Annales de l'institut Fourier

Louis Boutet de Monvel

Les travaux de Bernard Malgrange (deuxième partie)

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 5 (1993), p. 1211-1222
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1211_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1211-1222

LES TRAVAUX DE BERNARD MALGRANGE (Deuxième partie)

par Louis BOUTET DE MONVEL

C'est pour moi un honneur et un plaisir de présenter dans ce colloque les travaux de Bernard Malgrange, et plus encore de le faire à la suite de L. Schwartz, qui dirigea notre travail de thèse à l'un et l'autre, à quelques années d'écart.

Je ne parlerai pas ici de la vie privée de Bernard Malgrange. Pour moi, comme pour beaucoup de mathématiciens, sa vie (mathématique) a commencé lorsqu'il est entré à l'Ecole Normale Supérieure en 1947. À cette époque H. Cartan venait d'arriver pour s'occuper des élèves mathématiciens (il y a dirigé le centre de mathématiques - comme on l'a appelé plus tard - jusqu'en 1964). J'imagine sans peine, pour l'avoir vécu moi-même plus tard, à quel point cela a du être enthousiasmant. C'est à cette époque (à partir de 1948) que H. Cartan a organisé son séminaire à l'ENS; ceux de 1951-52 et 1953-54 portaient sur les fondements de la géométrie analytique, et ont dégagé pour la première fois un grand nombre d'idées de première importance de cette théorie : notion de faisceau cohérent, théorèmes A et B, variétés ou espaces de Stein. Ces séminaires ont certainement marqué Bernard Malgrange qui, sans vraiment devenir spécialiste de géométrie analytique, est revenu à plusieurs reprises, et dans toute son œuvre, sur les questions qu'elle pose, et qui a utilisé systématiquement les méthodes de faisceaux évoquées plus haut. En plus de la présence d'Henri Cartan, les élèves de l'ENS bénéficiaient de la présence de caïmans (c'était alors Michel Hervé), et d'élèves de promotions antérieures qui encadraient et aidaient spontanément les plus jeunes - nous parlerions maintenant de tutorat : un des "tuteurs" de Bernard Malgrange était Jean-Pierre Serre, et cela aussi a dû être déterminant.

Après l'ENS, la carrière de Bernard Malgrange s'est d'abord déroulée un peu sur le modèle préconisé alors par H. Cartan : 4 années au CNRS pour y faire une thèse, puis 5 années comme maître de conférences (PR2C) à Strasbourg, "en province". Bernard Malgrange est revenu à Paris en 1960, et il a été promu professeur à titre personnel en 1962 (j'ai le souvenir que lors de la création de ce titre, qui date de ces années, un poste de PATP était un peu considéré comme strapontin d'une vraie chaire; mais le titre de PATP est au contraire très vite devenu plus prestigieux, à cause de la plus grande fiabilité scientifique du mode d'élection, et aussi de la plus grande mobilité). En 1965 Bernard Malgrange a choisi de s'installer à l'Université d'Orsay; mais cet éloignement relatif ne lui a pas suffi et il est venu s'installer ici à Grenoble en 1969, où il a occupé un poste de professeur jusqu'en 1973, et de Directeur de Recherche CNRS depuis, ne suivant plus du tout le schéma classique - qui est plus "centripète" que "centrifuge".

Bernard Malgrange n'a peut-être pas dirigé directement, au sens administratif, un très grand nombre de thèses; mais il a toujours eu un contact profond et fécond avec les mathématiciens plus jeunes, et nous sommes nombreux à avoir appris profondément les mathématiques à son contact, et à avoir éventuellement collaboré avec lui plus tard : je citerai ici S. Baouendi, J.-P. Ramis, J. Mather, D. Barlet, moi-même, qui participons à ce congrès - mais il y a bien d'autres disciples. J'ai fait moi-même connaissance de Bernard Malgrange très tôt, lorsque j'étais élève à l'E.N.S, en 1961. Il faisait cette année-là un "cours aux carrés" sur la méthode récente de Hörmander pour résoudre les équations de Cauchy-Riemann de l'analyse complexe (inégalités L^2 avec poids tenant compte astucieusement de la pseudoconvexité). Un autre de ses élèves cette année-là était J.-M. Bony. J'avais été frappé de l'élégance de sa présentation, et aussi de son souci de précision - peut-être rare chez les analystes - dans les énoncés dont la compréhension fait intervenir un peu de notions algébriques. Bernard Malgrange est certainement un des mathématiciens qui m'ont le plus appris, alors et depuis, et il en est de même pour beaucoup d'autres de ma génération. J'ai eu depuis l'occasion de travailler en collaboration avec lui, en particulier ici à Grenoble quand nous avons organisé (avec M. Lejeune) un séminaire sur les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels analytiques, et plus récemment sur le théorème de l'indice relatif. Après tant d'années il nous est toujours difficile de nous départir (pour ce qui est des mathématiques) de la relation de maître à élève qui s'était établie alors.

