

CLAUDE GODBILLON

**Une construction nouvelle des classes
caractéristiques des feuilletages**

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 3 (1990), p. 709-721

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_709_0

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CONSTRUCTION NOUVELLES DES CLASSES CARACTERISTIQUES DES FEUILLETAGES

par Claude GODBILLON

Introduction.

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ . Dans le complexe de Rham $A^*(M) = \sum A^p(M)$ des formes différentielles sur M , on désigne par i_X et L_X les opérateurs différentiels de produit intérieur et de dérivation de Lie associés à un élément X de l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M .

On considère sur M un feuilletage \mathcal{F} de codimension q et de classe C^∞ ayant un fibré normal $\nu(\mathcal{F})$ trivialisé : \mathcal{F} est défini par un système de q équations de Pfaff indépendantes $\omega_1 = 0, \dots, \omega_q = 0$. Dans ces conditions, on peut trouver des champs de vecteurs X_1, \dots, X_q sur M univoquement définis modulo l'espace tangent $T(\mathcal{F})$ à \mathcal{F} par les relations $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

PROPOSITION 1. — *Les différentielles des formes ω_k , $1 \leq k \leq q$, sont données par les relations*

$$d\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge L_{X_i} \omega_k + \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_k([X_i, X_j]) \omega_i \wedge \omega_j .$$

Démonstration. — Puisque le système de Pfaff $\omega_1 = 0, \dots, \omega_q = 0$ est intégrable, il existe sur M des formes de Pfaff $\sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq q$, telles que l'on ait $d\omega_k = \sum_j \omega_i \wedge \sigma_{ik}, 1 \leq k \leq q$. On en déduit les relations

$$-\omega_k([X_i, X_j]) = \sigma_{ik}(X_j) - \sigma_{jk}(X_i), \quad 1 \leq i, j, k \leq q.$$

Si l'on pose maintenant

$$\theta_{ik} = \sigma_{ik} - \sum_j \left[\frac{1}{2} \omega_k([X_j, X_i]) + \sigma_{jk}(X_i) \right] \omega_j,$$

on a encore $d\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge \theta_{ik}$: les relations précédentes montrent que $\frac{1}{2} \omega_k([X_j, X_i]) + \sigma_{jk}(X_i) - \frac{1}{2} \omega_k([X_i, X_j]) - \sigma_{ik}(X_j) = 0$.

De plus, puisque $\theta_{ik}(X_j) = -\frac{1}{2} \omega_k([X_i, X_j])$, on a

$$L_{X_i} \omega_k = i_{X_i} d\omega_k = \theta_{ik} + \frac{1}{2} \sum_j \omega_k([X_j, X_i]) \omega_j;$$

soit encore

$$\theta_{ik} = L_{X_i} \omega_k + \frac{1}{2} \sum_j \omega_k([X_i, X_j]) \omega_j;$$

ce qui fournit les identités cherchées. □

1. L'algèbre des classes caractéristiques.

La proposition 1 conduit à considérer dans le complexe $A^*(M)$ la plus petite sous-algèbre, que l'on note $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$, qui contient les formes de Pfaff $\omega_1, \dots, \omega_q$ et qui est stable par les opérateurs différentiels i_{X_k} et $L_{X_k}, 1 \leq k \leq q$.

Pour donner une description de cette sous-algèbre $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ on introduit

- la sous-algèbre de Lie \mathfrak{g} de $\mathcal{X}(M)$ engendrée par X_1, \dots, X_q ,
- l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} ,
- le sous-espace E^* de $A^*(M)$ engendré par $\omega_1, \dots, \omega_q$.

Les dérivations de Lie et les produit intérieurs par les éléments de \mathfrak{g} déterminent des opérations de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ et du produit tensoriel $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ sur le complexe $A^*(M)$. Dans ces conditions,

- $C^0 = C^0(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ est la sous-algèbre de $A^0(M)$ engendrée par le sous-espace $(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})(E^*)$;

- $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ est l'algèbre produit tensoriel $C^0 \otimes (\wedge C^1)$.

La proposition qui suit est alors une conséquence directe de cette description de $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$.

PROPOSITION 2. — La sous-algèbre $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ de $A^*(M)$ est un sous-complexe.

PROPOSITION 3. — L'injection du sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ dans $A^*(M)$ détermine au niveau cohomologique une sous-algèbre de l'algèbre $H^*(M; \mathbf{R})$ de cohomologie réelle de M qui est indépendante du choix des champs de vecteurs X_1, \dots, X_q vérifiant les relations $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

On notera $HC^*(\mathcal{F})$ cette sous-algèbre de cohomologie et on l'appellera l'algèbre des classes caractéristiques du feuilletage \mathcal{F} .

