LAURENT SCHWARTZ

**Les travaux de Bernard Malgrange (première partie)**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 43, nº 5 (1993), p. 1199-1209

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1199_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**43**, 5 (1993), 1199-1209

# LES TRAVAUX DE BERNARD MALGRANGE
# (Première partie)

**par Laurent SCHWARTZ**

---

Bernard Malgrange est né le 6 juillet 1928 à Paris. Il a été élève de l'Ecole Normale Supérieure de 1947 à 1951, attaché de recherche au CNRS de 1951 à 1955; à partir de là, maître de conférences, puis professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg; à partir de 1960, maître de conférences, puis professeur à la Faculté des Sciences de Paris; à partir de 1965, professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay. Il a quitté la région parisienne en 1969, et il est devenu professeur à la Faculté des Sciences, puis à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble. En 1973, il est entré, comme directeur de recherches, au CNRS en restant attaché à son Université de Grenoble. Depuis 1977, il est membre corespondant de l'Académie des Sciences. Il en est devenu membre en 1988. Il a reçu des distinctions diverses que je n'énumérerai pas.

## 1. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Une longue période de ses travaux (essentiellement sa thèse) est consacrée à l'étude des équations aux dérivées partielles. Les solutions élémentaires (appelées aussi solutions fondamentales) ont été depuis longtemps l'objet de nombreuses études. Un très grand travail de Jacques Hadamard a étudié à fond les solutions élémentaires des équations hyperboliques, avec l'intervention du cône d'ondes. Après divers travaux prééminents en France sur ces questions, les équations aux dérivées partielles ont été un peu oubliées. Dans les années trente, de très importants progrès ont été apportés par Jean Leray dans l'étude des liquides visqueux (équations de

Navier–Stokes), mais il a été très isolé. C'est essentiellement à partir du milieu des années cinquante que les équations aux dérivées partielles sont redevenues en France un sujet d'étude majeur. Elles sont peut-être aujourd'hui, si on les prend sous toutes leurs formes, le sujet le plus important de recherche en mathématiques en France.

Alors qu'ils étaient en deuxième année d'Ecole Normale Supérieure, deux élèves, en 1948, Malgrange et Blanchard, ont demandé à passer un semestre à la Faculté des Sciences de Nancy, où se trouvaient à la fois Jean Delsarte, Jean Dieudonné, moi-même, Roger Godement et Luc Gauthier. La théorie des distributions laissait un large champ libre à de nouvelles recherches, l'Université de Nancy était en plein épanouissement, alors que l'Université de Paris n'atteignait pas du tout le même niveau en analyse. Parmi les mathématiciens vraiment modernes, seul Henri Cartan donnait un enseignement de grande envergure, et c'est lui qui était responsable des normaliens. C'est Dieudonné qui avait fait aux deux jeunes normaliens la suggestion de venir à Nancy, et Henri Cartan a tout de suite donné son accord enthousiaste. On devine donc le plaisir, dans notre université où il n'y avait presque pas d'étudiants de recherche, de recevoir deux jeunes et brillants normaliens. C'était une bouffée d'oxygène. Nous avions, à Nancy, un séminaire actif tous les samedis, auquel participaient tous les professeurs et un certain nombre d'étudiants, et qui traitait des sujets les plus divers. Malgrange et Blanchard ont été deux auditeurs actifs. L'année suivante, la même initiative fut poursuivie pour François Bruhat et Marcel Berger. Puis un professeur de l'Ecole Normale Supérieure, qui formait les normaliens à côté de Cartan mais qui n'avait pas du tout l'esprit aussi ouvert, s'est opposé à la poursuite de cette entreprise : "Il n'y a qu'une Ecole Normale, elle est à Paris, et c'est là que les normaliens doivent se trouver". L'année suivante, nous n'eûmes donc plus de normaliens. Mais, dans l'année 1951-52, Jacques-Louis Lions et Malgrange, qui étaient alors sortis de l'Ecole Normale, donc libres, revinrent passer une année entière à Nancy. Peu après, Alexandre Grothendieck, qui avait fait ses études à Montpellier et ne s'y était guère plu, avait demandé à Cartan s'il pouvait suivre son séminaire; il s'intéressait à l'analyse. Cartan l'a envoyé chez nous, et ce fut évidemment une recrue de premier ordre. D'autre part, Paul Malliavin vécut aussi à Nancy plusieurs années. Nous avions donc un groupe très important de jeunes à qui nous consacrions toute notre attention. Je crois qu'alors, pendant quelques années, la Faculté des Sciences de Nancy a été un des grands pôles mathématiques dans le monde pour tout ce qui touchait l'analyse.

