t^{\ell_1}$ et $\mu = t^{\ell_0}$.

L'existence d'une bonne filtration ${}^rG(\mathcal{M})$ n'est assurée que localement sur X . Le deuxième point permet de définir *globalement* un cycle $\text{CCh}_{Y,r}(\mathcal{M})$ de $T^*(N_Y X)$, qui est involutif r -homogène. Le support de ce cycle, i.e. celui du module $\text{gr}{}^rG(\mathcal{M})$ est noté $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$. Il correspond à $\Sigma_{T_Y^* X}^{(r)}$ dans *loc. cit.*

Remarque. — Y. Laurent utilise le théorème de Gabber [3] pour montrer l'involutivité de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ lorsque \mathcal{M} est \mathcal{D}_X -cohérent et prouve aussi l'inégalité

$$\dim \text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M}) \leq \dim \text{Ch}(\mathcal{M})$$

en utilisant un argument de platitude (*cf.* [9, théorème 4.1.1]). On peut donner aussi une démonstration de cette inégalité basée sur le théorème de finitude ci-dessous. On déduit en particulier de (4.8) que, lorsque \mathcal{M} est holonome, $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ est lagrangienne pour tout rationnel $r > 0$.

(4.9) DÉFINITION. — Soit r un rationnel > 0 . Nous dirons que r n'est pas une pente de \mathcal{M} le long de Y au voisinage de $x \in Y$ si il existe un voisinage ouvert de r dans \mathbf{Q} tel que pour tout rationnel $r' > 0$ dans ce voisinage, l'ensemble $\text{Ch}_{Y,r'}(\mathcal{M})$ soit indépendant de r (au voisinage de x). Nous dirons que r est une pente dans le cas contraire.

(4.10) DÉFINITION. — Nous dirons que 0 est une pente de \mathcal{M} le long de Y au voisinage de $x \in Y$ si $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ pour tout rationnel $r > 0$ assez petit.

Nous noterons $\mathcal{P}_Y(\mathcal{M}, x)$ l'ensemble de pentes de \mathcal{M} le long de Y au voisinage de $x \in Y$. Dans le cas d'une seule variable, si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$, où $P \in \mathcal{D}_X$, cet ensemble coïncide avec l'ensemble des pentes du polygone de Newton de P . On peut montrer :

(4.11) THÉORÈME ([9], [17]). — L'ensemble des pentes de \mathcal{M} le long de Y au voisinage de $x \in Y$ est fini. \square

Remarques.

1. On peut montrer qu'un rationnel $r > 0$ est une pente si et seulement si il existe une composante irréductible de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$

qui n'est pas bi-homogène dans $T^*(N_Y X)$ (le tout au voisinage de x).

- Si C est une composante de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ dont l'image dans $N_Y X$ est contenue dans Y , cette composante est stable sous l'action du champ de vecteur $\partial/\partial\tau$ puisqu'elle est involutive, donc est homogène relativement à la filtration V . Par suite elle est bi-homogène. Une telle composante n'intervient donc pas dans la définition des pentes. En particulier, on voit ainsi qu'un \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} à support dans Y n'a pas de pente > 0 le long de Y .

Nous supposons désormais que le module \mathcal{M} est holonome. L'ensemble $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ est donc équidimensionnel (car lagrangien) pour tout rationnel $r > 0$. Nous pouvons alors considérer le cycle $C\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$. Nous noterons Ch' la réunion des composantes *non bi-homogènes* de Ch et $C\text{Ch}'$ le cycle correspondant.

4.12. *Localisation.* — Supposons que $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$. Alors \mathcal{M} est aussi un $\mathcal{D}_X[*Y]$ -module cohérent. On peut munir l'anneau $\mathcal{D}_X[*Y]$ d'une filtration F par le degré des opérateurs et de la filtration V relative à l'hypersurface Y , où l'on impose de plus à t^{-1} d'être d'ordre 1. On a alors la notion de filtration r -bonne sur \mathcal{M} . Soit $r = \ell_0/\ell_1 > 0$. On a

$${}^r(FV)_\lambda \mathcal{O}_X[*Y] = V_{[\lambda/\ell_1]} \mathcal{O}_X[*Y] = t^{[\lambda/\ell_1]} \mathcal{O}_X$$

et $\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X[*Y]$ est un $\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X$ -module libre. De plus,

$$\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{D}_X[*Y] = \mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{D}_X.$$

Soit ${}^r G\mathcal{M}$ une filtration de \mathcal{M} bonne pour ${}^r(FV)\mathcal{D}_X$. Alors le module

$$\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{rG} \mathcal{M}$$

est un $\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{D}_X[*Y]$ -module cohérent sans $\mathbf{C}[w]$ -torsion (où w est le paramètre du module de Rees, cf. §4.5). Il existe par suite une unique filtration ${}^r G'\mathcal{M}$ avec

$$\mathcal{R}_{rG'} \mathcal{M} = \mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{R}_{r(FV)} \mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{rG} \mathcal{M}$$

et cette filtration est bonne. On a pour cette filtration

$$\text{gr}{}^r G' \mathcal{M} = \text{gr}{}^r(FV) \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\text{gr}{}^r(FV) \mathcal{O}_X} \text{gr}{}^r G \mathcal{M}.$$

On en déduit que le cycle associé à $\text{gr}^{rG'} \mathcal{M}$ est formé de la somme des composantes de $\text{CCh}_{Y,r}(\mathcal{M})$ qui ne sont pas contenues dans l'image inverse de $Y \subset N_Y X$ par la projection $T^*N_Y X \rightarrow N_Y X$. Les pentes de $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$ peuvent donc être calculées à l'aide de filtrations sur $\mathcal{D}_X[*Y]$. On voit aussi que les deux cycles coïncident en restriction à $\Theta^{-1}(\mathbf{C}^*)$, où Θ est le champ d'Euler. On en déduit, d'après la remarque qui suit le théorème 4.11 :

(4.13) COROLLAIRE. — Si \mathcal{M} est holonome, on a

$$\text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{M}) = \text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{M}[*Y]). \quad \square$$

4.14. *Le cas formel.* — Notons comme plus haut $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ le complété formel de \mathcal{O}_X le long de l'hypersurface Y et $\mathcal{D}_{\widehat{X|Y}}$ l'anneau des opérateurs à coefficients dans $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$. A tout \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} , on associe son formalisé $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$. Si \mathcal{M} est muni d'une filtration ${}^r G(\mathcal{M})$ bonne pour ${}^r(FV)(\mathcal{D}_X)$, le module $\widehat{\mathcal{M}}$ se trouve aussi muni d'une filtration ${}^r G(\widehat{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{O}_X} {}^r G(\mathcal{M})$ qui est bonne pour ${}^r(FV)(\mathcal{D}_{\widehat{X|Y}})$. Pour tout $r > 0$ on a $\text{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_{\widehat{X|Y}}) = \text{gr}^{r(FV)}(\mathcal{D}_X)$ et nous pouvons définir comme plus haut les objets $\text{CCh}_{Y,r}(\widehat{\mathcal{M}})$, $\text{Ch}_{Y,r}(\widehat{\mathcal{M}})$ et $\mathcal{P}_Y(\widehat{\mathcal{M}}, x)$ qui vérifient les mêmes propriétés.

(4.15) LEMME. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome. Pour tout rationnel $r > 0$, on a $\text{CCh}_{Y,r}(\widehat{\mathcal{M}}) = \text{CCh}_{Y,r}(\mathcal{M})$. De plus, on a aussi $\text{gr}^U(\widehat{\mathcal{M}}) = \text{gr}^U(\mathcal{M})$ pour toute V -bonne filtration $U(\mathcal{M})$. En particulier, $\mathcal{P}_Y(\widehat{\mathcal{M}}, x) = \mathcal{P}_Y(\mathcal{M}, x)$.

Démonstration. — Posons $r = \ell_0/\ell_1$. On a, pour tout k, t , ${}^r(FV)_k(\mathcal{D}_X) \subset {}^r(FV)_{k-\ell_1}(\mathcal{D}_X)$. Alors, en considérant la bonne filtration ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} {}^r G_k(\widehat{\mathcal{M}})/{}^r G_{k-\ell_1}(\widehat{\mathcal{M}}) &= \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{O}} {}^r G_k(\mathcal{M})/{}^r G_{k-\ell_1}(\mathcal{M}) \\ &= \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}/t\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{O}} {}^r G_k(\mathcal{M})/{}^r G_{k-\ell_1}(\mathcal{M}) \\ &= {}^r G_k(\mathcal{M})/{}^r G_{k-\ell_1}(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad \square$$

4.16. *Comportement par revêtement cyclique.* — Soit $\rho : X' \rightarrow X$ un revêtement cyclique de degré ν ramifié le long de Y . Par définition le groupe $\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$ agit sur X' , librement sur $X' - Y'$ (où $Y' = \rho^{-1}(Y)$) est

isomorphe à Y) et trivialement sur Y' . Il existe des coordonnées locales (t', y') au voisinage de tout point de Y' telles que l'on ait $\rho(t', y') = (t^\nu, y')$. On a $\mathcal{O}_X|_Y \subset \mathcal{O}_{X'}|_{Y'}$, en identifiant le premier anneau aux fonctions du second invariants par \mathbf{Z}/ν et $\mathcal{O}_{X'}$, est plat sur \mathcal{O}_X . On a de même, en restriction à $Y' = Y$, $\mathcal{D}_X[*Y] \subset \mathcal{D}_{X'}[*Y']$: en coordonnées locales on pose $t'\partial_{t'} = (1/\nu)t\partial_t$.

L'action de \mathbf{Z}/ν préserve la filtration $V\mathcal{O}_{X'}$, et l'on a en restriction à Y'

$$V_k\mathcal{O}_{X'} \cap \mathcal{O}_X = V_{[k/\nu]}\mathcal{O}_X.$$

Ceci permet d'identifier $\text{gr}^V\mathcal{O}_X$ à un sous-anneau de $\text{gr}^V\mathcal{O}_{X'}$ (à savoir le sous-anneau $\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \text{gr}_{k\nu}^V\mathcal{O}_{X'}$), ce qui correspond au revêtement cyclique induit par ρ et noté $\rho' : N_{Y'}X' \rightarrow N_YX$. De même, l'inclusion

$$\mathcal{D}_X[*Y] \subset \mathcal{D}_{X'}[*Y'] \simeq \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X[*Y]$$

correspond au diagramme

$$T^*N_{Y'}X' \xleftarrow{\varpi = T^*\rho'} \rho'^*T^*N_YX \xrightarrow{\rho'} T^*N_YX$$

où (en dehors de l'image inverse de Y), la première flèche est un isomorphisme et la seconde un revêtement cyclique.

Soit maintenant \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome et $\rho^+\mathcal{M} = \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\rho^{-1}\mathcal{O}_X} \rho^{-1}\mathcal{M}$ son image inverse au sens des \mathcal{D} -modules.

(4.17) PROPOSITION. — On a $\text{CCh}'_{Y', \nu r}(\rho^+\mathcal{M}) = \varpi\rho'^{-1} \text{CCh}'_{Y, r}(\mathcal{M})$ pour tout rationnel $r > 0$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il suffit de montrer la proposition lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$. On a alors $\rho^+\mathcal{M} = (\rho^+\mathcal{M})[*Y]$. En reprenant les notations plus haut pour ${}^r(FV)\mathcal{O}_X[*Y]$, on voit qu'en restriction à $Y' = Y$, $\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_{X'}[*Y']$ est un $\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_X[*Y]$ -module libre et

$$\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{D}_{X'}[*Y'] = \mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_{X'}[*Y'] \otimes_{\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_X[*Y]} \mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{D}_X[*Y].$$

Si ${}^rG\mathcal{M}$ est une filtration de \mathcal{M} bonne pour ${}^r(FV)\mathcal{D}_X[*Y]$, l'anneau

$$\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_{X'}[*Y'] \otimes_{\mathcal{R}_{r(FV)}\mathcal{O}_X[*Y]} \mathcal{R}_{rG}\mathcal{M}$$

n'a pas de $\mathbf{C}[w]$ -torsion et permet donc de définir une bonne filtration ${}^r G'(\rho^+ \mathcal{M})$. On a

$$\mathrm{gr}^r G' \rho^+ \mathcal{M} = \mathrm{gr}^{r(FV)} \mathcal{O}_{X'}[*Y'] \otimes_{\mathrm{gr}^{r(FV)} \mathcal{O}_X[*Y]} \mathrm{gr}^r G \mathcal{M}$$

d'où le résultat. □

(4.18) COROLLAIRE. — *En restriction à l'ouvert $\Theta \neq 0$, l'application*

$$\varpi^{-1} \rho' : \mathrm{CCh}'_{Y', \nu r}(\rho^+ \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{CCh}'_{Y, r}(\mathcal{M})$$

est un revêtement de degré ν . □

4.19. *Propriétés des variétés r -caractéristiques d'une connexion admettant une très bonne structure formelle le long de Y .* — Nous revenons à la situation du §1 : X est une surface analytique, D est un diviseur à croisement normaux et \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. L'hypersurface lisse Y sera ici la partie lisse de D . Nous supposons que \mathcal{M} admet une très bonne structure formelle le long de Y .

(4.20) PROPOSITION. — *Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{Ch}'_{Y, r}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Alors*

1. $\mathrm{Ch}'_{Y, r}(\mathcal{M})$ est lisse et la projection $\mathrm{Ch}'_{Y, r}(\mathcal{M}) \rightarrow N_Y X$ est un revêtement d'image contenue dans $N_Y X - Y$;
2. $\mathrm{Ch}'_{Y, r}(\mathcal{M}) \subset \Theta^{-1}(\mathbf{C}^*)$ et $\Theta : \mathrm{Ch}'_{Y, r}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{C}^*$ est partout de rang 1.

Démonstration. — L'énoncé est local sur Y et ne dépend que du formalisé de \mathcal{M} le long de Y , d'après le §4.14, et il suffit de le montrer après un revêtement cyclique autour de Y , d'après le §4.16. On peut donc supposer que \mathcal{M} admet une décomposition en somme directe de connexions élémentaires. Commençons par le cas d'une connexion élémentaire de rang 1 de la forme $\mathcal{E}^\varphi \otimes x_1^\alpha$, si $Y = \{x_1 = 0\}$, avec $\varphi(x_1, x_2) = x_1^{-m} u(x_1, x_2)$ et $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, $u(0, 0) \neq 0$ (le cas régulier ne pose pas de problème puisque $\mathrm{Ch}'_{Y, r} = \emptyset$ pour tout $r > 0$).

(4.21) LEMME. — *Dans ces conditions, on a*

1. $\mathcal{P}_Y(\mathcal{M}) = \{m + 1\}$ au voisinage de $(0, 0)$;

2. si $r = m + 1$, $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M})$ est défini par les équations suivantes dans $T^*N_Y X$:

$$\begin{aligned} x_1^m \Theta + m \cdot u(0, x_2) &= 0 \\ x_1^m \xi_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on admet ce lemme, on voit, en utilisant l'additivité du cycle CCh' par extension, que la proposition est vraie pour toute connexion élémentaire $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$. Pour montrer la proposition dans le cas général il reste à voir que lorsque \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle le long de Y , les différentes composantes irréductibles de $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M})$ ne se coupent pas. Cela résulte des équations de $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R})$ et du fait que si $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$, on a ou bien $u_\alpha(0, x_2) = u_\beta(0, x_2)$ pour tout x_2 voisin de 0, ou bien $u_\alpha(0, x_2) \neq u_\beta(0, x_2)$ pour tout x_2 voisin de 0. \square

Démonstration du lemme. — On remarque d'abord que

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}^\varphi \otimes x_1^\alpha = \mathcal{D}_X[*Y]/(P_1, P_2)$$

avec

$$P_1 = x_1 \partial_{x_1} - \alpha - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad P_2 = \partial_{x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

On en déduit que $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M})$ est une sous variété de la variété définie par les symboles $\sigma_r(P_1)$ et $\sigma_r(P_2)$. Par suite $\text{Ch}'_{Y,r} = \emptyset$ si $r \neq m + 1$. Il reste à voir, puisque $(\sigma_r(P_1), \sigma_r(P_2))$ définit une sous-variété lisse irréductible de $T^*N_Y X$ (celle donnée dans l'énoncé du lemme) que $\text{Ch}'_{Y,m+1}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Or on vérifie aussi que $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M}) = \emptyset$ pour $0 < r < m + 1$ (pour $r > m + 1$ c'est la section nulle de $T^*N_Y X$), de sorte que $\text{Ch}_{Y,m+1}$ ne peut être bi-homogène. \square

5. Variétés r -caractéristiques.

Nous restons dans la situation du §1. Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une très bonne structure formelle le long de D . Pour chaque composante irréductible (supposée lisse) de D nous avons construit les variétés r -caractéristiques $\text{Ch}'_{D_i,r} \subset T^*N_{D_i} X$. Pour construire la fibration de Stokes au §6 nous serons amenés à recoller les quotients de ces variétés par l'action de \mathbf{R}_+^* qui existe du fait de la r -homogénéité, au-dessus d'un

point d'intersection de deux composantes D_i et D_j de D . A cette fin, il faut introduire des variétés caractéristiques associées à la paire (D_i, D_j) . C'est cette notion que nous allons expliquer dans cette section.

Dans la suite, nous identifions X à un voisinage ouvert de $0 = x^0$ dans \mathbf{C}^2 , muni de coordonnées x_1, x_2 telles que $D = \{x_1 x_2 = 0\}$. La construction des variétés \mathbf{r} -caractéristiques est un cas particulier de la construction décrite dans [17, Appendice].

5.1. *Tri-filtration.* — Dans les conditions ci-dessus, l'anneau \mathcal{D}_X est muni d'une tri-filtration croissante (indexée par \mathbf{Z}^3) :

$$(F^1 V^2 V)_s \mathcal{D}_X = F_{s_0} \mathcal{D}_X \cap {}^1 V_{s_1} \mathcal{D}_X \cap {}^2 V_{s_2} \mathcal{D}_X$$

où ${}^i V \mathcal{D}_X$ est la filtration relative à l'hypersurface D_i (voir le §4.1). Pour simplifier nous noterons $(FV) \mathcal{D}_X$ cette tri-filtration. L'anneau \mathbf{Z}^3 -gradué $\text{gr}^{(FV)} \mathcal{D}_X$ est l'anneau des polynômes sur $T^* \mathbf{C}^2 = T^* N_{\{0\}} X$ muni de la \mathbf{Z}^3 -graduation (FV) : si (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées sur $T^* \mathbf{C}^2$,

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{est de tri-degré} & (0, -1, 0) \\ x_2 & \text{“ ”} & (0, 0, -1) \\ \xi_1 & \text{“ ”} & (1, 1, 0) \\ \xi_2 & \text{“ ”} & (1, 0, 1). \end{array}$$

On dispose des fonctions d'Euler $\Theta_i = x_i \xi_i$ ($i=1,2$).

