ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

XAVIER SAINT RAYMOND

# Unicité de Cauchy à partir de surfaces faiblement pseudo-convexes

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, nº 1 (1989), p. 123-147

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_1_123_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**39**, 1 (1989), 123-147

# UNICITÉ DE CAUCHY À PARTIR DE SURFACES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES

par Xavier SAINT RAYMOND

---

La question de l'unicité de Cauchy a fait l'objet d'un grand nombre de publications depuis une trentaine d'années; nous renvoyons le lecteur à Alinhac [2] et à Zuily [14] pour une vue d'ensemble sur les résultats et les méthodes développées pour les obtenir. Le résultat fondamental de la théorie demeure le théorème de Hörmander [4, th. 28.3.4] qui établit l'unicité en supposant que l'opérateur est principalement normal et que la surface initiale est fortement pseudo-convexe; la nécessité de ces hypothèses a été étudiée notamment par Alinhac [1], Robbiano [8] et [9], Saint Raymond [10].

Par la suite, il a été observé que dans bien des cas, la propriété d'unicité subsiste si l'on affaiblit l'hypothèse de pseudo-convexité; de tels résultats ont été obtenus par Lerner [5] pour les opérateurs elliptiques et par Lerner & Robbiano [7] et Saint Raymond [12] pour les opérateurs de type principal réel du deuxième ordre. Dans ces deux derniers travaux, les auteurs s'appuyaient essentiellement sur la propriété suivante des opérateurs étudiés : la pseudo-convexité ne dépend alors que des zéros *réels* doubles du symbole principal $p$ de l'opérateur (*i.e.* des solutions de $p = \{p, \varphi\} = 0$ , $\varphi = 0$ étant une équation de la surface initiale $S$) qui forment une sous-variété régulière de $T^*\mathbf{R}^n\backslash 0$ à condition de supposer que $S$ est non-caractéristique.

---

*Mots-clés :* Equations aux dérivées partielles – Problème de Cauchy – Unicité – Opérateurs principalement normaux – Pseudo-convexité.
*Classification A.M.S. :* 35 A 07.

Dans ce papier, nous donnons de nouveaux résultats d'unicité sous des hypothèses de faible pseudo-convexité, mais cette fois pour une large classe d'opérateurs principalement normaux. Nous définissons cette classe de telle manière que les zéros complexes doubles du symbole principal $p$ de l'opérateur forment une variété régulière, du moins près des points où le terme de pseudo-convexité s'annule, ce qui fournit un analogue assez naturel de la classe des opérateurs de type principal réel du deuxième ordre, sans toutefois contenir cette dernière. Pour de tels opérateurs, nous établissons deux résultats : le premier, inspiré de Lerner & Robbiano [7] et obtenu par inégalité de Carleman, prouve une propriété d'unicité compacte sous une hypothèse de faible pseudo-convexité portant sur toute une famille d'hypersurfaces; le second, qui reprend la méthode de déformation de surface introduite dans Saint Raymond [12], montre l'unicité en un point situé sur le bord d'un domaine où la surface initiale est fortement pseudo-convexe.

## 1. Notations et énoncé des résultats.

### *1.1. Enoncé du problème et théorème de Hörmander .*

Soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ , $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ ,

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m$ où les fonctions $a_\alpha$ sont $C^\infty$ et à valeurs complexes au voisinage de $x_0$ . Nous noterons $p$ le symbole principal de cet opérateur qui est la fonction (polynomiale et homogène en $\xi$) définie sur $T^*\mathbf{R}^n \backslash 0$ par la formule

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \ .$$

Pour deux telles fonctions $C^\infty$ à valeurs complexes $q$ et $r$ polynomiales en $\xi$ , nous noterons $\{q, r\} = \langle q_\xi, r_x \rangle - \langle q_x, r_\xi \rangle$ leur crochet de Poisson qui est encore polynomial en $\xi$ .

Nous nous donnons ensuite une fonction $C^\infty$ à valeurs réelles $\varphi$ définie au voisinage de $x_0$ telle que $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi_x(x_0) \neq 0$ . Avec tous ces ingrédients, nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy avec données sur l'hypersurface orientée $S = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\}$ , ce qui se ramène classiquement par linéarité à la question : est-ce que pour toute solution locale de $P(x,D)u(x) = 0$ , la condition "$u(x) = 0$ si $\varphi(x) < 0$ (près de $x_0$)" entraîne que $u$ s'annule dans tout un voisinage de $x_0$ ?

Pour traiter ce problème, Hörmander a introduit la définition suivante.

DÉFINITION (Hörmander [4, def. 28.2.4]). — *L'opérateur $P$ est dit principalement normal (près de $x_0$) si pour tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^n\backslash 0$ , il existe une constante $C$ telle que $|\{\bar{p},p\}| \leq C|p|$ sur $T^*\mathbf{R}^n$ près de $(x_0,\xi_0)$ .*

*Exemples.* — Les opérateurs elliptiques (et en particulier les fonctions de $x$ non nulles en $x_0$ , considérées comme opérateurs elliptiques d'ordre zéro), les opérateurs à partie principale réelle ou les opérateurs à coefficients constants sont tous des opérateurs principalement normaux; on peut encore fabriquer d'autres opérateurs principalement normaux à partir de ceux qui précèdent en utilisant la remarque (c) ci-dessous.

Tous les opérateurs que nous considérerons à partir de maintenant seront supposés principalement normaux; cette propriété nous permettra de définir de façon raisonnable la fonction $\mathcal{F}_\varphi$ utilisée pour formuler l'hypothèse de pseudo-convexité. De même, la lettre $\zeta$ désignera désormais des vecteurs de la forme $\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x)$ avec $\xi \in \mathbf{R}^n$ et $\tau \in \mathbf{R}$; on remarquera que, la fonction $\varphi$ étant fixée, il y a correspondance biunivoque entre les $(x,\zeta)$ et les $(x,\xi,\tau)$ . Pour les $(x,\zeta)$ solutions de l'équation $p = \{p,\varphi\} = 0$ , nous définissons la fonction $\mathcal{F}_\varphi$ à valeurs réelles par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) &= \{\overline{p_{\tau\varphi}},p_{\tau\varphi}\}(x,\xi)/2i\tau \quad && \text{si } \tau \neq 0 \ , \\ \mathcal{F}_\varphi(x,\xi) &= -\{\overline{p},\{p,\varphi\}\}(x,\xi) && \text{si } \tau = 0 \ , \end{aligned}$$

où l'on a posé $p_{\tau\varphi}(x,\xi) = p(x,\xi - i\tau\varphi_x(x))$; il résulte de Hörmander [4, lem. 28.2.5] que cette fonction $\mathcal{F}_\varphi$ est continue. Le résultat de Hörmander s'énonce alors de la façon suivante.