Malgrange s'est attaché à l'étude de la solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants, problème alors extrêmement surprenant; on ne s'intéressait guère qu'aux équations elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, mais pas aux équations tout à fait générales. L'idée de trouver une solution élémentaire pour tous les opérateurs différentiels à coefficients constants pouvait paraître un peu farfelue. Toutefois, j'avais fait la suggestion de l'existence d'une telle solution à l'aide des distributions, mais j'ignorais totalement si cette suggestion était sensée. Malgrange a précisément démontré ce théorème d'existence à peu près en même temps que Léon Ehrenpreis aux Etats-Unis. Ehrenpreis m'a d'ailleurs mis dans une situation embarrassante. Malgrange et Ehrenpreis ont travaillé plusieurs années sur des sujets très analogues. Ils avaient tous les deux à publier des notes et à préparer leur thèse. Je travaillais donc en étroite collaboration avec Malgrange, mais aussi avec Ehrenpreis qui m'envoyait régulièrement ses sujets de réflexion et ses projets. Mais ce n'était guère tenable pour moi par rapport à deux étudiants préparant leur thèse de doctorat. Si je recevais une lettre d'Ehrenpreis me faisant quelques suggestions, avais-je le droit d'en parler à Malgrange? Cela brouillait toute la situation. Tantôt l'un, tantôt l'autre était plus en avance, et je ne pouvais plus tenir l'équilibre. Bien que cela soit profondément anti-scientifique en principe, j'ai demandé à Ehrenpreis de ne plus m'écrire de lettre sur ses *projets*. Il pouvait m'envoyer des notes aux comptes rendus à faire publier, une fois qu'elles étaient complètement prêtes; comme chacun des deux envoyait ses notes publiées à l'autre, il pouvait voir lui-même s'il voulait ou pouvait publier ou ne pas publier. Il a parfaitement compris cette situation désagréable pour lui comme pour moi, et je lui en suis reconnaissant. Il a fait aussi de remarquables travaux sur des sujets analogues.

L'ancêtre de toutes les découvertes ultérieures sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants fut le théorème suivant, démontré par Malgrange :

*Soit $P$ un polynôme non identiquement nul, donc $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, son transposé est alors $P(-D)$. Il est indifférent d'utiliser l'un ou l'autre, mais c'est en fait ici $P(-D)$ qui va jouer le rôle important. Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, si $\phi$ est une fonction $C^\infty$ à support dans $K$, on a l'inégalité suivante :*

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C(K, P, n)\|P(-D)\varphi\|_{L^2}$$

*où $C(K, P, n)$ est une constante qui ne dépend que de l'opérateur $P$, du compact $K$ et de $n$.*