5.2. *r-graduation.* — Soit $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in (\mathbf{Q}_+^*)^2$ et posons $r_i = \ell_0 / \ell_i$ avec $\text{pgcd}(\ell_0, \ell_1, \ell_2) = 1$. Soit ${}^{\mathbf{r}}(FV) \mathcal{D}_X$ la filtration (indexée par \mathbf{Z}) définie par

$${}^{\mathbf{r}}(FV)_\lambda \mathcal{D}_X = \sum_{\{(s_0, s_1, s_2) \in \mathbf{Z}^3 \mid \ell_0 s_0 + \ell_1 s_1 + \ell_2 s_2 \leq \lambda\}} (FV)_s \mathcal{D}_X.$$

On vérifie comme au §4.2 que le gradué $\text{gr}^{\mathbf{r}(FV)} \mathcal{D}_X$ est isomorphe à $\text{gr}^{(FV)} \mathcal{D}_X$ lorsqu'on munit ce dernier anneau de la \mathbf{r} -graduation pour laquelle

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{est de degré} & -\ell_1 \\ x_2 & \text{“ ”} & -\ell_2 \\ \xi_1 & \text{“ ”} & \ell_0 + \ell_1 \\ \xi_2 & \text{“ ”} & \ell_0 + \ell_2. \end{array}$$

5.3. *Variété r-caractéristique.* — De la même manière qu'au §4.3 on peut associer à tout \mathcal{D}_X -module cohérent une variété \mathbf{r} -caractéristique

$\text{Ch}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$: c'est une variété involutive \mathbf{r} -homogène de $T^*\mathbf{C}^2$. On dispose des résultats généraux ci-dessous. Nous ne les utiliserons cependant pas dans la suite.

(5.4) THÉORÈME (conséquence de [17, Appendice]). — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Il existe une subdivision de $(\mathbf{R}_+)^3$ en cônes convexes rationnels fermés de sommet l'origine, ne se coupant que le long de faces communes, telle que la variété $\text{Ch}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ ne dépende pas de \mathbf{r} lorsque (ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2) varie dans une facette (relativement ouverte) de la subdivision. □

On peut alors montrer que si \mathcal{M} est holonome, $\text{Ch}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ est lagrangienne et munie d'une action de \mathbf{C}^* du fait de la \mathbf{r} -homogénéité, et on peut définir le cycle $\text{CCh}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$. On note $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ la réunion des composantes de $\text{Ch}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ qui ne sont pas tri-homogènes et qui ne sont pas contenues dans l'image inverse de $\{x_1 x_2 = 0\}$ par la projection $T^*N_{\{0\}}X \rightarrow N_{\{0\}}X$, et CCh' le cycle correspondant. Alors pour \mathbf{r} fixé, le cycle $\text{CCh}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ (resp. $\text{CCh}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$) est additif dans une suite exacte de modules holonomes.

On montre comme au §4.14 que $\text{CCh}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M}) = \text{CCh}_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\widehat{\mathcal{M}})$, où $\widehat{\mathcal{M}} = \mathbf{C}[[x_1, x_2]] \otimes_{\mathcal{O}_{X,0}} \mathcal{M}$ est le formalisé de \mathcal{M} en 0 et

$$\text{CCh}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M}) = \text{CCh}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M}[*D]).$$

Enfin, si $\rho : X' \rightarrow X$ est un revêtement fini de X , ramifié le long de D , cyclique d'ordre ν_i le long de D_i , on a avec des notations analogues et en posant $\nu \mathbf{r} = (\nu_1 r_1, \nu_2 r_2)$

$$\text{Ch}'_{D'_1, D'_2, \nu \mathbf{r}}(\rho^+ \mathcal{M}) = \varpi \rho'^{-1} \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M}).$$

Supposons maintenant que \mathcal{M} soit une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une très bonne structure formelle le long de D en 0. Nous allons montrer

(5.5) PROPOSITION. — Soit C une composante irréductible (supposée non vide) de $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$. Alors

1. Il existe une unique droite affine \mathfrak{h} de \mathbf{Q}^2 d'équation $m_1 s_1 + m_2 s_2 = m_0$ avec $m_0 \neq 0$ et m_1 ou $m_2 \neq 0$, $(m_0, m_1, m_2) \in \mathbf{N}^3$ premiers entre eux, telle que $\mathbf{r}^{-1} \in \mathfrak{h}$ et que C soit une orbite du sous-tore $H \subset (\mathbf{C}^*)^3$ d'équation $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = \lambda_0^{m_0}$ via l'action de $(\mathbf{C}^*)^3$ sur $T^*\mathbf{C}^2$ définie par

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = (\lambda_1^{-1} x_1, \lambda_2^{-1} x_2, \lambda_0 \lambda_1 \xi_1, \lambda_0 \lambda_2 \xi_2);$$

2. La projection $C \rightarrow N_{\{0\}}X$ est un isomorphisme sur un ouvert de $N_{\{0\}}X \simeq \mathbf{C}^2$.

Démonstration. — Définissons, pour $\nu \in (\mathbf{N}^*)^2$, la droite $\nu\mathfrak{h}$ par l'équation $\nu_1 m_1 s_1 + \nu_2 m_2 s_2 = m_0$ de sorte que $\mathbf{r} \in \mathfrak{h} \iff \nu\mathbf{r} \in \nu\mathfrak{h}$. Il suffit de montrer le résultat après un revêtement ν -cyclique le long de D et après formalisation de \mathcal{M} de sorte qu'on peut se ramener, quitte à changer \mathfrak{h} en $\nu\mathfrak{h}$, au cas où \mathcal{M} est somme directe de $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexions élémentaires puis en fait au cas où \mathcal{M} est élémentaire de rang 1, $\mathcal{M} = \mathcal{E}^\varphi \otimes x^\alpha$ avec $\varphi = x^{-m}u(x_1, x_2)$, $m \in \mathbf{N}^2$, $\alpha \in \mathbf{C}^2$ et ou bien $u(0, 0) \neq 0$ ou bien $u \equiv 0$ et $m = 0$.

(5.6) LEMME. — Pour \mathcal{M} élémentaire comme ci-dessus, $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ n'est pas vide si et seulement si \mathbf{r} vérifie $m_1 r_1^{-1} + m_2 r_2^{-2} = 1$ et dans ce cas $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ est définie par les équations

$$\begin{cases} x^m \Theta_1 + m_1 u(0, 0) = 0 \\ x^m \Theta_2 + m_2 u(0, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{si } m_1 \text{ et } m_2 \neq 0$$

et

$$\begin{cases} x_1^{m_1} \Theta_1 + m_1 u(0, 0) = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{si } m_1 \neq 0 \text{ et } m_2 = 0.$$

La proposition est donc satisfaite dans ce cas, en prenant pour \mathfrak{h} la droite d'équation $m_1 s_1 + m_2 s_2 = 1$. □

Démonstration du lemme. — Analogue à celle du lemme 4.21. □

Dans la suite il sera plus judicieux d'indexer les composantes des variétés \mathbf{r} -caractéristiques par les droites \mathfrak{h} correspondantes plutôt que par \mathbf{r} . Nous noterons donc $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ la réunion des composantes de $\cup_{\mathbf{r}} \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ qui sont \mathfrak{h} -homogènes.

Remarques.

1. Si \mathfrak{h} a pour équation $m_1 s_1 + m_2 s_2 = m_0$, on a toujours sur $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ (si \mathcal{M} admet une bonne structure formelle en 0) l'égalité

$$m_2 \Theta_{1| \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}} = m_1 \Theta_{2| \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}}.$$

2. La variété $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ est lisse, i.e. ses différentes composantes irréductibles ne se coupent pas dans $T^*\mathbf{C}^2$. Cela résulte de la condition de bonne structure formelle et des équations ci-dessus.

3. La subdivision prédite par le théorème 5.4 est ici celle de \mathbf{R}_+^3 définie par les hyperplans dont l'équation est l'homogénéisée de celle de \mathfrak{h} , si $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}} \neq \emptyset$, ainsi qu'éventuellement d'autres droites contenues dans les plans de coordonnées.

6. Fibration de Stokes.

Nous restons dans la situation du §1 et nous supposons que toutes les composantes irréductibles de D sont lisses. Notons D° la partie lisse de D . Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une très bonne structure formelle le long de D .

6.1. — On peut appliquer les résultats du §4 pour $Y = D^\circ$. Pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$, la variété r -caractéristique $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ est lagrangienne et r -homogène, donc munie d'une action de \mathbf{C}^* . Cette action est induite par une action sur $T^*N_{D^\circ}X$. Lorsqu'on munit $N_{D^\circ}X$ de l'action de \mathbf{C}^* "puissance $-\ell_1$ " de l'action naturelle dans les fibres de $N_{D^\circ}X \rightarrow D^\circ$, la projection

$$\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) \longrightarrow N_{D^\circ}X$$

devient équivariante pour ces actions \mathbf{C}^* (rappelons que $r = \ell_0/\ell_1$).

Soit $\mathbf{S}N_{D^\circ}X$ le fibré en cercles associé à $N_{D^\circ}X$. C'est tout autant le quotient de $N_{D^\circ}X - D^\circ$ par l'action naturelle de $\mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{C}^*$ que par sa puissance $-\ell_1$. C'est aussi l'image inverse $\pi^{-1}(D^\circ)$ de D° dans $\overline{X}(D)$.

L'espace de Stokes de pente r , noté $\text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ au-dessus de D° est par définition le quotient $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M})/\mathbf{R}_+^*$. On dispose d'une application naturelle

$$\text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}N_{D^\circ}X$$

car on a vu que $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) \cap \Theta^{-1}(0) = \emptyset$, donc la projection de $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ dans $N_{D^\circ}X$ ne coupe pas D° . On dispose de même d'une application

$$\mathbf{S}\Theta : \text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) \longrightarrow S^1 = \mathbf{C}^*/\mathbf{R}_+^*$$

induite par Θ . L'analogie de la proposition 4.20 se vérifie de la même manière :

(6.2) PROPOSITION.

1. $\text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ est une variété analytique réelle (lisse) orientable ;

- 2. $\mathcal{S}\Theta$ est partout de rang 1 ;
- 3. Les fibres de $\mathcal{S}\Theta$ sont des surfaces analytiques réelles lisses orientables et la projection d'une fibre sur D° par composition de

$$\text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{S}N_{D^\circ} X \longrightarrow D^\circ$$

est un revêtement fini. □

Remarque. — Nous verrons plus loin que la projection sur $\mathcal{S}N_{D^\circ} X$ des “secteurs” $\mathcal{S}\Theta^{-1}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ est le support de $\mathbf{R}\text{Hom}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D})|_{\pi^{-1}(D^\circ)}$. C'est la construction globale de ce support qui nécessite l'introduction des variétés r -caractéristiques.

Si l'on appelle “surface de Stokes” de la connexion élémentaire locale $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$, avec $\varphi = x_1^{-m_1}u(x_1, x_2)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}N_{D^\circ} X$ défini par $x_1^{-m_1}u(0, x_2) \in \mathbf{R}_-$, on voit que la “surface de Stokes” de la connexion \mathcal{M} est définie globalement au-dessus de D° comme la projection sur $\mathcal{S}N_{D^\circ} X$ de $\mathcal{S}\Theta^{-1}(e^{i\pi})$. Son adhérence dans $\pi^{-1}(D) \subset \overline{X}(D)$ est la “surface de Stokes” de \mathcal{M} le long de D . Nous allons compléter la “surface de Stokes déployée” $\mathcal{S}\Theta^{-1}(e^{i\pi})$ au-dessus des points de croisement de D . Pour cela, nous allons compléter d'abord $\text{St}_D^\circ(\mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \coprod_r \text{St}_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$.

Nous allons décrire d'abord les fibres de $\text{St}_D(\mathcal{M})$ au-dessus des points de croisement de D . Nous effectuerons le recollement ensuite. Plaçons-nous au point de croisement de deux composantes D_1 et D_2 . Soit \mathfrak{h} une droite affine de \mathbf{Q}^2 telle que $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Soit H le sous-tore $(\mathbf{C}^*)^2$ de $(\mathbf{C}^*)^3$ associé à \mathfrak{h} (voir proposition 5.5) et $H_{\mathbf{R}}$ sa partie non compacte $(\mathbf{R}_+^*)^2$. Nous poserons

$$\text{St}_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) = \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})/H_{\mathbf{R}}.$$

Puisque $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ est réunion d'orbites (non singulières) sous H agissant dans $T^*N_{\{0\}}X$, on voit que $\text{St}_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ est réunion de tores réels $(S^1)^2 \simeq (\mathbf{C}^*)^2/(\mathbf{R}_+^*)^2$. Par ailleurs, nous avons vu aussi que si l'une des applications Θ_1 ou Θ_2 n'est pas identiquement nulle sur $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$, elle est non constante et à valeurs dans \mathbf{C}^* , donc définit $\mathcal{S}\Theta_1$ ou $\mathcal{S}\Theta_2 : \text{St}_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) \rightarrow S^1$. De plus, si les deux sont définies, elles coïncident. Nous noterons $\mathcal{S}\Theta_{12}$ cette application. Enfin nous poserons

$$\text{St}_{D_1, D_2}(\mathcal{M}) = \coprod_{\mathfrak{h}} \text{St}_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}).$$

(6.3) PROPOSITION. — La réunion disjointe $St_D(\mathcal{M})$ des $St_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ et des $St_{D_i, D_j, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ (pour $r > 0$, tout couple (D_i, D_j) et toute droite \mathfrak{h} comme plus haut) peut être munie naturellement d’une structure d’espace semi-analytique réel. Les fonctions $S\Theta$ et $S\Theta_{i,j}$ se recollent en une fonction analytique réelle $S\Theta : St_D(\mathcal{M}) \rightarrow S^1$.

6.4. — Soit alors Z un diviseur réduit quelconque de X , $x^0 \in Z$ et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion. Supposons qu’il existe une suite d’éclatements (complexes) $e : \tilde{X} \rightarrow X$ à centres au-dessus de x^0 , tels que $e^{-1}(Z)$ soit, au voisinage de l’image inverse de x^0 , un diviseur à croisements normaux et que $e^+\mathcal{M}$ admette une très bonne structure formelle le long de $e^{-1}(Z)$ sur ce voisinage.

(6.5) THÉORÈME. — Pour toute boule B assez petite centrée en x^0 dans X , la restriction de $S\Theta$ à $St_{e^{-1}(Z \cap B)}(e^+\mathcal{M})$ est une fibration topologique sur S^1 . De plus, si $B' \subset B$ est une autre telle boule, les deux fibrations sont topologiquement équivalentes. Enfin, si e' est une autre suite d’éclatements telle que $e'^+\mathcal{M}$ admette une très bonne structure formelle, les fibrations correspondant à e et e' sont équivalentes.

Démonstration de la proposition. — Au vu des remarques du début, la question est locale au voisinage d’un point de croisement x^0 de D , aussi nous nous placerons dans la situation locale du §5.

6.6. Cas où \mathcal{M} admet une très bonne décomposition formelle. — Soit \mathcal{M}_1 une $\mathcal{O}[*D]$ -connexion somme directe de connexions élémentaires, avec $\widehat{\mathcal{M}}_{x^0} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{1, x^0}$. On sait alors (proposition (1.5)) que pour tout $y^0 \in D$ voisin de x^0 , on a

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X|D, y^0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, y^0}} \mathcal{M}_{y^0} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X|D, y^0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, y^0}} \mathcal{M}_{1, y^0}$$

et par suite on a $Ch'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) = Ch'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}_1)$ pour tout $r > 0$ (au voisinage de x^0). Il suffit donc de prouver la proposition pour \mathcal{M}_1 .

Soit $\mathcal{M}_{1, \varphi} = \mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}_\varphi$ une composante élémentaire de \mathcal{M}_1 ($\varphi \in \mathcal{O}_{X, x^0}[*D]/\mathcal{O}_{X, x^0}$). Considérons l’application

$$St_{D^\circ}(\mathcal{M}_{1, \varphi}) \xrightarrow{(S_p, S\Theta)} SN_{D^\circ} X \times S^1$$

où $p : N_{D^\circ} X \rightarrow D^\circ$ est la projection. Il résulte du calcul fait au lemme 4.21 que cette application est injective. Plus précisément, si $\varphi = x^{-m}u(x_1, x_2)$ ($m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 - \{0\}$ et $u(0, 0) \neq 0$), soit $a : N_{D^\circ} X \rightarrow \mathbb{C}$ définie

par $a = x^{-m}u|_{D^o}$ (on note de la même manière les coordonnées de X avec celles de $N_{D^o}X$). Si $m_i \neq 0$ (pour $i = 1$ ou 2), la variété $\text{St}_{D_i^o}(\mathcal{M}_{1,\varphi})$ n'est pas vide et son image par l'application ci-dessus est le graphe de

$$\mathbf{S}a : \mathbf{S}N_{D_i^o}X \longrightarrow S^1$$

(si par exemple $i = 1$, on a $\mathbf{S}a(\arg x_1, x_2) = -m_1 \arg x_1 + \arg(x_2^{-m_2}u(0, x_2))$).

Définissons alors $\mathbf{S}a_{12} : \pi^{-1}(x^0) = (S^1)^2 \rightarrow S^1$ par

$$\mathbf{S}a_{12}(\theta_1, \theta_2) = \arg u(0, 0) - m_1\theta_1 - m_2\theta_2.$$

Ce n'est autre que la composée de $\mathbf{S}\Theta_{12}$ avec l'isomorphisme

$$\text{St}_{D_1, D_2}(\mathcal{M}_{1,\varphi}) \xrightarrow{\sim} (S^1)^2.$$

Ces fonctions se recollent en une fonction lisse (au sens PL, car $\pi^{-1}(D)$ est une variété PL) sur $\pi^{-1}(D) \subset \overline{X}(D)$ à valeurs dans S^1 si m_1 et $m_2 \neq 0$ et en une fonction lisse sur $\pi^{-1}(D_1)$ (resp. sur $\pi^{-1}(D_2)$) si $m_1 \neq 0$ et $m_2 = 0$ (resp. $m_2 \neq 0$ et $m_1 = 0$).

