

ABDELHAK AZHARI

Sur la conjecture de Chudnovsky-Demailly et les singularités des hypersurfaces algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 1 (1990), p. 103-116

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_103_0

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONJECTURE DE CHUDNOVSKY-DEMAILLY ET LES SINGULARITES DES HYPERSURFACES ALGEBRIQUES

par Abdelhak AZHARI

1. Introduction.

Le travail de E. Bombieri [1] sur la transcendance des valeurs des fonctions méromorphes, a ouvert la voie à l'étude des degrés d'hypersurfaces algébriques à singularités données. En liaison avec cette question, M. Waldschmidt a introduit un invariant algébrique $\omega_t(S)$ défini comme suit :

DÉFINITION 1. — Soit S un ensemble fini non vide de \mathbb{C}^n . Pour tout entier positif t , on définit $\omega_t(S)$ comme étant le plus petit des degrés des hypersurfaces algébriques ayant en chaque point de S une singularité d'ordre $\geq t$, c'est-à-dire :

$$\omega_t(S) = \min\{\deg P, P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], P \neq 0, D^\tau P(\sigma) = 0 \\ \text{pour tout } \sigma \in S \text{ et } \tau \in \mathbb{N}^n, |\tau| < t\}.$$

En utilisant la théorie des estimations L^2 de Hörmander et des théorèmes d'existence pour l'opérateur $\bar{\partial}$, dus à E. Bombieri [1] et H. Skoda [6], M. Waldschmidt [7] obtient l'estimation :

$$(*) \quad \frac{\omega_{t_1}(S)}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

Mots-clés : Croisements normaux - Degré d'hypersurface - Estimations L^2 - Holomorphe - Plurisousharmonique - Singularités - Transversalité.
Classification A.M.S. : 32J25.

Cette estimation est fine asymptotiquement quand $t_1, t_2 \rightarrow +\infty$, mais non optimale pour des valeurs fixées de t_1 . G.V. Chudnovsky [2] conjecture l'inégalité :

$$(**) \quad \frac{\omega_1(S) + n - 1}{n} \leq \frac{\omega_t(S)}{t},$$

qu'il prouve dans le cas $n = 2$, en utilisant la théorie de l'intersection.

J.-P. Demailly [3] aboutit au même résultat (**), dans le cas $n = 2$ par des méthodes analytiques (utilisant des formules de Jensen en plusieurs variables), et pour $n > 2$ dans le cas où S contient un polytope complet à

$$\binom{\omega_1(S) + n - 1}{n}$$

sommets. Dans ce même article [3] est formulée la conjecture plus générale :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

H. Esnault et E. Viehweg [5] prouvent par des méthodes de géométrie projective complexe l'inégalité :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2} \text{ pour } n \geq 2.$$

Dans cet article, nous nous proposons d'améliorer l'estimation (*), en utilisant les estimations L^2 et les théorèmes d'existence pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur un fibré vectoriel holomorphe semi-positif, dus à J.-P. Demailly [4].

Comme nous allons le voir, cette méthode permet d'apporter des contributions substantielles en direction de la conjecture de Chudnovsky-Demailly.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-Pierre Demailly pour ses suggestions et ses remarques qui ont contribué à améliorer la rédaction de ce travail.

2. Enoncé des théorèmes principaux.

Dans ce travail, nous allons nous placer dans \mathbf{P}^n plutôt que \mathbf{C}^n car la démonstration fera intervenir le choix d'un hyperplan à l'infini générique.

Nous utilisons les notations suivantes :

Notation. — Soit P un polynôme homogène de $\mathbf{C}[\zeta_0, \dots, \zeta_n]$.

1) On désigne par \widehat{P} le polynôme non homogène associé à P , défini par :

$$P(\zeta_0, \dots, \zeta_n) = \zeta_0^{\deg P} \widehat{P}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}, \dots, \frac{\zeta_n}{\zeta_0}\right) \text{ sur l'ouvert } V_0 = \{[\zeta] \in \mathbf{P}^n : \zeta_0 \neq 0\}.$$

On a donc $\widehat{P}(z_1, \dots, z_n) = P(1, z_1, \dots, z_n)$.