La méthode utilise bien sûr les fonctions analytiques d'une variable complexe et la transformation de Fourier. Cette inégalité est en somme une généralisation de l'inégalité bien connue de Poincaré où l'opérateur différentiel est remplacé par le gradient. Un tas d'autres démonstrations ont été données ensuite de cette inégalité, notamment une démonstration de Trèves par récurrence sur le degré du polynôme, en utilisant alors le théorème des supports de Lions, qui venait d'être publié; on en déduit facilement que la forme linéaire $P(-D)(\phi) \mapsto \phi(0)$ est continue sur $P(-D)\mathcal{D}_K$ (en tenant compte de ce que $\delta$ est somme de dérivées d'ordre $\leq [n/2]+1$ de fonction de $L^2$). Il y avait à ce moment-là une faute à ne pas commettre. On pouvait en effet dire ceci : l'espace $\mathcal{D}$ étant limite inductive des espaces $\mathcal{D}_K$, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ (ici $P(-D)\mathcal{D}$), alors la topologie de $F$ induite par celle de $\mathcal{D}$ est limite inductive des topologie $F\cap\mathcal{D}_K$ et $P(-D)\mathcal{D}_K = P(-D)\mathcal{D}\cap\mathcal{D}_K = F\cap\mathcal{D}_K$. par le théorème des supports de Lions. C'est tellement naturel! J'avais d'abord commis une fois cette faute, ainsi que Dieudonné, puis nous l'avions rectifiée. Malgrange, bien entendu, commit la même faute (il ne s'en souvient plus, mais moi je m'en souviens bien). Ehrenpreis a commis la même faute, et il s'en souvient très bien aussi. Ultérieurement, d'autres mathématiciens très connus l'ont commise aussi. La faute est la suivante : puisque $P(-D)\phi \mapsto \phi(0)$ est linéaire continue sur les sous-espaces $F\cap\mathcal{D}_K$, elle est continue sur leur limite inductive $F$, elle se prolonge donc par Hahn-Banach en une forme linéaire continue $E$ sur $\mathcal{D}$, donc une distribution; alors $\delta(\phi) = \phi(0) =< E, P(D)\phi >=< P(D)E, \phi >$, donc $P(D)E = \delta, E$ est une solution élémentaire. Le malheur est que $P(-D)\phi \mapsto \phi(0)$ est continue sur chaque $F\cap\mathcal{D}_K$, donc seulement sur leur limite inductive, plus fine a priori que la topologie induite par $\mathcal{D}$. Malgrange a très rapidement trouvé une astucieuse démonstration exacte. Il a montré que, si le coefficient de $x_1^m$ dans $P$ (de degré $m$) n'est pas nul, situation à laquelle on peut toujours se ramener, on a une inégalité globale sur $\mathbb{R}^n$, et non plus seulement sur tout compact $K$, de la forme :

$$|\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}L^1} \leq \text{const} \sup_{|\rho|\leq r} \|e^{2\pi\rho x_1} P(-D)\varphi\|_{\mathcal{F}L^1}.$$

Alors la forme linéaire $P(-D)\phi \mapsto \phi(0)$ est linéaire continue sur $F$ muni de la norme $\psi \mapsto \sup\limits_{|\rho|\leq r} \|e^{2\pi\rho x_1}\psi\|_{\mathcal{F}L^1}$, continue sur $\mathcal{D}$. Donc elle se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, une distribution $E$, vérifiant la même inégalité :

$$\delta(\phi) = \phi(0) =< E, P(-D)\phi >, \text{ où } P(D)E = \delta,$$

avec

$$| < E, \psi > | \leq \text{const} \operatorname*{Sup}_{|\rho| \leq r} \|e^{2\pi\rho x_1}\psi\|_{\mathcal{F}L^1}.$$

$E$ est somme de dérivées d'ordre $\leq [n/2]+1$ de fonctions de $L^2_{\text{loc}}$, et elle opère de $L^2_{\text{comp}}$ dans $L^2_{\text{loc}}$ par convolution.
On remarque qu'en général la solution élémentaire est d'autant plus régulière que le degré de l'équation est plus élevé. L'irrégularité maxima est obtenue pour l'opérateur différentiel 1, c'est $\delta$, qui est précisément somme de dérivées d'ordre $\leq [n/2]+1$ de fonctions de $L^2$.
En outre, on voit que la croissance à l'infini de la solutions élémentaire est de type exponentiel. Trèves a aussi trouvé une inégalité analogue et très intéressante : pour toute $\phi \in \mathcal{D}$ on a, si $\mathcal{P}$ est de degré $m$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2/2}|P^{(\ell)}(-D)\varphi|^2 dx \leq 2^m \ell! \int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2/2}|P(-D)\varphi|^2 dx;$$