Ainsi nous pouvons poser

$$\text{St}_D(\mathcal{M}_{1,\varphi}) = \text{graphe } \mathbf{S}a.$$

Notons que dans les deux derniers cas, $\text{St}_D(\mathcal{M}_{1,\varphi})$ est une variété à bord et dans le premier une variété lisse (PL) et dans tous les cas c'est une variété orientable. De plus, c'est un ensemble semi-analytique fermé dans $\pi^{-1}(D) \times S^1$ et il est muni d'une fonction analytique réelle $\mathbf{S}\Theta$ à valeurs dans S^1 , à savoir la restriction de la projection sur S^1 .

Terminons la construction de $\text{St}_D(\mathcal{M}_1)$. Soit C une composante irréductible de $\text{Ch}'_{D_1, D_2}(\mathcal{M}_1)$. Alors C est définie par la donnée de $m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et de $c \in \mathbf{C}^*$ (prendre les équations du lemme 5.6 avec $u(0, 0) = c$). Notons $\mathcal{M}_{1,C}$ la réunion des composantes $\mathcal{M}_{1,\varphi}$ pour les φ correspondant à C et posons

$$\text{St}_D(\mathcal{M}_{1,C}) = \bigcup_{\varphi \leftrightarrow C} \text{St}_D(\mathcal{M}_{1,\varphi}) \subset \pi^{-1}(D) \times S^1.$$

Alors $\text{St}_D(\mathcal{M}_{1,C})$ est un ensemble semi-analytique réel dans $\pi^{-1}(D) \times S^1$ (éventuellement singulier le long de son intersection $C/(\mathbf{R}_+^*)^2 \simeq (S^1)^2$ avec $\pi^{-1}(x^0)$).

Enfin, nous posons

$$\text{St}_D(\mathcal{M}_1) = \coprod_C \text{St}_D(\mathcal{M}_{1,C}).$$

Il s'agit de vérifier qu'au-dessus de D° on a

$$\text{St}_D(\mathcal{M}_1)|_{D^\circ} \simeq \text{St}_{D^\circ}(\mathcal{M}_1)$$

et qu'en restriction à $\pi^{-1}(x^0)$ on a

$$\text{St}_D(\mathcal{M}_1) \cap \pi^{-1}(0) = \text{St}_{D_1, D_2}(\mathcal{M}_1).$$

Le deuxième point est vrai par construction. Pour le premier point, on remarque que pour $i = 1, 2$ on a

$$\text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M}_1) = \coprod_{r>0} \text{St}_{D_i^\circ, r}(\mathcal{M}_1)$$

et

$$\text{St}_{D_i^\circ, r}(\mathcal{M}_1) = \bigcup_{\{\varphi \mid m_i=r-1\}} \text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M}_{1, \varphi}) \subset \text{SN}_{D_i^\circ} X \times S^1.$$

Il suffit de vérifier que pour φ correspondant à C et φ' correspondant à $C' \neq C$, et toutes deux de pente r le long de D_i , on a

$$\text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M}_{1, \varphi}) \cap \text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M}_{1, \varphi'}) = \emptyset$$

dans $\text{SN}_{D_i^\circ} X \times S^1$. Or, puisque $C \neq C'$, on a $u(0, 0) \neq u'(0, 0)$ donc $u - u'$ ne s'annule pas dans un voisinage de 0. □

6.7. *Cas où \mathcal{M} admet une très bonne structure formelle.* — Soit ρ une ramification cyclique autour de D_1 et D_2 et notons encore ρ l'application induite $\overline{X}'(D') \rightarrow \overline{X}(D)$ donnée en coordonnées locales par

$$\rho(r'_1, \theta'_1 r'_2, \theta'_2) = (r_1^{\nu_1}, \nu_1 \theta'_1, r_2^{\nu_2}, \nu_2 \theta'_2).$$

On a aussi un revêtement

$$\begin{array}{ccc} T^*N_{D_i^\circ} X' - [T^*N_{D_i^\circ} X']|_{D_i^\circ} & \xleftarrow{\sim} \rho^{-1} T^*N_{D_i^\circ} X - [\rho^{-1} T^*N_{D_i^\circ} X']|_{D_i^\circ} & \\ & \searrow \rho & \downarrow \rho \\ & T^*N_{D_i^\circ} X - [T^*N_{D_i^\circ} X']|_{D_i^\circ} & \end{array}$$

et on sait que $\text{Ch}'_{D_i^\circ}(\rho^+ \mathcal{M}) = \rho^{-1} \text{Ch}'_{D_i^\circ}(\mathcal{M})$. De plus, à une constante > 0 près, on a $\Theta'_i = \Theta_i \circ \rho$ de sorte que $\mathbf{S}\Theta'_i = \mathbf{S}\Theta_i \circ \mathbf{S}\rho$. Ainsi

$$\text{St}_{D_i^\circ, \nu_i r}(\rho^+ \mathcal{M}) = \mathbf{S}\rho^{-1} \text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M})$$

et

$$\mathbf{S}\Theta'_i : \mathcal{S}t_{D'_i, \nu_i r}(\rho^+ \mathcal{M}) \longrightarrow S^1$$

est la composée de $\mathcal{S}\rho$ et $\mathbf{S}\Theta_i$.

On peut raisonner de même pour $\text{Ch}'_{D_1, D_2}(\mathcal{M})$. Ainsi $\mathcal{S}t(\rho^+ \mathcal{M})$ est muni d'une action du groupe $\mathbf{Z}/\nu_1 \times \mathbf{Z}/\nu_2$. Si $\mathfrak{h}' = \nu \mathfrak{h}$ est une pente de $\rho^+ \mathcal{M}$ on vérifie à l'aide de la condition de très bonne structure formelle que

$$\mathcal{S}t_{D', \mathfrak{h}'}(\rho^+ \mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \coprod_{C' \text{ de pente } \mathfrak{h}'} \mathcal{S}t_{D, C'} = \coprod_{C' \text{ de pente } \mathfrak{h}'} \mathcal{S}t_D((\rho^+ \mathcal{M})_{1, C'})$$

est contenu dans $\pi'^{-1}(D') \times S^1$, car les C' de pente \mathfrak{h}' ne se coupent pas dans $T^* \mathbf{C}^2$. Ainsi $\mathcal{S}t_{D, \mathfrak{h}'}(\rho^+ \mathcal{M})$ est stable sous l'action de $\mathbf{Z}/\nu_1 \times \mathbf{Z}/\nu_2$ et via l'inclusion $\mathcal{S}t_{D, \mathfrak{h}'}(\rho^+ \mathcal{M}) \subset \pi'^{-1}(D') \times S^1$, celle-ci est induite par l'action triviale sur S^1 et celle introduite plus haut sur $\pi'^{-1}(D')$ (i.e. $(\theta'_1, \theta'_2) \mapsto (\theta'_1 + 2i\pi/\nu_1, \theta'_2 + 2i\pi/\nu_2)$).

On note $\mathcal{S}t_{D, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ le quotient de $\mathcal{S}t_{D, \mathfrak{h}'}(\rho^+ \mathcal{M})$ par cette action. Par construction c'est un sous-ensemble semi-analytique réel dans $\pi'^{-1}(D') \times S^1$ et il vérifie les propriétés voulues. Enfin $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M}) = \coprod_{\mathfrak{h}} \mathcal{S}t_{D, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$. \square

Démonstration du théorème. — La construction précédente montre facilement que la stratification de $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})$ donnée par les $\mathcal{S}t_{D_i}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})_{|D_i \cap D_j}$ est une stratification de Whitney (semi-analytique). De plus l'application $\mathbf{S}\Theta$ est transverse aux strates de même qu'à $e^{-1}(Z \cap \partial B)$. On en déduit que $\mathbf{S}\Theta$ induit une fibration topologique sur $\mathcal{S}t_{e^{-1}(Z \cap B)}(\mathcal{M})$. Le fait qu'elle ne dépende pas de $B' \subset B$ assez petite se montre de même. Pour montrer que cette fibration ne dépend pas du choix de e , il suffit de comparer les fibrations pour e et $\varepsilon \circ e$, où ε est l'éclatement d'un point de $e^{-1}(0) = D$.

Supposons que ε soit l'éclatement d'un point lisse de $D = D_1$ et considérons d'abord le cas où $\widehat{\mathcal{M}}$ est élémentaire. Soit $\mathcal{M}_1 = \mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$ un modèle convergent. Si $\varepsilon : \widetilde{X} \rightarrow X$ est l'éclatement de l'origine et $D_1 = \{x_1 = 0\}$, on pose $\widetilde{D}_1 = \varepsilon^{-1}(D_1)$ et $\widetilde{X}(\widetilde{D})$ l'éclaté réel de \widetilde{X} le long des composantes de \widetilde{D} . On a une application

$$\bar{\varepsilon} : \widetilde{X}(\widetilde{D}) \longrightarrow \overline{X}(D).$$

Pour la décrire, considérons des coordonnées (x_1, x_2) sur X avec $D_1 = \{x_1 = 0\}$. Les coordonnées sur $\overline{X}(D) \simeq \mathbf{R}_+ \times S^1 \times U$ sont (r_1, θ_1, x_2) où U

est un disque de \mathbf{C} . Alors \widetilde{X} est recouvert par deux cartes : la première est munie de coordonnées $(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2)$ de sorte que

$$\bar{\varepsilon}(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2) = (r'_1 r'_2, \theta'_1 + \theta'_2, r'_2 e^{i\theta'_2})$$

et la seconde $(r''_1, \theta''_1, x''_1)$ avec

$$\bar{\varepsilon}(r''_1, \theta''_1, x''_1) = (r''_1, \theta''_1, r''_1 e^{i\theta''_1} x''_1).$$

Soit E le diviseur exceptionnel de ε . Dans la première carte, $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$, donc est muni de coordonnées $(\theta'_1, \theta'_2, \rho'_1)$, et on l'identifie à $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$ avec les coordonnées $(\theta'_1 + \theta'_2, \theta'_2, \rho'_1)$ de sorte que la projection $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{D}) \rightarrow \pi^{-1}(D)$ induit $\tilde{\pi}^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ qui n'est autre que la première projection $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+ \rightarrow S^1$.

De même, dans la deuxième carte, $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ est isomorphe à $S^1 \times \mathbf{C}$ avec les coordonnées (θ''_1, x''_2) et l'application $\tilde{\pi}^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ est la première projection. On en déduit que $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ est difféomorphe à $S^1 \times$ disque et que $\tilde{\pi}^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ est la projection sur le premier facteur.

Par ailleurs, soit D'_1 le transformé strict de D_1 par ε . Alors $\tilde{\pi}^{-1}(D'_1) = S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$ avec les coordonnées $(\theta', \theta'_2, r'_2)$, l'application sur $\pi^{-1}(D_1)$ est donnée par

$$(\theta', \theta'_2, r'_2) \longmapsto (\theta', r'_2 e^{i\theta'_2})$$

et le recollement de $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ et $\tilde{\pi}^{-1}(D'_1)$ se fait le long de $S^1 \times S^1$: c'est l'identité sur le premier facteur et sur le second on identifie via $\theta'_1 \mapsto \theta' - \theta'_2$.

Enfin l'application $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}$ définie par $\varepsilon^+ \mathcal{M}_1$ est composée de $\mathcal{S}\Theta$ et de la projection $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{D}) \rightarrow \pi^{-1}(D_1)$ (lorsqu'on identifie les variétés de Stokes $\mathcal{S}t$ au graphe des applications $\mathcal{S}\Theta$ et $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}$). Ainsi

$$\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{D}) \simeq [S^1 \times \text{disque}] \coprod_{S^1 \times S^1} [S^1 \times (S^1 \times \mathbf{R}_+)]$$

est difféomorphe à $\pi^{-1}(D_1)$ et le difféomorphisme est compatible aux applications $\mathcal{S}\Theta$ et $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}$ (qui se factorisent par la projection sur le premier facteur). On en déduit l'assertion dans ce cas.

Lorsque \mathcal{M}_1 est somme directe de connexions élémentaires, on raisonne de même. Dans le cas général, on relève un revêtement cyclique autour de D_1 à un revêtement cyclique autour de \tilde{D} , on applique le résultat précédent puis on quotiente par le groupe \mathbf{Z}/ν_1 : comme cette action

ne porte que sur le premier facteur S^1 , on peut appliquer le même raisonnement au quotient.

Enfin le cas d'un point de croisement est analogue. □

6.8. *Un critère de lissité de $\text{St}_D(\mathcal{M})$.* — L'espace total de la fibration de Stokes déployée $\text{St}_D(\mathcal{M})$ peut présenter des singularités au-dessus des points de croisement de D (nous supposons toujours que \mathcal{M} admet une très bonne structure formelle le long de D). La construction que nous avons faite plus haut montre cependant que l'on a le critère de lissité suivant (la nécessité est claire) :

CRITÈRE. — *La fibration $\mathbf{S}\Theta : \text{St}_D(\mathcal{M}) \rightarrow S^1$ est lisse (au sens PL) au voisinage de l'image inverse d'un point de croisement x^0 de D si et seulement si, lorsqu'on se restreint à un voisinage assez petit de ce point, toute composante irréductible $C/(\mathbf{R}_+^*)^2$ de $\text{Ch}'_{D_1, D_2}(\mathcal{M})/(\mathbf{R}_+^*)^2$ est adhérente à une unique composante connexe de $\text{St}_{D_1}(\mathcal{M})$ et à une unique composante de $\text{St}_{D_2}(\mathcal{M})$.* □

Supposons par exemple que \mathcal{M} admette une très bonne décomposition formelle au voisinage de x^0 (et pas seulement une bonne structure formelle). La condition est alors équivalente au fait que si $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}_\varphi$ et $\mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{R}_\psi$ sont deux composantes avec $\varphi \neq \psi$ dans $\mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$, alors $\varphi - \psi$ est une unité.

Lorsque $\text{St}_D(\mathcal{M})$ est lisse, on peut préciser le théorème 6.5 :

(6.9) PROPOSITION. — *Dans la situation du théorème 6.5, supposons de plus que $\text{St}_{e^{-1}(Z \cap B)}(\mathcal{M})$ soit lisse (au sens PL). Alors toutes les composantes connexes de cette variété ont un bord non vide. Les fibres de $\mathbf{S}\Theta$ sont des surfaces réelles lisses (PL) orientables à bord non vide, donc leurs composantes connexes ont le type d'homotopie d'un bouquet de cercles.*

Remarque. — Ceci peut être vu comme un analogue topologique du théorème de perversité de [15].

Démonstration. — Soit \tilde{Z} le transformé strict de Z par e et E le diviseur exceptionnel de e , $E = e^{-1}(x^0)$, avec les notations du §6.4. On a donc $e^{-1}(Z) = \tilde{Z} \cup E$. Si \mathcal{S} est une composante connexe de $\text{St}_{e^{-1}(B \cap Z)}(\mathcal{M})$, la projection de \mathcal{S} sur \tilde{X} (éclaté de X) est un sous-arbre de l'arbre associé naturellement à $e^{-1}(Z)$. Il résulte de la construction précédente que lorsque \mathcal{S} est lisse, \mathcal{S} a un bord non vide si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} a une composante dans \tilde{Z} (et alors \mathcal{S} a une composante de bord dont l'image est une composante de $\partial B \cap Z$);
2. le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} a une composante E_i de E et il existe une composante D_j de $e^{-1}(Z)$ qui n'est pas dans ce sous-arbre et qui coupe E_i (\mathcal{S} admet alors un bord au-dessus du point d'intersection $E_i \cap D_j$).

Alors, si le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} est celui associé à $e^{-1}(Z)$ on applique le premier point, sinon on utilise la connexité de ce dernier et on applique le second point. □

6.10. *Exemple.* — Soit f un germe en $0 \in \mathbf{C}^2$ de fonction analytique avec $f(0) = 0$ et soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{1/f}$ la $\mathcal{O}_X[1/f]$ -connexion de rang 1 engendrée par $1/f$. Une résolution des singularités de f au voisinage de 0 peut être utilisée pour \mathcal{M} dans le théorème 6.5. Alors la fibration de Stokes est topologiquement équivalente à la fibration de Milnor de f en 0 composée avec l'application antipodale $S^1 \rightarrow S^1$: cela résulte des lemmes 4.21 et 5.6, et de [1, §2].

7. Le faisceau d'irrégularité sur l'éclaté réel $\overline{X}(D)$.

7.1. *Le faisceau d'irrégularité.* — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome et Z une hypersurface de X . Z. Mebkhout a introduit dans [15] le complexe d'irrégularité de \mathcal{M} le long de Z , noté $\mathbf{IR}_Z^\nu(\mathcal{M})$. C'est un complexe de faisceaux sur Z , à cohomologie \mathbf{C} -constructible, qui est pervers sur Z . Il est défini par (voir *loc. cit.* p. 90 et p. 98)

$$\mathbf{IR}_Z^\nu(\mathcal{M}) = i^{-1} \mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*Z], \mathcal{O}_X)[+1] \simeq \mathbf{RHom}_{i^{-1}\mathcal{D}_X}(i^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{Q}_Z)$$

où $i : Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion et $\mathcal{Q}_Z = \widehat{\mathcal{O}_{X|Z}}/i^{-1}\mathcal{O}_X$. Cette définition s'étend aux complexes bornés de \mathcal{D}_X -modules à cohomologie holonome, et le foncteur \mathbf{IR}^ν a un bon comportement par image directe par un morphisme propre (voir [14, thm. 2.2.6]).

Soit maintenant \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion méromorphe, où D est un diviseur à croisements normaux sur la surface X . On peut définir le

complexe d'irrégularité sur $\overline{X}(D)$: si l'on note $\mathcal{M}_A = \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}_D(\mathcal{M}_A) &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \left(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \right) \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}(D)}} \left(\mathcal{M}_A, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \right) \end{aligned}$$

si l'on pose $\mathcal{D}_{\overline{X}(D)} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{D}_X$. On a donc

$$\mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}\mathcal{H}_D(\mathcal{M}_A) = \mathbf{R}\mathcal{H}_D^{\vee}(\mathcal{M}).$$

Dans ces conditions on a (en toute dimension)

(7.2) THÉORÈME (Majima [11]). — *Lorsque la $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} admet une très bonne structure formelle le long de D , le complexe $\mathbf{R}\mathcal{H}_D(\mathcal{M}_A)$ n'a de cohomologie qu'en degré 0.*

Nous allons voir que $\mathbf{R}\mathcal{H}_D(\mathcal{M}_A)$ est un faisceau \mathbf{R} -constructible sur $\pi^{-1}(D)$ et nous allons décrire une stratification sur les strates de laquelle il est localement constant.