2) Soit S une partie finie non vide de \mathbf{P}^n et t un élément de \mathbf{N}^* . On pose

$$\omega_t(S) = \min\{\deg P, P \in \mathbf{C}[\zeta_0, \dots, \zeta_n], P \neq 0, D^\tau P(\sigma) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in S \text{ et } \tau \in \mathbf{N}^{n+1}, |\tau| < t\}.$$

3) On désigne par Λ_t l'ensemble des polynômes qui réalisent la condition 2), c'est-à-dire

$$\Lambda_t = \{P \in \mathbf{C}[\zeta_0, \dots, \zeta_n], P \neq 0, D^\tau P(\sigma) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in S \text{ et } \tau \in \mathbf{N}^{n+1}, |\tau| < t \text{ et } \deg P = \omega_t(S)\}.$$

On note par ailleurs

$$a_t = \min\{\dim \Sigma_P | P \in \Lambda_t\}$$

où Σ_P est l'ensemble des points singuliers non à croisements normaux du diviseur de P , c'est-à-dire si $P = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_N^{k_N}$ la décomposition de P en polynômes irréductibles P_i , Σ_P est l'ensemble des points de $P^{-1}(0)$ en lesquels $dP_{i_1}, \dots, dP_{i_k}$ ne sont pas linéairement indépendantes, où P_{i_1}, \dots, P_{i_k} sont les facteurs qui s'annulent au point considéré.

THÉORÈME 1. — Soient S une partie finie non vide de \mathbf{P}^n , t_1 et t_2 des éléments de \mathbf{N}^* . Alors :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - a_{t_2} - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

Remarque. — Comme $a_{t_2} \leq n - 2$, on a que $(n - a_{t_2} - 1) \geq 1$ et ainsi le théorème 1 redonne le résultat de H. Esnault et E. Viehweg [5], par une méthode analytique sans doute plus élémentaire.

DÉFINITION 2. — Soit S une partie finie non vide de \mathbf{P}^n et soit $(t, D) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On considère l'espace vectoriel de dimension finie :

$$E_S(D, t) = \{P \in \mathbf{C}[z_0, \dots, z_n]; \deg P \leq D \text{ et } P \text{ s'annule à l'ordre } \geq t \text{ sur } S\}.$$

Soit $V_S(D, t)$ la variété des zéros communs des polynômes de $E_S(D, t)$ (celle-ci contient la partie S). Pour tout entier $a = 0, 1, \dots, n - 1$, on définit un invariant algébrique :

$$\omega_t^a(S) = \min\{D \in \mathbf{N}^* : \dim_{\mathbf{C}} V_S(D, t) \leq a\}.$$

De cette définition, on déduit aisément les propriétés suivantes :

- i) $\omega_t^{n-1}(S) = \omega_t(S)$;
- ii) $D \mapsto V_S(D, t)$ est décroissante;
- iii) $t \mapsto V_S(D, t)$ est croissante;
- iv) $V_S(D, t) = S$ pour $D \geq D_0 = D_0(S, t)$ assez grand;
- v) $V_S(D_1 + D_2, t_1 + t_2) \subseteq V_S(D_1, t_1) \cup V_S(D_2, t_2)$;
- vi) $\omega_{t_1+t_2}^a(S) \leq \omega_{t_1}^a(S) + \omega_{t_2}^a(S)$.

Démonstration. — i) Pour tout polynôme P non nul s'annulant à l'ordre au moins t sur S , on a $\dim_{\mathbb{C}} Z_P = n - 1$, ce qui permet d'affirmer que :

$$\omega_t^{n-1}(S) = \omega_t(S).$$

ii), iii) et v) sont évidentes, vi) se déduit de v).

iv) Tout ensemble fini S étant algébrique, on peut écrire $S = Z(Q_1, \dots, Q_p)$ où les polynômes $Q_j \in \mathbb{C}[\zeta_0, \dots, \zeta_n]$. Soit $x \notin S$. Les polynômes Q_1^t, \dots, Q_p^t s'annulent à l'ordre $\geq t$ sur S et il existe un indice i tel que $Q_i^t(x) \neq 0$. Si $D \geq D_0 = \max_{1 \leq j \leq p} (\deg Q_j^t)$, il existe un polynôme $P = A_i Q_i^t$ homogène de degré D tel que $P(x) \neq 0$, donc $x \notin V_S(D, t)$. Par conséquent $V_S(D, t) = S$ (de dimension zéro) si $D \geq D_0$.