Je parlerai peu ici des premiers travaux de Bernard Malgrange, qui portent principalement sur les équations et les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants, et dont L. Schwartz nous a déjà dressé un brillant tableau. Ces travaux ont été exposés dans les séminaires de L. Schwartz et de J. Leray, et quelques uns dans le séminaire Lelong; ils ont été publiés dans des revues variées, comprenant les Annales de l'Institut Fourier - mais le nombre de publications à cette dernière revue ne montre pas de façon concluante que Bernard Malgrange lui ait accordé alors une importance prioritaire; il n'en est évidemment plus de même aujourd'hui - mais comme nos principes moraux lui interdisent de publier dans cette revue qu'il a dirigé pendant tant d'années, le progrès pour Ann. Inst. Fourier se voit surtout à travers le nombre et la qualité de publications autres que les siennes - ce qu'on peut parfois regretter.

Les publications plus tardives de Bernard Malgrange sur les équations différentielles à coefficients constants portent surtout sur la division des distributions par un polynôme, et sur les systèmes (exposés au séminaire Leray). Le théorème de division des distributions dit que l'opérateur de multiplication pas un polynôme de n variables est surjectif sur l'espace des distributions, ou sur l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^n$. La première démonstration qu'en a donnée Bernard Malgrange est fondée sur une analyse fine des ensembles algébriques (ou analytiques) utilisant les inégalités de Łojaciewicz; il en a donné depuis de plus simples utilisant le théorème de préparation différentiable (cf. ci-dessous). Les résultats pour les systèmes généralisent ceux pour une équation; on est frappé par la formulation qu'en a donné Bernard Malgrange, qui utilise de façon systématique les notions d'algèbre homologique : l'espace des distributions ou des distributions tempérées est injectif sur l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients constants (c'est une autre formulation du théorème de division); un système d'equations différentielles $\sum\limits_{\kappa} P_{ik}(D) f_k = g_i$ (g_i distribution, ou distribution tempérée) a un solution si et seulement si toute relation (Q_i) satisfaite par les équations (ie. $\sum\limits_{\iota} Q_i P_{ik} = 0$ pour tout k) est aussi satisfaite par les seconds membres (ie. $\sum\limits_{\iota} Q_i g_i = 0$). L'idée de décrire les systèmes plus compliqués dans le langage de l'algèbre homologique était alors à ma connaissance nouvelle; elle a été très largement (pour ne pas dire abusivement) exploitée depuis, en particulier par l'école japonaise (M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara), et ceci s'est avéré d'une grande efficacité - sans être toujours au goût de tous les analystes.