Démonstration. — Soient $X_i^k \dots X_q^k$, $k = 0, 1$, des champs de vecteurs sur M vérifiant les relations $\omega_i(X_j^0) = \omega_i(X_j^1) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

Si p est la projection de la variété produit $M \times \mathbf{R}$ sur M , le feuilletage $p^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \times \mathbf{R}$ a un fibré normal trivialisé par les formes de Pfaff $\tilde{\omega}_i = p^*\omega_i$, $1 \leq i \leq q$, et les champs de vecteurs $Y_j = (1-t)X_j^0 + tX_j^1$, $1 \leq j \leq q$, vérifient les relations $\tilde{\omega}_i(Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

Dans ces conditions, si on désigne par ι_k , $k = 0, 1$, les injections de M dans $M \times \mathbf{R}$ définies par $x \mapsto (x, k)$, le sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1^k \dots X_q^k)$, $k = 0, 1$, est l'image par ι_k^* du sous-complexe $C^*(\mathcal{F} \times \mathbf{R}; Y_1 \dots Y_q)$. Un argument standard d'homotopie permet alors de conclure. □

Remarque 1. — L'algèbre $HC^*(\mathcal{F})$ des classes caractéristiques du feuilletage \mathcal{F} contient ses classes caractéristiques telles qu'elles ont été définies par I.N. Bernstein et B.I. Rosenfeld [1], R. Bott et A. Haefliger [2] et D.B. Fuks [4].

On peut s'en assurer rapidement en remarquant que les conditions d'intégrabilité $d\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge \theta_{ik}$ intervenant dans la démonstration de la proposition 1 permettent d'obtenir par différentiation les relations $\sum_i (d\theta_{ik} - \sum_j \theta_{ij} \wedge \theta_{jk}) \wedge \omega_i = 0$. Ces relations expriment l'appartenance

des formes $\Theta_{ik} = d\theta_{ik} - \sum_j \theta_{ij} \wedge \theta_{jk}$ à l'idéal de $A^*(M)$ engendré par les formes de Pfaff $\omega_1, \dots, \omega_q$; de sorte que l'algèbre qu'elles engendrent est nulle en degrés supérieurs à $2q$.

On construit alors un morphisme de l'algèbre de Weil W_q du groupe linéaire $Gl(q, \mathbf{R})$ tronquée en degrés symétriques supérieurs à $2q$ (cf [5]) dans le complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ en envoyant les générateurs canoniques α_{ij} et A_{ij} de la première respectivement sur les formes différentielles $-\theta_{ij}$ et $-\Theta_{ij}$ du second.

2. Finitude de l'algèbre des classes caractéristiques.

Soit G le groupe linéaire $Gl(q, \mathbf{R})$ avec ses coordonnées canoniques x_{ij} , $1 \leq i, j \leq q$. On désigne par y_{ij} , $1 \leq i, j \leq q$, les composantes de l'application $\sigma : A \rightarrow A^{-1}$ de passage à l'inverse dans G et par $H = \sum_{ij} x_{ij}(\partial/\partial x_{ij})$ le champ de vecteurs engendrant le groupe à un paramètre $(t, X) \mapsto e^t X$ des homothéties de G .

Si p est la projection de la variété produit $M \times G$ sur M , le feuilletage $p^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \times G$ a un fibré normal trivialisé par les formes de Pfaff $\tilde{\omega}_k = \sum_j x_{kj}\omega_j$, $1 \leq k \leq q$, et les champs de vecteurs $Y_k = \sum_j y_{jk}X_j$, $1 \leq k \leq q$, sur $M \times G$ vérifient les relations $\tilde{\omega}_i(Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

On dit d'une forme différentielle α sur $M \times G$ qu'elle est de poids r si elle est telle que $L_H\alpha = r\alpha$. Les formes de Pfaff $\tilde{\omega}_k$ sont ainsi de poids 1; la différentielle d'une forme de poids r est encore de poids r et le produit extérieur de deux formes de poids respectifs r et s est de poids $r + s$. De plus, si α est une forme de poids r les formes $i_{Y_k}\alpha$ et $L_{Y_k}\alpha$, $1 \leq k \leq q$, sont toutes de poids $r - 1$: on a $[H, Y_k] = -Y_k$. Par conséquent le complexe $C^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \dots, Y_q)$ est somme directe des sous-complexes $C_r^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \dots, Y_q)$ regroupant les formes de poids r , pour r entier inférieur ou égal à q .