THÉORÈME 2. — Soient S une partie finie non vide de \mathbb{P}^n , t_1, t_2 deux éléments quelconques de \mathbb{N}^* et a appartenant à \mathbb{N} . Alors :

$$\frac{\omega_{t_1}^a(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}^a(S)}{t_2}.$$

Tous ces résultats seront démontrés ici à l'aide d'un théorème d'existence de fonctions holomorphes que nous rappelons ci-dessous.

3. Théorème d'existence de Demailly.

Dans ce paragraphe, on énonce une version faible (cas des fibrés triviaux) d'un théorème d'existence de Demailly [4] sur les fibrés vectoriels holomorphes, qui contient un résultat dû à Hörmander–Bombieri et Skoda [6].

PROPOSITION 1. — Soient φ une fonction plurisousharmonique dans \mathbf{C}^n et $Y = \{z \in \mathbf{C}^n ; G_1(z) = G_2(z) = \dots = G_k(z) = 0\}$ un ensemble analytique de dimension complexe p (G_i est une fonction analytique pour $1 \leq i \leq k$) et soit $G = (G_1, \dots, G_k)$. Soit $U = \{z \in \mathbf{C}^n : |G(z)| < 1\}$ un ouvert de \mathbf{C}^n et f une fonction holomorphe sur U telle que :

$$\int_U |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction F holomorphe sur \mathbf{C}^n qui coïncide avec f sur l'ensemble analytique Y et telle que :

$$\int_{\mathbf{C}^n} \frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1 + |G(z)|^2)^{n-p+\varepsilon}} d\lambda(z) \leq C(p, \varepsilon) \int_U |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z)$$

où $C(p, \varepsilon) = \sup(1, \frac{1}{2^p - 1}) + \frac{(p + 1)^2}{\varepsilon}$.

Esquisse de la démonstration. — On cherche un prolongement F de f sous la forme

$$F = \lambda(|G(z)|^2) f - u$$

où $G = (G_1, \dots, G_k)$ et λ est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ à support dans l'intervalle $]-\infty ; 1[$ telle que : $\lambda = 1$ au voisinage de 0 et $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ avec $u = 0$ sur l'ensemble $Y = G^{-1}(0)$.

L'holomorphie de F équivaut à la condition $\bar{\partial}F = 0$, c'est-à-dire à

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = v \\ v = \bar{\partial}(\lambda(|G(z)|^2)f) . \end{cases} \quad (*)$$

On résoud l'équation (*) à l'aide des estimations L^2 de Hörmander, en utilisant le poids $\varphi(z) + 2(n - p) \log |G(z)|$. Il en résulte une solution u telle que $|u(z)|^2 |G(z)|^{-2(n-p)}$ soit localement sommable sur \mathbf{C}^n .

Comme toute solution u de l'équation (*) est de classe \mathcal{C}^∞ , et comme $|G(z)| \leq Cd(z, Y)$ au voisinage de tout point, cette condition de sommabilité locale assure l'annulation de u sur Y .

Remarque. — Cette proposition contient le résultat de Hörmander-Bombieri-Skoda, c'est le cas où $Y = \{z_1 - z_1^0 = \dots = z_n - z_n^0 = 0\} = \{z_0\}$ et $f = 1$:

COROLLAIRE 1. — Soit φ une fonction plurisousharmonique dans un ouvert pseudo-convexe Ω de \mathbf{C}^n telle que $e^{-\varphi}$ soit sommable au

voisinage de $z_0 \in \Omega$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe F sur Ω telle que $F(z_0) = 1$ et

$$\int_{\Omega} \frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1 + |z|^2)^{n+\varepsilon}} d\lambda(z) < +\infty.$$

4. Démonstration du théorème 1.

Soit P un élément de Λ_{t_2} tel que $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_P = a_{t_2} = a$. Par un argument classique de dimension, il existe une sous-variété linéaire Y de \mathbb{P}^n de dimension complexe $(n - a - 1)$ qui vérifie

$$Y \cap \Sigma_P = \emptyset.$$

De même, on peut prendre un hyperplan à l'infini H_{∞} générique tel que $H_{\infty} \cap S = \emptyset$.