on fait alors $|\ell| = m$, ce qui donne une nouvelle démonstration d'existence d'une solution élémentaire avec une nouvelle majoration. Finalement, Lars Hörmander a encore trouvé une solution élémentaire, à partir cette fois de la transformation de Fourier dans l'espace complexe $\mathbb{C}^n$, en se faufilant à travers les zéros complexes du polynôme $P$, et qui a probablement les meilleures propriétés possible. Toute cette digression est destinée ici à montrer l'impact considérable de la découverte de Malgrange sur la solution élémentaire, immédiatement diffusée dans le monde entier. Trèves a montré, quelques années plus tard, qu'il existe un choix de solutions élémentaires pour les divers opérateurs, qui dépend $C^\infty$ (à valeurs dans $\mathcal{D}'$) des coefficients du polynôme $P$ tant qu'il n'est pas identiquement nul.

Naturellement, Malgrange a aussi essayé de trouver des solutions élémentaires tempérées; mais ceci nécessite la résolution du problème de la division des distributions. C'est ce que j'avais donné comme premier sujet de thèse possible à Malgrange. Après plusieurs mois de réflexion, il a dû y renoncer, et je lui ai ainsi fait perdre pas mal de temps. La solution de ce problème est très difficile; il a été résolu d'abord en partie par Hörmander, puis par Łojasiewicz.

Malgrange a aussitôt poursuivi par l'obtention d'autres résultats importants; par exemple, si $\Omega$ est un ouvert convexe, alors $P(D)\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$, par une méthode de Mittag Leffler; $P(-D)\mathcal{E}'(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega)$; et dans $\Omega$ toute solution $C^\infty$ de l'équation homogène $P(D)f = 0$ est limite dans $C^\infty$ d'exponentielles polynômes solutions de l'équation homogène. Ces trois résultats sont en fait équivalents pour un ouvert $\Omega$, convexe ou non. Pour étudier le deuxième, on utilise un théorème profond de Banach :

dans le dual d'un espace de Fréchet (ici dans $\mathcal{E}'$), un sous-espace vectoriel est fermé pour la topologie $*$-faible si et seulement son intersection avec toute partie bornée est $*$-faiblement fermée dans cette partie; c'est peut-être une des premières grandes utilisations de ce beau théorème. On peut remplacer $\mathcal{E}$ par $L^p_{\text{loc}}$ (avec $P(D)(L^p_{\text{loc}}) \supset L^p_{\text{loc}}$ au lieu de $=$), et aussi par $\mathcal{D}'_F$, espace des distributions d'ordre fini, pour l'existence d'une solution de l'équation avec second membre, avec la même méthode de Mittag Leffler. On utilise partout abondamment le théorème des supports de Lions. Par contre, on n'y arrive pas ainsi directement pour $\mathcal{D}'$. Pour un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, $P(D)\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ équivaut à $P(D)\mathcal{E} = \mathcal{E}$ et $P(D)(\mathcal{D}'/\mathcal{E}) = \mathcal{D}'/\mathcal{E}$. La première démonstration a été donnée, pour un ouvert convexe, par Ehrenpreis, puis simplifiée par Malgrange. Au lieu de résoudre l'équation unique $P(D)f = g$ sur un ouvert convexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, on peut résoudre le système (surdéterminé) $P_i(D)f = g_i$; il existe une solution $f \in \mathcal{E}$ pour des $g_i$ données $\in \mathcal{E}$, si et seulement si, pour tout système de polynômes $Q_i$ tels que $\sum_i Q_i P_i = 0$, on a $\sum_i Q_i(D)g_i = 0$ (1962).

