Annales de l'institut Fourier

Loïc Merel

Opérateurs de Hecke pour $\Gamma_0(N)$ et fractions continues

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 3 (1991), p. 519-537

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_3_519_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 1 (1991), 519-537

OPERATEURS DE HECKE POUR $\Gamma_0(N)$ ET FRACTIONS CONTINUES

par Loïc MEREL

0. INTRODUCTION

Soit N un entier strictement positif. Comme d'habitude $\Gamma_0(N)$ désigne le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ N)$. Il opère à gauche par homographies sur le demi-plan de Poincaré H. La surface de Riemann quotient $\Gamma_0(N)\backslash H$ (resp. sa compactifiée) est notée $Y_0(N)$ (resp. $X_0(N)$); *ptes* désigne l'ensemble $X_0(N) - Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash \mathbf{P}^1(\mathbb{Q})$ des pointes.

L'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c, d)$ définit par passage aux quotients une bijection canonique de $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. L'application qui à $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ associe le symbole modulaire $\{g0, g\infty\}$ définit donc par passage aux quotients une application ξ_0 de $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dans le groupe d'homologie relative $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$. Manin [Man1] démontre que l'image de ξ_0 engendre $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$.

Par la suite m sera toujours un entier ≥ 1 et premier à N. La correspondance de Hecke T_m sur $X_0(N)$ définit un endomorphisme, noté également T_m, du $\mathbb{Z}$-module $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$. Le but du présent travail

Mots-clés : Symboles modulaires – Opérateurs de Hecke.
Classification A.M.S. : 11F67 – 11F25 – 11F30.

est d'exprimer, pour $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), T_m(\xi_0(\lambda))$ comme combinaison linéaire d'éléments de l'image de ξ_0.

Si (u, v) est un système de coordonnées homogènes d'un élément λ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ et si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ est une matrice de déterminant premier à N, λA désigne l'élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ de coordonnées homogènes $(ua + vc, ub + vd)$.

Soit $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & -y \\ y' & x' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant m vérifiant l'une au moins des trois relations suivantes :

(i) $x > |y| > 0$ et $x' > |y'| > 0$ et $yy' > 0$

(ii) $y = 0$ et $|y'| < \frac{x'}{2}$

(iii) $y' = 0$ et $|y| < \frac{x}{2}$.

THÉORÈME 1. — *Soit $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Alors pour m impair premier à N, l'opérateur de Hecke T_m vérifie :*

$$T_m(\xi_0(\lambda)) = \sum_{A \in \mathcal{S}_m} \xi_0(\lambda A) .$$

Pour m non nécessairement impair, des formules d'un type analogue permettent de calculer $T_m \circ \xi_0$; en 2.1 est indiqué comment construire de telles formules. Un résultat dû à Heilbronn ([Hei], [Man1]) permet de construire toutes les matrices figurant dans le théorème à partir d'un algorithme de fractions continues, voir 2.2. Une estimation du cardinal de $\mathcal{S}_m$ est indiquée en 3.2. La section 3.3 est consacrée à des applications aux coefficients de Fourier des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ fonctions propres des opérateurs de Hecke. Une généralisation de certains théorèmes de Manin ([Man1], [Man2]) sera donnée.

Les méthodes utilisées ici s'étendent si $\Gamma_0(N)$ est remplacé par un sous-groupe de congruence de niveau premier à m de $SL_2(\mathbb{Z})$, et conduisent à des formules analogues. La présente étude sur l'homologie décrit l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Il existe des objets similaires correspondant aux poids $k > 2$; ces objets sont associés à des symboles modulaires généralisés ([Sho], [Man3]). Par ailleurs, pour m et N impairs, introduire le sous-groupe $\Gamma(2) \cap \Gamma_0(N)$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ met en évidence des formules (encore du même type) jouissant de propriétés remarquables; notamment si deux opérateurs de Hecke commutent, les relèvements correspondants commutent aussi. Tout cela fera l'objet d'un prochain article.

Je tiens à signaler que ce travail a largement bénéficié des conseils et critiques de Joseph Oesterlé. Je lui suis reconnaissant pour son soutien consciencieux et éclairant.

1. PRELIMINAIRES

1.1. Homologie des courbes modulaires.

Soit $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ (resp. $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$) le groupe d'homologie entière (resp. entière et relative aux pointes) de $X_0(N)$. La théorie de l'homologie fournit la suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \to H_1(X_0(N),\mathbb{Z}) \to H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^{(ptes)} \to \mathbb{Z} \to 0 ,$$

où la première application non triviale est l'injection canonique, la deuxième associe à la classe d'un chemin γ dont le bord est contenu dans *ptes* son bord, enfin la troisième associe à $\Sigma_P \lambda_P P$ l'entier $\Sigma_P \lambda_P$.

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$ et c un chemin dans $\overline{H} = H \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ reliant α à β. La classe de c dans $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ ne dépend que de α et β; cette classe est notée $\{\alpha,\beta\}$ et est appelée *symbole modulaire* associé à α et β, voir [Man1] et [Maz]. Les symboles modulaires vérifient les relations suivantes pour $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^3$ et $g \in \Gamma_0(N)$: $\{\alpha,\beta\}+\{\beta,\gamma\}+\{\gamma,\alpha\} = 0$ et $\{g\alpha, g\beta\} = \{\alpha,\beta\}$. Ils engendrent $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$.

Soit m un entier ≥ 1 premier à N. Soit $A_{m,N}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant m telles que $N|c$. Le groupe $\Gamma_0(N)$ opère par multiplication à gauche sur $A_{m,N}$. Soit R un système de représentants de $\Gamma_0(N)\backslash A_{m,N}$. L'action des opérateurs de Hecke T_m sur les symboles modulaires est déterminée par la formule suivante :

$$T_m(\{u,v\}) = \sum_{\lambda \in R} \{\lambda u, \lambda v\} .$$

1.2. Chaînes formelles.

Posons $A_m = A_{m,1}$ et $\overline{A}_m = A_m/\{\pm 1\}$. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ opère par multiplication à droite sur A_m et $\overline{A}_m$. Notons $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ l'image dans $\overline{A}_m$ d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_m$.