On choisit dans la carte affine $\mathbb{P}^n \setminus H_{\infty} \simeq \mathbb{C}^n$, des coordonnées affines $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ telles que l'équation de la sous-variété $Y \cap \mathbb{C}^n$ s'écrive :

$$Y \cap \mathbb{C}^n = \{z \in \mathbb{C}^n ; z_1 = z_2 = \dots = z_{a+1} = 0\}.$$

Dans la suite, on applique la proposition 1 sur l'ouvert de \mathbb{C}^n

$$U_{\rho} = \{z \in \mathbb{C}^n : |\tilde{z}| < \rho\}$$

où $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{a+1})$ et $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$.

Soit la fonction plurisousharmonique φ définie dans \mathbb{C}^n par :

$$\varphi(z) = 2\theta \log |\widehat{P}(z_1, \dots, z_n)| + \beta \log(1 + |z|^2)$$

où θ est un réel strictement supérieur à $\alpha = \frac{t_1 + n - 1}{t_2}$ et $\beta \in \mathbf{R}^+$. On construit tout d'abord une fonction f holomorphe dans l'ouvert U_{ρ} et telle que :

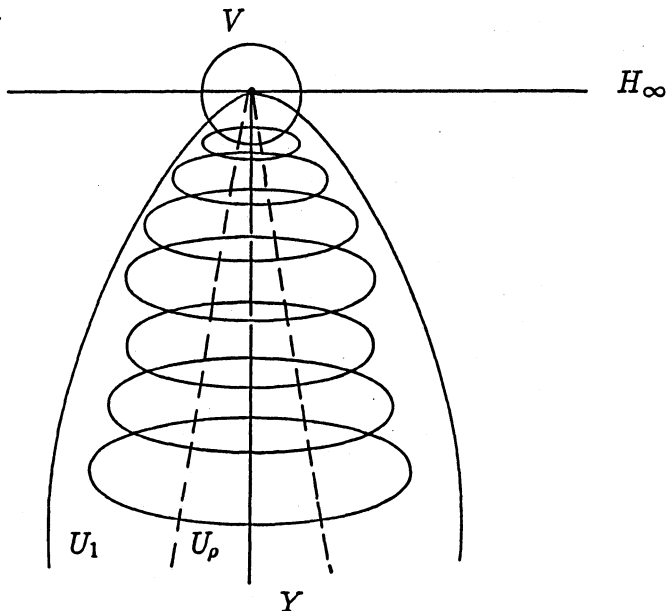
$$(+) \quad \int_{U_{\rho}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}^n .

Dans ce but, on considère la fonction f holomorphe dans U_{ρ} définie par :

$$f(z) = \prod_{j=1}^N |P_j(1, z_1, z_2, \dots, z_n)|^{[\theta k_j]}$$

Pour démontrer la convergence de l'intégrale (+) sur un certain voisinage cylindrique U_ρ de Y , il suffit de vérifier que pour tout point z^0 de Y dans \mathbf{P}^n , il existe un voisinage V de z^0 tel que l'intégrale (+) converge sur $V \cap U_1$.



En effet Y est compacte, donc elle sera recouverte par un nombre fini de tels voisinages, et pour ρ assez petit U_ρ est contenu dans la réunion de ces voisinages.

Pour cela, on distingue deux cas, suivant que le point z^0 appartient à $Y \cap \mathbf{C}^n$ ou que z^0 appartient à l'hyperplan à l'infini H_∞ .

1. Convergence de l'intégrale de $|f|^2 e^{-\varphi}$ au voisinage d'un point z^0 de $Y \cap \mathbf{C}^n$.

Le problème se pose uniquement si $z^0 \in Z_P = \{[\zeta] \in \mathbf{P}^n : P(\zeta_0, \dots, \zeta_n) = 0\}$. Puisque $z^0 \in Y$ et $Y \cap \Sigma_P = \emptyset$, le polynôme P est à croisements normaux en z^0 : si $\{P_{i_j}\}_{1 \leq j \leq k}$ sont les facteurs irréductibles du polynôme P qui s'annulent au point z^0 et $P_{i_j}(z^0) \neq 0$ pour $k < j \leq N$, alors $\{dP_{i_1}(z^0), \dots, dP_{i_k}(z^0)\}$ est un système libre.