THÉORÈME 1.1(Hörmander [4, th. 28.3.4]). — *Supposons que $P$ est un opérateur principalement normal et que*

(i) $\forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x_0) \neq 0 \ , \ p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) > 0.$

*Alors pour toute fonction $u \in H^{m-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes solution locale de l'équation $P(x,D)u(x) = 0$ , la condition "$u(x) = 0$ si $\varphi(x) < 0$ (près de $x_0$)" entraîne que $u$ s'annule dans tout un voisinage de $x_0$ .*

*Remarques.* — (a) Les hypothèses du théorème sont clairement invariantes par changement de variables. De plus, l'hypothèse (i) (qui est la forte pseudo-convexité de $S = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\}$ en $x_0$) ne dépend que de la surface orientée $S$ et non de la fonction $\varphi$ utilisée pour la définir; en effet, si $\psi(x) = \lambda(x)\varphi(x)$ près de $x_0$ avec $\lambda(x_0) > 0$ , alors

$$p(x_0,\zeta) = \{p,\psi\}(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = 0$$

et

$$\mathcal{F}_\psi(x_0,\zeta) = \lambda(x_0)\mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) \ .$$

(b) Alinhac [1, th. 1] puis Robbiano [8] ont montré, en construisant des solutions de $(P + a)u = 0$ nulles d'un seul côté de $S$ , que l'hypothèse de normalité est pratiquement nécessaire pour avoir une propriété d'unicité stable. En revanche, la nécessité de l'hypothèse (i) de pseudo-convexité n'est pas encore parfaitement connue; dans [11], nous avons montré qu'on pouvait obtenir l'unicité stable, dans le cas du premier ordre, même lorsque $\mathcal{F}_\varphi < 0$ en certains points où $p = \{p,\varphi\} = 0$; de tels phénomènes se rencontrent aussi dans Bahouri [3] et Saint Raymond [13]; cependant, le résultat de Robbiano [9] montre qu'avec des hypothèses raisonnables de transversalité, la condition

(i)' $\quad \forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x_0)\ , \ p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) \geq 0$

est nécessaire à l'unicité, du moins lorsque la partie principale est à coefficients analytiques (cf. aussi Saint Raymond [10, th. 1] et Alinhac [1, th. 2 et 3]).

(c) Comme dans Lerner [6], nous pouvons établir une propriété de passage au produit : supposons que pour $\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x_0)$

$$p_1(x_0,\zeta) = p_2(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \zeta = 0 \tag{1}$$

(dans [6], $P_1$ et $P_2$ sont alors dits "en position (relative) générale"); alors, si $P_1$ et $P_2$ sont principalement normaux, il en est de même pour tout opérateur de symbole principal $p_3 = p_1p_2$; de plus, si nous notons $\mathcal{F}_{j,\varphi}$ la fonction $\mathcal{F}_\varphi$ associée à $p_j$ , nous avons

$$p_3 = \{p_3,\varphi\} = 0 \Longrightarrow p_j = \{p_j,\varphi\} = 0 \ \ (\Longrightarrow p_{3-j} \neq 0)$$

et

$$\mathcal{F}_{3,\varphi} = |p_{3-j}|^2\mathcal{F}_{j,\varphi}$$

pour $j = 1$ ou 2, si bien que la propriété (i) pour $p_1$ et pour $p_2$ entraîne cette même propriété pour $p_3$ .

*1.2. Nouveaux résultats.*

Nous cherchons maintenant à traiter les cas où $\mathcal{F}_\varphi$ s'annule. Pour y voir clair, nous ferons les hypothèses de transversalité suivantes :

DÉFINITION. — *L'opérateur principalement normal $P$ sera dit de type biprincipal (relativement à $S$, en $x_0$) si $\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_0,\zeta_0) \neq 0$ et les parties réelle et imaginaire de $p_\xi(x_0,\zeta_0)$ sont linéairement indépendantes pour toute solution $\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x(x_0) \neq 0$ de l'équation*

$$p(x_0,\zeta_0) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0) = \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) = 0 \,. \tag{2}$$

Si $P$ est un opérateur principalement normal de type biprincipal, on peut écrire $\{\bar{p},p\} = 2i\mathcal{R}e(\bar{q}p)$ sur $T^*\mathbf{R}^n$ près de toute solution réelle de l'équation (2), formule où $q$ désigne une fonction $C^\infty$ à valeurs complexes définie sur $T^*\mathbf{R}^n$; on notera que cette fonction $q$, qui apparaîtra dans l'expression de la fonction $\mathcal{G}_\varphi$ ci-dessous, est définie sans ambiguïté sur $\{(x,\xi)\in T^*\mathbf{R}^n \,;\, p(x,\xi)=0\}$ au voisinage des solutions réelles de l'équation (2).

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1.1, nous définissons pour les opérateurs principalement normaux de type biprincipal une fonction à valeurs complexes $\mathcal{G}_\varphi$ par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varphi(x,\zeta) &= [\{\overline{p_{\tau\varphi}},\{p_{\tau\varphi},\varphi\}\}(x,\xi) + \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta)]/i\tau && \text{si } \tau \neq 0\,, \\ \mathcal{G}_\varphi(x,\xi) &= i\bar{q}(x,\xi)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi) - \{\bar{p},\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x,\xi) && \text{si } \tau = 0\,. \end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que le type biprincipal entraîne que $\mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{G}_\varphi$ sont $C^\infty$ sur la variété $p = \{p,\varphi\} = 0$ près des solutions de l'équation (2).

Un premier résultat, semblable à celui obtenu par Lerner & Robbiano [7] pour les opérateurs du deuxième ordre de type principal réel, établit une propriété d'unicité compacte sous des hypothèses très faibles, mais portant sur toute la famille d'hypersurfaces définie par $\varphi$.