(7.3) THÉORÈME. — *Sous les conditions précédentes, $\mathbf{R}\mathcal{H}_D(\mathcal{M}_A)$ est un faisceau \mathbf{R} -constructible sur $\pi^{-1}(D)$, localement constant sur les strates de toute stratification (semi-analytique réelle) compatible avec la stratification naturelle de D et avec la famille des projections sur $\pi^{-1}(D)$ des composantes connexes des "secteurs" $\mathbf{S}\Theta^{-1}([\pi/2, 3\pi/2]) \subset \mathcal{S}t_D(\mathcal{M}_A)$ et de leur complémentaire $\mathbf{S}\Theta^{-1}([-\pi/2, \pi/2])$.*

Démonstration de (7.2). — On remarque que le problème est local sur X . Nous supposons que $D = \{x_1x_2 = 0\}$, le cas $D = \{x_1 = 0\}$ étant analogue. Soit $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ une ramification locale bicyclique autour de D . On utilise le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\overline{X}}(D) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \overline{X}(D) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

Il suffit de montrer, d'après la formule de projection et le fait que $\tilde{\rho}$ est fini, que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{(\pi \circ \tilde{\rho})^{-1}\mathcal{D}_X} ((\pi \circ \tilde{\rho})^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D})$ n'a de cohomologie qu'en degré 0, car $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} = \mathbf{R}\tilde{\rho}_* \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{\leq D}$. On peut donc supposer que \mathcal{M} admet une très bonne décomposition formelle. On se ramène alors au cas où \mathcal{M} est de rang 1 engendré par $e^\varphi \otimes x^\alpha$ avec $\varphi \in \mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$, en utilisant la

proposition 1.4 et le théorème 3.1, puis le fait que toute connexion régulière est extension de connexions régulières de rang 1.

Par ailleurs on a localement sur X

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}).$$

En effet, si L^\bullet est une résolution locale \mathcal{D}_X -libre de \mathcal{M} , on voit que $L^\bullet[*D]$ est une résolution de \mathcal{M} par des $\mathcal{D}_X[*D]$ -modules libres et la flèche

$$\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}L^\bullet, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]}(\pi^{-1}L^\bullet[*D], \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D})$$

est un isomorphisme de complexes.

Maintenant, \mathcal{M} comme ci-dessus admet la résolution locale suivante sur $\mathcal{D}_X[*D]$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X[*D] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -P_2 \\ P_1 \end{pmatrix}} (\mathcal{D}_X[*D])^2 \xrightarrow{\cdot(P_1, P_2)} \mathcal{D}_X[*D] \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

avec

$$P_1 = x_1\partial_{x_1} - \alpha_1 - x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad P_2 = x_2\partial_{x_2} - \alpha_2 - x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

de sorte que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D})$ est le complexe

$$\left\{ 0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \xrightarrow{\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}} \left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}\right)^2 \xrightarrow{\cdot(-P_2, P_1)} \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D} \longrightarrow 0 \right\}.$$

Pour w et $v_1 \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D}$, l'équation $P_1v_2 = P_2v_1 + w$ admet toujours une solution dans $\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D}$, d'après la version pour les systèmes partiels du théorème A.6. De plus, d'après ce théorème, si v_1 et $v_2 \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D}$ satisfont $P_1v_2 = P_2v_1$, le système (intégrable)

$$\begin{aligned} P_1u &= v_1 \\ P_2u &= v_2 \end{aligned}$$

admet une solution $u \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D}$. Ceci prouve (7.2). □

Démonstration de 7.3. — Gardons les notations ci-dessus et posons $\varphi = \lambda x^{-m}\mathcal{U}(x_1, x_2)$, $\mathcal{U}(0, 0) = 1$ et $\arg \lambda = \omega$. Nous allons considérer les faisceaux en restriction à $\pi^{-1}(0)$ lorsque $D = \{x_1x_2 = 0\}$ et on a

des résultats analogues le long de la partie lisse de D . Le théorème A.6 montre encore (en utilisant la partie “unicité”) que la cohomologie de degré 0 du complexe (7.4) est nulle si m_1 ou $m_2 = 0$ et si $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$, elle est nulle sur les secteurs fermés positifs définis par $\cos(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 - \omega) \geq 0$. On voit aussi, en utilisant le fait que sur les secteurs négatifs $e^\varphi \otimes x^\alpha \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}$, que sur ces secteurs la cohomologie est un système local de rang 1. Ici, les secteurs négatifs sont définis par $\cos(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 - \omega) < 0$ autrement dit par $-m_1\theta_1 - m_2\theta_2 + \omega \in]\pi/2, 3\pi/2[$, et, d’après le calcul fait au §6.6, cet ouvert est localement la projection (ici un isomorphisme) de $S\Theta^{-1}(]\pi/2, 3\pi/2[)$.

En utilisant la décomposition en somme directe de connexions élémentaires (3.1), on voit que le théorème 7.3 est vrai localement après ramification autour des composantes de D . Par image directe par $\tilde{\rho}$, il est vrai localement, donc globalement sur X . \square

Remarque. — Ces théorèmes ont leurs analogues pour $\mathrm{DR}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}(\mathcal{M})$ (introduit au §2.10) : ce complexe n’a de cohomologie qu’en degré 0 et dans (7.3), il faut utiliser les intervalles $]-\pi/2, \pi/2[$ et $[\pi/2, 3\pi/2[$.

Appendice : Existence et unicité locale pour certains systèmes intégrables non linéaires.

Nous rappelons dans cet appendice les résultats de Majima [10] (plus exactement des résultats voisins de ceux-ci). Nous nous placerons sur une variété de dimension quelconque pour le théorème d’existence et d’unicité locale dans $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}$. Les démonstrations que nous proposons suivent celles de [16].

A. Théorèmes d’existence et d’unicité locale.

A.1. *Les données.* — Dans la suite, la variété $X = V \times Y$ est un voisinage de l’origine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$. L’espace Y désigne l’espace des paramètres holomorphes du problème. Nous noterons $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées sur \mathbf{C}^n et $y = (y_1, \dots, y_p)$ celles sur \mathbf{C}^p . Le diviseur D est défini par $\prod_{i=1}^n x_i = 0$. Notons comme au §2.3 $\pi_D : \overline{X}(D) \rightarrow X$ l’éclatement

réel des composantes de D . Soit $\theta^0 \in (S^1)^n$, tore qu'on identifie à

$$\pi^{-1}(0) \subset \overline{X}(D) \simeq (S^1)^n \times (\mathbf{R}_+)^n \times Y.$$

Soit d un entier (rang du système (Σ) considéré plus bas) et soit \mathcal{V} un voisinage ouvert de 0 dans \mathbf{C}^d . On considère dans $X \times \mathcal{V}$ le diviseur image inverse de D par la projection $X \times \mathcal{V} \rightarrow X$, diviseur encore noté D . On a alors

$$\overline{X \times \mathcal{V}}(D) = \overline{X}(D) \times \mathcal{V}.$$

Nous définissons les faisceaux $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}$ et $\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}$ sur $\overline{X}(D)$ comme au §2.3 et au 2.12 respectivement.

Donnons-nous :

1. pour tout $i = 1, \dots, n$ des éléments $F_i \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D) \times \mathcal{V}, \theta^0}^d$ et pour tout $j = 1, \dots, p$ des éléments $\Phi_j \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D) \times \mathcal{V}, \theta^0}^d$;
2. pour tout $k = 1, \dots, d$ des germes de fonctions $\Lambda^{(k)} \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}[*D]$ de la forme

$$\Lambda^{(k)}(r, \theta, y) = \lambda^{(k)}(y) \cdot x^{-m^{(k)}} \cdot \mathcal{U}^{(k)}(r, \theta, y)$$

où

- $\lambda^{(k)} \in \mathcal{O}(Y)$ est soit *inversible*, soit *identiquement nulle* ;
- $\mathcal{U}^{(k)} \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}$ vérifie $\mathcal{U}^{(k)}(0, y) \equiv 1$;
- on peut écrire $n = n' + n''$ avec $n', n'' \geq 0$ de sorte que si l'on pose $m^{(k)} = (m_1^{(k)}, \dots, m_n^{(k)}) \in \mathbf{N}$ et si $\lambda^{(k)} \not\equiv 0$, alors pour tout $i \leq n'$ on a $m_i^{(k)} = 0$ et pour tout $i \in [n' + 1, n]$ on a $m_i^{(k)} > 0$.

Si $n' \neq 0$, nous dirons que nous sommes dans le cas *régulier* (cas (REG)), et si $n' = 0$ dans le cas *purement irrégulier* (cas (PIR)).

Remarque. — Le cas (PIR) contient comme cas dégénéré le cas où $\lambda^{(k)} \equiv 0$ pour tout k , qui est en fait régulier.

Nous noterons Λ la matrice $d \times d$ diagonale de $k^{\text{ème}}$ terme diagonal $\Lambda^{(k)}$. On voit ainsi que Λ n'a de pôles que le long du sous-diviseur $D' \subset D$ défini par $x_{n'+1} \cdots x_n = 0$.

Dans le cas (PIR) nous utiliserons les notations suivantes :

- \mathcal{K} désigne l'ensemble des $k \in \{1, \dots, d\}$ pour lesquels $\lambda^{(k)} \neq 0$.
- Soit $k \in \mathcal{K}$. Nous noterons $\omega^{(k)}(y) = \arg \lambda^{(k)}(y)$. Pour $\theta^0 \in (S^1)^n$ nous noterons $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$ l'ensemble des $k \in \mathcal{K}$ tels que l'on ait

$$\cos \left(\sum_{i=n'+1}^n m_i^{(k)} \theta_i^0 - \omega^{(k)}(0) \right) < 0.$$

A.2. *Le système* (Σ) . — Nous allons considérer le système d'équations (Σ) portant sur les fonctions inconnues $u(r, \theta, y) = (u^{(1)}(r, \theta, y), \dots, u^{(d)}(r, \theta, y))$ pour $k = 1, \dots, d$, avec $u^{(k)} \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}$:

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma_1) \quad x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1}(r, \theta, y) \cdot u + F_1(r, \theta, y, u) \\ \vdots \\ (\Sigma_n) \quad x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = x_n \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n}(r, \theta, y) \cdot u + F_n(r, \theta, y, u) \\ (\Sigma_{n+1}) \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1}(r, \theta, y) \cdot u + \Phi_1(r, \theta, y, u) \\ \vdots \\ (\Sigma_{n+p}) \quad \frac{\partial u}{\partial y_p} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_p}(r, \theta, y) \cdot u + \Phi_p(r, \theta, y, u) \end{array} \right.$$

A.3. *Intégrabilité du système* (Σ) . — Nous supposons (quitte à restreindre l'ouvert Y et l'ouvert V) que les F_i et les Φ_j sont définis sur un voisinage $U \times Y \times \mathcal{V}$ de θ^0 dans $\overline{X}(D) \times \mathcal{V}$ (rappelons que l'on note θ^0 le point de $\overline{X}(D) \times \mathcal{V} \simeq (S^1)^n \times (\mathbf{R}_+)^n \times Y \times \mathcal{V}$ dont toutes les coordonnées sauf θ^0 sont nulles). Nous noterons aussi

$$U^* = U \cap \overline{X}(D)^* = U \cap (\overline{X}(D) - \pi_D^{-1}(D)).$$

Considérons sur $V(r^0) \times \Delta(\rho^0) \times \mathcal{V}(R^0)$ la famille de formes différentielles holomorphes, pour $k = 1, \dots, d$:

$$\eta^{(k)} = du^{(k)} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_i} \cdot u^{(k)} + \frac{F_i^{(k)}}{x_i} \right) \cdot dx_i - \sum_{j=1}^p \left(\frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial y_j} \cdot u^{(k)} + \Phi_j^{(k)} \right) \cdot dy_j$$

où $F_i^{(k)}, \Phi_j^{(k)}$ sont les composantes de F_i, Φ_j .

Dire que (Σ) est intégrable sur $U \times Y \times \mathcal{V}$ c'est dire que cette famille définit au voisinage de tout point de $U^* \times Y \times \mathcal{V}$ un feuilletage

de codimension d (donc de dimension $n + p$). Explicitons cette propriété : on doit avoir pour tous $i_1, i_2 = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned}
 \text{(A.4)} \quad & x_{i_1} \frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_{i_1}} \cdot F_{i_2}^{(k)} + x_{i_2} \frac{\partial F_{i_1}^{(k)}}{\partial x_{i_2}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial F_{i_1}^{(k)}}{\partial u^{(\ell)}} \cdot \left[x_{i_2} \frac{\partial \Lambda^{(\ell)}}{\partial x_{i_2}} \cdot u^{(\ell)} + F_{i_2}^{(\ell)} \right] \\
 & = x_{i_2} \frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_{i_2}} \cdot F_{i_1}^{(k)} + x_{i_1} \frac{\partial F_{i_2}^{(k)}}{\partial x_{i_1}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial F_{i_2}^{(k)}}{\partial u^{(\ell)}} \cdot \left[x_{i_1} \frac{\partial \Lambda^{(\ell)}}{\partial x_{i_1}} \cdot u^{(\ell)} + F_{i_1}^{(\ell)} \right]
 \end{aligned}$$

et des égalités analogues entre les F_i et les Φ_j et entre les Φ_j .

Il sera utile aussi d'expliciter cette propriété après le changement de fonction inconnue

$$v^{(k)} = u^{(k)} \cdot \exp -\Lambda^{(k)}(r, \theta, y) \quad (k = 1, \dots, d)$$

qu'on notera aussi $v = [\exp -\Lambda(r, \theta, y)] \cdot u$. Alors le système (Σ) est équivalent au système

$$\text{(\tilde{\Sigma})} \quad \begin{cases} (\tilde{\Sigma}_1) & x_1 \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_1} = G_1^{(k)}(r, \theta, y, v) \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{\Sigma}_{n+p}) & \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y_p} = \Psi_p^{(k)}(r, \theta, y, v) \end{cases} \quad (k = 1, \dots, d)$$

avec

$$\begin{aligned}
 G_i^{(k)}(r, \theta, y, v) &= e^{-\Lambda^{(k)}(r, \theta, y)} \cdot F_i^{(k)}(r, \theta, y, [\exp \Lambda] \cdot v) \\
 \Psi_j^{(k)}(r, \theta, y, v) &= e^{-\Lambda^{(k)}(r, \theta, y)} \cdot \Phi_j^{(k)}(r, \theta, y, [\exp \Lambda] \cdot v).
 \end{aligned}$$

L'intégrabilité se traduit alors par les relations

$$x_{i_2} \frac{\partial G_{i_1}^{(k)}}{\partial x_{i_2}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial G_{i_1}^{(k)}}{\partial v^{(\ell)}} \cdot G_{i_2}^{(\ell)} = x_{i_1} \frac{\partial G_{i_2}^{(k)}}{\partial x_{i_1}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial G_{i_2}^{(k)}}{\partial v^{(\ell)}} \cdot G_{i_2}^{(\ell)}$$

et des relations analogues entre les G_i et les Ψ_j et entre les Ψ_j . Dans la suite, nous supposerons que (Σ) (ou $(\tilde{\Sigma})$) est intégrable.

A.5. *Systèmes partiels.* — Nous considérerons aussi des systèmes *partiels intégrables* : un tel système (Σ') est un système du type de (Σ) privé de quelques équations (nous supposerons qu'il existe toujours une équation (Σ_i) avec $i \leq n$). Nous dirons qu'un système partiel est de type (REG) si il admet une équation (Σ_i) régulière, avec $i \leq n$, c'est à dire pour laquelle $m_i^{(k)} = 0$ pour tout k . Dans le cas contraire nous dirons qu'il est

de type (PIR). La condition d'intégrabilité ne porte que sur les équations composant (Σ') . Notons que tout sous-système d'un système (PIR) l'est aussi, alors qu'un sous-système d'un système (REG) peut être (REG) ou (PIR). Nous noterons $(\Sigma_{I,J})$ le système partiel intégrable du type de (Σ) dans lequel manquent les équations (Σ_i) , $(i \in I)$ et (Σ_{n+j}) , $(j \in J)$. Les variables x_i , $i \in I$ et y_j , $j \in J$ sont "libres". Nous avons donc $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ et $J \subset \{1, \dots, p\}$.

Nous énonçons dans la suite une série de théorèmes utiles, dont la démonstration sera donnée à la section D.

(A.6) THÉORÈME (Majima). — *Supposons que dans le système (Σ) les F_i et les Φ_j satisfont*

$$F_i(r, \theta, y, 0), \Phi_j(r, \theta, y, 0) \in (\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{<D})^d.$$

Il existe alors une solution $u \in (\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{<D})^d$ de (Σ) . De plus, si (Σ) est de type (REG) ou si (Σ) est de type (PIR) et $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0) = \emptyset$, une telle solution est unique. Si (Σ) est de type (PIR), si $\mathcal{K}_{<0} \neq \emptyset$ et si u_1 et u_2 sont deux telles solutions dont les composantes $u_1^{(k)}$ et $u_2^{(k)}$ coïncident, pour $k \in \mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$, en restriction au germe de demi-droite réelle $y = 0$, $\arg x_i = \theta_i^0$, $0 < |x_1| = \dots = |x_n| < \varepsilon$, alors $u_1 = u_2$.

A.7. Remarque. — On dispose d'un théorème tout à fait analogue pour un système partiel $(\Sigma_{I,J})$: l'hypothèse ne porte que sur les F_i avec $i \notin I$ et les Φ_j avec $j \notin J$; pour avoir l'unicité dans le cas (PIR) et $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0) \neq \emptyset$, il faut imposer que les deux solutions $u_1^{(k)}$ et $u_2^{(k)}$ coïncident sur le germe

$$\left[\bigcap_{j \notin J} \{y_j = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{i \notin I} \{\arg x_i = \theta_i^0\} \right] \cap \{0 < |x_{i_1}| = \dots = |x_{i_q}| < \varepsilon\}$$

si $\{1, \dots, n\} - I = \{i_1, \dots, i_q\}$.