À partir des années 1960, Bernard Malgrange s'est aussi intéressé à d'autre questions. Je ne sais pas si c'est son théorème de division des distributions ou des remarques de R. Thom qui l'ont conduit à s'intéresser au théorème de préparation ou de division pour les fonctions différentiables (exposé pour la première fois en 1963 au séminaire Cartan [63-2]). Le résultat de ce théorème est le suivant : soit $P(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme en x_n sur $\mathbf{R}^n$, de la forme $x_n^d + \sum_{s=1}^{n} a_j(x')x_n^{d-j}$ où les a_j sont des fonctions C^∞ de $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; alors si f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ il existe des fonctions de classe C^∞ : $q(x)$, $r_j(x')$ (les r_j indépendantes de x_n) telles que $f = Pq + \sum_{s=1}^{n} r_j(x')\ x_n^{d-j}$. C'est le même énoncé que pour le théorème de division déduit du théorème de Weierstrass dans le cas analytique, sauf que le quotient q et les coefficients r_j du reste ne sont pas uniques. (La première démonstration de Bernard Malgrange utilise des inégalités fines sur les ensembles analytiques, du type démontré par S. Łojaciewicz; mais il a depuis simplifié et amélioré sa démonstration : par exemple grâce au théorème des fonctions implicites on se ramène au théorème de division par le polynôme générique $x_0^d + \sum_{s=1}^{d} x_j x_0^{d-j}$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{C}^d$; on doit à L. Nirenberg une version linéaire du théorème, ie. où les quotient q et reste (r_j) dépendent linéairement et continûment de f utilisant une division appropriée des exponentielles $\exp(ix \cdot \xi)$ avec majorations polynomiales (en ξ) du quotient et du reste). Le théorème de division de Bernard Malgrange est remarquable à beaucoup d'égards; d'abord parce qu'il était surprenant, et que la première réaction alors était plutôt de penser qu'un tel résultat pour les fonctions C^∞ ne pouvait pas être vrai. Mais surtout parce qu'il a eu un grand nombre d'applications, et est constamment utilisé en géométrie différentielle. J. Mather l'a utilisé de façon spectaculaire pour son théorème sur la stabilité des applications différentiables. Du théorème de préparation Bernard Malgrange a déduit ([66-1]) un théorème sur la structure des idéaux fermés de fonctions différentiables : ceux-ci sont déterminés par leurs jets d'ordre infini (série de Taylor) en chaque point; et l'idéal engendré par un nombre fini de fonctions analytiques est fermé (ce résultat permet de retrouver simplement le théorème de division des distributions par les polynômes).

À la fin des années 60, Bernard Malgrange s'est une fois de plus intéressé aux problèmes de la géométrie analytique, et il a donné ([68-2]) une preuve remarquablement simple du théorème de Newlander-Nirenberg, qui dit qu'une structure presque complexe formellement intégrable sur une variété C^∞ est intégrable; ie. provient d'une structure complexe (autrement dit si $Z_1, \dots, Z_n$ sont n champs de vecteurs sur une variété C^∞ tels que les parties réelles et imaginaires des Z_j soient indépendantes, et que les crochets $[Z_i, Z_j]$ soient combinaisons à coefficients C^∞ des Z_i (condition d'intégrabilité de Frobenius), alors il existe au voisinage de tout point des solutions $f_1, \ldots, f_n$ des équations $Z_j(f) = 0$ dont les différentielles df_j sont linéairement indépendantes). La démonstration de Bernard Malgrange consiste en gros à montrer, très simplement, qu'il existe toujours des coordonnées dans lesquelles les champs Z_j sont à coefficients analytiques - auquel cas le résultat est facile et bien connu. Ce résultat a amené Bernard Malgrange à réfléchir sur les équations de Lie, et la théorie de Spencer, auxquelles il a consacré plusieurs publications (séminaire Leray [69-2], [72-1 et 2].

C'est aussi vers cette époque que Bernard Malgrange s'est intéressé (plus explicitement) à la théorie des équations différentielles à une variable complexe, et celle des systèmes d'équations différentielles à coefficients variables. Ces théories, bien qu'anciennes, ont connu alors un renouveau, grâce en particulier à la contribution de nombreux mathématiciens (P. Deligne, I. Bernstein, et tout particulièrement les mathématiciens japonais M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara) parmi lesquels Bernard Malgrange a une place d'avant-garde.

À ce propos de relations avec les japonais : Bernard Malgrange nous a raconté, non sans une certaine fierté, l'anecdote suivante à propos d'un voyage au Japon (probablement antérieur à 1970) : visitant un des nombreux parcs de Tokyo, ou peut-être à la sortie d'un métro, il s'était vu entouré de japonais admirateurs, appréciant son physique sportif, qui lui demandaient s'il n'était pas lutteur. L'histoire nous avait amusés sur le moment, mais j'avoue n'avoir compris que beaucoup plus tard, quand j'ai vu moi-même les lutteurs SUMO, dont les plus minces pèsent rarement moins de 280 kg, à quel point une telle manifestation devait être aussi significative de la politesse japonaise (ou peut-être d'une certaine myopie?).