THÉORÈME 1.2. — *Supposons que $P$ est un opérateur principalement normal de type biprincipal, et que*

(i)' $\forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x_0),\ p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) \geq 0$;

(ii) $\forall\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x(x_0) \neq 0$ *solution de l'équation* (2), *il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle qu'au voisinage de $(x_0,\zeta_0)$,*

$$p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \geq \varepsilon|\mathcal{G}_\varphi(x,\zeta)|^2 \,.$$

*Alors, pour toute fonction $u \in H^{m-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes solution locale de l'équation $P(x,D)u(x) = 0$, la condition "supp $u \subset \{x \in \mathbf{R}^n; \varphi(x) > 0\} \cup \{x_0\}$" entraîne que $u$ s'annule dans tout un voisinage de $x_0$.*

*Remarques.* — (d) Les hypothèses du théorème sont clairement invariantes par changement de variables. L'hypothèse (ii) cependant ne dépend pas que de la surface $S$ , mais de toute la famille d'hypersurfaces définie par $\varphi$ , ce qui signifie qu'elle est invariante si on remplace la fonction $\varphi$ par une fonction $\psi$ vérifiant $\psi_x(x) = \lambda(x)\varphi_x(x)$ près de $x_0$ , $\lambda(x_0) > 0$; en effet, on calcule qu'alors

$$p(x,\zeta)=\{p,\psi\}(x,\zeta)=0 \Longrightarrow \begin{array}{l}\{p,\varphi\}(x,\zeta)= 0, \mathcal{F}_\psi(x,\zeta)=\lambda(x)\mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \\ \text{et } \mathcal{G}_\psi(x,\zeta)=(\lambda(x))^2\mathcal{G}_\varphi(x,\zeta).\end{array}$$

Pour avoir des hypothèses seulement sur la surface $S$ , on pourrait imaginer procéder comme Hörmander [4, chap. 28.4]; cependant, bien que l'analogue du lemme 28.4.2 de [4] soit encore vrai dans le présent contexte, nous n'avons pas su établir les inégalités de Carleman en séparant la variable $x_n = \varphi(x)$ des autres variables.

(e) La nécessité de l'hypothèse (i)' a été discutée ci-dessus dans la remarque (b). De plus, Alinhac [1, th. 3] a montré qu'on ne pouvait espérer une propriété d'unicité stable sous la seule hypothèse (i)' (ni même une propriété d'unicité compacte puisque (i)' est stable par perturbation de $\varphi$ à l'ordre 4 ainsi que l'hypothèse de type biprincipal); bien que nous ne soyons pas parvenus à établir en général de lien direct entre notre fonction $\mathcal{G}_\varphi$ et le terme $H_p^2\varphi$ intervenant dans l'hypothèse (iii) de [1, th. 3], il apparaît que, dans le cas de l'exemple fourni par Alinhac pour illustrer son théorème, la non-unicité pour $P + a$ est prouvée à partir d'un point (non réel) où $p = \{p, \varphi\} = \mathcal{F}_\varphi = 0 \neq \mathcal{G}_\varphi$ ce qui empêche notre hypothèse (ii) d'être vérifiée. Enfin, signalons que sous les hypothèses du théorème 1.2 on ne peut obtenir mieux que de l'unicité compacte comme le montre l'ultime exemple du paragraphe suivant.

(f) Bien entendu, le théorème 1.2 ci-dessus permet aussi d'obtenir un résultat de véritable unicité de Cauchy qui s'énonce de la façon suivante : “supposons qu'il existe une fonction $C^\infty$ à valeurs réelles $\psi$ telle que $\psi(x_0) = 0$ , $\psi(x) > 0$ sur $S$ pour $x$ voisin de $x_0$ $(x \neq x_0)$ , $\psi_x(x_0) \neq 0$ , et telle que les hypothèses du théorème 1.2 soient vérifiées avec $\psi$ au lieu de $\varphi$; alors, même conclusion qu'au théorème 1.1”.

(g) En reprenant les notations et l'hypothèse (1) de la remarque (c) ci-dessus, on peut montrer que si chacun des symboles $p_1$ et $p_2$ vérifie les hypothèses du théorème 1.2 avec la même fonction $\varphi$ , il en est de même du symbole $p_3 = p_1p_2$; en effet, le type biprincipal passe au produit sous l'hypothèse (1), et

$$p_3 = \{p_3, \varphi\} = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} p_j = \{p_j, \varphi\} = 0 (\Rightarrow p_{3-j} \neq 0) \ , \ \mathcal{F}_{3,\varphi} = |p_{3-j}|^2 \mathcal{F}_{j,\varphi} \\ \text{et } \mathcal{G}_{3,\varphi} = |p_{3-j}|^2 \mathcal{G}_{j,\varphi} + 2\overline{p_{3-j}}\{p_{3-j}, \varphi\}\mathcal{F}_{j,\varphi} \end{array}$$

pour $j = 1$ ou 2, ce qui prouve que les hypothèses (i)' et (ii) passent au produit.

*Comparaison avec de précédents résultats.*

(h) Le théorème 1.2 contient le théorème 1.1 ci-dessus. En effet, si l'hypothèse (i) est vérifiée, alors elle l'est encore avec $\psi(x) = \varphi(x) + |x - x_0|^4$ au lieu de $\varphi(x)$ , et l'équation (2) ne possède pas de solution $\zeta_0 \neq 0$; l'opérateur est donc automatiquement de type biprincipal, et l'hypothèse (ii) immédiatement vérifiée; le théorème 1.2 implique donc l'unicité compacte à travers la surface d'équation $\psi(x) = 0$ , puis l'unicité de Cauchy à travers la surface d'équation $\varphi(x) = 0$ . Bien entendu, le théorème 1.2 s'applique aussi à des situations où l'équation (2) possède effectivement des solutions $\zeta_0 \neq 0$; on en trouvera des exemples au paragraphe 1.3 ci-dessous. Lorsque l'équation (2) possède une solution $\zeta_0 \neq 0$ , on remarquera que le type biprincipal implique que $n \geq 3$ et $m \geq 2$ .

(j) Il est difficile de comparer nos hypothèses avec celles introduites dans Lerner [5] pour les opérateurs elliptiques car la conclusion visée n'est pas la même (unicité de Cauchy chez Lerner et unicité compacte ici). Toutefois, si l'opérateur elliptique considéré est de type biprincipal, on peut montrer que les trois premières conditions de l'hypothèse $H(1,2)$ de [5] entraînent les hypothèses (i)' et (ii) ci-dessus pour toute fonction $\varphi$ définissant $S$ (la dernière condition composant l'hypothèse $H(1,2)$ de [5] est destinée à convexifier le support de la solution pour obtenir de l'unicité *de Cauchy*; elle entraîne que $p_\xi = 0$ là où $p = \{p, \varphi\} = \mathcal{F}_\varphi = 0$ ce qui est incompatible avec le type biprincipal, sauf si $S$ est fortement pseudo-convexe). Les autres hypothèses $H(k,\ell)$ de [5] correspondent à des situations où $\{\{p, \varphi\}, \varphi\} = 0$ en des points où $p = \{p, \varphi\} = \mathcal{F}_\varphi = 0$ ce qui est encore incompatible avec le type biprincipal.