A.8. Les systèmes formels associés à (Σ) . — Soit I un sous-ensemble non vide de $\{1, \dots, n\}$; posons

$$D_I = \bigcap_{i \in I} \{x_i = 0\}$$

et soit $D^I \subset D_I$ le diviseur à croisements normaux défini par les coordonnées $x_i, i \notin I$ de D_I . Notons T_I l'application "développement asymptotique" :

$$T_I : \mathcal{A}_{\overline{X}(D)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}_{\overline{X}(D)|D_I}}.$$

Soit $F \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D) \times \mathcal{V}, \theta^0}$. Il existe alors un voisinage ouvert $U \times Y \times \mathcal{V}$ de θ^0 dans $\overline{X}(D) \times \mathcal{V}$ tel que F admette un développement en série convergeant uniformément sur tout compact :

$$F(r, \theta, y, u) = \sum_{M \in \mathbf{N}^d} F_M(r, \theta, y) \cdot u^M$$

avec $F_M \in \Gamma(U \times Y, \mathcal{A}_{\overline{X}(D)})$. Dans la suite nous choisirons un tel voisinage pour que toute fonction F_i ou Φ_j intervenant dans (Σ) ait un tel développement dans $U \times Y \times \mathcal{V}$. Considérons alors

$$v = (v^{(1)}, \dots, v^{(d)}) \in \widehat{\mathcal{A}_{\overline{X}(D)|D_I}}(U).$$

On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

- F est polynomial en u ;
- $v|_{D_I} \equiv 0$, i.e. $v \in \mathcal{A}_{\overline{D_I}(D^I)}(U_I) \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}_I$, si $U_I = U \cap D_I$ et \mathfrak{m}_I est l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[x_I]]$.

On peut alors poser

$$T_I F(r, \theta, y, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{M \in \mathbf{N}^d} T_I F_M(r, \theta, y) \cdot v^M$$

qui est un élément bien défini de $\mathcal{A}_{\overline{D_I}(D^I)}(U_I) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[[x_I]]$ puisque dans le second cas la valuation de v^M par rapport à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_I = (x_i)_{i \in I}$ de $\mathbf{C}[[x_I]]$ est $\geq |M|$.

(A.9) DÉFINITION. — Une solution du système $(T_I \Sigma)$ en θ^0 est un d -uplet v comme ci-dessus satisfaisant

$$(T_I \Sigma) \left\{ \begin{array}{ll} (T_I \Sigma_1) & x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial T_I \Lambda}{\partial x_1}(r, \theta, y) \cdot v + T_I F_1(r, \theta, y, v) \\ \vdots & \vdots \\ (T_I \Sigma_{n+p}) & \frac{\partial v}{\partial y_p} = \frac{\partial T_I \Lambda}{\partial y_p}(r, \theta, y) \cdot v + T_I \Phi_p(r, \theta, y, v) \end{array} \right.$$

avec $T_I \Lambda^{(k)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lambda^{(k)}(y)x^{-m^{(k)}} \cdot T_I \mathcal{U}(r, \theta, y)$.

Remarque. — Si I est vide, nous poserons $(T_I \Sigma) = (\Sigma)$. Si $u \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^d$ est solution de (Σ) et si $k \in \mathcal{K}$ on a $u^{(k)}|_{\pi_D^{-1}(D_i)} = 0$ pour tout $i \in \{n' + 1, \dots, n\}$ puisque l'on a $m_i^{(k)} > 0$.

(A.10) LEMME.

1. Pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, si v est solution de $(T_I \Sigma)$, alors pour tout $j \notin I$, $T_j v$ est solution de $(T_{I \cup \{j\}} \Sigma)$.
2. Le syst\u00e8me $(T_I \Sigma)$ est int\u00e9grable (au sens o\u00f9 les relations analogues \u00e0 (A.4) sont satisfaites). \(\square\)

Nous allons d\u00e9duire du th\u00e9or\u00e8me A.6 le r\u00e9sultat suivant :

(A.11) COROLLAIRE. — Sous les hypoth\u00e8ses ci-dessus, supposons que les F_k et les Φ_ℓ sont dans $\mathcal{A}_{\overline{X}(D) \times V, \theta^0}$. Supposons de plus que pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe une solution u_i de $(T_i \Sigma)$ en θ^0 et que pour tout couple i, j on ait $T_i u_j = T_j u_i$. Alors il existe une solution $u \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^d$ de (Σ) . De plus, si u et v sont deux telles solutions v\u00e9rifiant

$$T_i u = T_i v \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

alors $u = v$ lorsque (Σ) est du type (REG) ou du type (PIR) avec $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0) = \emptyset$. Dans les autres cas, il faut imposer aussi que pour tout $k \in \mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$ les composantes $u^{(k)}$ et $v^{(k)}$ co\u00efncident en restriction au germe de demi-droite r\u00e9elle $y = 0$, $\arg x_i = \theta_i^0$, $0 < |x_1| = \dots = |x_n| < \varepsilon$.

D\u00e9monstration de l'existence. — D'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me de Borel-Ritt 2.14, il existe $v \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^d$ avec $T_i v = u_i$ pour tout i . Alors $u \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^d$ est solution de (Σ) si et seulement si $w = u - v$ est solution de (Σ_v) :

$$\begin{aligned}
 (\Sigma_{v,1}) \quad x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} &= x_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \cdot w + x_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \cdot v - x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + F_1(r, \theta, y, w + v) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

et par hypoth\u00e8se nous sommes ramen\u00e9s au cas o\u00f9 l'on peut supposer que les F_i et les Φ_j satisfont

$$F_i(r, \theta, y, 0), \Phi_j(r, \theta, y, 0) \in (\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{<D})^d.$$

On applique alors le th\u00e9or\u00e8me A.6. \(\square\)

Démonstration de l'unicité. — On a $u - v \in (\mathcal{A}_{\overline{X(D)}, \theta^0}^{\leq D})^d$ et $u - v \equiv 0$ sur la demi-droite réelle considérée. De plus, $u - v$ est solution d'un système du type de (Σ) où les F_i et Φ_j satisfont

$$F_i(r, \theta, y, 0) = \Phi_j(r, \theta, y, 0) = 0.$$

On applique alors le théorème A.6. □

Remarque. — On a un énoncé analogue dans le cas d'un système partiel $(\Sigma_{I,J})$ en utilisant la remarque A.7.

Le corollaire précédent n'est pas suffisant dans la pratique, car il n'est pas facile de calculer avec $\mathcal{A}_{\overline{X(D)|D_i}}$. Par contre il est plus simple de calculer avec $\mathcal{A}_{\overline{X(D)|Y}}$, autrement dit avec des séries formelles par rapport à toutes les variables x . Faisons maintenant les hypothèses supplémentaires (a) et (b) sur le système (Σ) (on suppose toujours (A.1) satisfaite).

- (a) Si $n'' \neq 0$ (i.e. si il existe i avec $m_i^{(k)} > 0$ pour tout k tel que $\lambda_k \neq 0$) alors, pour tout $k = 1, \dots, d$, $\lambda^{(k)}$ ne s'annule pas (i.e. $\mathcal{K} = \{1, \dots, d\}$, i.e. la matrice Λ est inversible).
- (b) Ecrivons pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 (\Sigma_i) \quad x_i \partial_{x_i} u &= F_{i,0}(x, y) + [A_i(x, y) + x_i \partial_{x_i} \Lambda] \cdot u \\
 &+ \sum_{|M| \geq 2} F_{i,M}(x, y) \cdot u^M
 \end{aligned}$$

où $A_i(x, y) \cdot u = \sum_{|M|=1} F_{i,M}(x, y) \cdot u^M$ et $F_{i,0}(x, y) = F_i(x, y, 0)$.

Si $n' \neq 0$ on impose alors que pour tout $i = 1, \dots, n'$ (i.e. tel que (Σ_i) soit régulière en x_i) la matrice $A_i(0, 0)$ n'ait pas de valeur propre dans $\mathbf{N} - \{0\}$ et $F_{i,0}(x, y)|_{x_i=0} \equiv 0$.

(A.12) THÉORÈME (Majima [10]). — *Sous les hypothèses ci-dessus, soit \hat{u} un germe en $0 \in Y$ de section de $\mathcal{A}_{\overline{X(D), Y}}^d$ solution du système formel $(T_Y \Sigma) (= (T_{\{1, \dots, n\}}(\Sigma)))$ qui est multiple de $x_1 \cdots x_n$. Faisons l'une des deux hypothèses :*

- les F_i et les Φ_j intervenant dans (Σ) sont polynomiaux en u ;
- \hat{u} est multiple de $x_1 \cdots x_n$.

Il existe alors un relèvement $u_{\theta^0} \in \mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^d$ de \hat{u} multiple de $x_1 \cdots x_n$, qui est solution de (Σ) (et qui est multiple de $x_1 \cdots x_n$ dans le second cas). De plus, on a une assertion d'unicité analogue à celle du corollaire A.11.

B. Le cas (REG).

Nous nous plaçons dans la situation du §A.1. Nous allons d'abord démontrer un énoncé un peu plus précis que le théorème A.6, aussi nous aurons besoin d'introduire quelques notions supplémentaires. Nous supposerons à partir du §B.3 que (Σ) est dans le cas (REG).

B.1. *Les données.* — Nous appellerons *secteur ouvert* dans \mathbf{C}^n (en fait, c'est un polysecteur), de rayon $r = (r_1, \dots, r_n)$ avec $r_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, un ouvert du type

$$V(r) = \left\{ x \in \mathbf{C}^n \mid 0 < |x_i| < r_i, \quad \alpha_i < \arg x_i < \beta_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Nous appellerons *secteur fermé* dans \mathbf{C}^n , de rayon $r = (r_1, \dots, r_n)$ avec $r_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, un ensemble du type

$$W(r) = \left\{ x \in \mathbf{C}^n \mid 0 < |x_i| < r_i, \quad \underline{\theta}_i \leq \arg x_i \leq \bar{\theta}_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Nous allons considérer le système d'équations (Σ) du §A.2 avec les données suivantes :

1.

- un secteur ouvert $V(r^0) \subset \mathbf{C}^n$ ($r^0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $r_i^0 > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$);
- un polydisque ouvert $\Delta(\rho^0) \subset \mathbf{C}^p$ ($\rho^0 = (\rho_1^0, \dots, \rho_p^0)$, $\rho_j^0 > 0$ pour tout $j = 1, \dots, p$);
- un polydisque ouvert $\mathcal{V}(R^0) \subset \mathbf{C}^d$ ($d \in \mathbf{N}$ est le rang du système (Σ) , $R^0 > 0$).

2. Pour tous $k = 1, \dots, d$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$

- des fonctions $F_i^{(k)}(x, y, u)$ holomorphes sur $V(r^0) \times \Delta(\rho^0) \times \mathcal{V}(R^0)$;
- des fonctions $\Phi_j^{(k)}(x, y, u)$ holomorphes sur $V(r^0) \times \Delta(\rho^0) \times \mathcal{V}(R^0)$;
- des fonctions $\Lambda^{(k)}(x, y)$ sur $V(r^0) \times \Delta(\rho^0)$ de la forme

$$\Lambda^{(k)}(x, y) = \lambda^{(k)}(y) \cdot x^{-m^{(k)}} \cdot \mathcal{U}^{(k)}(x, y)$$

où

- $\lambda^{(k)} \in \mathcal{O}(\Delta(\rho^0))$ est soit *inversible* soit *identiquement nulle*;
- $\mathcal{U}^{(k)} \in \mathcal{O}(V(r^0) \times \Delta(\rho^0))$ est *inversible* et

$$\forall x \in \Delta(\rho^0) \quad \lim_{x \rightarrow 0, x \in V(r^0)} \mathcal{U}^{(k)}(x, y) = 1;$$

- $m^{(k)}$ comme au §A.1.

Ces données sont soumises aux conditions décrites ci-après.

B.2. *Hypothèses sur les seconds membres.* — Nous ferons les hypothèses suivantes : pour tout sous-secteur fermé $\widetilde{W} \subset V$ et tous polydisques fermés $\widetilde{D} \subset \Delta$ et $\widetilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{V}$,

1. il existe $L = L(\widetilde{W}, \widetilde{D}, \widetilde{\mathcal{W}}) > 0$ tel que pour tous $(x, y) \in \widetilde{W} \times \widetilde{D}$ et tous $u, u' \in \widetilde{\mathcal{W}}$ on ait pour tous i, j

$$\|F_i(x, y, u) - F_i(x, y, u')\| \leq L \cdot \|u - u'\|$$

$$\|\Phi_j(x, y, u) - \Phi_j(x, y, u')\| \leq L \cdot \|u - u'\|;$$

et les dérivées partielles (en x) de F_i et Φ_j sont bornées sur le domaine considéré;

2. *platitude uniforme relativement au paramètre y* : pour tout $N \in \mathbf{N}^n$, il existe $K_N = K_N(\widetilde{W}, \widetilde{D}, \widetilde{\mathcal{W}}) > 0$ tel que l'on ait sur $\widetilde{W} \times \widetilde{D} \times \widetilde{\mathcal{W}}$ pour tous i, j

$$\|F_i(x, y, 0)\| \leq K_N \cdot |x|^N \quad (\stackrel{\text{déf}}{=} K_N \cdot |x_1|^{N_1} \cdots |x_n|^{N_n})$$

$$\|\Phi_j(x, y, 0)\| \leq K_N \cdot |x|^N.$$

B.3. *Espaces fonctionnels pour le cas (REG).* — Soit $y^0 \in \Delta(\rho^0)$. Fixons $r < r^0$, $\rho < \rho^0 - |y^0|$, soit $W(r)$ un secteur fermé de rayon r contenu dans $V(r^0)$ et $N \in \mathbf{N}^n$ et $K > 0$. On note $\mathcal{G}(N, W(r), K, \rho; y^0)$ l'espace des fonctions φ continues sur $W(r) \times D(y^0, \rho)$, holomorphes à l'intérieur et vérifiant sur ce domaine l'inégalité $|\varphi(x, y)| \leq K |x|^N$. On munit l'espace $\bigcup_{K>0} \mathcal{G}(N, W(r), K, \rho; y^0)$ de la norme $\|\varphi\| = \sup |\varphi(x, y)| |x|^{-N}$. On fixe ci-dessous une direction de secteur notée dans la suite $W(\infty)$ et seul r pourra varier dans $W(r)$. Quitte à diminuer r^0 , ρ^0 et R^0 , on peut supposer

qu'il existe $L > 0$ tel que les inégalités du §B.2-(1) soient satisfaites sur $W(r^0) \times \Delta(\rho^0) \times \mathcal{V}(R^0)$.

(B.4) THÉORÈME. — Soit $N^0 \in (\mathbf{N} - \{0\})^n$ avec $\inf_i N_i^0 > 4L$. Il existe alors des fonctions

$$\mathbf{N}^n \xrightarrow{\mathbf{r}_i}]0, \min(1, r_i^0)[\quad (i = 1, \dots, n)$$

et pour tout $y^0 \in \Delta(\rho^0)$

$$\mathbf{N}^n \times (\mathbf{R}_{>0})^n \times \mathbf{R}_{>0} \xrightarrow{\rho_j}]0, \rho_j^0 - |y^0|[\quad (j = 1, \dots, p)$$

telles que pour

tout $N \geq N^0$,

tout r vérifiant $0 < r < \mathbf{r}(N)$ et $4K_N / \inf_i N_i < R^0 r^{-N}$,

tout $K > 0$ vérifiant $4K_N / \inf_i N_i < K < R^0 r^{-N}$

et tout ρ vérifiant $0 < \rho < \boldsymbol{\rho}(N, K, r)$

il existe une unique $u \in \mathcal{G}(N, r, K, \rho; y^0)^d$ solution de (Σ) à l'intérieur de $W(r) \times D(y^0; \rho)$.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{G}(N, r, K, \rho; y^0)$. L'inégalité $K < R^0 r^{-N}$ montre que $|\varphi(x, y)| < R^0$ sur $W(r) \times D(y^0, \rho)$. On considère l'opérateur $T = (T^{(1)}, \dots, T^{(d)})$ défini par

$$T^{(k)}u(x, y) = e^{\Lambda^{(k)}(x, y)} \int_{[0, x_1]} F_1^{(k)}(\xi_1, x', y, u(\xi_1, x', y)) e^{-\Lambda^{(k)}(\xi_1, x', y)} \frac{d\xi_1}{\xi_1}.$$

On choisit successivement \mathbf{r} , K et $\boldsymbol{\rho}$ pour que l'on ait sur $W(\mathbf{r}) \times D(\boldsymbol{\rho})$

$$\left| \exp \Lambda^{(k)}(x_1, x', 0) \right| \cdot \sup_{\xi_1 \in [0, x_1]} \left| \exp -\Lambda^{(k)}(\xi_1, x', 0) \right| < 2$$

$$\frac{4K_N}{\inf_i N_i} < R^0 r^{-N}$$

$$\frac{4K_N}{\inf_i N_i} < K < R^0 r^{-N}$$

$$\left| \exp \Lambda^{(k)}(x_1, x', y) \right| \cdot \sup_{\xi_1 \in [0, x_1]} \left| \exp -\Lambda^{(k)}(\xi_1, x', y) \right| < 2.$$

C'est possible car $m_1^{(k)} = 0$ pour tout k tel que $\Lambda^{(k)} \neq 0$. On utilise ensuite le fait que pour $u \in \mathcal{G}(N, r, K, \rho; y^0)^d$, on a sur $W(r) \times D(y^0, \rho)$

$$\left| F_1^{(k)}(x, y, u(x, y)) \right| \leq (K_N + LK) |x|^N.$$

On en déduit que T opère sur $\mathcal{G}(N, r, K, \rho; y^0)$ et qu'il est contractant. Son point fixe u est par construction solution de (Σ_1) . Montrons qu'il est solution de (Σ) . Posons $v = [\exp -\Lambda] \cdot u$ et soit (x, y) dans l'intérieur de $W(r) \times D(y^0, \rho)$. Alors

$$v^{(k)}(x, y) = \int_0^{x_1} G_1^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) \frac{d\xi_1}{\xi_1}.$$

Par construction, v est solution de $(\tilde{\Sigma}_1)$. Pour tout $i \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} \text{(B.5)} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} v^{(k)}(x, y) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[G_1^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) \right] \frac{d\xi_1}{\xi_1} \\ &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[G_1^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) \right] \frac{d\xi_1}{x_i} \end{aligned}$$

$$\text{(B.6)} \quad = \frac{G_i^{(k)}(x, y, v(x, y))}{x_i}.$$

La deuxième égalité provient de la condition d'intégrabilité de $(\tilde{\Sigma})$. Pour vérifier la première, il suffit de voir que $\partial/\partial x_i \left(G_1^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) / \xi_1 \right)$ est majorée par une fonction intégrable sur $[0, x_1]$ localement indépendante de (x', y) , et pour la troisième que

$$\text{(B.7)} \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} G_i^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\xi_1} G_1^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) \right] &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{1}{x_i} G_i^{(k)}(\xi_1, x', y, v(\xi_1, x', y)) \right] \\ &= \frac{1}{x_i} \left[\frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial \xi_1} + \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial v^{(\ell)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial v^{(\ell)}} \right] \\ &= \frac{1}{x_i} \left[\frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial \xi_1} + \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{\xi_1} G_1^{(\ell)} \cdot \frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial v^{(\ell)}} \right]. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de vérifier l'intégrabilité uniforme du terme entre crochets sur $[0, x_1]$. On a

$$\left| F_1^{(\ell)}(x, y, u(x, y)) \right| \leq L \|u\| + K_N |x|^N \leq (LK + K_N) |x|^N ;$$

de plus les dérivées partielles en x des $F_i^{(k)}$ sont bornées; on en déduit la sommabilité cherchée, d'où l'égalité (B.5). On en déduit de même (B.7) et donc l'égalité (B.6). On vérifie de même que v satisfait $\tilde{\Sigma}_{n+j}$ pour tout $j = 1, \dots, p$. \square

B.8. *Remarque.* — On a un théorème identique dans le cas d'un système intégrable partiel de type (REG).