Les travaux de Bernard Malgrange sur les équations différentielles et les D-modules ont tous manifestement une inspiration commune; on peut y distinguer plusieurs thèmes.

Dans ses remarques sur les équations différentielles singulières ([70-1]), Bernard Malgrange fait la comparaison des indices formels et convergents pour une équation différentielle singulière, et observe le lien avec la régularité de l'équation (les deux indices sont égaux si et seulement s'il s'agit d'un point singulier régulier, et la différence des indices - normalisée - peut mesurer l'irrégularité). Cette observation, et des variantes ou généralisations, s'est avérée être un ingrédient essentiel dans l'étude des D-modules cohérents et particulièrement des D-modules holonômes.

Bernard Malgrange s'est intéressé à la classification des équations différentielles à points singuliers réguliers. Une équation différentielle singulière à l'origine est une équation différentielle de la forme $y' = A(z)y$, où la fonction inconnue y est une fonction vectorielle, et $A(z)$ est une matrice à coefficients méromorphes au voisinage de 0. La solution générale de l'équation est donnée par $y(z) = R(z, z_0)y(z_0)$ où la résolvante R est une fonction matricielle de z ramifiée autour de 0 - ie. en une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $D_\epsilon - \{0\}$, où D_ϵ est un disque de rayon ϵ assez petit; on a $R(e^{2i\pi}z, z_0) = R(z, z_0)\mu$ où μ est une matrice indépendante de z (et dont la classe de conjugaison ne dépend pas du point initial z_0 choisi). Le point 0 est point singulier régulier si après un changement de fonction inconnue y de la forme $y \to \Phi(z)y$, Φ matrice à coefficients méromorphes au voisinage de 0, l'équation se ramène à la forme $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{A}{z}y$ où A est une matrice constante (les solutions sont alors de la forme $u = \exp(A \operatorname{Log} z) \cdot y_0$, où $y_0 = u(1)$ est un vecteur constant). A équivalence méromorphe près, une telle équation est complètement déterminée, au voisinage de 0, par la monodromie. Pour les équations à points singuliers irréguliers (ie. qui ne se ramènent pas par transformation méromorphe à une équation à pôle simple) la question est plus compliquée. On sait depuis longtemps que la solution d'une telle équation admet dans des secteurs angulaires assez petits un développement asymptotique, en général divergent, combinaison linéaire finie de développements élémentaires de la forme

$$\exp P(x^{-1/d})\ x^\lambda\ (\operatorname{Log} x)^m \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x^k$$

où P est un polynôme sans terme constant, d un entier > 0, m un entier ≥ 0, $\lambda \in \mathbf{C}$. Un tel développement est en fait ambigu, parce que les ordres de grandeur des termes $\exp P_j(x^{-1/d_j})$ changent selon les directions : ils changent précisément sur les courbes où l'une des quantités $\operatorname{Re}(P_i(x^{-1/d_i}) - P_j(x^{-1/d_j}))$ change de signe, dont les asymptotes sont les lignes de Stokes. Pour une équation à coefficients polynomiaux, cette question est étroitement liée à celle de représenter les solutions par des intégrales de Fourier $y(x) = \int_\gamma e^{xu}\ z(u)du$, où γ est une courbe convenable dans $\mathbf{C}$, et $z(u)$ est une solution de la transformée de Fourier de l'équation donnée, obtenue en remplaçant d/dz par u et z par $-d/du$ (la courbe γ doit être choisie fermée, et telle que sur ses asymptotes à l'infini la fonction z décroisse plus vite qu'une exponentielle). Bernard

Malgrange s'est intéressé à la classification formelle de ces équations ([79-1]) et il a explicité complètement la classification des équations à singularités irrégulières en termes de modifications des développements asymptotiques lorsqu'on traverse les lignes de Stokes, ainsi que le lien avec la transformation de Fourier, dans un exposé au séminaire ENS en 1979 ([82-1]). Voisines de ces considérations sont les études qu'il a faites des connexions singulières (Frobenius avec singularité, [75-1] et [77-1]). Ces études ont été reprises, et amplifiées, dans le livre "Equations différentielles à coefficients polynomiaux" (Progress in Math., Birkhaüser, 1991 , [91-2]), qui doit être un livre de chevet pour tous ceux qui étudient les équations différentielles, en 3[e]cycle et au delà, de 22 à 88 ans comme pour Tintin (même si la première section sur les D-modules peut y paraître un peu ardue à un débutant).