Par un changement de coordonnées, il existe un voisinage V dans

lequel les $\{P_{i_j}\}_{1 \leq j \leq k}$ sont les fonctions coordonnées $z \in \mathbf{C}^n \mapsto z_j$, et on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{V \cap U_\rho} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\ &= \int_{V \cap U_\rho} \prod_{j=1}^N |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^{2([\theta k_j] - \theta k_j)} (1 + |z|^2)^{-\beta} d\lambda(z) \\ &= \int_{V \cap U_\rho} \prod_{1 \leq j \leq k} |z_j|^{2\eta_j} (1 + |z|^2)^{-\beta} \prod_{j>k} |P_{i_j}(1, z_1, \dots, z_n)|^{2\eta_j} d\lambda(z) \\ &\leq C \int_{V \cap U_\rho} \prod_{1 \leq j \leq k} |z_j|^{2\eta_j} d\lambda(z) < +\infty \end{aligned}$$

avec $\eta_j = [\theta k_j] - \theta k_j > -1$ et où la constante C est une borne pour les inverses $P_{i_j}^{-1}$ sur V , $j > k$.

2. *Convergence de l'intégrale de $|f|^2 e^{-\varphi}$ au voisinage d'un point z^0 de $Y \cap H_\infty$.*

D'après le théorème de Bertini, on peut choisir la sous-variété linéaire Y et l'hyperplan à l'infini H_∞ en sorte que $Y \cap H_\infty$ soit transverse à toutes les intersections $Z_{P_i} \cap \dots \cap Z_{P_{i_k}}$ (et bien sûr, $Y \cap \Sigma_P = \emptyset$).

Si $(\zeta_0, \zeta_1 \dots \zeta_n)$ désigne les coordonnées homogènes sur \mathbf{P}^n choisies comme au début, les coordonnées du point $z^0 \in Y \cap H_\infty$ vérifient :

$$\zeta_0^0 = \zeta_1^0 = \zeta_2^0 = \dots = \zeta_{a+1}^0 = 0.$$

Donc z^0 est dans l'un des ouverts $W_i = \{[\zeta] \in \mathbf{P}^n : \zeta_i \neq 0\}$ pour $i > a+1$. On suppose par la suite, par exemple, que $\zeta_n^0 \neq 0$.

Montrons qu'il existe un voisinage Ω de z^0 tel que

$$\int_{U_1 \cap \Omega} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty.$$

Sur l'ouvert $W_n \ni z^0$, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w_j = \frac{\zeta_j}{\zeta_n} = \frac{z_j}{z_n} & 1 \leq j \leq n \\ w_0 = \frac{1}{z_n}. \end{cases}$$

On a d'une part

$$dw_0 \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_i \wedge \dots \wedge dw_{n-1} = \pm \frac{1}{z_n^{n+1}} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

d'où

$$d\lambda(z) = |z_n|^{2(n+1)} d\lambda(w) = |w_0|^{-2(n+1)} d\lambda(w),$$

et d'autre part, pour tout indice $1 \leq j \leq N$:

$$\begin{aligned} P_j(1, z_1, \dots, z_n) &= \widehat{P}_j(z_1, \dots, z_n) \\ &= z_n^{\delta_j} P_j(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, 1) \text{ où } \delta_j = \deg P_j \\ &= w_0^{-\delta_j} P_j(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, 1) . \end{aligned}$$

En notant $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_{a+1})$, il vient :

$$\begin{aligned} J &= \int_{U_1 \cap \Omega} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\ &= \int_{\{|\tilde{w}| < 1\} \cap \Omega} \prod_{j=1}^N |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^{2\eta_j} (1 + |z|^2)^{-\beta} d\lambda(z) \\ &= \int_{\{|\tilde{w}| < |w_0|\} \cap \Omega} |w_0|^{-2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j} \prod_{j=1}^N |P_j(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} \\ &\quad \left(\frac{|w_0|^2 + \dots + |w_{n-1}|^2 + 1}{|w_0|^2} \right)^{-\beta} |w_0|^{-2(n+1)} d\lambda(w) \\ &= \int_{\{|\tilde{w}| < |w_0|\} \cap \Omega} \prod_{j=1}^N |P_j(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} |w_0|^{2\beta - 2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} \\ &\quad (|w_0|^2 + \dots + |w_{n-1}|^2 + 1)^{-\beta} d\lambda(w) . \end{aligned}$$