Naturellement on passe des opérateurs différentiels à coefficients constants aux opérateurs de convolution. Il utilise un théorème connu mais très utile et qui avait été un peu oublié : si le quotient de deux fonctions analytiques entières (de plusieurs variables complexes) de type exponentiel est encore une fonction entière, il est aussi de type exponentiel. Malgrange s'est alors attaqué à l'étude des fonctions moyenne périodiques. J'avais démontré, dans un article sur ce sujet, en 1947, un théorème de synthèse spectrale : dans l'espace des fonctions continues sur la droite, muni de la topologie de la convergence compacte, un sous-espace vectoriel fermé, invariant par les translations de la droite, est engendré par les combinaisons linéaires finies des exponentielles polynômes qu'il contient. Ma démonstration était très difficile; elle a été très notablement simplifiée par Jean-Pierre Kahane; elle reste difficile. Le problème était alors d'étendre ce théorème au cas de $\mathbb{R}^n$. Malgré une intensive recherche, Malgrange n'y est pas parvenu (je n'y étais naturellement pas parvenu moi-même); il a simplement démontré – ce qui est déjà un résultat très intéressant – que le sous-espace vectoriel des fonctions $f$ vérifiant *une* équation de convolution homogène $\mu * f = 0$, est engendré par les exponentielles polynômes qu'il contient. Le problème est resté ouvert pendant très longtemps et a beaucoup intrigué les mathématiciens de France et des Etats-Unis. La conjecture a été résolue par la négative par le mathématicien soviétique Gourévitch, récemment. Chose étrange, ce résultat, qui détruisait les illusions antérieures datant des années cinquante, est presque passé inaperçu, tellement les mathématiciens s'étaient découragés de ne pas trouver la solution générale.

## 2. Opérateurs hypoelliptiques.

Il s'agit maintenant d'opérateurs à coefficients variables. Au lieu de les écrire $P(x, D)$, nous simplifierons en appelant $P$ de tels opérateurs et $P'$ leurs transposés. J'avais eu le malheur, dans mon livre sur les distributions, d'appeler elliptique tout opérateur à coefficient $C^\infty$ possédant la propriété suivante : si on a une équation $Pf = g$, alors $f$ est $C^\infty$ partout ou $g$ est $C^\infty$. Je rompais ainsi avec les appellations habituelles, elliptiques, paraboliques, hyperboliques en considérant que cette propriété était la propriété fondamentale des opérateurs elliptiques au sens usuel. C'était une idée malencontreuse; on ne change pas facilement une terminologie universellement adoptée. A un colloque sur les équations aux dérivées partielles, tenu à Nancy en 1957, j'ai été amené à exposer un récent travail très intéressant de Mizohata, qui contenait d'ailleurs une ébauche des futurs opérateurs pseudodifférentiels. Ce résultat était : ellipticité des opérateurs paraboliques! Cela souleva naturellement un énorme tollé dans l'assistance, et c'était justifié! Nous avons décidé que nous devrions tous sur place trouver un nouveau nom pour la propriété de différentiabilité citée plus haut, qui était effectivement vérifiée pour les opérateurs elliptiques au sens usuel, mais aussi par les opérateurs paraboliques, d'où le titre de Mizohata. Nous décidâmes de garder l'ellipticité pour les anciennes dénominations, et d'appeler hypoelliptique un opérateur possédant cette propriété de différentiabilité. Malgrange, naturellement, utilise ces opérateurs sur des variétés $C^\infty$ connexes et même pour les opérateurs différentiels sur des espaces fibrés vectoriels de dimensions finies sur ces variétés; mais il les appelle elliptiques comme je l'avais fait, et il faut maintenant lire ces chapitres en mettant hypoelliptiques. Il devra supposer en outre une "sorte" d'analyticité des solutions de l'équation homogène : si $Pf = 0$, et si $f = 0$ dans un ouvert, alors $f = 0$ partout. Malgrange donne alors toute une série de propriétés des opérateurs hypoelliptiques, qu'il nous est impossible d'énumérer toutes ici. Donnons juste quelques résultats. Il donne une condition pour que, pour la variété tout entière, $P\mathcal{E} = \mathcal{E}$. Il imite beaucoup ici les méthodes des équations à coefficients constants, et le théorème profond de Banach sur les sous-espaces $*$-faiblement fermés d'un dual d'un espace de Fréchet intervient de la même manière. Le théorème des supports de Lions n'existe évidemment pas pour des opérateurs à coefficients variables, mais il a un substitut pour les opérateurs hypoelliptiques, le théorème de la