Comme je l'ai signalé plus haut, Bernard Malgrange s'est intéressé très tôt à la théorie "algébrique" des équations aux dérivées partielles à coefficients analytiques (ou algébriques). Un des premiers problèmes auxquels il s'est attaqué est celui de comprendre le "polynôme de Bernstein-Sato". Rappelons de quoi il s'agit : si f est un polynôme, resp. ou plus généralement une fonction analytique sur $\mathbf{C}^n$, on s'intéresse aux équations différentielles satisfaites par une puissance formelle f^s (s complexe, ou indéterminé) : Bernstein a démontré de façon "très élémentaire" (ie. sans utiliser par exemple le théorème de désingularisation de Hironaka) que le D-module engendré par f^s est "de dimension minimum n" (on a dit plus tard "holonôme"; D est l'anneau ou le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients rationnels, resp. analytiques), il en déduit qu'il existe un opérateur différentiel $P(x, \partial/\partial x, s)$ à coefficients polynomiaux (resp. analytiques en x, polynomiaux en s) et un polynôme $B(s)$ tels que $P(x, \partial/\partial x, s)\ f^s = B(s)\ f^{s-1}$ (ce résultat est assez facile lorsqu'on connaît le théorème de désingularisation; mais la méthode élémentaire de Bernstein est remarquable, et a contribué à mettre en relief la notion de D-module holonôme). Les polynômes B qui figurent dans de telles formules forment un idéal et ont un P.G.C.D. B_f dont il est intéressant de connaître les zéros (ceux-ci sont toujours rationnels). Bernard Malgrange a fait cette étude, d'abord lorsque f a des singularités isolées ([74-3]) puis en général ([83-2]) en explicitant le polynôme de Bernstein en termes des cycles évanescents de la singularité de f. Liée à cette étude est celle ([74-2]) des intégrales asymptotiques, du type de celles qui servent à représenter la solution élémentaire de certains opérateurs différentiels, et de leur monodromie.

Dans un exposé du séminaire Bourbaki ([78-2]), Bernard Malgrange a donné une preuve particulièrement courte et élégante du théorème d'involutivité des supports démontré par Sato, Kawai, Kashiwara. Rappelons que ce théorème affirme que la variété caractéristique d'un système d'équations différentielles analytiques (ou d'un D-module cohérent) est involutive, ie. que si (localement) deux fonctions $u(x;\xi)$ $v(x,\xi)$ s'y annulent, il en est de même du crochet de Poisson $\{u,v\} = \sum(\partial u/\partial\xi_j\ \partial v/\partial x_{j-}\ \partial u/\partial x_j\ \partial v/\partial\xi_j)$. (Depuis O. Gaber a donné de ce théorème une formulation plus générale - mais dont la démonstration n'est pas plus simple.) Il s'est aussi intéressé à des problèmes de classification de D-modules cohérents, et a donné des éléments de cette classification aux points génériques ([81-2]) (cette classification a progressé depuis - non publié - mais je pense que la question n'est pas terminée).