C. Le cas (PIR).

Nous gardons les notations et les hypothèses des §B.1 et B.2 et nous supposons que (Σ) est dans le cas (PIR). Toutefois, si $\Lambda \equiv 0$, on peut appliquer le théorème précédent. Avant de décrire les espaces fonctionnels, nous allons introduire quelques outils préliminaires.

C.1. *Construction de base : la fonction de Hukuhara.* — Nous allons travailler dans ce paragraphe avec une seule variable. Soit donc $\theta^0 \in S^1$ et \mathcal{K} un ensemble fini. On se donne, pour tout $k \in \mathcal{K}$, un entier $\tau^{(k)} > 0$ et $\omega_0^{(k)} \in S^1$. Considérons le secteur fermé $I = [\theta^0 - \underline{\varepsilon}, \theta^0 + \bar{\varepsilon}]$ autour de θ^0 , avec $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon} > 0$. Soit $k \in \mathcal{K}$.

Nous dirons que θ^0 est > 0 (resp. < 0) relativement à $(\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)})$ si

$$\cos(\tau^{(k)}\theta^0 - \omega_0^{(k)}) > 0 \quad (\text{resp. } < 0)$$

et que θ^0 est de type $(+-)$ (resp. de type $(-+)$) relativement à $(\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)})$ si

$$\tau^{(k)}\theta^0 - \omega_0^{(k)} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{resp. } -\frac{\pi}{2}) \pmod{2\pi}.$$

Nous noterons

$$I_{+(k)} = \begin{cases} [\theta^0, \theta^0 + \bar{\varepsilon}] & \text{si } \theta^0 < 0 \text{ rel. } (\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)}), \\ I & \text{si } \theta^0 \text{ est de type } (+-) \text{ rel. } (\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)}), \\ \emptyset & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

et

$$I_{-(k)} = \begin{cases} [\theta^0 - \underline{\varepsilon}, \theta^0] & \text{si } \theta^0 < 0 \text{ rel. } (\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)}), \\ I & \text{si } \theta^0 \text{ est de type } (-+) \text{ rel. } (\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)}), \\ \emptyset & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(C.2) LEMME. — *Etant donnée une famille finie $(\tau^{(k)}, \omega_0^{(k)})_{k \in \mathcal{K}}$ comme ci-dessus et $\theta^0 \in S^1$, il existe $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon} > 0$, des voisinages ouverts $\Omega^{(k)}$ de $\omega_0^{(k)}$ sur S^1 et une fonction $\alpha : [\theta^0 - \underline{\varepsilon}, \theta^0 + \bar{\varepsilon}] \rightarrow]0, \pi[$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. α est affine et décroissante par morceaux ;
2. pour tout $k \in \mathcal{K}$ et tout $\omega^{(k)} \in \Omega^{(k)}$ on a

$$\cos(\tau^{(k)}\theta - \omega^{(k)} + \alpha(\theta)) \begin{cases} < 0 & \forall \theta \in I_{+(k)} \\ > 0 & \forall \theta \in I_{-(k)}. \end{cases}$$

Remarques.

1. La fonction α n'est pas nécessairement continue en θ^0 .
2. Il suffit de montrer la propriété 2 pour $\omega^{(k)} = \omega_0^{(k)}$ et l'existence des $\Omega^{(k)}$ s'en déduit immédiatement.

Démonstration du lemme. — Elle est un peu plus simple que celle donnée dans [16], aussi nous allons l'indiquer. Les conditions sur α sont équivalentes aux conditions suivantes :

- $\text{Im } \alpha \subset]0, \pi[$;
- si θ^0 est de type $(+-)$ ou $(-+)$ rel. k , le graphe de $\alpha(\theta)$ est au-dessus de la droite de direction $-\tau^{(k)}$ et passant par le point $(\theta^0, 0)$ et au-dessous de la droite de même direction et passant par le point (θ^0, π) ;
- si $\theta^0 < 0$ rel. k ,
 - le graphe de α sur $[\theta^0 - \underline{\varepsilon}, \theta^0]$ est au-dessus de la droite d'équation $-\tau^{(k)}\theta + \omega_0^{(k)} + 3\pi/2 = 0$ (on a $-\tau^{(k)}\theta^0 + \omega_0^{(k)} + 3\pi/2 \in]0, \pi[$ dans ce cas) et au-dessous de la droite $-\tau^{(k)}\theta + \omega_0^{(k)} + \pi/2 = 0$ (et on a $-\tau^{(k)}\theta^0 + \omega_0^{(k)} + \pi/2 \in]\pi, 2\pi[$) ; cette deuxième condition est donc satisfaite pour $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$ assez petits puisque $\text{Im } \alpha \in]0, \pi[$.
 - le graphe de α sur $[\theta^0, \theta^0 + \bar{\varepsilon}]$ est au-dessous de la droite $-\tau^{(k)}\theta + \omega_0^{(k)} + 3\pi/2 = 0$ et au-dessus de la droite $-\tau^{(k)}\theta + \omega_0^{(k)} + \pi/2 = 0$.

Le graphe de α doit donc se trouver dans la partie hachurée de la figure 1, ce qui explique la discontinuité éventuelle de α en θ^0 .

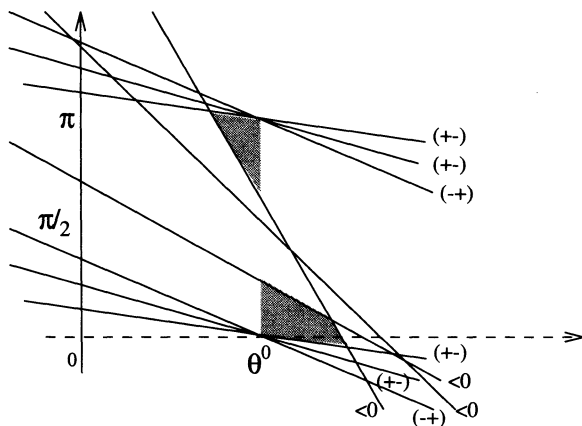


Figure 1

Revenons maintenant à la situation des §B.1 et B.2 dans le cas (PIR). Nous aurons besoin d'un certain nombre de définitions.

C.3. *Type d'une multi-direction et d'un secteur.* — Soit $\theta^0 \in (S^1)^n$ une multi-direction. Pour $y^0 \in \Delta(\rho^0)$ et $k \in \mathcal{K}$ nous dirons que θ^0 est > 0 (resp. < 0) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$ si

$$\cos \left(\sum_{i=1}^n m_i^{(k)} \theta_i^0 - \omega^{(k)}(y^0) \right) > 0 \quad (\text{resp. } < 0)$$

et θ^0 est de type $(+-)$ (resp. $(-+)$) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$ si

$$\sum_{i=1}^n m_i^{(k)} \theta_i^0 - \omega^{(k)}(y^0) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{resp. } -\frac{\pi}{2}) \pmod{2\pi}.$$

Autrement dit, par l'application $M^{(k)} : (S^1)^n \rightarrow S^1$ définie par

$$M^{(k)}(\theta) = \sum_{i=1}^n m_i^{(k)} \theta_i,$$

θ^0 a le type de $M^{(k)}(\theta^0)$ rel. $(1, \omega^{(k)}(y^0))$ tel qu'il a été défini au §C.1.

Rappelons aussi que nous avons noté au §A.1 $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$ l'ensemble des $k \in \mathcal{K}$ pour lesquels θ^0 est < 0 rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$.

De la même manière nous dirons qu'un sous-ensemble de $(S^1)^n$ est de type > 0 (resp. < 0) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$ si il est contenu dans l'image inverse par $M^{(k)}$ d'un secteur de S^1 du même type rel. $(1, \omega^{(k)}(y^0))$. Il est de type $(+-)$ (resp. $(-+)$) s'il est contenu dans l'image inverse par $M^{(k)}$ d'un secteur du même type et si il contient dans son intérieur un point θ^0 du même type.

Un polysecteur $W(\infty) = \prod_{i=1}^n W_i(\infty) = \prod_i [\theta_i, \bar{\theta}_i]$ est propre en $y^0 \in \Delta(\rho^0)$ s'il est de l'un des types décrits ci-dessus relativement à $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$, et ce pour tout $k \in \mathcal{K}$. Nous pouvons alors définir de manière analogue $\mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$.

Dans la suite, pour les besoins de la récurrence, nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante sur les polysecteurs propres considérés :

(H) Si $k \in \mathcal{K}$ et si $W(\infty)$ est de type $(+-)$ (resp. $(-+)$) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$,

alors, pour tout $\theta' = (\theta_2, \dots, \theta_n) \in \prod_{i=2}^n W_i(\infty)$, $W_1(\infty)$ est de type $(+-)$
 (resp. $(-+)$) rel. $(m_1^{(k)}, -\sum_{i=2}^n m_i^{(k)}\theta_i + \omega^{(k)}(y^0))$.

Notons tout de suite le

(C.4) LEMME. — Soit $\theta^0 \in (S^1)^n$. Alors θ^0 admet un système fondamental de voisinages $W(\infty)$ qui sont des secteurs propres qui satisfont l'hypothèse (H) et qui sont du type de θ^0 rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$ pour tout $k \in \mathcal{K}$ et tout y^0 assez voisin de 0.

Démonstration. — En ce qui concerne l'hypothèse (H), si θ^0 est de type $(+-)$ (resp. $(-+)$) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$, on considère la figure 2. \square

C.5. Fonctions de Hukuhara. — Soit $(W(\infty), \theta^0)$ un secteur propre en 0, pointé, c'est à dire que θ^0 est dans l'intérieur de $W(\infty)$. Alors pour tout y^0 assez proche de 0, $W(\infty)$ est propre en y^0 et du même type, pour tout $k \in \mathcal{K}$. De manière analogue à celle du §C.1, on définit $W_i(\infty)_{+(k)}$ et $W_i(\infty)_{-(k)}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ suivant le type de $W(\infty)$ rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(y^0))$.

On définit alors les sous-polysecteurs $W(\infty)_{\pm i(k)} \subset W(\infty)$ en remplaçant dans $W(\infty)$ le terme $W_i(\infty)$ par $W_i(\infty)_{\pm i(k)}$.

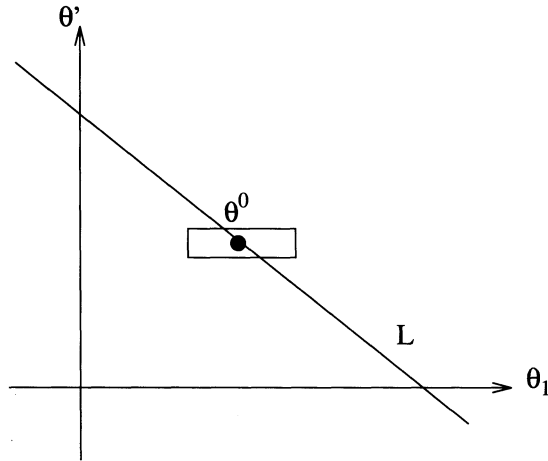


Figure 2 : L est la droite d'équation $M^{(k)}(\theta) - \omega^{(k)}(y^0) = \pm\pi/2$

Une fonction de Hukuhara dans la direction i est une fonction $\alpha_i : W_i(\infty) \rightarrow]0, \pi[$ affine et décroissante par morceaux, qui vérifie, pour tout $k \in \mathcal{K}$

$$\cos \left(M^{(k)}(\theta) - \omega^{(k)}(y^0) + \alpha_i(\theta_i) \right) \begin{cases} < 0 & \forall \theta \in W(\infty)_{+i(k)} \\ > 0 & \forall \theta \in W(\infty)_{-i(k)}. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que si α_i est une fonction de Hukuhara pour la valeur $y^0 = 0$ du paramètre, α_i reste une fonction de Hukuhara pour tout y^0 assez proche de 0. On déduit des résultats du §C.1 :

(C.6) LEMME. — Soit $\theta^0 \in (S^1)^n$. Alors θ^0 admet un système fondamental de voisinages de la forme $W(\infty)$, munis de fonctions de Hukuhara α_i ($i = 1, \dots, n$) pour le secteur pointé $(W(\infty), \theta^0)$ et relatives à tout y^0 assez proche de 0 dans $\Delta(\rho^0)$. On peut supposer de plus que les voisinages satisfont la condition (H). □

C.7. Domaines de Hukuhara. — Soit $(W(\infty), \theta^0, \alpha)$ un secteur propre pointé, muni de fonctions de Hukuhara, le tout relativement à un point y^0 de l'espace des paramètres. On associe à une telle donnée et à $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{R}_{>0})^n$ un ensemble dans \mathbf{C}^n noté $\mathcal{S}(r; y^0)$: on pose $\mathcal{S}(r; y^0) = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i(r_i, y^0)$ et

$$x_i \in \mathcal{S}_i(r_i; y^0) \iff \arg x_i \in W_i(\infty) \quad \text{et} \quad 0 < |x_i| \leq r_i \cdot A_i(\arg x_i)$$

où $A_i : W_i(\infty) \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est la fonction associée à α_i de la même manière que dans [16, (1.5.2), cas 1 et 2] : pour la définir, posons

$$W_i(\infty)_{\pm} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} W_i(\infty)_{\pm(k)}.$$

On a

$$W_i(\infty)_+ = \begin{cases} [\theta_i^0, \bar{\theta}_i] & \text{si } \mathcal{K}_{<0}(W(\infty)) \neq \emptyset \text{ et } \forall k \in \mathcal{K}, W(\infty) \text{ n'est pas} \\ & \text{de type } (+-) \text{ rel. } (m^{(k)}, \omega^{(k)}(0)) \\ W_i(\infty) & \text{si } \exists k \in \mathcal{K} \text{ tel que } W(\infty) \text{ est} \\ & \text{de type } (+-) \text{ rel. } (m^{(k)}, \omega^{(k)}(0)) \\ \emptyset & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

et une description analogue pour $W_i(\infty)_-$. On remarque que si l'ensemble $W_i(\infty)_+ \cup W_i(\infty)_-$ n'est pas vide il est égal à $W_i(\infty)$, et qu'il est vide si et seulement si $W(\infty)$ est > 0 pour tout $k \in \mathcal{K}$ (ce qu'on note aussi $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{>0}(W(\infty))$). On pose donc

$$A_i(\theta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{K}_{>0}(W(\infty)) \\ \exp \int_{\theta_i}^{\bar{\theta}_i} \cot(\alpha_i(\sigma_i)) d\sigma_i & \text{si } k \in \mathcal{K} - \mathcal{K}_{>0}(W(\infty)). \end{cases}$$

Remarque.

1. $\mathcal{S}(r; y^0)$ est encore un domaine de Hukuhara pour toute valeur y du paramètre assez voisine de y^0 .
2. $\mathcal{S}(r; y^0)$ est naturellement muni d'un point base $x(r) = (x_1(r), \dots, x_n(r))$ avec

$$\arg x_i(r) = \theta_i^0 \quad \text{et} \quad |x_i(r)| = r_i \cdot A_i(\theta_i^0).$$

C.8. *Conditions initiales et espace des solutions.* — Soit $(W(\infty), \theta^0)$ un secteur propre pointé et soit $\delta = \delta(W(\infty)) = \text{card } \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$. L'espace des conditions initiales (en y^0) associé à $(W(\infty), \theta^0)$ est un polydisque dans \mathbf{C}^δ : on note, pour $N \in \mathbf{N}^n$, $r \in (\mathbf{R}_{>0})^n$ et $K > 0$

$$\mathcal{B}(N, r, K; y^0) = \left\{ c \in \mathbf{C}^\delta \mid \forall k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty)), |c^{(k)}| \leq K |x(r)|^N \right\}.$$

La dépendance de \mathcal{B} par rapport au paramètre y^0 provient du fait que $\mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$ dépend du paramètre. Il est cependant clair que pour y assez

voisin de y^0 , cet ensemble n'en dépend pas, et on le notera alors $\mathcal{B}(N, r, K)$ lorsque $y^0 = 0$.

Pour N, r, K comme ci-dessus et $\rho < \rho^0$, nous notons $\mathcal{F}(N, r, K, \rho; y^0)$ l'ensemble des fonctions continues $\varphi : \mathcal{S}(r; y^0) \times D(y^0, \rho) \rightarrow \mathbf{C}$, holomorphes à l'intérieur de ce domaine et satisfaisant sur ce domaine

$$|\varphi(x, y)| \leq K |x|^N.$$

Il est muni de la norme $\sup |\varphi(x, y)| |x|^{-N}$.

C.9. Le théorème d'existence et d'unicité locale. — Nous restons dans la situation introduite plus haut, notamment les hypothèses du §B.2 sont satisfaites. Soit $(W(\infty), \theta^0)$ un secteur propre pointé en $y^0 = 0$. Nous supposerons (ce qui est possible) que ρ^0 est choisi de sorte que toutes les "données de Hukuhara" soient indépendantes du paramètre $y \in \Delta(\rho^0)$. Nous omettrons alors la dépendance vis à vis du paramètre dans la notation. Nous supposerons aussi que $W(\infty)$ satisfait l'hypothèse (H) du §C.3. Nous reprenons ci-dessous les notations du §B.2.