$P'$-enveloppe réciproque d'un compact de la variété. Une propriété intéressante du cas hypoelliptique est la suivante : pour le cas des coefficients constants, $P\mathcal{D}'_F = \mathcal{D}'_F$ n'entraînait pas $P\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$. Au contraire, dans le cas des équations à coefficients variables hypoelliptiques, $P\mathcal{D}'_F = \mathcal{D}'_F$ sur un ouvert $\Omega$ entraîne $P\mathcal{E} = \mathcal{E}$ et $P\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ (et les trois propriétés sont donc équivalentes si les coefficients sont constants, et sont vérifiées sur tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ si l'opérateur est analytique-hypoelliptique). La démonstration utilise une petite propriété cohomologique triviale en degré 1, basée sur une partition de l'unité. Il était bien connu que, pour des fonctions harmoniques ou holomorphes, la convergence uniforme sur tout compact, est identique à la convergence dans $C^\infty$; pour les opérateurs hypoelliptiques, les topologies de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{D}'$ coïncident sur l'espace des solutions de l'équation homogène.

Naturellement, il étudie ensuite les opérateurs analytiques hypoelliptiques. Sur une variété compacte, il montre que si $P$ est vraiment elliptique, c'est-à-dire du type de Petrowski, l'application $P$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ est un morphisme strict, le noyau est de dimension finie et l'image est fermée de codimension finie; même propriété en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}'$; c'était implicitement connu, mais ici les choses sont toutes précisées. Donc $P$, opérant sur $\mathcal{D}$ ou sur $\mathcal{D}'$ possède un indice, qui est le même pour les deux, et on sait l'importance qu'a pris ensuite le calcul de cet indice par Atiyah et Singer. Dans le cadre des variétés non compactes, il montre que toute surface de Riemann connexe non compacte est une variété de Stein. Pour les variétés analytiques réelles, donc possédant une structure riemannienne analytique réelle (par plongement dans un espace vectoriel), il montre que la cohomologie réelle, qui peut (théorème de de Rham) s'obtenir à l'aide du cobord pour les formes différentielles $C^\infty$, peut aussi s'obtenir à partir des formes différentielles analytiques. Il montre aussi que le laplacien est surjectif si la variété n'est pas compacte, comme il l'est sur $\mathbb{R}^n$. Enfin, il trouve des conditions simples pour lesquelles l'opérateur elliptique possède un noyau élémentaire bilatère très régulier; c'est une remarquable application du produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques (pour les opérateurs qui ne sont pas à coefficients constants, les solutions élémentaires sont à remplacer par des noyaux élémentaires).

Tous les travaux de ces paragraphes 1 et 2 sont exposés dans la thèse de Malgrange datant de 1955 et dans quelques travaux ultérieurs jusqu'à un peu plus loin que 1960. Dans un travail très intéressant, publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, il étudie des conditions assez générales dans lesquelles un opérateur sur une variété est hypoelliptique : il suffit que, en utilisant la notion de force des opérateurs différentiels à coefficients constants de Hörmander, les différents opérateurs différentiels obtenus en gelant la coordonnée $x$ aux différents points de la variété soient tous hypoelliptiques et tous d'égale force. Naturellement, cela ne résoud pas le cas général.