(k) Lorsque $\varphi(x) = x_n$ et que $p(x, \xi) = \xi_n^2 + r(x, \xi')$ où $r$ est une forme quadratique de type principal réel en $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ , on peut choisir $q = 0$ dans la formule $\{\bar{p}, p\} = 2i\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\bar{q}p)$ , et alors $p = \{p, \varphi\} = 0$ entraîne $r = 0$ , $\mathcal{F}_\varphi = -\{p, \{p, \varphi\}\}$ et $\mathcal{G}_\varphi = 0$ si bien que les hypothèses (i)' et (ii) deviendraient

$$p = \{p, \varphi\} = 0 \Longrightarrow \{p, \{p, \varphi\}\} \leq 0$$

ce qui était la condition d'unicité compacte de Lerner & Robbiano [7] (en réalité, comme dans ce cas $P$ ne peut pas être de type biprincipal, la fonction $q$ puis la fonction $\mathcal{G}_\varphi$ sont ici mal définies).

Nous arrivons maintenant à notre dernier résultat, semblable à celui que nous avons obtenu dans [12] pour les opérateurs du deuxième ordre de type principal réel, et qui donne l'unicité dans la situation instable où $x_0$ est situé sur le bord d'un domaine de forte pseudo-convexité pour $S$ .

THÉORÈME 1.3. — *Supposons que $P$ est un opérateur principalement normal de type biprincipal, et qu'il existe au voisinage de $x_0$ une fonction $C^\infty$ à valeurs réelles $\psi$ telle que*

(i)' $\forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x_0)\ ,\ p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) \geq 0;$

(ii)' $\forall\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x(x_0) \neq 0$ *solution de l'équation (2),* $\{p,\psi\}(x_0,\zeta_0) \neq 0$ *et il existe deux constantes $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ telles qu'au voisinage de $(x_0,\zeta_0)$*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x) = p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0\\ \psi(x) \geq \psi(x_0)\end{array}\right. \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \geq \varepsilon[\psi(x) - \psi(x_0)]^k\ .$$

*Alors, même conclusion qu'au théorème 1.1.*

*Remarques.* — (l) Comme dans les énoncés précédents, faisons remarquer que les hypothèses sont invariantes par changement de variables; elles ne dépendent en outre que de la surface $S$ et non de la fonction $\varphi$ . Nécessité de nos hypothèses : voir remarque (b) ci-dessus pour la nécessité de (i)'; quant à (ii)', elle est à nouveau justifiée par le résultat d'Alinhac [1, th. 3], mais ici, c'est son hypothèse (iv) qui implique que $S$ ne peut être fortement pseudo-convexe en aucun point proche de $x_0$ , ce qui empêche notre hypothèse (ii)' d'être vérifiée. Enfin, le lecteur montrera facilement que si les hypothèses du théorème 1.3 sont vérifiées pour deux symboles $p_1$ et $p_2$ avec les mêmes fonctions $\varphi$ et $\psi$ , elles le sont encore pour le symbole $p_3 = p_1p_2$ en supposant (1) comme dans la remarque (c) ci-dessus.

(m) Nous pouvons commenter les hypothèses de ce théorème comme dans [12, th. 2.1] : elles signifient que la surface $S$ est fortement pseudo-convexe en chacun de ses points situé dans le domaine défini par l'inégalité $\psi(x) > \psi(x_0)$ au bord duquel se trouve $x_0$ , avec le contrôle de $\mathcal{F}_\varphi$ par une puissance de la distance au bord; de plus, la condition $\{p,\psi\} \neq 0$ signifie que le champ hamiltonien de $p$ est transverse au bord du domaine précédent en tout point où $p = \{p,\varphi\} = \mathcal{F}_\varphi = 0$ . Enfin, rappelons que les hypothèses du théorème 1.3 n'empêchent pas que l'on puisse trouver, dans certains cas, des points de $S$ arbitrairement proches de $x_0$ et qui ne possèdent pas la propriété d'unicité; cette instabilité du résultat fourni par le théorème 1.3 sera mise en évidence sur des exemples dans le paragraphe suivant.

*1.3. Exemples.*

Pour tous les exemples présentés ici, $x_0 = (0,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$ et $\varphi(x) = x_4$; on remarquera que la surface orientée $S$ définie par $\varphi$ n'est fortement pseudo-convexe en $x_0$ pour aucun des opérateurs ci-dessous : on ne peut donc obtenir l'unicité comme conséquence du théorème 1.1. Nous posons pour $k \geq 1$

$$p_\infty(x,\xi) = \xi_4^2 - \xi_3^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3 + 2i\xi_1\xi_2 \ ,$$
$$p_k(x,\xi) = p_\infty(x,\xi) + x_3^k x_4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

et laissons au lecteur le soin de montrer que ces symboles définissent des opérateurs principalement normaux de type biprincipal pour lesquels l'hypothèse (i)' est toujours vérifiée.

Pour le symbole $p = p_\infty$ , on peut calculer que

$$\forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x) \ , \ p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) = \mathcal{G}_\varphi(x,\zeta) = 0$$

si bien que l'hypothèse (ii) est également vérifiée (il en est d'ailleurs de même pour le symbole $p = p_k$ si $k \in 2\mathbf{N}$), et qu'on peut appliquer le théorème 1.2. Si l'on s'intéresse à la véritable unicité de Cauchy, on peut encore noter que le résultat précédent permet de déduire l'unicité pour tout opérateur de symbole principal $p_\infty$ à travers la surface orientée définie par la fonction $\psi(x) = x_4 - \exp(-1/|x|^2)$ (qui n'est toujours pas fortement pseudo-convexe en $x_0$ , et à laquelle on ne peut pas non plus appliquer le théorème 1.3), conformément à la remarque (f) ci-dessus. Ce résultat serait cependant faux pour la surface $S$ elle-même comme nous le verrons ci-dessous.

Pour le symbole $p = p_k$ , on obtient

$$\forall\zeta = \xi - i\tau\varphi_x(x) \ ,$$
$$\varphi(x) = p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) = 2x_3^k(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$
$$\text{et } \{p,x_3\}(x,\zeta) = 2\xi_1 - 2\xi_3 \ ;$$

or ces conditions entraînent aussi que $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 > 0$ et que $\xi_3 \neq \xi_1$; l'hypothèse (ii)' est donc vérifiée avec la fonction $\psi(x) = x_3$ , et le théorème 1.3 peut alors s'appliquer à cet exemple.