PROPOSITION 4. — *L'algèbre $HC^*(\mathcal{F} \times G)$ des classes caractéristiques du feuilletage $\mathcal{F} \times G$ est de dimension finie.*

Démonstration. — Pour $r \neq 0$ les sous-complexes $C_r^*(\mathcal{F} \times G; Y_1 \dots Y_q)$ sont acycliques: $d\alpha = 0$ implique $\alpha = d(i_H\alpha)/r$. Pour $r = 0$ le sous-complexe $C_0^*\{\times G; Y_1 \dots Y_q\}$ est de dimension finie: il est engendré par

les fonctions et les formes de Pfaff sur $M \times G$ obtenues à partir de $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_q$ par l'application d'au plus $2q + 1$ opérateurs différentiels i_{X_k} ou $L_{X_k}, 1 \leq k \leq q$. \square

COROLLAIRE 1. — *L'algèbre $HC^*(\mathcal{F})$ des classes caractéristiques du feuilletage \mathcal{F} est de dimension finie.*

En effet, si ι est l'injection de M dans $M \times G$ définie par $x \mapsto (x, I)$, on a $\iota^*(C^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \dots, Y_q)) = C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$.

Remarque 2. — Si $q = 1$ le feuilletage \mathcal{F} est défini par une forme de Pfaff intégrable ω et, si X est un champ de vecteurs sur M tel que $\omega(X) = 1$, on a $d\omega = \omega \wedge L_X\omega$. Le sous-complexe des formes de poids 0 a alors pour base 1, $\alpha = L_X\omega$, $\beta = \omega \wedge (L_X)^2\omega$ et $\gamma = \omega \wedge L_X\omega \wedge (L_X)^2\omega = -\alpha \wedge \beta$ avec les relations de cobord $d1 = 0$, $d\alpha = \beta$, $d\beta = 0$ et $d\gamma = 0$. Sa cohomologie non nulle est donc en degrés 0 et 3 et est engendrée par les formes 1 et γ (cf [6]).

Dans ces conditions, si γ est le cobord d'une forme ν de degré 2 sur M , on peut vérifier par des méthodes analogues à celles développées ici que la plus petite sous-algèbre de $A^*(M)$ qui contient ω et ν et qui est stable par les opérateurs différentiels i_X et L_X est acyclique : sur $M \times]0, \infty[$ on a alors $\tilde{\omega} = t\omega$, $Y = (1/t)X$ et $\tilde{\omega} \wedge L_Y\tilde{\omega} \wedge (L_Y)^2\tilde{\omega} = d\tilde{\nu}$, où $\tilde{\nu} = \nu + (dt/t) \wedge L_X\omega$ est une forme de poids 0.

3. Le complexe caractéristique universel.

On désigne par

- \mathfrak{G}_q l'algèbre de Lie libre réelle engendrée par X_1, \dots, X_q ;
- E_q le sous-espace de \mathfrak{G}_q engendré par X_1, \dots, X_q ;
- E_q^* l'espace dual de E_q avec sa base duale $\alpha_1, \dots, \alpha_q$;
- \mathfrak{G}'_q l'algèbre dérivée de \mathfrak{G}_q , qui est un facteur direct de E_q dans \mathfrak{G}_q ;
- $U_q = U(\mathfrak{G}_q)$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{G}_q : c'est encore l'algèbre associative libre engendrée par X_1, \dots, X_q (cf [3]);
- F_q^0 l'algèbre symétrique du produit tensoriel $U_q \otimes \mathfrak{G}'_q \otimes E_q^*$ (on notera $L\alpha(Z)$ l'élément $L \otimes Z \otimes \alpha$ et on posera $\alpha(Y) = \alpha(Y_1) + \alpha(Y_2)$ pour un élément $Y = Y_1 + Y_2$ de $\mathfrak{G}_q = E_q \oplus \mathfrak{G}'_q$);
- F_q^1 le produit tensoriel $U_q \otimes E_q^*$ (on notera $L\alpha$ l'élément $L \otimes \alpha$);

– F_q l'algèbre anticommutative produit tensoriel $F_q^0 \otimes (\wedge F_q^1)$ graduée par les degrés de l'algèbre extérieure.

On associe à chaque élément Y de \mathfrak{G}_q une dérivation L_Y de degré 0 et une antidérivation i_Y de degré -1 de l'algèbre F_q que l'on définit par les relations suivantes sur les éléments de F_q^0 et F_q^1 :

– $L_Y(1) = 0$, $L_Y(L\alpha(Z)) = (YL)\alpha(Z)$ et $L_Y(L\alpha) = (YL)\alpha$ (de sorte que, pour Y_1, \dots, Y_r dans E_q , les éléments $Y_1 \dots Y_r \alpha(Z)$ et $Y_1 \dots Y_r \alpha$ sont respectivement égaux à $L_{Y_1} \circ \dots \circ L_{Y_r}(\alpha(Z))$ et $L_{Y_1} \circ \dots \circ L_{Y_r}(\alpha)$; ce qui permet d'étendre les notations $L\alpha(Z)$ et $L\beta$ aux cas où Z est dans E_q et β dans F_q);

– $i_Y = 0$ sur F_q^0 , $i_Y(\alpha) = \alpha(Y)$, $i_Y(X_k \alpha) = X_k \alpha(Y) - \alpha([X_k, Y])$, puis, par récurrence sur la longueur r de l'élément $L = X_{i_1} \dots X_{i_r}$ de U_q , $i_Y(X_k L \alpha) = L_{X_k} i_Y(L \alpha) - i_{[X_k, Y]}(L \alpha)$.