Soient $(P_{ij})_{1 \leq j \leq k}$ les facteurs irréductibles s'annulant en z^0 . Comme par construction $Y \cap H_\infty$ est transverse à $\bigcap_{1 \leq j \leq k} Z_{P_{ij}}$, le système $\{dw_0, dw_1, \dots, dw_{a+1}, dP_{ij}\}$ est libre au point z^0 . On peut choisir $P_j(w_0, \dots, w_{n-1}, 1)$ comme nouvelle coordonnée w_{a+j+1} pour $j \geq 1$ au voisinage Ω du point z^0 , ce qui donne :

$$\begin{aligned} J &= \int_{\{|\tilde{w}| < |w_0|\} \cap \Omega} |w_0|^{2\beta - 2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} \prod_{j=1}^k |w_{j+1+a}|^{2\eta_j} \\ &\quad \prod_{j \notin I_{z^0}} |P_j(w_0, \dots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} (|w_0|^2 + \dots + |w_{n-1}|^2 + 1)^{-\beta} d\lambda(w) \\ &\leq C_1 \int_{\substack{\{|\tilde{w}| < |w_0|\} \\ |w_i| \leq M, i > a+1 \\ |w_0| < \epsilon}} |w_0|^{2\beta - 2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} d\lambda(w) . \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on aura $J < +\infty$ dès que

$$\int_{|w_0| < \epsilon} |w_0|^{2\beta - 2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} |w_0|^{2(a+1)} d\lambda(w) < +\infty$$

et pour cela, il suffit que $2\beta - 2(n - a) - 2\sum_{j=1}^N \delta_j \eta_j > -2$ et $\beta \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\beta > \left(\sum_{j=1}^N \delta_j ([\theta k_j] - \theta k_j) + (n - a - 1) \right)_+ .$$

où X_+ désigne $\sup(X, 0)$.

D'après la proposition 1, il existe une fonction F holomorphe dans \mathbf{C}^n telle que :

$$F|_{Y \cap \mathbf{C}^n} = f \text{ où } Y \cap \mathbf{C}^n = \{z \in \mathbf{C}^n : z_1 = z_2 = \dots = z_{a+1} = 0\}$$

et de plus :

$$L = \int_{\mathbf{C}^n} \frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1 + |\tilde{z}|^2)^{a+1+\varepsilon}} d\lambda(z) < +\infty ,$$

c'est-à-dire :

$$(++) L = \int_{\mathbf{C}^n} |F(z)|^2 |\widehat{P}(z)|^{2\theta} (1 + |z|^2)^{-\beta} (1 + |\tilde{z}|^2)^{-a-1-\varepsilon} d\lambda(z) < +\infty .$$

Soit $\zeta \in \mathbf{C}^n$ et $\Delta(\zeta, r)$ un polydisque de centre ζ et de rayon $r > 0$. La fonction $\zeta \mapsto |F(\zeta)|^2$ étant sous-harmonique, alors on a :

$$\begin{aligned} |F(\zeta)|^2 &\leq \frac{1}{\text{Vol}(\Delta(\zeta, r))} \int_{\Delta(\zeta, r)} |F(z)|^2 d\lambda(z) \\ &\leq \frac{L}{\frac{\pi^n}{n!} r^{2n}} \sup_{z \in \Delta(\zeta, r)} \left(|\widehat{P}(z_1, \dots, z_n)|^{2\theta} (1 + |z|^2)^\beta (1 + |\tilde{z}|^2)^{a+1+\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$|F(\zeta)| \leq C_1 r^{-n} \sup_{z \in \Delta(\zeta, r)} \left(|P(1, z_1, \dots, z_n)|^\theta (1 + |z|)^\beta (1 + |\tilde{z}|)^{a+1+\varepsilon} \right),$$

où C_1 est une constante indépendante de ζ et de r . On choisit $|\zeta - \sigma| = r$ avec $0 < r < 1$ (σ étant un élément arbitraire de S). Alors, pour ζ assez voisin de σ , on obtient la majoration :

$$|\widehat{P}(z)| \leq C_2 |z - \sigma|^{t_2} \leq C_2 (2|\zeta - \sigma|)^{t_2}$$

d'où $|F(\zeta)| \leq C_3 |\zeta - \sigma|^{\theta t_2 - n}$. Ceci permet d'affirmer que F admet un zéro d'ordre $\geq t_1$ en chaque point de S , car $\theta t_2 - n > t_1 - 1$.