Signalons enfin qu'en tout point $x'_0$ de la surface $S$ vérifiant $\psi(x'_0) < 0$, les méthodes développées dans [10] permettent de montrer qu'il n'y a unicité stable pour aucun opérateur de symbole principal $p_1$ (et plus généralement de symbole principal $p_k$ , $k \notin 2\mathbb{N}$); en effet, ces symboles admettent des phases $\Psi(x) = x_2 + x_3 + \Psi_0(x_3, x_4)$ avec $\Psi_{0_x}(x'_0) = 0$ , ce qui permet ensuite de construire une fonction $\Phi$ telle que

$$\begin{cases} \langle p_\xi(x, \Psi_x(x)), \Phi_x(x)\rangle = 0 \\ \text{et } x'_0 \in \{x \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \Phi(x) \geq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \varphi(x) \geq 0\} \ , \end{cases}$$

puis de démontrer un théorème de non-unicité; cela illustre bien l'instabilité du résultat établi au théorème 1.3. On remarquera aussi que cette méthode permet également de construire une solution à support *égal* à $\{x \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \varphi(x) \geq 0\}$ pour tout opérateur de symbole principal $p_\infty$ convenablement perturbé à l'ordre zéro, ce qui montre qu'on ne peut espérer mieux que l'unicité *compacte* dans la conclusion du théorème 1.2 (dans le cas de $p_\infty$ , on prend $\Psi(x) = x_2 + x_3$ et $\Phi(x) = \varphi(x) = x_4)$ .

## 2. Lemmes techniques.

*Nous supposerons tout au long de ce paragraphe que P est un opérateur principalement normal de type biprincipal; de plus,* comme certains de nos calculs dépendront du choix des coordonnées, *nous supposerons que* celles-ci sont fixées, et de telle façon que $\varphi(x) = x_n$ .

Dans la démonstration du théorème 1.3, il nous faudra considérer les solutions de l'équation $\psi(x) = p(x,\zeta) = \{p,\psi\}(x,\zeta) = 0$ pour des fonctions $\psi$ voisines de $\varphi$; à cet effet, nous posons

$$\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1 = \{(x,\xi,\tau,N) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ ; \ p(x,\xi - i\tau N) = 0\}$$

et

$$\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2 = \{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1 \ ; \ \langle p_\xi(x,\xi - i\tau N), N\rangle = 0\} \ .$$

Ainsi, $\mathcal{F}_\psi(x,\zeta)$ est définie pour $\zeta = \xi - i\tau\psi_x(x)$ avec $(x,\xi,\tau,\psi_x(x)) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$; on étend alors cette fonction $\mathcal{F}_\psi$ à $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1 \ ; \ \tau \neq 0\}$ en posant, avec $\zeta = \xi - i\tau N$ ,

$$F_\psi(x,\xi,\tau,N) = \mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)/\tau\rangle - \psi_{xx}(x)(\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_\xi(x,\zeta)) \ .$$

*Remarque.* — S'il est vrai que la fonction $(x,\xi,\tau) \to F_\psi(x,\xi,\tau,\psi_x(x))$, comme fonction définie sur $T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , est indépendante des coordonnées choisies sur $\mathbb{R}^n$ , il n'en va pas de même pour la fonction $F_\psi$ , même si $N$

est considéré comme un vecteur cotangent, et c'est pourquoi nous avons supposé dès le début du paragraphe que les coordonnées étaient fixées.

Notre premier lemme exprime la régularité des objets que nous venons d'introduire.

LEMME 2.1. — *La fonction $F_\varphi$ s'étend en une fonction continue sur $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$ . De plus, près de tout point $(x_0, \xi_0, \tau_0, \varphi_x) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$ tel que $\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x \neq 0$ et $\mathcal{F}_\varphi(x_0, \zeta_0) = 0$ , $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1$ est une sous-variété ($C^\infty$) de codimension 2 de $\mathbb{R}^{3n+1}$ dont $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$ est à son tour une sous-variété de codimension 2 sur laquelle $x$ et $N$ peuvent être prises comme coordonnées indépendantes, et la fonction $F_\varphi$ s'étend alors en une fonction $C^\infty$ sur $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1$ .*

*Démonstration.* — Tant que $\tau$ ne s'annule pas, il est clair que $F_\varphi$ est $C^\infty$.

Pour étudier la fonction $F_\varphi$ près d'un point où $\tau = 0$ , calculons la dérivée de $\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle$ par rapport à $\tau$ :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle\\ &\qquad= \mathcal{I}\mathrm{m}(\langle\overline{-i\langle p_\xi(x,\zeta), N\rangle_\xi}, p_x(x,\zeta)\rangle - i\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, \langle p_\xi(x,\zeta), N\rangle_x\rangle)\\ &\qquad= -\mathcal{R}\mathrm{e}\, G_N(x,\zeta)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$G_N(x,\zeta) = \langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, \langle p_\xi(x,\zeta), N\rangle_x\rangle - \langle\overline{p_x(x,\zeta)}, \langle p_\xi(x,\zeta), N\rangle_\xi\rangle\ ;$$

on notera au passage que cette fonction $G_N$ vérifie l'identité suivante :

$$G_{\varphi_x}(x, \xi - i\tau\varphi_x) = \{\overline{p_{\tau\varphi}}, \{p_{\tau\varphi}, \varphi\}\}(x,\xi)\ . \tag{3}$$

Près d'un point de $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1$ où $\tau = 0$ , une formule de Taylor nous donne donc, avec $\zeta_\theta = \xi - i\theta\tau N$

$$\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle = \{\bar{p}, p\}(x,\xi)/2i - \tau\int_0^1 \mathcal{R}\mathrm{e}\, G_N(x,\zeta_\theta)d\theta\ ;$$

en utilisant la normalité de $P$ , on obtient

$$\left|\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + \tau\int_0^1 \mathcal{R}\mathrm{e}\, G_N(x,\zeta_\theta)d\theta\right| \leq \frac{C}{2}|p(x,\xi)|\ .$$

Par une nouvelle formule de Taylor, $p(x,\xi) = p(x,\zeta) + i\tau\int_0^1\langle p_\xi(x,\zeta_\theta), N\rangle d\theta$, d'où

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + \tau\int_0^1 \mathcal{R}\mathrm{e}\, G_N(x,\zeta_\theta)d\theta\right|\\ &\qquad\qquad\leq \frac{C}{2}|p(x,\zeta)| + \frac{C}{2}\left|\tau\int_0^1\langle p_\xi(x,\zeta_\theta), N\rangle d\theta\right|\ .\end{aligned} \tag{4}$$

Comme $\varphi_{xx}(x) = 0$ puisque $\varphi(x) = x_n$ , cela prouve (après division par $\tau$) qu'en posant $F_\varphi(x,\xi,0,N) = -\mathcal{R}e\, G_N(x,\xi)$ pour $(x,\xi,0,N) \in \mathcal{C}ar_p^2$ , la fonction $F_\varphi$ ainsi prolongée est continue sur $\mathcal{C}ar_p^2$ .