## 3. Idéaux de fonctions différentiables.

Il s'agit là d'une nouvelle série de travaux, différente des précédents quoique inspirée en partie par eux, qui vont couvrir plusieurs années. Comme j'avais beaucoup travaillé sur l'analyse et la synthèse harmoniques, je m'étais posé, sur l'espace des distributions tempérées, le problème général d'analyse et synthèse spectrales : si un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $\mathcal{S}$ est invariant par les translations de $\mathbb{R}^n$, il est engendré par les exponentielles polynômes qu'il contient. Ces exponentielles sont naturellement purement imaginaires. Par une simple transformation de Fourier, on arrivait immédiatement au problème suivant : tout idéal fermé dans l'espace des fonctions $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ est engendré par ses idéaux pontuels. L'idéal ponctuel relatif à un point $a$ de $\mathbb{R}^n$ associé à l'idéal fermé considéré est son image par l'application qui fait correspondre à une fonction $f$ son développement de Taylor formel illimité au point $a$. L'espace entier des fonctions $C^\infty$ engendre alors au point $a$ l'algèbre des séries formelles, et un idéal de $C^\infty$ engendre un idéal de l'algèbre des séries formelles au point $a$. Ce théorème me paraissait très difficile; il a été résolu par une suite amusante de circonstances. En 1947, avait lieu à Nancy un colloque d'analyse harmonique où j'ai pu exposer comment la conjecture sur les idéaux de fonctions différentiables résoudrait immédiatement ce problème d'analyse et synthèse harmonique dans $\mathcal{S}$. Or il se trouve que Hassler Whitney devait assister à ce colloque (où il y avait de nombreux mathématiciens bien connus, comme Norbert Wiener, Harald Bohr, Börge Jessen, Arne Beurling, Michel Loève, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Plancherel (ce dernier, alors âgé de soixante-dix ans, était très sportif, et allait tous les matins à la piscine de la ville de Nancy)). Whitney devait venir un peu plus tard; comme il était un spécialiste des fonctions $C^\infty$, nous nous sommes dit qu'il pourrait peut-être résoudre ce problème. Il devait arriver juste un soir où nous avions, Marie-Hélène et moi, invité tous les orateurs du colloque à dîner. Il s'agissait d'aller le trouver à la gare de Nancy et l'amener au dîner. Mais aucun de nous ne le connaissait, sauf Norbert Wiener. Celui-ci était déjà un peu âgé, et il était délicat de lui demander de se déplacer pour venir à la gare. Il nous dit alors : "Il existe un critère infaillible pour reconnaître Whitney : il est beaucoup plus âgé qu'il ne paraît". Naturellement, nous éclatâmes tous de rire. Muni de cette précieuse information, j'allai quant même à la gare pour essayer de trouver Whitney. Je l'ai effectivement trouvé, mais pas par le critère de Wiener. Simplement, je cherchais quelqu'un, il cherchait quelqu'un, et nous nous sommes rencontrés. Je l'ai amené au dîner et je lui ai posé le problème des idéaux de fonctions différentiables. Il me répondit d'un air très assuré : "Je vous donne la réponse dans un quart d'heure". Le quart d'heure passa, il n'y avait pas de réponse. Finalement, il a tardé et c'est six mois après qu'il m'a envoyé la démonstration, d'ailleurs très remarquable, du théorème. Je m'arrêtai là sur ces idées, mais elles engendrèrent chez Malgrange toute une série de réflexions, et en particulier la publication d'un livre en 1966 sur les idéaux de fonctions différentiables. Il montre que l'idéal engendré par un nombre fini de fonctions analytiques est fermé, donc il est entièrement défini par ses idéaux ponctuels de séries formelles de Taylor. Il a montré aussi que toute relation à coefficients $C^\infty$ entre un nombre fini de germes de fonctions analytiques en un point est engendrée, au sens $C^\infty$, par les relations à coefficients analytiques. En d'autres termes, le module des germes de fonctions $C^\infty$ en un point est plat sur l'anneau des germes de fonctions analytiques en ce point. C'était un problème posé par Serre. Son livre contient un grand nombre de résultats très intéressants. Bien sûr, il a étudié aussi les sous-modules fermés du module des fonctions différentiables à valeurs vectorielles (modules sur l'anneau des fonctions différentiables). La théorie des idéaux de fonctions analytiques de Cartan–Oka intervient constamment. Il a en particulier démontré le théorème de préparation $C^\infty$, généralisant le théorème bien connu de préparation analytique. On pourrait aisément en donner l'énoncé ici, mais c'est inutile, puisque c'est exactement le même que pour les fonctions analytiques. Toutefois il y a des différences importantes entre le théorème de préparation différentiable et le théorème de préparation analytique : dans le cas des fonctions analytiques, il y a unicité du développement, alors que ce n'est pas le cas pour les fonctions différentiables.