DÉFINITION 1. — *Soit* $(o,e) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})^2$. *Un élément de* $\mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ *est appelé* chaîne formelle *de longueur* n *reliant* o *à* e *de niveau* m, *s'il peut s'écrire sous la forme* $\Sigma_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} \\ v_k & v_{k+1} \end{bmatrix}$, *avec* $\frac{u_0}{v_0} = o$ *et* $\frac{u_n}{v_n} = e$. *Soit* $\alpha \in \overline{A}_m/SL_2(\mathbb{Z})$, *la chaîne formelle est dite de* classe α *si elle vérifie* $\begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} \\ v_k & v_{k+1} \end{bmatrix}$ *pour* $0 \leq k \leq n-1$.

PROPOSITION 1. — *Soit* r *un nombre rationnel. Soit* $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_n}}}$ *le développement en fractions continues de* r, *avec les conventions suivantes :* $rc_0 \geq 0$, $rc_i \geq 1$ *pour* $i \geq 1$ *et* $|c_n| \geq 2$ *pour* $n \geq 1$.

Considérons les suites d'entiers $(p_k)_{k=0,1,\dots,n+1}$ *et* $(q_k)_{k=0,1,\dots,n+1}$, *définies par :*

(i) $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ *(pour* $k = 0, 1, \dots, n$*)*,

(ii) $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ *est une fraction irréductible égale à* $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_k}}}$,

(iii) *le signe de* q_{2i+1} *est* $(-1)^i$ *pour* $i \geq 0$; *celui de* q_{2i} *est* $(-1)^i\epsilon$, *où* ϵ *est le signe de* r, *pour* $i \geq 1$.

Alors $\Sigma_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} p_k & p_{k+1} \\ q_k & q_{k+1} \end{bmatrix}$ *est une chaîne formelle de niveau 1, de longueur* $n+1$, *reliant l'infini à* r.

Démonstration. — La seule condition non trivialement satisfaite, *i.e.* $p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = 1$, provient de la théorie classique des fractions continues.

Ces conventions de développements en fractions continues seront toujours conservées par la suite.

1.3. Présentation de $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ par Manin.

Soit ξ_0 l'application :

$$GL_2(\mathbb{Q}) \to H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$$
$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \{g0, g\infty\} = \left\{\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right\}.$$

Le groupe $\Gamma_0(N)$ opère par multiplication à gauche sur $GL_2(\mathbb{Q})$. En vertu des propriétés des symboles modulaires, l'application ξ_0 est constante sur les classes $\Gamma_0(N)\backslash GL_2(\mathbb{Q})$. L'application : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c\,(\mathrm{mod}(N)), d \bmod(N)) = (c, d)$ définit par passage aux quotients une bijection $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ compatible aux actions à droite naturelles de $SL_2(\mathbb{Z})$ (l'action à droite de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est définie par $((u, v), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \mapsto (au + cv, bu + dv)_N = (u, v))$. Par la suite ces deux ensembles seront identifiés.

L'application ξ_0 s'étend en une application $\xi : \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))} \mapsto H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ par $\mathbb{Z}$-linéarité. L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ s'étend en une action de $\mathbb{Z}^{(SL_2(\mathbb{Z}))}$ sur $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$ par $\mathbb{Z}$-bilinéarité.

Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces matrices engendrent $PSL_2(\mathbb{Z})$ et vérifient $\sigma^2 = \tau^3 = 1$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$. Si $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma$ désigne l'ensemble des orbites de σ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, l'application $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$ qui à une orbite A de σ associe la somme formelle $\Sigma_{a \in A} a$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)}$ sur le noyau de l'endomorphisme $\sigma - 1$ de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$. Cela permet d'identifier ces modules. De même seront identifiés $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\tau)}$ et le noyau de l'endomorphisme $\tau - 1$ de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$.

PROPOSITION 2. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$. Toute chaîne formelle S de niveau 1, reliant β à α, vérifie :*

$$\{\alpha, \beta\} = \xi(\Gamma_0(N)S)\ .$$

Démonstration. Une telle chaîne formelle S s'écrit $\Sigma_{k=0}^{n-1} g_k$, avec $g_k = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} \\ v_k & v_{k+1} \end{bmatrix}$, $\frac{u_0}{v_0} = \beta$ et $\frac{u_n}{v_n} = \alpha$. D'où l'égalité :

$$\{\alpha, \beta\} = \Sigma_{k=0}^{n-1} \left\{\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}, \frac{u_k}{v_k}\right\} = \Sigma_{k=0}^{n-1} \xi(\Gamma_0(N) g_k) = \xi(\Gamma_0(N)S)\ .$$

COROLLAIRE. — *L'application ξ est surjective.*

Démonstration. — Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})^2$. D'après la proposition 1, il existe des chaînes formelles F_α et F_β de niveau 1, reliant l'infini à α et β respectivement. Ceci permet d'écrire :

$$\xi(\Gamma_0(N)F_\alpha - \Gamma_0(N)F_\beta) = \{\alpha, \infty\} - \{\beta, \infty\} = \{\alpha, \beta\} .$$

PROPOSITION 3. — *L'intersection de $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)}$ avec $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)}$ est l'ensemble des multiples entiers de $\Sigma_{u \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} u$.*

Démonstration. — Soit $x = \Sigma_{u \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} \lambda_u u \in \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)} \cap \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)}$. Comme $x\sigma = x$ et $x\tau = x$, les coefficients de x vérifient : $\lambda_u = \lambda_{u\sigma} = \lambda_{u\tau}$ pour tout u. Comme σ et τ engendrent $PSL_2(\mathbb{Z})$, ceci entraîne : $\lambda_u = \lambda_{u\gamma}$ pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Or $SL_2(\mathbb{Z})$ opère transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. D'où le résultat.