Pour justifier nos affirmations sur $\mathcal{C}ar_p^1$ et $\mathcal{C}ar_p^2$ près d'un point $(x_0,\xi_0,\tau_0,\varphi_x) \in \mathcal{C}ar_p^2$ tel que $\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x \neq 0$ et $\mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) = 0$ , il suffit de vérifier que les gradients en $(\xi,\tau)$ des parties réelles et imaginaires des fonctions $p(x,\xi - i\tau N)$ et $\langle p_\xi(x,\xi - i\tau N), N\rangle$ sont linéairement indépendants en $(x_0,\xi_0,\tau_0,\varphi_x)$ . Or, si $N = \varphi_x$ et $\zeta = \xi - i\tau N$ ,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi_n}[p(x,\zeta)] = i\dfrac{\partial}{\partial\tau}[p(x,\zeta)] = \{p,\varphi\}(x,\zeta) \ , \text{ et} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_n}\left[\langle p_\xi(x,\zeta),N\rangle\right] = i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left[\langle p_\xi(x,\zeta),N\rangle\right] = \{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\zeta) \ , \end{cases}$$

ce qui donne le résultat puisque $\{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0) = 0$ et que $P$ est de type biprincipal.

Enfin, si de plus $\tau_0 = 0$ , on a une expression $\{\bar p, p\} = 2i\,\mathcal{R}e(\bar q p)$ sur $T^*\mathbf{R}^n$ près de $(x_0,\xi_0)$ grâce à l'hypothèse de type biprincipal; on obtient donc au lieu de (4)

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathcal{I}m\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle &= \mathcal{R}e(\bar q(x,\xi)p(x,\zeta)) \\ &\quad - \tau\int_0^1 \Big[\mathcal{I}m(\bar q(x,\xi)\langle p_\xi(x,\zeta_\theta),N\rangle) + \mathcal{R}e\, G_N(x,\zeta_\theta)\Big]d\theta \end{aligned}$$

ce qui prouve (après division par $\tau$) qu'en posant

$$F_\varphi(x,\xi,0,N) = -\mathcal{I}m(\bar q(x,\xi)\langle p_\xi(x,\xi),N\rangle) - \mathcal{R}e\, G_N(x,\xi)$$

pour $(x,\xi,0,N) \in \mathcal{C}ar_p^1$ , la fonction $F_\varphi$ ainsi prolongée est $C^\infty$ sur $\mathcal{C}ar_p^1$ . La démonstration du lemme 2.1 est ainsi complète.

Pour démontrer le théorème 1.2, nous aurons besoin plus précisément d'étudier les objets suivants :

$$\mathcal{C}ar_p^1(\varphi) = \{(x,\xi,\tau) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \ ; \ p(x,\xi - i\tau\varphi_x) = 0\}$$

et

$$\mathcal{C}ar_p^2(\varphi) = \{(x,\xi,\tau) \in \mathcal{C}ar_p^1(\varphi) \ ; \ \{p,\varphi\}(x,\xi - i\tau\varphi_x) = 0\} \ .$$

Leurs propriétés font l'objet du lemme suivant.

LEMME 2.2. — *Près de tout point $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(\varphi)$ tel que $\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x \neq 0$ et $\mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) = 0$ , $\mathcal{C}ar_p^1(\varphi)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n+1}$ de codimension 2 (et même, les parties réelle et imaginaire de $p_\xi(x_0,\zeta_0)$ sont linéairement indépendantes) dont $\mathcal{C}ar_p^2(\varphi)$ est à son tour une sous-variété de codimension 2 sur laquelle :*

(iii) *Les champs $\partial/\partial\xi_n$ et $\partial/\partial\tau$ sont tangents à $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$;*

(iv) *Les parties réelle et imaginaire de $(\partial\{p,\varphi\}/\partial\xi_n, \partial\{p,\varphi\}/\partial\tau)$ sont linéairement indépendantes;*

(v) $\mathcal{F}_\varphi(x,\xi - i\tau\varphi_x) = F_\varphi(x,\xi,\tau,\varphi_x)$ ;

(vi) $\mathcal{G}_\varphi(x,\xi - i\tau\varphi_x) = (\partial F_\varphi/\partial\xi_n + i\partial F_\varphi/\partial\tau)(x,\xi,\tau,\varphi_x)$ .

*Démonstration.* — Les propriétés de régularité de $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$ et $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2(\varphi)$ ainsi que les points (iii) et (iv) découlent simplement des formules (5) et du type biprincipal.

L'égalité (v) est immédiate lorsque $\tau \neq 0$; lorsque $\tau = 0$ , elle résulte de la formule (3) et du choix $F_\varphi(x,\xi,0,N) = -\mathcal{R}\mathrm{e}\, G_N(x,\xi)$ puisque par normalité, $\{\bar{p},p\}_\xi = i\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\bar{\lambda}p_\xi)$ en tout point $(x,\xi)$ tel que $p(x,\xi) = 0$ (pour une constante $\lambda$ dépendant du point considéré), ce qui entraîne successivement que $\{\{\bar{p},p\},\varphi\} = 0$ aux solutions (réelles) de $p = \{p,\varphi\} = 0$ , puis que $\mathcal{I}\mathrm{m}\{\bar{p},\{p,\varphi\}\} = 0$; on notera qu'on obtient alors d'après le lemme 2.1 que $\mathcal{F}_\varphi$ est continue sur $p = \{p,\varphi\} = 0$ , et y est $C^\infty$ près des solutions de $\mathcal{F}_\varphi = 0$ .

Pour (vi), plaçons-nous d'abord en un point où $\tau \neq 0$; alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\xi_n}(x,\xi,\tau,\varphi_x) &= \mathcal{I}\mathrm{m}\Big(\langle\overline{\{p,\varphi\}_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + \langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, \{p,\varphi\}_x(x,\zeta)\rangle\Big)/\tau \\ &= \mathcal{I}\mathrm{m}\, G_{\varphi_x}(x,\zeta)/\tau ,\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial\tau}(x,\xi,\tau,\varphi_x) = -\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)/\tau^2\rangle - \mathcal{R}\mathrm{e}\, G_{\varphi_x}(x,\zeta)/\tau ,$$

d'où

$$\Big(\frac{\partial F_\varphi}{\partial\xi_n} + i\frac{\partial F_\varphi}{\partial\tau}\Big)(x,\xi,\tau,\varphi_x) = \frac{(\mathcal{F}_\varphi + G_{\varphi_x})(x,\xi - i\tau\varphi_x)}{i\tau} = \mathcal{G}_\varphi(x,\xi - i\tau\varphi_x)$$

d'après (3).