On définit enfin une antidérivation d de degré $+1$ de l'algèbre F_q en posant $d(1) = 0$, $d(\alpha_k) = \sum_i \alpha_i \wedge X_i \alpha_k + (1/2) \sum_{ij} \alpha_k([X_i, X_j]) \alpha_i \wedge \alpha_j$, $d(L\alpha(Z)) = LZ\alpha - Li_Z(d(\alpha))$ et $d(L\alpha) = Ld(\alpha)$.

PROPOSITION 5. — On a, pour Y et Z dans \mathfrak{G}_q , les relations de Cartan $L_Y \circ L_Z - L_Z \circ L_Y = L_{[Y, Z]}$, $L_Y \circ i_Z - i_Z \circ L_Y = i_{[Y, Z]}$ et $d i_Y + i_Y d = L_Y$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier ces relations en degrés 0 et 1, auxquels cas la première est immédiate, de même que la seconde lorsque $Y = X_k$, $1 \leq k \leq q$.

On vérifie cette dernière en toute généralité en le faisant lorsque Y est le crochet de deux éléments Y_1 et Y_2 pour lesquels elle est satisfaite. On a alors :

$$\begin{aligned} L_{Y_1} L_{Y_2} i_Z &= L_{Y_1} i_Z L_{Y_2} + L_{Y_1} i_{[Y_2, Z]} \\ &= i_Z L_{Y_1} L_{Y_2} + i_{[Y_1, Z]} L_{Y_2} + i_{[Y_2, Z]} L_{Y_1} + i_{[Y_1, [Y_2, Z]]} ; \end{aligned}$$

et par conséquent $L_Y i_Z = i_Z L_Y + i_{[Y, Z]}$.

La troisième relation est satisfaite lorsqu'on l'applique à un élément α de E_q^* . Elle l'est aussi lorsqu'on l'applique à des éléments de F_q de la forme $X_k L\alpha(Z)$ et $X_k L\alpha$, $1 \leq k \leq q$, en supposant qu'elle l'est déjà pour

$\beta_1 = L\alpha(Z)$ et $\beta_2 = L\alpha$. On a alors en effet :

$$\begin{aligned} i_Y(L_{X_k}\beta_i) &= L_{X_k}i_Y\beta_i - i_{[X_k, Y]}\beta_i \\ di_Y(L_{X_k}\beta_i) &= L_{X_k}di_Y\beta_i - di_{[X_k, Y]}\beta_i \\ &= L_{X_k}L_Y\beta_i - L_{X_k}i_Yd\beta_i - L_{[X_k, Y]}\beta_i + i_{[X_k, Y]}d\beta_i \\ &= L_Y(L_{X_k}\beta_i) - i_Yd(L_{X_k}\beta_i) . \end{aligned}$$

En particulier, elle est donc satisfaite sur F_q^1 .

Compte tenu de ces résultats, cette troisième relation de Cartan est vérifiée pour les éléments $\alpha(Z)$ de F_q^0 lorsque $Y = X_k$, $1 \leq k \leq q$. On a en effet :

$$\begin{aligned} i_{X_k}d\alpha(Z) &= i_{X_k}L_Z\alpha - i_{X_k}i_Zd\alpha = i_{X_k}L_Z\alpha + i_Zi_{X_k}d\alpha \\ &= i_{X_k}L_Z\alpha + i_ZL_{X_k}\alpha = L_{X_k}i_Z\alpha . \end{aligned}$$

Enfin, si Y est le crochet de deux éléments Y_1 et Y_2 pour lesquels elle est satisfaite lorsqu'on l'applique à $\beta = \alpha(Z)$, on a :

$$\begin{aligned} i_Yd\beta &= L_{Y_1}i_{Y_2}d\beta - i_{Y_2}L_{Y_1}d\beta = L_{Y_1}L_{Y_2}\beta - i_{Y_2}dL_{Y_1}\beta \\ &= L_{Y_1}L_{Y_2}\beta - L_{Y_2}L_{Y_1}\beta = L_Y\beta ; \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION 6. — *L'opérateur $d : F_q \rightarrow F_q$ est de carré nul.*