PROPOSITION 4. — *Le noyau de ξ est le $\mathbb{Z}$-module engendré par le noyau de $\sigma - 1$ et le noyau de $\tau - 1$.*

Démonstration. — Soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors $\gamma(1+\sigma)$ et $\gamma(1+\tau+\tau^2)$ sont des chaînes formelles de niveau 1 reliant $\gamma\infty$ à $\gamma\infty$. Donc $\xi(\Gamma_0(N)\gamma(1+\sigma)) = \xi(\Gamma_0(N)\gamma(1+\tau+\tau^2)) = 0$. Tout élément x de $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)}$ vérifie $\xi(2x) = \xi(x(1+\sigma)) = 0$. Comme $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ est sans torsion ceci prouve que ξ s'annule sur $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)}$. Les arguments analogues permettent de démontrer que ξ s'annule sur $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)}$.

Soient g le genre de $X_0(N)$, ν_∞ le nombre de pointes de $X_0(N)$, μ le cardinal de $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ et ν_2 (resp. ν_3) le nombre d'éléments de $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ fixés par σ (resp. τ). Alors $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)}$ et $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rangs $\frac{\mu}{2} + \frac{\nu_2}{2}$ et $\frac{\mu}{3} + \frac{2\nu_3}{3}$ respectivement. Par conséquent d'après la proposition précédente $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)} + \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\frac{\mu}{2} + \frac{\nu_2}{2} + \frac{\mu}{3} + \frac{2\nu_3}{3} - 1 = \frac{5\mu}{6} + \frac{\nu_2}{2} + \frac{2\nu_3}{3} - 1$.

D'après la suite exacte (1), le rang du $\mathbb{Z}$-module libre $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ vaut $2g + \nu_\infty - 1$. Or le genre g est donné par la formule : $2g = \frac{\mu}{6} - \frac{\nu_2}{2} - \frac{2\nu_3}{3} - \nu_\infty + 2$ ([Shi]). Par conséquent le noyau de ξ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\frac{5\mu}{6} + \frac{\nu_2}{2} + \frac{2\nu_3}{3} - 1$.

Il suffit d'établir que $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}))}/(\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)} + \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)})$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion pour conclure. Soient x_s et x_t des éléments de

$\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)}$ et $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\tau)}$ respectivement, tels qu'il existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$, vérifiant $x_s + x_t = nx$. L'élément x_t s'écrit sous la forme $\Sigma_{u \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} t_u u$, avec $t_u = t_{u\tau}$ pour tout u. L'égalité $nx(\sigma - 1) = x_t(\sigma - 1)$ entraîne $t_u \equiv t_{u\sigma} \pmod n$ pour tout u. Un raisonnement similaire à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 3 montre que les coefficients de x_t vérifient $t_u \equiv t_v \bmod n$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Cela prouve que x_t appartient à $\mathbb{Z}\lambda + n\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\tau)}$. Des arguments similaires prouvent que x_s appartient à $\mathbb{Z}\lambda + n\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)}$. Il est alors clair qu'il existe x'_s et x'_t éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)}$ et $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\tau)}$ tels que $x = x'_s + x'_t$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. — La proposition 4 figure dans [Man1]. La preuve de Manin est fondée sur une étude de complexes simpliciaux associés à des domaines fondamentaux du demi-plan de Poincaré pour $SL_2(\mathbb{Z})$, sans jamais utiliser la formule du genre. Cette preuve reste valable si $\Gamma_0(N)$ est remplacé par un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$. Dans ce cadre plus général la démonstration précédente, qui établit le lien entre la formule du genre et les résultats de Manin, conserve son sens.

Les résultats de cette section sont condensés dans la suite exacte (2) suivante :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\tau)} \\ \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))} \to H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z}) \to 0 \end{aligned} \tag{2}$$

où chacune des flèches est définie naturellement d'après ce qui précède.

2. RELEVEMENTS DES OPERATEURS DE HECKE SUR $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$

2.1. Une formule de relèvement.

Soit m un entier ≥ 1 premier à N. L'application naturelle :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times A_m \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ &((u, v), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \mapsto (au + cv, bu + dv) \end{aligned}$$

définit une application bilinéaire : $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))} \times \mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)} \to \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$. Un élément de $\mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ et l'endomorphisme de $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$ qu'il définit seront notés par la même lettre.

Soit $\phi : A_m \to \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ l'application qui à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_m$ associe la classe $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} w & t \\ u & v \end{pmatrix}$ telle que $(c,d) = (0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (u,v)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Si $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est identifié à $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$, l'application naturelle décrite plus haut s'identifie à l'application $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z}) \times A_m \to \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ qui à $(\Gamma_0(N)g, \gamma)$ associe $\phi(g\gamma)$. Prenons note que $h \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\gamma \in A_m$ vérifient $\phi(\gamma h) = \phi(\gamma)h$ et que $A_{m,N}$ est l'image réciproque de $\Gamma_0(N)$ par ϕ.

Un élément Θ_m de $\mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ vérifiant la relation $\xi \circ \Theta_m = T_m \circ \xi$ sera appelé un *relèvement* de T_m .

THÉORÈME 2. — *Soit $\alpha \in A_m/SL_2(\mathbb{Z})$. Il existe une chaîne formelle S_α de niveau m, reliant ∞ à 0 et de classe α.*

Soit $(S_\alpha)_{\alpha \in A_m/SL_2(\mathbb{Z})}$ une famille de telles chaînes formelles. Alors

$$\Theta_m = \Sigma_{\alpha \in A_m/SL_2(\mathbb{Z})} S_\alpha$$

est un relèvement de T_m.