La théorie de la représentation des solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux par des intégrales de Fourier a aussi conduit Bernard Malgrange (en partie avec J.-L. Brylinski et J.-L. Verdier) à élaborer une théorie raffinée de la géométrie de la transformée de Fourier : la transformation de Fourier géométrique associe à un faisceau d'espaces vectoriels $\mathcal{F}$ sur un espace vectoriel E (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) le faisceau $\mathcal{G}$ sur le dual E' "image de" $\mathcal{F}$ par la relation qui a pour graphe la relation d'incidence $\Gamma = x \cdot y = 0$ dans $E \times E'$, ie. $\mathcal{G} = p_+(q^+\mathcal{F})$, image directe sur E' de l'image inverse sur Γ de $\mathcal{F}$ par les projections $p : \Gamma \to E'$ et $q : \Gamma \to E$. Il s'agit naturellement de l'image directe au sens foncteur dérivé, et il est prudent, pour avoir une théorie qui marche bien, de se limiter aux faisceaux constructibles homogènes, ie. sur lesquels opère le groupe des homothéties de $\mathbf{R}^n$. Il y a un lien entre le transformé de Fourier du faisceau des solutions d'un système P d'équations différentielles polynomiales, et le faisceau des solutions du système transformé de Fourier de P.

Bernard Malgrange s'est aussi intéressé aux problèmes où on voit apparaître des développements asymptotiques divergents - comme ceux des fonctions des classes de Gevrey. C'est typiquement le cas pour de nombreux développements provenant d'une intégrale de Fourier, ou de la méthode de la phase stationnaire. À ceux-ci la méthode de resommation de Borel (parfois une méthode plus élaborée) permet parfois (toujours, avec quelques ambiguïtés, dans les cas "intéressants") d'attribuer une somme. Il a abordé ces questions dans plusieurs articles ([80-2] [81-1] [89-1]). C'est aussi peut-être ce qui l'a sensibilisé très tôt aux travaux de J. Écalle, qu'il a contribué plus que quiconque à faire connaître ([81-3]).

Je ne pourrais pas terminer sans dire un mot sur le théorème d'indice relatif, que Bernard Malgrange a publié en collaboration avec moi ([90-1]). Atiyah et Singer avaient déjà décrit un théorème d'indice pour une famille d'opérateurs elliptiques dépendant continûment d'un paramètre, où l'indice est un fibré vectoriel (virtuel) sur l'espace des paramètres. Ici on s'intéresse à un système d'équations différentielles sur une variété X et à ses solutions globales et (en gros) aux relations différentielles entre celles-ci le long des fibres d'une application analytique $f : X \to Y$ (la notion correcte est l'image directe f_+M d'un D_X-module M). Lorsque le système donné sur M ne peut pas être décrit uniquement au moyen de dérivations verticales (le long des fibres de f), cette description ne se ramène pas à celle de Atiyah et Singer. Les problèmes qui se posent sont alors les suivants : 1) démontrer dans ce cadre, moyennant une hypothèse convenable d'ellipticité, un théorème de finitude (cohérence de f_+M) : le théorème de cohérence avait été démontré par Houzel et Schapira en 1976; 2) décrire, dans ce cadre, un substitut convenable de l'indice (on associe à M un fibré virtuel $[M]$ à support dans $\operatorname{car} M$, et le théorème d'indice décrit le fibré virtuel $[f_+M]$ en fonction de $[M]$ et d'opérations K-théoriques ou cohomologiques "standard"). En fait l'essentiel des idées se trouve dans l'article [85-3] sur les images directes (propres) de D-modules; et la date tardive de la parution du cas général (non propre) est surtout due à ma propre lenteur.

Pour conclure je ne peux que répéter que Malgrange nous laisse une œuvre considérable par le nombre de sujets qu'il a traités et la profondeur des idées qu'il y a apportées; et bien avant qu'elle soit terminée il me paraît évident qu'elle laissera une marque indélébile sur les mathématiques à venir.

BIBLIOGRAPHIE

[53-1] Équations aux dérivées partielles à coefficients constants I, C.R.A.S., 237 (1953),1620-1622.

[54-1] Équations aux dérivées partielles à coefficients constants I, C.R.A.S., 238 (1954),196-198.

[54-2] Sur quelques propriétés des équations de convolution, C.R.A.S., 238 (1954), 2219-2221.

[55-1] Formes harmoniques sur un espace de Riemann à ds^2 analytique, C.R.A.S., 240 (1955), 1958-1960.

[55-2] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution (thèse), Ann. Inst. Fourier, 6 (1955), 271-355.