Démonstration. — Puisque l'on a

$$\begin{aligned} d(L\alpha(Z)) &= L(Z\alpha - i_Zd\alpha) \\ dd(L\alpha(Z)) &= L(Zd\alpha - Zd\alpha + i_Zdd\alpha) = Li_Z(dd\alpha) \\ dd(L\alpha) &= L(dd\alpha), \end{aligned}$$

il suffit de vérifier que d^2 s'annule sur les éléments α_k , $1 \leq k \leq q$; mais

alors :

$$\begin{aligned}
dd\alpha_k &= \sum_{ir} \alpha_i \wedge L_{X_i} \alpha_r \wedge L_{X_r} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{ijr} \alpha_r ([X_i, X_j]) \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge L_{X_r} \alpha_k \\
&\quad - \sum_{ir} \alpha_r \wedge L_{X_r} \alpha_i \wedge L_{X_i} \alpha_k - \sum_{ir} \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge L_{X_r} L_{X_i} \alpha_k \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{ijr} X_r \alpha_k ([X_i, X_j]) \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{ijr} \alpha_k ([X_i, X_j]) \alpha_r \wedge L_{X_r} \alpha_i \wedge \alpha_j \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{ijr} \alpha_k ([X_i, X_j]) \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge L_{X_r} \alpha_j \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{rs} (L_{[X_r, X_s]} \alpha_k) \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{irs} \alpha_i ([X_r, X_s]) L_{X_i} \alpha_k \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{irs} X_i \alpha_k ([X_r, X_s]) \alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{irs} \alpha_k ([X_i, [X_r, X_s]]) \alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{ijrs} \alpha_k ([X_i, X_j]) \alpha_i ([X_r, X_s]) \alpha_j \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{ijrs} \alpha_k ([X_i, X_j]) \alpha_j ([X_r, X_s]) \alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{irs} \alpha_k ([X_r, X_s]) \alpha_i \wedge L_{X_i} \alpha_r \wedge \alpha_s \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{ijrs} \alpha_k ([X_r, X_s]) \alpha_r ([X_i, X_j]) \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_s \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{irs} \alpha_k ([X_r, X_s]) \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge L_{X_i} \alpha_s \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{ijrs} \alpha_k ([X_r, X_s]) \alpha_s ([X_i, X_j]) \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j \\
&= 0 ;
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Avec les notations du paragraphe 1, on désigne par π l'épimorphisme

canonique de l'algèbre de Lie libre \mathfrak{O}_q sur la sous-algèbre de Lie \mathfrak{g} de $\mathcal{X}(M)$.
On a alors :

PROPOSITION 7. — Si Y_1, \dots, Y_r sont des éléments de E_q , la correspondance associant respectivement les formes de Pfaff $L_{Y_1} \dots L_{Y_r} \omega_k(\pi(Z))$ et $L_{Y_1} \dots L_{Y_r} \omega_k$ aux éléments $Y_1 \dots Y_r \alpha_k(Z)$ et $Y_1 \dots Y_r \alpha_k$, $1 \leq k \leq q$, de F_q , détermine un épimorphisme du complexe F_q sur le sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_r)$ de $A^*(M)$ compatible avec les opérations L_{X_k} et i_{X_k} .

Pour cette raison on dira que F_q et son algèbre de cohomologie $H^*(F_q)$ sont respectivement le complexe caractéristique universel et l'algèbre caractéristique universelle pour les feuilletages de codimension q avec fibré normal trivialisé.

Remarque 3. — De même que dans le paragraphe 2, on peut montrer que l'algèbre caractéristique universelle $H^*(F_q)$ est de dimension finie.

Pour cela, on introduit d'abord un poids sur F_q en faisant les conventions suivantes :

- les éléments de $E_q^* \subset F'_q$ sont de poids 1;
- si Z est un crochet de longueur s en les X_1, \dots, X_q , l'élément $\alpha(Z)$ de F_q^0 est de poids $1 - s$;
- si γ est un élément de poids r de $F_q^0 \oplus F'_q$, les éléments $L_{X_k} \gamma$, $1 \leq k \leq q$, sont tous de poids $r - 1$ (et par suite, si Z est comme précédemment, l'élément $i_Z \gamma$ est de poids $r - s$);
- le produit de deux éléments de F_q de poids respectifs r et s est de poids $r + s$.

Dans ces conditions, l'ensemble $F_{q,r}$ des éléments de poids r de F_q est un sous-complexe de F_q et ces sous-complexes $F_{q,r}$ forment une décomposition en somme directe de F_q .

On définit ensuite une antidérivation i de poids -1 de l'algèbre F_q en posant $i = 0$ sur $F_q^0 \oplus E_q^*$, $i(X_k \alpha) = -\alpha(X_k)$, $1 \leq k \leq q$, puis, par récurrence sur la longueur r de l'élément $L = X_{i_1} \dots X_{i_r}$ de U_q , $i(X_k L \alpha) = L_{X_k}(i(L \alpha)) - i_{X_k}(L \alpha)$.

Cette antidérivation i conserve le poids, est de carré nul, anticommute avec les opérateurs i_Z et vérifie les relations suivantes "de Cartan" :

$L_Z \circ i - i \circ L_Z = s i_Z$ lorsque Z est un crochet de longueur s en les X_1, \dots, X_q ;

$$i \circ d + d \circ i = r \text{ sur } F_{q,r}.$$

On conclut alors comme dans la démonstration de la proposition 4.