Démonstration. — Soit R un système de représentants de $A_m/SL_2(\mathbb{Z})$. Soient $\alpha \in A_m/SL_2(\mathbb{Z})$ et γ son représentant dans R. D'après la proposition 1, il existe des chaînes formelles $C_\gamma = \Sigma_{k=0}^{n-1} g_k$ de niveau 1, reliant $\gamma^{-1}\infty$ à $\gamma^{-1}0$ et de longueur n. Ces chaînes formelles correspondent bijectivement aux chaînes formelles de niveau m et de classe α reliant ∞ à 0 par $C_\gamma \mapsto \gamma C_\gamma$. Cela prouve l'existence de S_α et donc la première partie du théorème.

Soit $g \in SL_2(\mathbb{Z})$. La classe $\Gamma_0(N)g$ vérifie les relations :

$$\begin{aligned} \xi \circ \Theta_m(\Gamma_0(N)g) &= \Sigma_{g\in R}\Sigma_{k=0}^{n-1}\xi(\phi(g\gamma g_k)) \\ &= \Sigma_{\gamma\in R}\Sigma_{k=0}^{n-1}\xi(\phi(g\gamma)g_k) \\ &= \Sigma_{\gamma\in R}\xi_0(\phi(g\gamma)\gamma^{-1}) \\ &= \Sigma_{\gamma\in R}\xi_0(\phi(g\gamma)\gamma^{-1}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}) \,. \end{aligned}$$

L'égalité $(0,1)\phi(g\gamma)\gamma^{-1}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} g^{-1} = (0,1)g\gamma\gamma^{-1}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} g^{-1}$ (dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$) entraîne que $\phi(g\gamma)\gamma^{-1}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} g^{-1}$ est inclus dans $A_{m,N}$.

De plus lorsque γ décrit R, $\phi(g\gamma)\gamma^{-1}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} g^{-1}$ décrit $\Gamma_0(N)\backslash A_{m,N}$. En effet ces matrices sont deux à deux non conjuguées par multiplication à gauche par $SL_2(\mathbb{Z})$, a fortiori par $\Gamma_0(N)$; par ailleurs comme m est premier à N, les ensembles quotients $\Gamma_0(N)\backslash A_{m,N}$ et $A_m/SL_2(\mathbb{Z})$ sont de même cardinal. Cela établit la relation de relèvement :

$$\xi \circ \Theta_m(\Gamma_0(N)g) = \sum_{\lambda \in (\Gamma_0(N)\backslash A_{m,N})} \xi_0(\lambda g) = T_m \circ \xi(\Gamma_0(N)g).$$

Remarque. — Une telle formule ne dépend pas formellement de N.

2.2. Le relèvement de Manin-Heilbronn.

PROPOSITION 5. — *Soit m un entier ≥ 1. L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix}$, où δ parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de m et où pour chaque δ, r parcourt un système de représentants de $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ est un système de représentants de $A_m/SL_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. — Soit $g \in A_m$. Comme $SL_2(\mathbb{Z})$ opère transitivement à gauche sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{Q})$, il existe $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g\gamma$ stabilise l'infini. Par conséquent il existe un diviseur positif δ de m et $r \in \mathbb{Z}$ tels que $g\gamma$ s'écrive $\pm\begin{pmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix}$. Cette matrice est dans la même classe à gauche modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ que $\begin{pmatrix} \delta' & r' \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix}$ si et seulement si les nombres r, r', δ, δ' vérifient : $\delta = \delta'$ et $r \equiv r' \pmod{\delta}$. Ceci achève la démonstration.

DÉFINITION 2. — *Soit m un entier impair. Pour tout $\alpha \in A_m/SL_2(\mathbb{Z})$, notons S_α la chaîne formelle produit de l'unique matrice $\begin{pmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix}$ (avec δ diviseur positif de m et $r \in \{-\frac{\delta-1}{2}, -\frac{\delta-3}{2}, \ldots, \frac{\delta-3}{2}, \frac{\delta-1}{2}\}$) appartenant à la classe α et de la chaîne formelle de niveau 1, reliant l'infini à $-\frac{r}{\delta}$ provenant du développement en fractions continues de $-\frac{r}{\delta}$ (voir 1.2 proposition 1). La somme pour α parcourant $A_m/SL_2(\mathbb{Z})$ des chaînes S_α sera appelé le* relèvement de Manin-Heilbronn *de T_m.*

De manière analogue, pour m pair, un relèvement de T_m est obtenu en choisissant pour système de représentants de $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ l'ensemble

$\{-\frac{\delta-2}{2}, -\frac{\delta-4}{2}, \ldots, \frac{\delta-2}{2}, \frac{\delta}{2}\}$. Ce relèvement ne bénéficie pas des mêmes propriétés de symétrie que dans le cas impair. Il sera parfois encore appelé relèvement de Manin-Heilbronn de T_m.

L'entier m sera supposé impair pour le reste de cette section.