Enfin, si $p(x_1,\xi_1) = \{p,\varphi\}(x_1,\xi_1) = 0$ pour un point $(x_1,\xi_1)$ proche d'une solution de l'équation (2), on peut tracer un chemin tangent au champ $\partial/\partial\xi_n$ en $(x_1,\xi_1)$ et contenu dans $\{(x,\xi,0,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1 \;;\; N = \varphi_x\}$ , et donc le long duquel $F_\varphi = -\mathcal{I}\mathrm{m}(\bar{q}\{p,\varphi\}) - \mathcal{R}\mathrm{e}\{\bar{p},\{p,\varphi\}\}$ d'après (6); il en résulte que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_\varphi}{\partial\xi_n}(x_1,\xi_1,0,\varphi_x) \\ &\quad = -\mathcal{I}\mathrm{m}(\bar{q}(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)) - \mathcal{R}\mathrm{e}\{\{\bar{p},\{p,\varphi\}\},\varphi\}(x_1,\xi_1) \\ &\quad = -\mathcal{I}\mathrm{m}(\bar{q}(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)) - \mathcal{R}\mathrm{e}\{\bar{p},\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1).\end{aligned}$$

De même, on peut tracer un chemin contenu dans $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1 ;\ N = \varphi_x\}$ , passant par $(x_1,\xi_1)$ et sur lequel $|x - x_1| + |\xi - \xi_1| = O(\tau^2)$; de la formule de Taylor

$$p(x,\zeta) = p(x,\xi) - i\tau\{p,\varphi\}(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2}\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi) + O(\tau^3)$$

on déduit que $p(x,\xi) = \tau^2\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi)/2 + O(\tau^3)$ le long de ce chemin; on calcule alors que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\varphi}{\partial\tau}(x_1,\xi_1,0,\varphi_x)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big[\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)/\tau\rangle + \mathcal{R}\mathrm{e}\{\bar p,\{p,\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\Big]\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau^2}\Big[\frac{1}{2i}\{\bar p,p\}(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2}\mathcal{I}\mathrm{m}\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x,\xi)\\
&\qquad\qquad + \frac{\tau^2}{2i}\{\{\bar p,\varphi\},\{p,\varphi\}\}(x,\xi) + O(\tau^3)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}(\bar q(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)) - \frac{1}{2}\mathcal{I}\mathrm{m}\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2i}\{\{\bar p,\varphi\},\{p,\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\\
&= \mathcal{R}\mathrm{e}(\bar q(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)) - \mathcal{I}\mathrm{m}\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.

*Remarque.* — Il résulte de (v) et (vi) (et du lemme 2.1) que les fonctions $\mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{G}_\varphi$ sont $C^\infty$ sur la variété $p = \{p,\varphi\} = 0$ près des points où $\mathcal{F}_\varphi$ s'annule; ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement par le calcul.

Pour énoncer le lemme suivant, qui nous permettra de démontrer le théorème 1.3, nous aurons besoin des

$$\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,c}(\varphi,x_0) = \{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p\ ;\ H(x,\xi,\tau,N) \le c\}$$

où la fonction $H$ est définie par

$$H(x,\xi,\tau,N) = \max\{|x-x_0|, |N-\varphi_x|, |F_\varphi(x,\xi,\tau,N)|, ||\xi - i\tau N| - 1|\}\ .$$

D'après le lemme 2.1, cette fonction $H$ est continue sur $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ , et donc les $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,c}(\varphi,x_0)$ forment, pour $c > 0$ , une base de voisinages de $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,0}(\varphi,x_0)$ dans $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ .

LEMME 2.3. — *Pour toute constante $c_1 > 0$, il existe deux constantes $c_2 > 0$ et $C$ telles que pour tout point $(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,c_2}(\varphi,x_0)$, il existe un point $(y,\eta,\gamma,\varphi_x) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ avec les propriétés suivantes :*

$$\varphi(y) = 0\ ,\ y_{n-1} = x_{n-1}\ ,\ |y - y_0| \le c_1\ ,\ \frac{1}{2} \le |\eta - i\gamma\varphi_x| \le 2$$

*et*

$$|\mathcal{F}_\varphi(y,\eta-i\gamma\varphi_x)-F_\varphi(x,\xi,\tau,N)|\leq C(|\varphi(x)|+|N-\varphi_x|)\ .$$

*Démonstration.* — Par un argument de compacité, il est clair qu'il suffit de montrer qu'au voisinage de tout point $(x_0,\xi_0,\tau_0,N_0)\in\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,0}(\varphi,x_0)$, on peut associer à tout point $(x,\xi,\tau,N)\in\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ un point $(y,\eta,\gamma,\varphi_x)\in\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ avec les propriétés énoncées dans le lemme 2.3.

Soit donc un point $(x_0,\xi_0,\tau_0,N_0)\in\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_{p,0}(\varphi,x_0)$; d'après le lemme 2.1, $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ est, au voisinage de ce point, une variété sur laquelle $x$ et $N$ peuvent être prises comme coordonnées indépendantes et où $F_\varphi$ est $C^\infty$ . Comme $\varphi(x_0)=0$ et $N_0=\varphi_x$ , nous pouvons écrire au voisinage de $(x_0,\xi_0,\tau_0,N_0)$ sur $\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ une formule de Taylor en $x_n$ et $N$ (mais à $x_{n-1}$ fixé) à partir d'un point $(y,\eta,\gamma,\varphi_x)\in\mathcal{C}\mathrm{ar}^2_p$ tel que $y_n=0$ et $y_{n-1}=x_{n-1}$ qui donne

$$\begin{aligned}F_\varphi(x,\xi,\tau,N)&=F_\varphi(y,\eta,\gamma,\varphi_x)+O(|x_n|+|N-\varphi_x|)\\&=\mathcal{F}_\varphi(y,\eta-i\gamma\varphi_x)+O(|\varphi(x)|+|N-\varphi_x|)\ .\end{aligned}$$

Si le voisinage a été choisi assez petit, on a aussi $|y-x_0|\leq c_1$ et $1/2\leq|\eta-i\gamma\varphi_x|\leq 2$ , ce qui achève la démonstration du lemme 2.3.