4. L'algèbre caractéristique universelle.

On considère la graduation de l'algèbre de Lie libre \mathfrak{G}_q par ses sous-espaces \mathfrak{G}_q^n , $n \in \mathbf{N}$, engendrés par les crochets de longueur n en les X_k , $1 \leq k \leq q$, et on désigne par $\mathcal{H} = (H_r)_{r \in \mathbf{N}}$ une base de Hall de \mathfrak{G}_q (cf. [3]) : \mathcal{H} est la réunion de ses parties homogènes $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \cap \mathfrak{G}_q^n$, $n \in \mathbf{N}$, et l'indexation de ses éléments est telle que, pour $n > m$, les indices dans \mathcal{H}^n sont supérieurs à ceux dans \mathcal{H}^m (les éléments de \mathcal{H}^1 sont les générateurs X_1, \dots, X_q ; ceux de \mathcal{H}^2 , les crochets $[X_i, X_j]$ pour $i < j$; ceux de \mathcal{H}^3 , les crochets $[X_i, [X_j, X_k]]$ pour $i \geq j$ et $j < k$; ...).

Dans ces conditions, le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt [3] permet de montrer les résultats suivants :

– les monômes en les éléments $\alpha_k(H_s)$ et $H_{r_1} \dots H_{r_p} \alpha_k(H_s)$, $p \in \mathbf{N}$, $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_p$ et $1 \leq k \leq q$, fournissent une base de l'algèbre symétrique F_q^0 ;

– les éléments α_k et $H_{r_1} \dots H_{r_p} \alpha_k$, $p \in \mathbf{N}$, $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_p$ et $1 \leq k \leq q$, forment une base de l'espace F_q^1 .

Avec ces notations, on construit une filtration décroissante $(F_{q,m})_{m \in \mathbf{N}}$ de l'algèbre F_q en convenant que, pour $m \geq 2$, $F_{q,m}$ est l'idéal de F_q engendré par les éléments de base $\alpha_k(H_s)$ et $H_{r_1} \dots H_{r_p} \alpha_k(H_s)$ dans F_q^0 et $H_{r_1} \dots H_{r_p} \alpha_k$ dans F_q^1 pour lesquels, selon le cas, soit la longueur de H_s , soit celle de H_{r_p} , soit le maximum de celles de H_{r_p} et de H_s , est au moins égal à m .

La filtration ainsi introduite est adaptée à la graduation de F_q , au sens où $F_{q,m}$ est la somme directe de ses sous-espaces homogènes $F_{q,m} \cap F_q^n$. Elle est compatible avec les opérations L_Y et i_Y , $Y \in \mathfrak{G}_q$, définies précédemment sur F_q , ainsi qu'avec sa différentielle d et l'antidérivation i introduite dans la remarque 3. De plus, avec les notations de cette remarque 3, le sous-complexe $F_{q,m}$ est la somme directe de ses sous-complexes $F_{q,m} \cap F_{q,r}$ pour $r \leq q + 1 - m$.

Remarque 4. — En raison de ces compatibilités, la situation décrite dans la remarque 3 se transpose au niveau du complexe gradué $E_{q,0}$ associé à la filtration du complexe caractéristique universel F_q . Par conséquent, les

sous-complexes $E_{q,0}^m = F_{q,m}/F_{q,m+1}$ de $E_{q,0}$ ont même cohomologie que leur sous-complexe (de dimension finie) $\widehat{E}_{q,0}^m$ formé des éléments de poids nul dans $E_{q,0}^m$. En particulier, ces sous-complexes $E_{q,0}^m$ sont acycliques dès que m est strictement supérieur à $q + 1$.

PROPOSITION 8. — *Le premier terme $E_{q,0}^1 = F_{q,1}/F_{q,2}$ du complexe gradué associé à la filtration du complexe caractéristique universel F_q est isomorphe au complexe de Gelfand–Fuks des cochaines continues sur l’algèbre de Lie \mathfrak{a}_q des champs de vecteurs formels à q variables.*

En effet (cf [5]), si on désigne par S_q l’algèbre symétrique de l’espace E_q , ce complexe E_0^1 est isomorphe à l’algèbre extérieure de sa composante homogène de degré 0, elle-même isomorphe au produit tensoriel $S_q \otimes E_q^*$, avec un opérateur de cobord déterminé à ce niveau par les relations $d\alpha_k = \sum_i \alpha_i \wedge X_i \alpha_k, 1 \leq k \leq q$.