(C.10) THÉORÈME. — Soit $N^0 \in (\mathbf{N} - \{0\})^n$ avec $\inf_i N_i^0 > 2(n+p)L$. Il existe alors des fonctions

$$\mathbf{N}^n \xrightarrow{\mathbf{r}_i}]0, \min(1, r_i^0)[\quad (i = 1, \dots, n)$$

et pour tout $y^0 \in \Delta(\rho^0)$

$$\mathbf{N}^n \times (\mathbf{R}_{>0})^n \times \mathbf{R}_{>0} \xrightarrow{\rho_j}]0, \rho_j^0 - |y^0|[\quad (j = 1, \dots, p)$$

telles que pour

$$\text{tout } N \geq N^0,$$

$$\text{tout } r \text{ vérifiant } 0 < r < \mathbf{r}(N) \text{ et } 2K_N / \inf_i N_i < R^0 r^{-N},$$

$$\text{tout } K > 0 \text{ vérifiant } 2K_N / \inf_i N_i < K < R^0 r^{-N},$$

$$\text{tout } \rho \text{ vérifiant } 0 < \rho < \rho(N, K, r)$$

$$\text{et enfin tout } c \in \mathcal{B}(N, r, K/2),$$

il existe une unique $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho; y^0)^d$ solution de (Σ) à l'intérieur de $\mathcal{S}(r) \times D(y^0; \rho)$ satisfaisant la condition initiale

$$\text{pour tout } k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty)), \quad u^{(k)}(x(r), y^0) = c^{(k)}.$$

De plus, cette solution vérifie $|u^{(k)}(x, y^0)| \leq K/2$ sur $\mathcal{S}(r) \times \{y^0\}$ pour tout $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$.

C.11. *Les chemins d'intégration $\mathcal{C}_i^{(k)}$.* — Lorsque $k \notin \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, nous n'aurons besoin de définir que les chemins $\mathcal{C}_1^{(k)}$ dans le plan de la variable x_1 . Si $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, nous définirons les chemins $\mathcal{C}_i^{(k)}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (nous suivons les définitions de [16]). Soit $x \in \mathcal{S}(r)$

- Si $k \notin \mathcal{K}$ ou si $k \in \mathcal{K}$ et $W(\infty)$ est > 0 rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(0))$, $\mathcal{C}_1^{(k)}(x_1)$ est le chemin radial issu de 0 et aboutissant à x_1 dans $\mathcal{S}(r_1)$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1^{(k)}(x_1) : [0, |x_1|] & \longrightarrow & \mathcal{S}_1(r_1) \\ t_1 & \longmapsto & t_1 x_1 / |x_1|. \end{array}$$

- Si $k \in \mathcal{K}$ et si $W(\infty)$ est de type $(+-)$ (resp. $(-+)$) rel. $(m^{(k)}, \omega^{(k)}(0))$, $\mathcal{C}_1^{(k)}(x_1)$ est un chemin reliant l'origine à $x_1 \in \mathcal{S}_1(r_1)$: on choisit θ'_1 de sorte qu'on ait

$$\cos \left(m_1^{(k)} \theta'_1 + \sum_{i=2}^n m_i^{(k)} \theta_i - \omega^{(k)}(0) \right) > 0$$

pour tout $(\theta_2, \dots, \theta_n) \in \prod_{i=2}^n W_i(\infty)$ (c'est possible du fait de la condition (H)); alors si $\arg x_1 > \theta'_1$ (resp. $\arg x_1 < \theta'_1$), $\mathcal{C}_1^{(k)}(x_1)$ est le chemin radial défini comme ci-dessus; dans le cas contraire, $\mathcal{C}_1^{(k)}(x_1)$ est composé du chemin radial de direction θ'_1 et du chemin parallèle au bord de $\mathcal{S}_1(r_1)$ passant par x_1 (voir la figure 3).

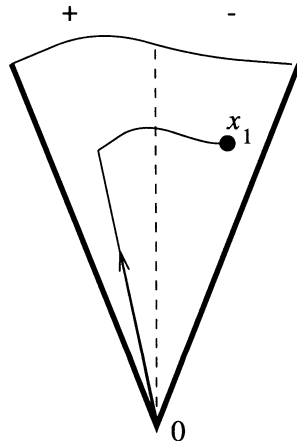


Figure 3 : exemple pour le type $(-+)$

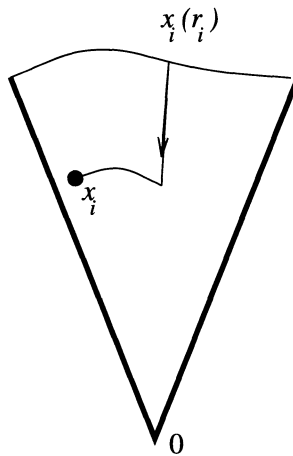


Figure 4

- Si $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, chaque $\mathcal{C}_i^{(k)}(x_i)$ (dans $\mathcal{S}_i(r_i)$) est défini de la même manière pour tout $i \leq n$ (voir la figure 4).

Le paramétrage des chemins est donné par la longueur d'arc comme dans [16, §1.7]. Nous le noterons

$$\xi^{(k)}(t_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \mathcal{C}_i^{(k)}(x_i)(t_i), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Posons pour $N \in \mathbf{N}^n$, $E_N^{(k)} = |x|^N \exp -\text{Ré}\Lambda^{(k)}(x, y)$. Il résulte de [16, lemma 1.7.1] que l'on a

(C.12) LEMME. — Pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe une fonction $r'_i : \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ telle que pour $r \leq r'_i(N)$ et tout $x_i \in \mathcal{S}_i(r_i)$ l'on ait sur $\mathcal{C}_i^{(k)}(x_i)$ pour tout k et pour tout y assez voisin de 0

$$(In_i) \quad \frac{dE_N^{(k)}}{dt_i}(\xi^{(k)}(t_i), y) \geq N_i \left| \xi^{(k)}(t_i) \right|^{N-1_i} \cdot e^{-\text{Ré}\Lambda^{(k)}(\xi^{(k)}(t_i), y)}.$$

□

Remarque. — C'est pour obtenir ce lemme qu'on impose $m_i^{(k)} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (rappelons que dans le cas (PIR) considéré ici on a $n' = 0$). Plus précisément, on a pour i fixé l'inégalité (In_i) si $m_i^{(k)} > 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$.

C.13. L'opérateur T . — Soit $u : \mathcal{S}(r) \times D(\rho) \rightarrow \mathcal{V}(R^0)$ une application continue. Nous allons définir $Tu : \mathcal{S}(r) \times D(\rho) \rightarrow \mathbf{C}^d$. Nous noterons pour cela $Tu = (T^{(1)}u, \dots, T^{(d)}u)$.

Si $k \notin \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$. — Nous posons

$$T^{(k)}u(x, y) = e^{\Lambda^{(k)}(x, y)} \cdot \int_{\mathcal{C}_1^{(k)}(x_1)} \frac{1}{\xi_1} F_1^{(k)}(\xi_1, x', y, u(\xi_1, x', y)) \cdot e^{-\Lambda^{(k)}(\xi_1, x', y)} d\xi_1$$

avec $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

Si $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$. — Notons, pour $\ell = 1, \dots, n + p$

$$Z_\ell(r) = \begin{cases} \{x_1 = x_1(r), \dots, x_\ell = x_\ell(r)\} & \text{si } \ell \leq n \\ \{x_1 = x_1(r), \dots, x_n = x_n(r), y_1 = 0, \dots, y_{\ell-n} = 0\} & \text{si } \ell > n. \end{cases}$$

Nous poserons aussi

$$\xi_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ et } \eta_j = (y_1, \dots, y_{j-1}, \eta_j, y_{j+1}, \dots, y_p).$$

Nous allons considérer les opérateurs

$$S_i^{(k)}u(x, y) = \int_{\mathcal{C}_i^{(k)}} \frac{1}{\xi_i} F_i^{(k)}(\xi_i, y, u(\xi_i, y)) \cdot e^{-\Lambda^{(k)}(\xi_i, y)} d\xi_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\Sigma_j^{(k)}u(x, y) = \int_{[0, y_j]} \Phi_j^{(k)}(x, \eta_j, u(x, \eta_j)) \cdot e^{-\Lambda^{(k)}(x, \eta_j)} d\eta_j \quad (j = 1, \dots, p).$$

Soit $c \in \mathbf{C}^\delta$ avec $\delta = \text{card } \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$. Pour $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$ nous poserons

$$T^{(k)}u(x, y) = e^{\Lambda^{(k)}(x, y)} \cdot \left[S_1^{(k)}u + S_2^{(k)}u|_{Z_1(r)} + \dots + S_n^{(k)}u|_{Z_{n-1}(r)} + \Sigma_1^{(k)}u|_{Z_n(r)} + \dots + \Sigma_p^{(k)}u|_{Z_{n+p-1}(r)} + c^{(k)}e^{-\Lambda^{(k)}(x(r), 0)} \right].$$

C.14. *Les fonctions \mathbf{r} et ρ .* — Commençons par choisir $N^0 \in \mathbf{N}^n$ de sorte que l'on ait $N_i^0 \geq 2(n + p)L$ pour tout i , avec $L = L(W(r^0), D(\rho^0), \mathcal{W}(R^0))$; nous noterons $K_N = K_N(W(r^0), D(\rho^0), \mathcal{W}(R^0))$.

Pour $N \geq N^0$, choisissons $\mathbf{r}_i(N) \leq \mathbf{r}'_i(N)$ (donné par le lemme C.12) de sorte que l'on ait, pour $0 < r \leq \mathbf{r}(N)$

$$\frac{2K_N}{\inf_i N_i} < R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r)} |x|^{-N}$$

et pour $r \leq \mathbf{r}(N)$ on choisit K vérifiant

$$\frac{2K_N}{\inf_i N_i} < K < R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r)} |x|^{-N}.$$

Pour $j = 1, \dots, p$, $\rho \leq \rho^0$ et $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)$, on a

$$\left| \Phi_j^{(k)}(x, y, u(x, y)) \right| \leq (K_N + LK) |x|^N \quad \text{sur } W(r^0) \times D(\rho) \times \mathcal{W}(R^0)$$

de sorte que pour $y \in D(\rho)$

$$\left| e^{\Lambda^{(k)}(x(r), y)} \cdot \sum_j^{(k)} u_{|Z_n(r)} \right| \leq (K_N + LK) |x(r)|^N \left[|e^{\Lambda^{(k)}(x(r), y)}| \cdot \int_{[0, y_j]} |e^{-\Lambda^{(k)}(x(r), \eta_j)}| d\eta_j \right].$$

Comme le terme entre crochets tend vers 0 avec y , il existe $\rho(N, r, K)$ tel que pour $0 < \rho \leq \rho$ on ait, pour tout j , sur $D(\rho)$

$$\left| e^{\Lambda^{(k)}(x(r), y)} \cdot \sum_j^{(k)} u_{|Z_n(r)} \right| \leq \frac{K_N + LK}{2p \inf_i N_i} |x(r)|^N < \frac{K}{2p} |x(r)|^N$$

et donc

$$(C.15) \quad \left| e^{\Lambda^{(k)}(x(r), y)} \cdot \left| \sum_1^{(k)} u_{|Z_n(r)} + \dots + \sum_p^{(k)} u_{|Z_{n+p-1}(r)} + c^{(k)} e^{-\Lambda^{(k)}(x(r), 0)} \right| \right| \leq K |x(r)|^N.$$

C.16. *Fin de la démonstration.* — Choisissons N, r, K et ρ comme ci-dessus. Nous procédons comme dans [16] en montrant que T est un opérateur contractant de $\mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)^d$ dans lui-même. Montrons d'abord que pour $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)^d$ on a

$$\left| T^{(k)} u(x, y) \right| \leq K |x|^N \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathcal{S}(r) \times D(\rho).$$

Si $k \notin \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, la démonstration est la même que dans *loc. cit.* p. 69 : on a

$$\begin{aligned} \left| T^{(k)} u(x, y) \right| &\leq e^{\text{Ré}\Lambda^{(k)}(x, y)} \cdot \int_{\mathcal{C}_1^{(k)}} \left| F_1^{(k)}(\xi, y, u(\xi, y)) \right| e^{-\text{Ré}\Lambda^{(k)}(\xi, y)} \left| \frac{d\xi_1}{\xi_1} \right| \\ &\leq e^{\text{Ré}\Lambda^{(k)}(x, y)} (K_N + LK) |x'|^{N'} \int_{\mathcal{C}_1^{(k)}} |\xi_1|^{N_1-1} e^{-\text{Ré}\Lambda^{(k)}(\xi, y)} |d\xi_1| \\ &\leq e^{\text{Ré}\Lambda^{(k)}(x, y)} \frac{(K_N + LK)}{N_1} |x'|^{N'} \int_{\mathcal{C}_1^{(k)}} \frac{d}{dt_1} \left(|\xi_1|^{N_1} e^{-\text{Ré}\Lambda^{(k)}(\xi, y)} \right) dt_1 \\ &\hspace{15em} \text{(d'après C.12)} \\ &\leq K |x|^N \quad \text{puisque } -\text{Ré}\Lambda^{(k)} < 0 \text{ près de } 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1^{(k)}. \end{aligned}$$

Si $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, elle se fait par récurrence : on pose

$${}_{\ell}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) = e^{\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell}(r)} \cdot \left[S_{\ell+1}^{(k)}|_{Z_{\ell}(r)} + \dots + c^{(k)}e^{-\Lambda^{(k)}(x(r),0)} \right]$$

de sorte qu'on a pour $1 \leq \ell \leq n$

$$\begin{aligned} {}_{\ell-1}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) &= e^{\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \cdot S_{\ell}^{(k)}u(x, y)|_{Z_{\ell-1}(r)} \\ &\quad + e^{\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \cdot e^{-\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell}(r)} \cdot {}_{\ell}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) \end{aligned}$$

et ${}_0\mathcal{R}^{(k)}u = T^{(k)}u$. Supposons alors avoir montré que

$$\left| {}_{\ell}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) \right| \leq K |x_1(r)|^{N_1} \dots |x_{\ell}(r)|^{N_{\ell}} \cdot |x_{\ell+1}|^{N_{\ell+1}} \dots |x_n|^{N_n}$$

(c'est vrai pour $\ell = n$ d'après (C.15)). On en déduit que

$$\begin{aligned} &\left| e^{\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \cdot e^{-\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell}(r)} \cdot {}_{\ell}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) \right| \\ &\quad \leq K |x_1(r)|^{N_1} \dots |x_{\ell-1}(r)|^{N_{\ell-1}} \cdot |x_{\ell+1}|^{N_{\ell+1}} \dots |x_n|^{N_n} \\ &\times \left[|x_{\ell}|^{N_{\ell}} - e^{\text{Re}\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \int_{C_{\ell}^{(k)}} \frac{d}{d\xi_{\ell}} \left(|\xi_{\ell}|^{N_{\ell}} e^{-\text{Re}\Lambda^{(k)}(\xi_{\ell},y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \right) d\xi_{\ell} \right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} &\left| e^{\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \cdot S_{\ell}^{(k)}u(x, y)|_{Z_{\ell-1}(r)} \right| \\ &\leq e^{\text{Re}\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \cdot (K_N + LK) |x_1(r)|^{N_1} \dots |x_{\ell-1}(r)|^{N_{\ell-1}} \\ &\quad \times |x_{\ell+1}|^{N_{\ell+1}} \dots |x_n|^{N_n} \int_{C_{\ell}^{(k)}} |\xi_{\ell}|^{N_{\ell}-1} e^{-\text{Re}\Lambda^{(k)}(\xi_{\ell},y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} dt_{\ell} \\ &\leq \frac{K_N + LK}{N_{\ell}} |x_1(r)|^{N_1} \dots |x_{\ell-1}(r)|^{N_{\ell-1}} \cdot |x_{\ell+1}|^{N_{\ell+1}} \dots |x_n|^{N_n} \\ &\quad \times e^{\text{Re}\Lambda^{(k)}(x,y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \int_{C_{\ell}^{(k)}} \frac{d}{dt_{\ell}} \left(|\xi_{\ell}|^{N_{\ell}} e^{-\text{Re}\Lambda^{(k)}(\xi_{\ell},y)}|_{Z_{\ell-1}(r)} \right) dt_{\ell} \end{aligned}$$

d'après le lemme C.12. On déduit de ces deux inégalités et du fait que l'intégrale est ≥ 0 (conséquence de C.12) que ${}_{\ell-1}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y)$ satisfait

$$\left| {}_{\ell-1}\mathcal{R}^{(k)}u(x, y) \right| \leq K |x_1(r)|^{N_1} \dots |x_{\ell-1}(r)|^{N_{\ell-1}} \cdot |x_{\ell}|^{N_{\ell}} \dots |x_n|^{N_n}$$

et par récurrence on obtient l'inégalité cherchée pour $T^{(k)}u$. (**)

(**) L'argument donné dans [16, p. 69, l. 9] n'est pas correct, c'est pourquoi il faut le modifier en utilisant la dernière ligne de la p. 73.

On remarque que cette même démonstration appliquée en restriction à $y = 0$ donne l'inégalité avec la constante $K/2$ au lieu de K , comme demandé par la dernière assertion du théorème.

Le fait que T soit contractant se montre de manière analogue (on utilise ici l'inégalité $N^0 > 2(n+p)L$). Soit u le point fixe de T .

Si $k \notin \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, u satisfait (Σ_1) par construction. Pour voir que u satisfait (Σ) on argumente comme en (B.5) et (B.6), en utilisant de plus le fait que $\exp -\text{Ré}\Lambda^{(k)}(x, y)$ est exponentiellement décroissant sur $\mathcal{C}_1^{(k)}$ près de 0. Si $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, le fait que u satisfasse (Σ) se vérifie sans problème.

Enfin l'unicité résulte du fait que toute solution u dans $\mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)$ est un point fixe de T .

C.17. Remarque. — On a un énoncé analogue à C.10 pour un système partiel $(\Sigma_{I,J})$: l'espace des conditions initiales est maintenant un espace de fonctions en les variables x_i ($i \in I$) et y_j ($j \in J$) ; celles-ci doivent vérifier sur leur domaine l'inégalité

$$\left| c^{(k)}(x_I, y_J) \right| \leq \frac{K}{2} |x_I|^{N_I}.$$

La démonstration est analogue : la définition de T lorsque $k \in \mathcal{K}_{<0}$ ne fait pas intervenir les indices $i \in I$ et $j \in J$.

D. Démonstration des théorèmes de la section A.

Nous allons d'abord donner une conséquence utile des théorèmes B.4 et C.10.