[56-1] Sur les systèmes d'équations elliptiques, Coll. C.N.R.S. 71, (1956), 139-113.

[56-2] Sur l'intégrale de Dirichlet, Math. Scand., 4 (1956), 271-275.

[57-1] Plongement des variétés analytiques réelles, Bull. S.M.F., 85 (1957), 101-113.

[57-2] Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. S.M.F., 85 (1957), 231-237.

[57-3] Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. S.M.F., 85 (1957), 283-302.

[58-1] Sur certaines structures fibrées complexes, Archiv. Math, 9 (1958), 102-109 (*avec J.L. Koszul*).

[58-2] Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques, C.R.A.S., 247 (1958), 2083-2085 (*avec L. Garding*).

[58-3] Lectures on the theory of functions of several complex variables, Tata Inst., Bombay, 1958.

[59-1] Sur les équations de convolution, Séminaire Lelong, Rend. Sem. Mat. Torino, 19 (1959-60), 19-27.

[59-2] Sur une inégalité de F. Trèves, Math. Zeit., 72 (1959), 184-186.

[59-3] Sur la propagation de la régularité des équations à coefficients constants, Bull. Math. Soc. Math. Phys. Roumanie, 3(53) (1959), 433-440.

[60-1] Unicité du problème de Cauchy : la méthode de Calderon, Séminaire L. Schwartz (1959-60) exposés 8-10.

[60-2] Division des distributions, Séminaire L. Schwartz (1959-60), exposés 21-25.

[60-3] Sur l'unicité du problème de Cauchy, Rend. del Sem. Mat. e Fis., Milano, vol 30 (1960).

[60-4] Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, Math. Scand., 8 (1960), 277-286 (*avec J.-L. Lions*).

[61-1] Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, Math. Scand., 9 (1961), 5-21 (*avec L. Garding*).

[61-2] Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, Séminaire Lelong, (1960-61), exposé 7 et Bull. S.M.F., 91 (1963) 113-127.

[62-1] Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel à coefficients-constants, C.R.A.S., 254 (1962), 614-615.

[62-2] Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Coll. C.N.R.S., 117 (1962) et Séminaire Leray (1961-62).

[62-3] Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite), Séminaire Leray (1961-62).

[62-4] Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki (1962).

[63-1] Quelques problèmes de convexité pour les opérateurs différentiels à coefficients constants I et II, Séminaire Leray (1962-63); *cf.* aussi Comm. Math. Helv., 46-4 (1971), 487-499.

[63-2] Le théorème de préparation en géométrie différentiable, Séminaire H. Cartan (1962-63), exposés 11-12-13-25.

[64-1] The preparation theorem for differentiable functions, Bombay Coll. on Differential Analysis, 203-208, Oxford University Press, 1964.

[64-2] Some remarks on the notion of convexity for differential operators, Ibid, 103-174.

[66-1] Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966.

[66-2] Théorie locale des fonctions différentiables, I.C.M. Moscou, 1966.

[68-1] Analytic spaces, Enseignement Math., 14-1 (1968), 1-28 (article d'exposition).

[68-2] Sur l'intégrabilité des structures presque complexes, Symp. Mat., vol 2 (1968).

[69-1] Introduction aux équations aux dérivées partielles, Rend. Sc. Int. di Fis. E. Fermi, 45 Corso, Acad. Press, 1969, 32-64 (article d'exposition).

[69-2] Pseudogroupes de Lie elliptiques, Sémaire Leray (1969-70), vol. I, (1969), 1-59.

[70-1] Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C.R.A.S., 273 (1970), 1136-1137.

[72-1] Équations de Lie I, J. Diff. Geometry, 6-4 (1972); II, Ibid. 7-1 (1972).

[72-2] Sur les points singuliers des équations différentielles, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1974-92), exposés 20-21-22 et Enseignement Math., 20-1-2 (1972), 147-172.

[73-1] Letter to the editors, Inventiones Math., 20 (1973), 171-172.

[74-1] Sur les polynômes de Bernstein, Uspekhi Math. Nauk, 29-4 (1974), 91-88 (cf. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973-74).

[74-2] Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sc. E.N.S., 7 (1974), 405-430.