Exemple. — Le cas $q = 2$. – Dans cette situation on note Y le crochet $[X_1, X_2]$ et, avec les inégalités $1 \leq r, s \leq 2$ et $1 \leq i \leq j \leq 2$ portant sur les indices, on désigne par

– L la sous-algèbre de $\widehat{E}_{2,0}^1$ engendrée par les éléments 1 et $\theta_{ir} = X_i \alpha_r$;

– M_1 le sous-espace de $\widehat{E}_{2,0}^2$ engendré par les éléments

$$\beta_{rs} = \alpha_r(Y)\alpha_s \text{ et } \gamma_{rs} = (Y\alpha_r) \wedge \alpha_s ;$$

– M_2 le sous-espace de $\widehat{E}_{2,0}^2$ engendré par les éléments

$$\lambda_{rs} = \alpha_r(Y)\alpha_s(Y)\alpha_1 \wedge \alpha_2 ,$$

$$\mu_{rs} = \alpha_r(Y)(Y\alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 ,$$

$$\nu = (Y\alpha_1) \wedge (Y\alpha_2) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 ,$$

$$\varepsilon_{ir} = (X_i \alpha_r(Y))\alpha_1 \wedge \alpha_2 ,$$

$$\eta_{ir} = (X_i Y \alpha_r) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 ,$$

$$\sigma_{ij}^{rs} = \alpha_r(Y)(X_i X_j \alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2$$

$$\tau_{ij}^{rs} = (Y\alpha_r) \wedge (X_i X_j \alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 ;$$

– N le sous-espace de $\widehat{E}_{2,0}^3$ engendré par les éléments

$$\varphi_{ir} = \alpha_r([X_i, Y])\alpha_1 \wedge \alpha_2 \text{ et } \psi_{ir} = ([X_i, Y]\alpha_r)\alpha_1 \wedge \alpha_2 .$$

Dans ces conditions, les espaces $\widehat{E}_{2,0}^2$ et $\widehat{E}_{2,0}^3$ sont respectivement isomorphes aux produits tensoriels $(M_1 \oplus M_2) \otimes L$ et $N \otimes L$.

Compte tenu du fait que l'on a $d\theta_{ir} = \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kr}$ modulo α_1 et α_2 , la différentielle dans $\widehat{E}_{2,0}^3$ est déterminée par les relations

$$\begin{aligned} d_0 \varphi_{ir} &= \psi_{ir} - \sum_k \varphi_{ik} \wedge \theta_{kr} - \varphi_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}), \\ d_0 \psi_{ir} &= \sum_k \psi_{ik} \wedge \theta_{kr} - \psi_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}). \end{aligned}$$

On obtient alors l'acyclicité de ce complexe $\widehat{E}_{2,0}^3$ en introduisant l'opérateur d'homotopie envoyant $\varphi_{ir} \wedge \omega$ sur 0 et $\psi_{ir} \wedge \omega$ sur $\varphi_{ir} \wedge \omega$.

De même, le produit tensoriel $M_2 \otimes L$ est un sous-complexe de $\widehat{E}_{2,0}^3$ avec une différentielle déterminée par les relations suivantes (dans lesquelles les sommations sont sur l'indice k) :

$$\begin{aligned} d_0 \lambda_{rs} &= \mu_{rs} + \mu_{sr} - \sum \lambda_{ks} \wedge \theta_{kr} - \sum \lambda_{rk} \wedge \theta_{ks} - \lambda_{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}), \\ d_0 \mu_{rs} &= (-1)^r (\delta_{rs} - 1) \nu + \sum \mu_{ks} \wedge \theta_{kr} + \sum \mu_{rk} \wedge \theta_{ks} \\ &\quad + \mu_{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}), \\ d_0 \nu &= -2\nu \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}), \\ d_0 \sigma_{ij}^{rs} &= \tau_{ij}^{rs} + \sum \sigma_{ij}^{ks} \wedge \theta_{kr} + \sum \sigma_{ij}^{rk} \wedge \theta_{ks} - \sum (\delta_{i1} \sigma_{1k}^{rs} + \delta_{i2} \sigma_{k2}^{rs}) \wedge \theta_{jk} \\ &\quad - \sum (\delta_{j1} \sigma_{1k}^{rs} + \delta_{j2} \sigma_{k2}^{rs}) \wedge \theta_{ik} + \sigma_{ij}^{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\ &\quad + \mu_{rs} \wedge (\delta_{i2} \theta_{j1} + \delta_{j2} \theta_{i1}) + \lambda_{rs} \wedge (\theta_{j1} \wedge \theta_{i2} + \theta_{i1} \wedge \theta_{j2}), \\ d_0 \tau_{ij}^{rs} &= - \sum \tau_{ij}^{ks} \wedge \theta_{kr} - \sum \tau_{ij}^{rk} \wedge \theta_{ks} + \sum (\delta_{i1} \tau_{1k}^{rs} + \delta_{i2} \tau_{k2}^{rs}) \wedge \theta_{jk} \\ &\quad + \sum (\delta_{j1} \tau_{1k}^{rs} + \delta_{j2} \tau_{k2}^{rs}) \wedge \theta_{ik} - \tau_{ij}^{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\ &\quad + (-1)^r (1 - \delta_{rs}) \nu \wedge (\delta_{i2} \theta_{j1} + \delta_{j2} \wedge \theta_{i1}) \\ &\quad - \mu_{sr} \wedge (\theta_{j1} \wedge \theta_{i2} + \theta_{i1} \wedge \theta_{j2}), \\ d_0 \varepsilon_{ir} &= \eta_{ir} - \sum \varepsilon_{ik} \wedge \theta_{kr} + \sum \varepsilon_{kr} \wedge \theta_{ik} - \varepsilon_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\ &\quad - \sum (\delta_{i1} \sigma_{1k}^{kr} + \delta_{i2} \sigma_{k2}^{kr}) + \delta_{i2} \mu_{1r} + \lambda_{r1} \wedge \theta_{i2} - \lambda_{r2} \wedge \theta_{i1}, \\ d_0 \eta_{ir} &= \sum \eta_{ik} \wedge \theta_{kr} - \sum \eta_{kr} \wedge \theta_{ik} + \eta_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\ &\quad + \sum (\delta_{i1} \tau_{1k}^{kr} + \delta_{i2} \tau_{k2}^{kr}) + \mu_{r1} \wedge \theta_{i2} - \mu_{r2} \wedge \theta_{i1} - \delta_{i2} \delta_{r2} \nu. \end{aligned}$$