(D.1) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses du §B.2, il existe, pour tout $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0) \in (S^1)^n$, des polyrayons r, ρ , un secteur fermé $W(r)$ autour de la direction θ^0 et un polydisque fermé $D(\rho)$ centré en $0 \in \mathbf{C}^p$, et il existe*

$$u : W(r) \times D(\rho) \longrightarrow \mathcal{V}(R^0)$$

qui est continue sur ce domaine, holomorphe et solution de (Σ) à l'intérieur, asymptotiquement plate quand $x \rightarrow 0$, uniformément sur $D(\rho)$, c'est à dire que pour tout $N \in \mathbf{N}^n$ il existe $C_N > 0$ avec

$$(AS_N) \quad \forall (x, y) \in W(r) \times D(\rho), \quad \|u(x, y)\| \leq C_N \cdot |x|^N.$$

Si l'on note $U(r)$ un ouvert de $\overline{X}(D)$ contenu dans l'adhérence de $W(r)^*$, on voit que l'on a trouvé une solution u de (Σ) dans $\Gamma\left(U(r) \times D(\rho), \left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D)}^{\leq D}\right)^d\right)$.

Démonstration de la proposition D.1. — Il s'agit de vérifier que la solution donnée par les théorèmes B.4 ou C.10 est en fait plate en 0, uniformément par rapport à y . Nous allons procéder comme dans [16, thm. 2.3.1]. Nous allons considérer le cas (PIR) avec $\mathcal{K}_{<0} \neq 0$, les autres cas étant analogues et plus simples.

Soit donc $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)^d$ l'unique solution de (Σ) avec condition initiale $c \in \mathcal{B}(N, r, K/2)$ en $y^0 = 0$, où N, r, K, ρ sont choisis comme dans le théorème C.10 pour la valeur $y^0 = 0$ du paramètre. Nous supposons de plus que r est choisi de sorte qu'on puisse trouver K avec

$$(D.2) \quad \frac{2K_N}{\inf_i N_i} \leq K \leq \frac{1}{2} R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r)} |x|^{-N},$$

ce qui est possible. Nous voulons montrer que pour tout $M \geq N$ il existe $C_M > 0$ avec

$$(*) \quad \forall k \in \{1, \dots, d\}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{S}(r) \times D(0, \rho/2), \\ \left| u^{(k)}(x, y) \right| \leq C_M |x|^M.$$

Nous allons montrer que pour tout $y^0 \in \Delta(\rho^0)$, pour tout $M \geq N$, il existe $\rho^1(y^0)$ et $C_M(y^0) > 0$ avec

$$(**) \quad \forall k \in \{1, \dots, d\}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{S}(r) \times D(y^0, \rho^1(y^0)), \\ \left| u^{(k)}(x, y) \right| \leq C_M(y^0) |x|^M$$

et nous pouvons recouvrir $\Delta(0, \rho/2)$ par un nombre fini de $D(y^0, \rho^1(y^0))$, ce qui permet d'obtenir (*).

Montrons donc (**). Notons qu'il existe $\rho = \rho(N, r, K, y^0)$ donné par le théorème tel que $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho(y^0); y^0)^d$ donc $u \in \mathcal{F}(N, r, 2K, \rho(y^0); y^0)^d$. De plus, puisque $u \in \mathcal{F}(N, r, K, \rho; 0)^d$, u satisfait la condition initiale

$$\forall k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty)) \quad u^{(k)}(x(r), y^0) = c^{(k)}(y^0) \in \mathcal{B}(N, r, K; y^0).$$

Ainsi u satisfait en y^0 des propriétés analogues à celles qu'elle satisfait en 0, et c'est l'unique solution de (Σ) dans $\mathcal{F}(N, r, 2K, \rho(y^0); y^0)^d$ satisfaisant

la condition initiale ci-dessus. Il suffit donc de montrer (**) en $y^0 = 0$, la preuve pour les autres valeurs du paramètre se transposant immédiatement. Le point important dans cette démonstration est que N^0 et les fonctions r_i du théorème C.10 sont *indépendantes* de $y \in \Delta(\rho^0)$.

Il suffit de faire la démonstration pour $M = (N_1 + 1, N_2, \dots, N_n)$. Choisissons $r_1^1 > 0$ tel que $r_1^1 \leq \min(r_1, r_1(M))$ et posons $r^1 = (r_1^1, r_2, \dots, r_n)$. Nous avons alors

$$\frac{2K_N}{\inf_i N_i} < R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r)} |x|^{-N} \leq R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r^1)} |x|^{-N}$$

car $\mathcal{S}(r^1) \subset \mathcal{S}(r)$. De plus, puisqu'il existe une constante positive indépendante de r^1 et ne dépendant que de A_1 (introduit au §C.7) pour laquelle on a $|x_1(r^1)| \geq \text{cste} \cdot \sup_{x_1 \in \mathcal{S}(r^1)} |x^1|$, on peut supposer que si r_1^1 est assez petit, on a

$$K |x_1(r^1)|^{-1} < R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r^1)} |x|^{-M}.$$

Soit alors K^1 tel que

$$K |x_1(r^1)|^{-1} \leq K^1 \leq R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r^1)} |x|^{-M}.$$

Posons (pour $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$) $c_1^{(k)} = u^{(k)}(x(r^1), 0)$. On a, du fait de la dernière assertion de C.10

$$|c_1^{(k)}| \leq \frac{1}{2} K |x(r^1)|^N \leq \frac{1}{2} K^1 |x(r^1)|^M$$

donc $c_1 \in \mathcal{B}(M, r^1, K^1/2)$. Soit alors $\rho^1 \leq \rho(M, r^1, K^1)$ et $v \in \mathcal{F}(M, r^1, K^1, \rho^1; 0)^d$ l'unique solution de (Σ) avec $v^{(k)}(x(r^1), 0) = c_1^{(k)}$ pour tout $k \in \mathcal{K}_{<0}(W(\infty))$, donnée par le théorème C.10. Nous voulons montrer que u et v coïncident dans un domaine convenable. Posons pour cela $K'^1 = K^1 \cdot \sup_{x_1 \in \mathcal{S}_1(r^1)} |x_1| \leq K^1$. Nous avons alors

$$\frac{4K_N}{\inf_i N_i} \leq K \leq K'^1 \leq R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r^1)} |x|^{-N}$$

et par suite, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, tout $x \in \mathcal{S}(r^1)$ et tout $y \in \Delta(\rho^1)$, puisque $K \leq K'^1$

$$|u^{(k)}(x, y)| \leq K |x|^N \leq K'^1 |x|^N$$

$$|v^{(k)}(x, y)| \leq K^1 |x|^M \leq K'^1 |x|^N$$

de sorte que u et v sont dans $\mathcal{F}(N, r^1, K'^1, \rho^1; 0)^d$ (et $c_1 \in \mathcal{B}(N, r^1, K'^1/2)$). Si on choisit ρ^1 de sorte que l'on ait aussi $\rho^1 \leq \rho(N, r^1, K'^1)$, on déduit de l'unicité dans le théorème C.10 que la restriction de u à $\mathcal{S}(r^1) \times D(0, \rho^1)$ est égale à v et satisfait (**) dans ce domaine. Comme on a trivialement une inégalité du même type dans le domaine complémentaire de celui-ci dans $\mathcal{S}(r) \times D(0, \rho^1)$, on en déduit que u satisfait (**) dans ce dernier. \square

D.3. *Remarque.* — On a un énoncé identique pour un système partiel.

D.4. *Démonstration du théorème A.6.* — Nous reprenons ici la situation du §A.1 et nous supposons de plus, comme dans le théorème A.6, que l'on a

$$F_i(r, \theta, y, 0), \Phi_j(r, \theta, y, 0) \in \left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D} \right)^d.$$

D.5. *Existence.* — Choisissons des représentants des germes (en θ^0) des F_i et des Φ_j . On peut alors choisir r^0, ρ^0, R^0 pour que les hypothèses de B.2 soient satisfaites. On applique la proposition D.1. \square

D.6. *Unicité.* — Supposons données deux solutions u et v dans $\left(\mathcal{A}_{\overline{X}(D), \theta^0}^{\leq D} \right)^d$. Elles sont définies dans un petit voisinage de θ^0 dans $\overline{X}(D)$, de même que les F_i et les Φ_j comme ci-dessus. Soit $N \geq N^0$ donné par le théorème C.10 (ou B.4). On a dans ce voisinage

$$|u(x, y)| \leq \frac{1}{2} C_N |x|^N \quad \text{et} \quad |v(x, y)| \leq \frac{1}{2} C_N |x|^N$$

pour un certain $C_N > 0$ et on peut supposer sans mal que $C_N \leq K_N$, où K_N est défini au §B.2 pour les F_i et les Φ_j . Quitte à diminuer encore r , on peut supposer que dans ce voisinage on a $r \leq \mathbf{r}(N)$ et

$$\frac{2K_N}{\inf_i N_i} < C_N < R^0 \inf_{x \in \mathcal{S}(r)} |x|^{-1}.$$

Choisissons enfin $\rho \leq \rho(N, r, C_N; 0)$. Alors u et v sont deux solutions de (Σ) dans $\mathcal{F}(N, r, C_N, \rho; 0)^d$, et pour $k \in \mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$, les valeurs initiales $u^{(k)}(x(r), 0)$ et $v^{(k)}(x(r), 0)$ coïncident par hypothèse, si l'on suppose de plus que $r_1 = \dots = r_n$ (ce qui ne pose pas de problème). Par suite, d'après le théorème C.10, u et v coïncident dans le voisinage considéré. \square

Remarque. — La démonstration dans le cas d'un système partiel est la même.

D.7. Démonstration du théorème A.12.

Démonstration de l'existence. — Nous la ferons dans le cas où $n = 2$ et $p = 0$ pour ne pas compliquer les notations. Le cas général s'obtient de manière analogue. Soit donc $\hat{u} \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ solution de $(\hat{\Sigma})$ (et suivant les cas $\hat{u}(x_1, 0) = 0$ et/ou $\hat{u}(0, x_2) = 0$). D'après le corollaire A.11 il s'agit de trouver

$$u_{\hat{1}} \in \left(\mathcal{A}_{\overline{D_1(D_1 \cap D_2)}, \theta^0}(U_1) [[x_1]] \right)^d$$

solution de $(T_1\Sigma)$ et $u_{\hat{2}} \in \left(\mathcal{A}_{\overline{D_2(D_1 \cap D_2)}, \theta^0}(U_2) [[x_2]] \right)^d$ solution de $(T_2\Sigma)$, toutes deux relevant \hat{u} , où U_1 et U_2 sont des voisinages sectoriels assez petits de θ_2^0 et θ_1^0 . Nous allons montrer l'existence de $u_{\hat{1}}$, celle de $u_{\hat{2}}$ se montrant de manière symétrique.

Premier cas : $m_1^{(k)} > 0$ pour tout $k = 1, \dots, d$. — Soit

$$v_{\hat{1}} \in \left(\mathcal{A}_{\overline{D_1(D_1 \cap D_2)}, \theta^0}(U_1) [[x_1]] \right)^d$$

relevant \hat{u} et multiple de x_2 ou x_1x_2 comme \hat{u} suivant les cas (voir les hypothèses du théorème). Un tel relèvement existe d'après Borel-Ritt (ici à une variable). Alors $u_{\hat{1}}$ est solution de $(T_1\Sigma)$ et relève \hat{u} si et seulement si $w_{\hat{1}} \stackrel{\text{déf}}{=} u_{\hat{1}} - v_{\hat{1}}$ est solution d'un système du type de $(T_1\Sigma)$ et satisfait $T_2w_{\hat{1}} \equiv 0$ (donc est multiple de x_2 ; il faut demander éventuellement de plus que $w_{\hat{1}}$ soit multiple de x_1). Précisément la première équation que doit satisfaire $w_{\hat{1}}$ est

$$x_1 \partial_{x_1} w_{\hat{1}}^{(k)} = \left[x_1 \partial_{x_1} \Lambda^{(k)} \right] \cdot w_{\hat{1}}^{(k)} + H_1^{(k)}(x_1, x_2, w_{\hat{1}}(x_1, x_2))$$

avec

$$H_1^{(k)}(x_1, x_2, w_{\hat{1}}(x_1, x_2)) = H_{1,0}^{(k)}(x_1, x_2) + \sum_{M \in \mathbf{N} - \{0\}} H_{1,M}^{(k)}(x_1, x_2) \cdot w_{\hat{1}}^M$$

où

$$H_{1,0}^{(k)}(x_1, x_2) = -x_1 \partial_{x_1} v_{\hat{1}}^{(k)} + \left[x_1 \partial_{x_1} \Lambda^{(k)} \right] \cdot v_{\hat{1}}^{(k)} + \sum_{M \in \mathbf{N}} F_{1,M}^{(k)}(x_1, x_2) \cdot v_{\hat{1}}^M$$

et

$$H_{1,M}^{(k)} = F_{1,M}^{(k)} + \sum_{j=1}^d v_{\hat{1}}^{(j)} \cdot h_{j,M}^{(k)}(x_1, x_2).$$

On développe $w_{\hat{1}} = \sum w_{\hat{1},\ell} x_1^\ell$ et on trouve $w_{\hat{1},\ell}$ par récurrence sur ℓ : c'est possible puisque $m_1^{(k)} > 0$. On a de plus $w_{\hat{1},\ell}^{(k)} = 0$ pour $\ell < m_1^{(k)}$ et les $w_{\hat{1},\ell}^{(k)}$ sont dans $\mathcal{A}_{\overline{D_1(D_1 \cap D_2)}, \theta^0}^{\leq D}(U_1)$ (car $T_2 H_{1,0} \equiv 0$). Ainsi $w_{\hat{1}}$ est toujours multiple de $x_1 x_2$.

Montrons maintenant que $u_{\hat{1}}$ est solution de la seconde équation $(T_1 \Sigma_2)$. La condition d'intégrabilité de $(T_1 \Sigma)$ montre que si l'on écrit cette seconde équation sous la forme $E_2(u_{\hat{1}}) = 0$ et si $u_{\hat{1}}$ est solution de $(T_1 \Sigma_1)$, alors $E_2(u_{\hat{1}})$ est solution d'une équation linéaire du type de $(T_1 \Sigma_1)$ (pour la démonstration du théorème dans le cas où n et p sont quelconques, on a affaire à un système linéaire intégrable; voir [10, lemma II.3.1 p. 82]). Alors un raisonnement comme celui fait ci-dessus montre que l'unique solution de ce système est 0, de sorte que $u_{\hat{1}}$ satisfait bien la seconde équation (ce type de raisonnement remonte au moins à l'article [4]).

Deuxième cas : $m_1^{(k)} = 0$ pour tout $k = 1, \dots, d$. — On introduit $v_{\hat{1}}$ et $w_{\hat{1}}$ comme ci-dessus et on résout la première équation par récurrence sur ℓ . Celle-ci s'écrit

$$x_1 \partial_{x_1} w_{\hat{1}} = H_{1,0}(x_1, x_2) + (B_1(x_1, x_2) + x_1 \partial_{x_1} \Lambda) \cdot w_{\hat{1}} + \sum_{|M| \geq 2} H_{1,M}(x_1, x_2) \cdot w_{\hat{1}}^M$$

et les formules données au paragraphe précédent montrent que $T_2 H_{1,0} \equiv 0$ et $B_1(0, 0) = A_1(0, 0)$ (car l'énoncé impose ici que \hat{u} soit multiple de x_1 et on choisit $v_{\hat{1}}$ de même, donc $v_{\hat{1}}(0, 0) = 0$). On a alors pour $\ell \geq 1$

$$[\ell \text{Id} - B_1(0, x_2)] \cdot w_{\hat{1},\ell} = H_{1,0,\ell}(x_2) + \text{polynôme en } w_{\hat{1},\leq \ell-1}.$$

Notons que puisque $v_{\hat{1}}$ et $F_{1,0}$ sont multiples de x_1 (hypothèse (b)), $H_{1,0}$ l'est aussi de sorte que l'on peut prendre $w_{\hat{1},0} = 0$. Puisque $\ell \text{Id} - B_1(0, 0)$ est inversible pour tout $\ell \in \mathbf{N} - \{0\}$ par l'hypothèse (b), on peut trouver $w_{\hat{1},\ell}$ de manière unique par récurrence sur ℓ ; on voit aussi, puisque $T_2 H_{1,0} = 0$, que $T_2 w_{\hat{1},\ell} = 0$ pour tout ℓ . □

Démonstration de l'unicité. — On remarque que les procédés ci-dessus donnent une solution unique si l'on impose que cette solution soit multiple de $x_1 \cdots x_n$. L'unicité résulte alors de l'unicité dans le corollaire A.11 si l'on remarque, d'après le lemme A.10, que toute solution u de (Σ) induit une solution $T_I u$ de $(T_I \Sigma)$ pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. A'CAMPO, La fonction zêta d'une monodromie, *Comment. Math. Helv.*, 50 (1975), 233-248.
- [2] J. BINGENER, Über formale complexe Räume, *Manuscripta Math.*, 24 (1978), 253-293.
- [3] O. GABBER, The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. of Math.*, 103 (1981), 445-468.
- [4] R. GÉRARD, Y. SIBUYA, Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, *Equations différentielles dans le champ complexe*, Springer Lect. Notes in Math., 712 (1979), 131-288.
- [5] R. HARTSHORNE, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 45 (1975), 5-99.
- [6] V. P. KOSTOV, On the stratification and singularities of the Stokes hypersurface of one- and two-parameter families of polynomials, *Theory of singularities and its applications*, V. I. Arnold ed., *Advances in Soviet Mathematics*, 1 (1990), 251-271.
- [7] G. LAUMON, Transformation canonique et spécialisation pour les \mathcal{D} -modules filtrés, *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, 130 (1985), 56-129.
- [8] Y. LAURENT, Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes, *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, 130 (1985), 352-364.
- [9] Y. LAURENT, Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série, 20 (1987), 391-441.
- [10] H. MAJIMA, Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, *Lect. Notes in Math.* vol. 1075, Springer Verlag, 1984.
- [11] H. MAJIMA, Vanishing theorems in asymptotic analysis II, *Proc. Japan Acad.*, 60 (1984), 171-173.
- [12] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.
- [13] B. MALGRANGE, *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, *Progress in Math.* vol. 96, Birkhäuser, Boston, 1991.
- [14] Z. MEBKHOUT, Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 69 (1989), 47-89.
- [15] Z. MEBKHOUT, Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les \mathcal{D}_X -modules, *The Grothendieck Festschrift vol. III*, *Progress in Math.*, Birkhäuser, Boston, 88 (1990), 83-132.
- [16] J.-P. RAMIS, Y. SIBUYA, Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, *Asymptotic Analysis*, 2 (1989), 39-94.
- [17] C. SABBABH, Proximité évanescence, I. La structure polaire d'un \mathcal{D} -module, Appendice en collaboration avec F. Castro, *Compositio Math.*, 62 (1987), 283-328.

Claude SABBABH,
URA 169 du CNRS
Centre de mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex (France).
e-mail : sabbah@orphee.polytechnique.fr