[74-3] Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, Coll. sur les opérateurs intégraux de Fourier, Nice 1974, Springer Lecture Notes 459 (1974).

[75-1] La cohomologie d'une variété analytique complexe, C.R.A.S., 280 (1975), 995.

[76-1] Frobenius avec singularités, 1) codimension un, Publ. Sc. I.H.E.S., 46 (1976), 163-173.

[77-1] Frobenius avec singularités, 1) le cas général, Inventiones Math., 39 (1977), 67-89.

[77-2] Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1976-77), exposé 25 et Springer Lecture Notes 712 (1977).

[78-1] Algebraic aspects of the theory of partial differential equations, Enseignement Math., 24-3 (1978), 479-188.

[78-2] L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels, Séminaire Bourbaki, 552 (1977-78).

[79-1] Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières (non publié).

[80-1] Polynôme de Bernstein-Sato, Publ. I.R.M.A., Strasbourg, R.C.P. 25, vol 28 (1980).

[80-2] Méthode de la phase stationnaire et sommation de Borel, L.N. in Phys. 126, Springer, 1980.

[81-1] Modules microdifférentiels et classes de Gevrey, Adv. in Math. Suppl. Studies, 7B (1981), 513-530.

[81-2] Réduction d'un système microdifférentiel au point singulier générique I, Comp. Math., 44, 1-3 (1981), 133-143.

[81-3] Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Sém. Bourbaki nov. 1981.

[82-1] Déformation de systèmes différentiels et microdifférentiels (Sem. E.N.S. 79) Séminaire E.N.S. 80-82, Birkhaüser, 1982, (27p.).

[82-2] La classification des connexions irrégulières à 1 variable, Séminaire E.N.S. 80-82, Birkhaüser, 1982, (19p.).

[82-3] Sur les déformations isomonodromiques, Séminaire E.N.S. 80-82, Birkhaüser, 1982, (38p.).

[83-1] Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara, Astérisque, 101-102 (1983), 230-242.

[83-2] Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque, 101-102 (1983), 243-467.

[83-3] Transformation de Fourier géométrique et microlocalisation, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1982-83, exposé 12 (5p.).

[83-4] Transformation de Fourier géométrique I, C.R.A.S. 297-I (1984), 55-58 (avec *J.-L. Brylinski et J.-L. Verdier*).

[85-1] Variations généralisées, Astérisque, 130 (1985), 237-239.

[85-2] Introduction aux travaux de J. Écalle, Enseignement Math., 31 (1985), 261-282.

[85-3] Sur les images directes de D-modules, Man. Math., 50 (1985), 49-71.

[86-1] Transformation de Fourier géométrique II, C.R.A.S., 303-I (1986), 193-198 (avec *J.-L. Brylinski et J.-L. Verdier*).

[87-1] Regular connections after Deligne, in A. Borel et al, Algebraic D-modules, Persp. in Math., Acad. Press, 1987.

[87-2] Deformations of differential systems 2, J. Ramanujan Math. Soc., 1 (1987), 3-15.

[88-1] Transformation de Fourier géométrique, Séminaire Bourbaki, fév. 1988.

[88-2] Extensions of holonomic D-modules, Algebraic Analysis vol I edited by M. Kashiwara - T. Kawai, Ac. Press, 1988, 403-411.

[89-1] Sur le théorème de Maillet, Asymptotic Analysis, 2 (1989), 1-4.

[89-2] Équations différentielles linéaires et transformations de Fourier, Ensaios Mat., vol. I, Soc. Bras. de Mat., 1989.

[90-1] Le théorème de l'indice relatif, Ann. E.N.S., 23 (1990), 151-192 (avec *L. Boutet de Monvel*).

[91-1] Fourier transform and differential equations, in Recent developments in quantummechanics, A. Boutet de Monvel et al. (éditeurs), Kluwer Ac. Publ., 1991, 33-48.

[91-2] Équations différentielles à coefficients polynomiaux, Progress in Math., Birkhaüser, 1991.

Louis BOUTET DE MONVEL,
Université de Paris VI
UFR de Mathématiques
Tour 45-46, 5ème étage
4 place Jussieu
F - 75252 Paris Cedex 05.