Ces expressions montrent que les produits tensoriels $M_2' \otimes L$ et $M_2'' \otimes L$, où M_2' et M_2'' sont les sous-espaces de M_2 engendrés respectivement par les éléments $\lambda_{rs}, \mu_{rs}, \nu, \sigma_{ij}^{rs}, \tau_{ij}^{rs}$ et $\lambda_{rs}, \mu_{rs}, \nu$, déterminent une filtration

décroissante du sous-complexe $M_2 \otimes L$. On obtient alors l'acyclicité de ce sous-complexe en vérifiant, grâce à un argument analogue à celui utilisé précédemment dans le cas de $\widehat{E}_{2,0}^3$, celle des complexes $(M_2/M_2') \otimes L$, $(M_2'/M_2'') \otimes L$ et $M_2'' \otimes L$ (pour ce dernier, on considère l'opérateur d'homotopie envoyant $\lambda_{rs} \wedge \omega$ sur 0, $\mu_{rs} \wedge \omega$ sur $\frac{1}{2}\lambda_{rs} \wedge \omega$ et $\nu \wedge \omega$ sur $\frac{1}{2}(\mu_{12} - \mu_{21}) \wedge \omega$).

Enfin, la différentielle dans le complexe quotient $\widehat{E}_{2,0}^2/(M_2 \otimes L)$ est déterminée par les deux relations

$$d'_0 \beta_{rs} = \gamma_{rs} + \sum_k \beta_{ks} \wedge \theta_{kr} + \sum_k \beta_{rk} \wedge \theta_{ks},$$

$$d'_0 \gamma_{rs} = - \sum_k \gamma_{ks} \wedge \theta_{kr} - \sum_k \gamma_{rk} \wedge \theta_{ks}.$$

Par conséquent, de même que précédemment, ce complexe est acyclique.

Regroupant ces résultats, on en déduit l'acyclicité du complexe $\widehat{E}_{2,0}^2$, puis le fait que le terme $E_{2,1} = H^*(E_{2,0})$ de la suite spectrale associée à la filtration de F_2 se réduit à sa composante homogène $E_{2,1}^1$, elle-même isomorphe à la cohomologie de Gelfand-Fuks $H^*(\mathfrak{a}_2)$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels en 2 variables. De sorte que, en codimension 2, on obtient de cette façon une nouvelle construction des classes caractéristiques d'un feuilletage ayant un fibré normal trivialisé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.N. BERNSTEIN & B.I. ROSENFELD, Homogeneous spaces of infinite dimensional Lie algebras and the characteristic classes of foliations, Uspekhi Mat. Nauk, 28-4, (1973), 103-138 - Russian Math. Surveys, 28-4, (1973), 107-142.
- [2] R. BOTT & A. HAEFLIGER, On characteristic classes of Γ -foliations, Bull. Amer. Math. Soc., 78, (1972), 1039-1044..
- [3] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 1 et 2, Hermann, (1971) et (1972).
- [4] D.B. FUKS, Characteristic classes of foliations, Uspekhi Mat. Nauk, 28-2, (1973) 3-17 - Russian Math. Surveys, 28-2, (1973), 1-16.
- [5] C. GODBILLON, Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, Séminaire Bourbaki, exposé n°421, Lecture Notes in Math., 383 (1974), 69-87.
- [6] C. GODBILLON & J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), 92-95.

Strasbourg, mai 1990.