Considérons la suite de polynômes $P_n \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ($n \in \mathbb{N}$) définie par récurrence de la façon suivante : $P_0 = 1$, $P_1(X_0) = X_0$ et pour $n \geq 2$

$$P_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = X_{n-1}P_{n-1}(X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}) + P_{n-2}(X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}).$$

Ces polynômes vérifient [Hei] :

$$P_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = P_n(X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0)\ .$$

Soient $u \geq 1$ et $v \geq u-2$ deux entiers. Notons alors $[u, v]$ le polynôme défini par

$$[u, v] = P_{v-u+1}(X_u, X_{u+1}, \ldots, X_v) \quad \text{si} \quad u \leq v+1 \quad \text{et}$$
$$[u, u-2] = 0.$$

Ces polynômes vérifient [Hei] :

$$X_0 + \cfrac{1}{X_1 + \cfrac{1}{X_2 + \ldots + \frac{1}{X_k}}} = \frac{[0, k]}{[1, k]} \quad (\text{pour } k \geq 0)\ .$$

Pour $0 < k < n$ Heilbronn [Hei] démontre la formule :

$$[1, n] = [1, k][k+1, n] + [1, k-1][k+2, n].$$

Cette formule se généralise aisément en :

$$[r, t] = [r, s][s+1, t] + [r, s-1][s+2, t] \quad (\text{pour} \quad r-1 \leq s \leq t).$$

La formule bien connue liant les numérateurs et les dénominateurs adjacents des développements en fractions continues se traduit par l'identité :

$$[0, k-1][1, k] - [0, k][1, k-1] = (-1)^k \quad (\text{pour} \quad k \geq 0)\ .$$

DÉFINITION 3. — *Soit m un entier impair ≥ 1. Nous appellerons* solution admissible *de l'équation $xx' + yy' = m$ tout quadruplet $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ solution de cette équation qui satisfait l'une au moins des trois conditions :*

(i) $x > |y| > 0$ *et* $x' > |y'| > 0$ *et* $yy' > 0$

(ii) $y = 0$ *et* $|y'| < \dfrac{x'}{2}$

(iii) $y' = 0$ *et* $|y| < \dfrac{x}{2}$.

Notons que ces solutions admissibles parcourent un ensemble strictement plus grand que celles considérées par Manin dans [Man1].

Notons $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y' & x' \end{pmatrix}$, où (x, x', y, y') parcourt l'ensemble des solutions admissibles de l'équation $m = xx' + yy'$.

THÉORÈME 3. — *Soit m un entier impair premier à N. Le relèvement de Manin-Heilbronn de T_m est égal à $\Sigma_{M \in \mathcal{S}_m} M\{\pm 1\}$.*

Démonstration. — Soient δ un diviseur positif de m, r un élément de l'ensemble $\{-\frac{\delta-1}{2}, -\frac{\delta-3}{2}, ..., \frac{\delta-3}{2}, \frac{\delta-1}{2}\}$ et p le *pgcd* de ces deux nombres. Soit $\dfrac{1}{c_1 + ... \frac{1}{c_n}}$ le développement en fractions continues de $-\dfrac{r}{\delta}$. Par abus de notation, dans ce qui suit $[u, v]$ désigne la valeur de $[u, v]$ pour la spécialisation $X_k = c_k$ (pour $k = 1, 2, ..., n$) et $X_0 = 0$. Cette dernière condition entraîne $[2, k] = [0, k]$ pour $k \geq 0$. D'après ce qui précède, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\delta = \epsilon p[1, n]$ et $r = -\epsilon p[0, n]$.

LEMME 1. — *La chaîne formelle de classe $\begin{pmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z})$ dans le relèvement de Manin-Heilbronn est :*

$$\Sigma_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} p\epsilon[k+1, n] & (-1)^{k+1} p\epsilon[k+2, n \\ (-1)^k [1, k-1] \frac{m}{\delta} & [1, k] \frac{m}{\delta} \end{bmatrix}.$$

Démonstration. — La chaîne formelle associée à cette classe est :

$$\begin{bmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{bmatrix} \Sigma_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} [0, k-1](-1)^k &]0, k] \\ [1, k-1](-1)^k & [1, k] \end{pmatrix}$$

d'après 1.2 et ce qui précède. Les produits matriciels dans l'expression ci-dessus se calculent en utilisant la relation suivante, valable pour $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p\epsilon}(\delta[0, k] + r[1, k]) &= [1, n][0, k] - [0, n][1, k] \\ &= ([1, k][k+1, n] + [1, k-1][k+2, n])[0, k] \\ &\quad - ([0, k][k+1, n] + [0, k-1][k+2, n])[1, k]) \\ &= [k+2, n]([1, k-1][0, k] - [0, k-1][1, k]) \\ &= [k+2, n](-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Ceci achève de prouver le lemme.

La classe modulo ± 1 des matrices correspondant à $k = 0$ dans le lemme précédent est $\begin{bmatrix} \delta & r \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{bmatrix}$.

Celle correspondant à $k = n$ est $\begin{bmatrix} p & 0 \\ (-1)^n \epsilon [1, n-1] \frac{m}{d} & \frac{m}{p} \end{bmatrix}$. Si $r \neq 0$ les conventions imposent $n \geq 1$ et $|c_n| \geq 2$. Cela entraîne :

$$|[1, n-1]| \frac{m}{\delta} \leq \frac{|[1, n]| - |[1, n-2]|}{|c_n|} \frac{m}{\delta} \leq \frac{|[1, n]| m}{2\delta} \leq \frac{m}{2p} .$$

Le quadruplet $(p, \frac{m}{p}, 0, (-1)^k [1, n-1] \frac{m}{\delta})$ satisfait donc la condition (ii) de la définition 3. Quand δ et r varient, les matrices correspondant à $k = n$ sont deux à deux non congrues modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ donc deux à deux distinctes. De plus elles sont en nombre égal aux solutions admissibles de l'équation $m = xx' + yy'$ satisfaisant à la condition (ii) de la définition 3. Si $r = 0$ alors n est nul et les matrices correspondant à $k = 0 = n$ sont $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \frac{m}{\delta} \end{pmatrix}$. Ces faits suffisent pour établir que pour δ et r variables, $k = 0$ ou $k = n$, les matrices $\begin{pmatrix} x & -y \\ y' & x' \end{pmatrix}$ de la formule de Manin-Heilbronn correspondent bijectivement aux solutions de l'équation $m = xx' + yy'$ satisfaisant à l'une des conditions (ii) ou (iii) de la définition 3.