Maintenant pour $|\zeta| = R$, $r = R/2$, l'inégalité précédente sur $|F(\zeta)|$ entraîne que

$$\sup_{|\zeta|=R} |F(\zeta)| \leq C_4 R^{\theta \cdot \deg P + \beta - n + a + 1 + \varepsilon} .$$

Donc, F est un élément de $\mathbf{C}[z_1, \dots, z_n]$ vérifiant :

$$\deg F \leq \theta \cdot \omega_{t_2}(S) + \beta - n + a + 1 + \varepsilon .$$

Choisissons $\theta = \alpha + \varepsilon$. Puisque $\omega_{t_1}(S) \leq \deg F$, on obtient à la limite quand ε tend vers 0 et quand β tend vers sa valeur limite inférieure :

$$\omega_{t_1}(S) + \min \left(\sum_{j=1}^N \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]), n - a - 1 \right) \leq \alpha \omega_{t_2}(S)$$

où $\alpha = \frac{(t_1 + n - 1)}{t_2}$. On peut supposer sans perte de généralité (remarque ci-dessous) que :

$$\sum_{j=1}^N \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]) \geq n - 1,$$

ce qui donne :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

Remarque. — Si $\Delta = \sum_{j=1}^N \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]) < n - 1$, on a :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}$$

c'est-à-dire que la conjecture de Chudnovsky-Demailly est vérifiée dans ce cas.

En effet, soit P un élément de Λ_{t_2} , $P = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_N^{k_N}$ sa décomposition en facteurs irréductibles et $\delta_j = \deg P_j$.

On considère le polynôme

$$Q = \prod_{j=1}^N P_j^{[\alpha k_j]} \quad \text{où } \alpha = \frac{(t_1 + n - 1)}{t_2},$$

alors on a :

$$\deg Q = \sum_{j=1}^N \delta_j [\alpha k_j] = \alpha \sum_{j=1}^N \delta_j k_j - \Delta = \alpha \omega_{t_2}(S) - \Delta$$

et Q s'annule en chaque point σ de S à l'ordre T tel que

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^N [\alpha k_j] \cdot \text{ord}_\sigma(P_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha k_j \cdot \text{ord}_\sigma(P_j) - \sum_{j=1}^N (\alpha k_j - [\alpha k_j]) \cdot \text{ord}_\sigma(P_j) \\ &\geq \alpha t_2 - \Delta \\ &\geq t_1 + n - 1 - \Delta \end{aligned}$$

d'où :

$$T \geq t_1 + p,$$

où p est le plus petit entier supérieur ou égal à $(n - 1 - \Delta)$. Toute dérivée R d'ordre p de Q est un polynôme qui s'annule au moins à l'ordre t_1 en chaque point de S et

$$\deg R \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2} \omega_{t_2}(S) - (n - 1),$$

d'où

$$\omega_{t_1}(S) + (n - 1) \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2} \omega_{t_2}(S),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Démonstration du théorème 2.

Soit $\{P_j\}_{1 \leq j \leq m}$ une base de $E_S(D_2, t_2)$. Soit $x \notin V_S(D_2, t_2)$ un point fixé. On choisit un hyperplan H_∞ ne passant pas par x . Il existe une sous-variété linéaire Y_x de \mathbf{P}^n passant par x et de dimension $(n - a - 1)$ telle que :

$$Y_x \cap V_S(D_2, t_2) = Y_x \cap \bigcap_{j=1}^m Z_{P_j} = \emptyset.$$

Après un changement de coordonnées affines $z = (z_1, \dots, z_n)$, l'équation de la sous-variété $Y_x \cap \mathbf{C}^n$ devient :

$$Y_x \cap \mathbf{C}^n = \{z \in \mathbf{C}^n : z_1 = z_2 = \dots = z_{a+1} = 0\}.$$

On considère la fonction plurisousharmonique définie par :

$$\varphi(z) = \theta \log \left(\sum_{j=1}^m |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^2 \right)$$

où θ est un réel $> \frac{t_1 + n - 1}{t_2}$. On applique le théorème d'existence (Proposition 1), sur l'ouvert de \mathbf{C}^n :

$$U_\rho = \{z \in \mathbf{C}^n : |\tilde{z}| < \rho\}$$

où $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{a+1})$ et où ρ est un nombre réel positif assez petit, à la fonction holomorphe $f \equiv 1$ sur U_ρ . Montrons que :

$$J = \int_{U_\rho} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty.$$

En effet :

$$J = \int_{U_\rho} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) = \int_{U_\rho} \left(\sum_{j=1}^m |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^2 \right)^{-\theta} d\lambda(z).$$