J'ajouterai, pour terminer cette première série de travaux (toute une deuxième série de travaux, qui vont jusqu'à aujourd'hui, est exposée par Louis Boutet de Monvel) quelques résultats épars. Il a donné une nouvelle démonstration en 1968 du théorème de Newlander–Nirenberg sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété presque complexe soit une variété complexe. D'autre part, il a démontré, dans le cas du théorème de Frobenius analytique, que le résultat obtenu d'habitude en supposant que le rang du système de Frobenius est partout le même, qu'on peut généraliser au cas où il existe un ensemble singulier qui est une variété de codimension au moins égale à 3.

Laissant à Boutet de Monvel la suite, j'ai terminé ce que je voulais dire sur ces travaux. Je voudrais encore ajouter une chose : comme, dans les années autour de 1960, j'avais beaucoup trop de travail (cumulant l'enseignement à l'Université, l'enseignement à l'Ecole Polytechnique et une activité très intense dans la lutte contre la guerre d'Algérie) j'avais provisoirement abandonné la recherche pendant quelques années. Comme résultat, il n'y eut pas de séminaire d'analyse à l'Université de Paris. Malgrange m'a proposé de combler cette lacune. Il a dirigé, pendant toute l'année 1960-61, un séminaire d'analyse qu'il a absolument voulu appeler "séminaire Schwartz", malgré mon opposition; j'ai indiqué dans la préface que cela devrait en réalité s'appeler "séminaire Malgrange". Le sujet traité couvre un éventail remarquable : interpolation entre les espaces $L^p$, théorie de Calderon–Zygmund des opérateurs intégraux singuliers, multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$, unicité du problème de Cauchy, comparaison des opérateurs différentiels au sens de Hörmander, fonctionnelles analytiques de Martineau, théorème de la division des distributions, résolu par Łojasiewicz. Il a donné là un théorème de division généralisée où il s'agit d'un système matriciel, et non pas d'une seule division. C'est nettement plus difficile, mais ce sont les mêmes principes qui servent. Ce séminaire a eu un grand retentissement qui est entièrement dû à l'autorité, à la capacité d'organisation et au rayonnement scientifique de Malgrange.

Par l'ensemble de ses travaux, Malgrange s'est montré comme un mathématicien de valeur tout à fait exceptionnelle, un des tout meilleurs de sa génération. Il a une autorité universellement reconnue dans le monde mathématique tout entier. Ce fut pour moi toujours un plaisir que de collaborer avec lui, et d'apprendre de lui beaucoup plus de choses qu'il n'en a appris de moi. Ses résultats ont toujours eu une telle valeur esthétique qu'ils m'ont toujours enthousiasmé, et beaucoup d'autres avec moi. Je voulais aujourd'hui lui apporter le témoignage, non seulement de toute mon estime, mais aussi de toute de mon amitié.

Laurent SCHWARTZ,
37 rue Pierre Nicole
F - 75005 Paris.