Pour $k \neq 0, n$ les termes antidiagonaux des matrices du lemme sont non nuls. De plus ils sont de signes opposés. En effet, comme $[1, n]p\epsilon$ est positif et comme $|[1, n]| = |[1, k][k+1, n]| + |[1, k-1][k+2, n]|$ le nombre

$$[1, k-1][k+2, n]p\epsilon = ([1, n] - [1, k][k+1, n])p\epsilon$$

est positif. Comme les applications $k \mapsto |[1, k]|$ et $k \mapsto |[k, n]|$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante là où elles sont définies, les matrices de la formule de Manin-Heilbronn définissent toutes des solutions admissibles de l'équation $m = xx' + yy'$, et de plus à l'intérieur d'une chaîne formelle les matrices sont deux à deux distinctes. Par ailleurs les matrices provenant de chaînes formelles distinctes sont non congrues modulo $SL_2(\mathbb{Z})$, donc encore distinctes.

Réciproquement, soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ une solution de l'équation $m = xx' + yy'$ satisfaisant à la condition (i) de la définition 3. Les nombres rationnels $\frac{y}{x}$ et $\frac{y'}{x'}$ ont un même signe ϵ. Il existe des nombres entiers n et k avec $n > k > 0$ et des nombres entiers $c_1, c_2, ..., c_n$ de signe ϵ tels que les développements en fractions continues des nombres rationnels $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{y}{x}$ s'écrivent $\dfrac{1}{c_k + \frac{1}{c_{k-1}+\dots+\frac{1}{c_1}}}$ et $\dfrac{1}{c_{k+1}\frac{1}{c_{k+2}+\dots+\frac{1}{c_n}}}$ respectivement.

Les mêmes abus de notation que précédemment permettent d'écrire : $\frac{y'}{x'} = \frac{[1,k-1]}{[1,k]}$ et $\frac{x}{y} = \frac{[k+1,n]}{[k+2,n]}$. La somme de ces deux nombres donne : $\frac{m}{x'y} = \frac{xx'+yy'}{x'y} = \frac{[1,k-1][k+2,n]+[1,k][k+1,n]}{[1,k][k+2,n]} = \frac{[1,n]}{[1,k][k+2,n]}$.

Soit d le *pgcd* de x et y. Posons $\delta = |[1,n]|d$, $s = \frac{[1,n]}{|[1,n]|}$ et $r = -s[0,n]d$. Alors le développement de $-\frac{r}{\delta}$ s'écrit : $\frac{[0,n]}{[1,n]} = \frac{1}{c_1+\dots\frac{1}{c_n}}L$. Puisque $[1,k]$ divise x' et puisque $[k+2,n]$ est égal au signe près à $\frac{y}{d}$, δ divise m. Comme $|c_1|$ vaut au moins 2 et comme δ est impair, $|r|$ est majoré strictement par $\frac{\delta}{2}$. Or il est facile de vérifier que le k-ième terme dans la chaîne formelle de classe $\begin{pmatrix}\delta & r\\ 0 & \frac{m}{\delta}\end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z})$ est $\begin{bmatrix}x & -y\\ y' & x'\end{bmatrix}$.

Remarque. — Les matrices de la formule de Manin-Heilbronn sont globalement stables par deux involutions sur A_m : $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}d & c\\ c & d\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a & -b\\ -c & d\end{pmatrix}$.

2.3. Exemples.

Il va être donné ici des formules des relèvements de Manin-Heilbronn de Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5, Θ_6 et Θ_7.

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\1&3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3&-1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\-1&3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

$$\Theta_4 = \begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4&1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\1&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4&2\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}4&-1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\-1&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\2&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$$

$$\Theta_5 = \begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5&1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\1&5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5&2\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\-2&5\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}5&-2\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\2&5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5&-1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\-1&5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Theta_6 = {} & \begin{bmatrix}6&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&3\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}\\ & +\begin{bmatrix}6&-2\\-0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&6\end{bmatrix}\\ & +\begin{bmatrix}3&-1\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\3&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_7 = {} & \begin{bmatrix}7&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-3&7\end{bmatrix}\\ & +\begin{bmatrix}7&3\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-1\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-2&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&-3\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&7\end{bmatrix}\\ & +\begin{bmatrix}7&-2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\3&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&-1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&7\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. COMMENTAIRES

3.1. Conjugaison et trivialisation sur le noyau.

L'involution de $\overline{H}$ $z \mapsto -\bar{z}$, induit la conjugaison complexe sur $X_0(N)$ et une involution sur l'homologie notée par une barre horizontale. Un relèvement à $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ de cette involution est donné par la formule : $\overline{\xi((c,d))} = \xi((-c,d))$ ([Man1]).

L'action de la conjugaison complexe sur $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))}$ peut donc être exprimée par la multiplication à droite par la matrice $c = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Pour m impair ≥ 1, l'involution de $\mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ définie par $\gamma \mapsto c\gamma c$ laisse invariante la formule de Manin-Heilbronn d'après la remarque en 2.2. Il en résulte que pour m impair cette formule commute à la conjugaison complexe. Cela n'est pas le cas lorsque m est pair.

En revanche si $\Theta_m \in \mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ vérifie la condition de relèvement, alors il en est de même pour $\frac{1}{2}(\Theta_m + c\Theta_m c)$. Ce relèvement commute à c. Ceci laisse penser que pour les indices pairs le relèvement de Manin-Heilbronn symétrisé par la conjugaison est plus intéressant que le relèvement de Manin-Heilbronn lui-même.

La forme de la suite exacte (2) (voir 1.3) amène à s'intéresser à l'action d'un relèvement Θ_m sur chacune des composantes du noyau de ξ.