Or les polynômes homogènes de degré $D_2 : P_1, P_2 \dots P_m, z_1^{D_2} \dots z_{a+1}^{D_2}$ n'ont pas de zéros communs dans \mathbf{P}^n , d'après le choix de Y_x . Comme la fonction continue :

$$(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) \xrightarrow{\Phi} \sum_{j=1}^m |P_j(\zeta_0, \dots, \zeta_n)|^2 + |\zeta_1|^{2D_2} + \dots + |\zeta_{a+1}|^{2D_2}$$

atteint un minimum $C > 0$ sur la sphère $S = \{\zeta \in \mathbf{C}^{n+1} : |\zeta| = 1\}$, on en déduit $\Phi(\zeta) \geq C|\zeta|^{2D_2}$ sur \mathbf{C}^{n+1} par homogénéité, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^2 &\geq C(1 + |z|^2)^{D_2} - (|z_1|^{2D_2} + \dots + |z_{a+1}|^{2D_2}) \\ &\geq C_1(1 + |z|^2)^{D_2} \text{ sur } U_\rho. \end{aligned}$$

pour ρ assez petit, où $z = (z_{a+1}, \dots, z_n)$. Par suite

$$J = \int_{U_\rho} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq C_1 \int_{U_\rho} (1 + |z|^2)^{-\theta D_2} d\lambda(z) < +\infty,$$

en effet

$$\theta D_2 > t_2 \cdot \frac{t_1 + n - 1}{t_2} = t_1 + n - 1 > n - a - 1.$$

D'après la proposition 2, il existe une fonction F_x holomorphe dans \mathbf{C}^n et telle que :

$$F_x|_{Y_x \cap \mathbf{C}^n} = 1 \text{ et } \int_{\mathbf{C}^n} \frac{|F_x(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1 + |z|^2)^{a+1+\varepsilon}} d\lambda(z) < +\infty.$$

Par les mêmes arguments que ceux de la démonstration du théorème 2, on peut affirmer que F_x est un polynôme,

$$\deg F_x \leq \alpha \omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1),$$

et que F_x s'annule à un ordre $\geq t_1$ sur S .

Soit \tilde{F}_x le polynôme homogène associé à F_x . Alors $\tilde{F}_x(1, x) = F_x(x) = 1$. Si D_1 désigne la partie entière de $\alpha \omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1)$, alors $\deg \tilde{F}_x \leq D_1$, donc il existe un polynôme $\tilde{G}_x \in E_S(D_1, t_1)$ multiple de \tilde{F}_x tel que $\tilde{G}_x(1, x) \neq 0$, par suite $x \notin V_S(D_1, t_1)$. Comme ce résultat est vrai pour tout point $x \notin V_S(D_2, t_2)$ on en déduit que :

$$V_S(D_1; t_1) \subset V_S(D_2, t_2),$$

d'où $\dim_{\mathbb{C}} V_S(D_1, t_1) \leq a$. Par conséquent, on a :

$$\omega_{t_1}^a(S) \leq D_1 \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2} \omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\omega_{t_1}^a(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}^a(S)}{t_2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.*, 10 (1970), 267-287 et 11, 163-166.
- [2] G.-V. CHUDNOVSKY, Singular points on complex hypersurfaces and multi-dimensional Schwarz lemma, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 19, 1978.
- [3] J.-P. DEMAILLY, Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 110 (1982), 75-102.
- [4] J.-P. DEMAILLY, Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e série, 15 (1982), 457-511.
- [5] H. ESNAULT, E. VIEHWEG, Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points, *Math. Ann.*, 263 (1983), 75-86.
- [6] H. SKODA, Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ et applications arithmétiques, *Séminaire P. Lelong-H. Skoda (Analyse) 1975/76, Lecture Notes in Math.*, Springer, 578 (1977), 314-323.
- [7] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque*, S.M.F., 69-70 (1979).

Manuscrit reçu le 30 octobre 1989.

Abdelhak AZHARI,
Rue 141, n°55
Aïn Chok
Casablanca 02 (Maroc).