PROPOSITION 6. — *Pour m entier impair ≥ 1, le relèvement de Manin-Heilbronn laisse invariant $\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\sigma)}$.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que le relèvement de Manin-Heilbronn commute à σ. L'involution de A_m : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ est une involution laissant stable la formule de Manin-Heilbronn, voir (2.2), d'où la proposition.

Remarque. — D'après la proposition 6 le relèvement de Manin-Heilbronn agit sur le module quotient

$$\mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)} + \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\tau)} / \mathbb{Z}^{(\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\sigma)} .$$

Pour Θ_m relèvement du type décrit par le théorème 1, il est possible de montrer qu'il existe deux éléments U_m et V_m de $\mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ tels que :

$$(1+\tau+\tau^2)\Theta_m = U_m(1+\sigma) + V_m(1+\tau+\tau^2).$$

Ces faits laissent présager que des formules de trace pour les opérateurs T_m peuvent être déduites de sommes alternées de traces de l'opérateur Θ_m sur les composantes de la suite exacte (2).

3.2. Longueur de la formule de Manin-Heilbronn.

En dépit des apparences la formule de Manin-Heilbronn n'est pas optimale quant à minimiser le nombre de termes des relèvements de T_m parmis ceux autorisés par le théorème 1. Cependant cette section va établir une estimation asymptotique du nombre de termes de cette formule en s'appuyant sur [Hei].

Voici tout d'abord quelques précisions de notation. Soient r et δ deux entiers tels que $|r| \leq \delta$. L'entier $n(r,\delta)$ est le nombre de termes du développement en fractions continues de $\frac{r}{\delta}$, i.e. le développement de $\frac{r}{\delta}$ s'écrit : $\dfrac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \ldots + \frac{1}{c_{n(r,\delta)}}}}$, avec $n(0,\delta) = 0$.

Comme d'habitude $\sigma_k(m) = \Sigma_{\delta|m}\delta^k$ (pour $k \in \mathbb{R}$). Ici comme dans le reste de cette section les sommes portant sur les diviseurs ne concernent que les diviseurs *positifs*.

PROPOSITION 7. — *La longueur du relèvement de Manin-Heilbronn est*

$$l_m = \Sigma_{\delta|m} 2 \sum_{r=1}^{\frac{\delta-1}{2}} n(r,\delta) + \sigma_1(m) .$$

Démonstration.

$$l_m = \Sigma_{\delta|m} \sum_{r=-\frac{\delta-1}{2}}^{\frac{\delta-1}{2}} (1 + n(r,\delta)) = \Sigma_{\delta|m} 2 \sum_{r=1}^{\frac{\delta-1}{2}} n(r,\delta) + \sigma_1(m) \ .$$

Dans [Hei], Heilbronn démontre que $R(\delta) = \Sigma_{r=0,(r,\delta)=1}^{\frac{\delta-1}{2}} n(r,\delta)$ est équivalent à $\frac{6\log 2}{\pi^2}\phi(\delta)\log\delta$ (où ϕ est la fonction d'Euler) lorsque δ tend vers l'infini. La relation

$$\begin{aligned} l_m &= \Sigma_{\delta|m} 2 \sum_{r=1}^{\frac{\delta-1}{2}} n(r,\delta) + \sigma_1(m) \\ &= \Sigma_{\delta|m}\Sigma_{\delta'|\delta} 2 \sum_{r=1,(r,\delta')=1}^{\frac{\delta'-1}{2}} n(r,\delta') + \sigma_1(m) = 2\Sigma_{\delta''\delta'|m} R(\delta') + \sigma_1(m) \end{aligned}$$

et le résultat de Heilbronn vont permettre de montrer ce qui suit.

PROPOSITION 8. — *La suite qui à l'entier m associe le nombre de termes du relèvement de Manin-Heilbronn est équivalente à*

$$\frac{12\log 2}{\pi^2}\sigma_1(m)\log m$$

lorsque m tend vers l'infini.

Démonstration. — Un lemme général est d'abord nécessaire.

LEMME 2. — *Soient $U(m)$ et $V(m)$ deux suites équivalentes en l'infini et tendant vers l'infini. Alors les suites $(\Sigma_{\delta\delta'|m}U(\delta))$ et $(\Sigma_{\delta\delta'|m}V(\delta))$ sont équivalentes lorsque m tend vers l'infini.*

Démonstration. — Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $\delta_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\delta \geq \delta_0$, $U(\delta) - V(\delta) < \epsilon V(\delta)$. Pour $\delta_0 \in \mathbb{N}$, soit $K(\delta_0) = \operatorname{Sup}_{\delta<\delta_0} |(U-V)(\delta)|$. Le lemme provient des inégalités :

$$\left|\frac{\Sigma_{\delta\delta'|m}U(\delta) - V(\delta)}{\Sigma_{\delta\delta'|m}V(\delta)}\right| \leq \frac{\Sigma_{\delta\delta'|m,\delta<\delta_0}|(U-V)(\delta)|}{\Sigma_{\delta\delta'|m}V(\delta)} + \epsilon \leq \frac{\delta_0 K(\delta_0)\sigma_0(m)}{\Sigma_{\delta|m}V(\delta)} + \epsilon.$$

Au vu du lemme 2, il suffit de prouver $\Sigma_{\delta\delta'|m}\phi(\delta)\log\delta \sim \sigma_1(m)\log m$. C'est l'objet des lemmes suivants.

LEMME 3. — *La suite $(\Sigma_{\delta|m}\frac{\log\delta}{\delta})$ est dominée par $(\log^2\log m)$ lorsque m tend vers l'infini.*

Démonstration. — Ce résultat, démontré dans [EZ], repose sur la formule :

$$\Sigma_{\delta|m} \frac{\log \delta}{\delta} = \sigma_{-1}(m)(\Sigma_{p^\alpha||m} \log p(\frac{1}{p-1} - \frac{\alpha+1}{p^{\alpha+1}-1}))$$

(où la dernière sommation porte sur les diviseurs premiers de m) et sur le théorème des nombres premiers.

LEMME 4. — *La suite* $(\Sigma_{\delta|m} \delta \log \delta)$ *est équivalente à* $(\sigma_1(m) \log m)$ *lorsque* m *tend vers l'infini.*

Démonstration.

$$\Sigma_{\delta|m} \delta \log \delta = \Sigma_{\delta|m} \delta \log m - \Sigma_{\delta|m} \delta \log \frac{m}{\delta} = \sigma_1(m) \log m - \Sigma_{\delta|m} \frac{m}{\delta} \log \delta.$$

Le second terme de la dernière égalité est majoré en valeur absolue par $\sigma_1(m) \Sigma_{\delta|m} \frac{\log \delta}{\delta}$. D'après le lemme 3 ceci est dominé par $\sigma_1(m) \log^2 \log m$. Le lemme 4 est donc démontré.

Un calcul similaire au précédent va achever la démonstration :

$$\Sigma_{\delta\delta'|m} \phi(\delta) \log \delta = \Sigma_{\delta''|m} \Sigma_{\delta|\delta''} \phi(\delta) \log \delta'' - \Sigma_{\delta''|m} \Sigma_{\delta|\delta''} \phi(\frac{\delta''}{\delta}) \log \delta \ .$$

Le premier terme du second membre est égal à $\Sigma_{\delta''|m} \delta'' \log \delta''$ qui est équivalent à $\sigma_1(m) \log m$ quand m tend vers l'infini d'après le lemme 4. Le second terme est borné en valeur absolue par $\Sigma_{\delta''|m} \Sigma_{\delta|m} \frac{\delta''}{\delta} \log \delta = (\Sigma_{\delta''|m} \delta'') O(\log^2 \log m) = O(\sigma_1(m) \log^2 \log m)$.

3.3. Valeurs propres des opérateurs de Hecke.

Soit f une forme modulaire parabolique de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$, non nulle, fonction propre de l'opérateur de Hecke T_m avec la valeur propre a_m. La forme différentielle sur H $f(z)dz$ définit alors une forme différentielle holomorphe sur $X_0(N)$. Par conséquent l'intégrale de $f(z)dz$ le long d'un chemin reliant deux pointes α et β ne dépend que du symbole modulaire $\{\alpha, \beta\}$. Ceci permet de définir l'application ϕ_f :

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$$
$$\lambda \mapsto \int_{\xi(\lambda)} f(z)dz.$$

Soit $\Sigma_{M\in\overline{A}_m} u_M M \in \mathbb{Z}^{(\overline{A}_m)}$ un relèvement de T_m. D'après le théorème 2 un tel relèvement peut être choisi en fonction de m seulement (exemple : le relèvement de Manin-Heilbronn).

THÉORÈME 4. — *L'application ϕ_f n'est pas identiquement nulle et vérifie pour tout $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$:*

$$a_m\phi_f(\lambda) = \Sigma_{M\in\overline{A}_m} u_M \phi_f(\lambda M).$$

Démonstration. — L'image de ξ engendre le groupe d'homologie $H_1(X_0(N), ptes, \mathbb{Z})$ qui contient $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$. Puisque f est non nulle toutes les périodes de la forme différentielle de $X_0(N)$ associée à $f(z)dz$ ne peuvent être nulles. D'où la non nullité de ϕ_f.

Tout élément $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ vérifie :

$$a_m\phi_f(\lambda) = \int_{\xi(\lambda)} T_m f(z)dz = \int_{T_m\circ\xi(\lambda)} f(z)dz = \int_{\xi(\Sigma_{M\in\overline{A}_m} u_M\lambda M)} f(z)dz$$
$$= \Sigma_{M\in\overline{A}_m} u_M \phi_f(\lambda M).$$

Cela prouve le théorème.

Remarque. — Pour m impair, si le relèvement choisi de T_m est le relèvement de Manin-Heilbronn et si λ vaut $(0,1)$ le théorème 4 donne le théorème 7.9 de [Man1].

Lorsque f est normalisée et fonction propre pour tous les opérateurs de Hecke avec des valeurs propres entières, elle paramètre une courbe elliptique définie sur les nombres rationnels ([Shi]). Si p est un nombre premier, a_p s'interprète comme la différence de $1+p$ et du nombre de points de la réduction modulo p de cette courbe elliptique. Dans ces conditions le théorème 4 est une version plus générale de la "loi de réciprocité de Manin", voir [Man1] théorème 7.3 et [Maz].

BIBLIOGRAPHIE

[EZ] P. ERDÖS, S.K. ZAREMBA, The arithmetical function $\Sigma_{d|n} \frac{\log d}{d}$, Demonstratio Mathematica, vol.VI (1973).

[Hei] H. HEILBRONN, On the average length of a class of continued fractions, Number Theorical Analysis (Papers in honor of Edmund Landau), Plenum, New-York, 1966.

[Man1] YU. MANIN, Parabolic points and zeta functions of modular curves, Math. USSR Izvestija, vol.6, n°1 (1972).

[Man2] YU. MANIN, Explicit formulas for the eigenvalues of Hecke operators, Acta Arithmetica, XXIV (1973).

[Man3] YU. MANIN, Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series, Math. USSR Sbornik, vol.21, n°3 (1973).

[Maz] B. MAZUR, Courbes elliptiques et symboles modulaires, Séminaire Bourbaki 24ème année, n°414 (1971/72) .

[Shi] G SHIMURA, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press, 1971.

[Sho] V. SHOKUROV, Modular symbols of arbitrary weight, Functional analysis and its applications, vol.10, n°1 (1976).

Manuscrit reçu le 20 juin 1991.

Loïc MEREL,
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75005 Paris (France).