## 3. Démonstration du théorème 1.2.

### *3.1. Espaces de symboles et normes utilisés.*

Choisissons des coordonnées locales telles que $x_0=0$ et $\varphi(x)=x_n$ de façon à pouvoir utiliser les résultats du paragraphe précédent, et posons $\psi(x)=1-e^{-Ax_n}$ où la constante $A>0$ sera fixée ultérieurement, puis

$$P_\gamma=e^{-\gamma\psi(x)}P(x,D)e^{\gamma\psi(x)}\ ;$$

cet opérateur a pour symbole usuel un polynôme en $(\xi,\gamma)$ de degré $m$ dont la partie homogène de degré $m$ n'est autre que $p_{\gamma\psi}(x,\xi)=p(x,\xi-i\gamma\psi_x(x))$ , et qui appartient clairement à la classe de symboles

$$\Sigma^m=S((|\xi|^2+\gamma^2)^{m/2}\ ,\ |dx|^2+(|\xi|^2+\gamma^2)^{-1}|d\xi|^2)$$

de Hörmander [4, def. 18.4.2] où $\gamma$ joue le rôle d'un paramètre, les semi-normes des symboles étant indépendantes de ce paramètre. En réalité, nos symboles devraient être définis partout et non pas seulement pour $x$ voisin de $x_0$ , mais tant qu'il restent polynomiaux en $(\xi,\gamma)$ , ils correspondent à des opérateurs différentiels donc locaux, et ce problème devient sans importance; il n'en sera plus de même lorsque nous utiliserons l'inégalité de Fefferman-Phong pour laquelle ces symboles devront être définis sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \backslash 0$ . A ces classes de symboles $\Sigma^k$ sont attachées les normes suivantes, qui sont des fonctions de $\gamma$

$$\|u\|_k^2 = \int (|\xi|^2 + \gamma^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \ ;$$

on notera que $\| \ \|_0$ n'est autre que la norme usuelle dans l'espace $L^2(\mathbf{R}^n)$ dont le produit scalaire sera noté $( \ , \ )$ .

Les propriétés essentielles de ce calcul pseudo-différentiel sont résumées dans l'énoncé suivant (pour les démonstrations, nous renvoyons à Hörmander [4, th. 18.5.4, 18.6.3 & 18.6.8] ou Lerner & Robbiano [7, th. 3.1, 3.4 & 3.5] qui utilisent également un calcul à paramètre de ce type), où l'on adopte la notation; $s_{\langle x,\xi\rangle} = \sum_j \partial^2 s / \partial x_j \partial \xi_j$ .

THÉORÈME 3.1. — *Soit $S$ un opérateur de symbole $s \in \Sigma^k$; alors*

(a) Continuité *: il existe une constante $C$ telle que pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,*

$$\|Su\|_0 \leq C \|u\|_k \ ;$$

(b) Calcul symbolique *: l'adjoint $L^2$ de $S$ , $S^*$ , est un opérateur de symbole $\bar{s} - i\bar{s}_{\langle x,\xi\rangle} + r \in \Sigma^k$ avec $r \in \Sigma^{k-2}$; de même si $T$ est un opérateur de symbole $t \in \Sigma^\ell$ , le composé $ST$ est un opérateur de symbole $st - i\langle s_\xi, t_x\rangle + r \in \Sigma^{k+\ell}$ avec $r \in \Sigma^{k+\ell-2}$;*

(c) Inégalité de Fefferman-Phong *: si de plus il existe une constante $C_1$ telle que pour $\gamma \geq 1$ , $\mathcal{R}\mathrm{e}(s + (i/2)s_{\langle x,\xi\rangle}) + C_1(|\xi|^2 + \gamma^2)^{(k-2)/2} \geq 0$ , alors il existe une autre constante $C_2$ telle que pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et tout $\gamma \geq 1$*

$$\mathcal{R}\mathrm{e}(Su, u) + C_2 \|u\|_{(k-2)/2}^2 \geq 0 \ .$$

Nous posons enfin $\Omega_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ |x| < \delta\}$; le théorème 1.2 se déduit alors classiquement (*cf.* Hörmander [4, proof of th. 28.3.4]) de l'inégalité de Carleman suivante.

PROPOSITION 3.2. — *Sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que, avec $\psi = 1 - e^{-A\varphi}$ et $P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi}$ , on ait : $\forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ , $\forall \gamma \geq 1/\delta$ ,*

$$\|u\|_{m-1} \leq \|P_\gamma u\|_0 \ .$$

L'inégalité précédente est obtenue comme dans Lerner & Robbiano [7] comme combinaison de deux inégalités : l'une, qui permet de majorer $\|u\|_{m-1}$ par $\|P_\gamma^* u\|_0 + \|P_\gamma u\|_0$ , utilise essentiellement que $P_\gamma$ est presque de type principal; l'autre, qui permet de majorer $\|P_\gamma^* u\|_0$ par $\|P_\gamma u\|_0$ , utilise les hypothèses de pseudo-convexité. Ces inégalités découlent à leur tour d'estimations symboliques.

*3.2. Estimations sur les symboles.*

Pour pouvoir utiliser l'inégalité de Fefferman-Phong (*cf.* th. 3.1(c) ci-dessus), nous devons disposer d'estimations sur les symboles de nos opérateurs; elles seront fournies par le lemme suivant.

LEMME 3.3. — *Sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe trois constantes $A > 0$, $C_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ telles que, avec $\psi = 1 - e^{-A\varphi}$ et $p_{\gamma\psi}(x,\xi) = p(x, \xi - i\gamma\psi_x(x))$ , on ait : $\forall x \in \Omega_{2\delta_1}$ , $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ , $\forall \gamma \geq 1$ ,*

$$\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}(x,\xi)/i + C_1(|\xi|^2 + \gamma^2)^{(m-1)/2}|p_{\gamma\psi}(x,\xi)| \geq 0 ,$$

*et*

$$\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}(x,\xi)/i + C_1(|\xi|^2 + \gamma^2)^{(m-1)/2}|p_{\gamma\psi}(x,\xi)| + A\gamma \sum_j \left|\frac{\partial p_{\gamma\psi}}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right|^2 \geq \frac{\gamma}{C_1}\left(|\xi|^2 + \gamma^2\right)^{m-1} .$$

*Démonstration.* — Puisque $\psi(x) = 1 - e^{-A\varphi(x)}$ , on a $\zeta = \xi - i\gamma\psi_x(x) = \xi - i\tau\varphi_x$ avec $\tau = A(1-\psi(x))\gamma$ , et

$$\begin{aligned}\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}(x,\xi)/i &= 2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + 2A^2(1-\psi(x))\gamma|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \\ &= 2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 .\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que tout point $(x_0, \xi_0, \tau_0)$ tel que $|\xi_0 - i\tau_0\varphi_x| = 1$ possède un voisinage sur lequel pour $\tau \geq 0$ , $\zeta = \xi - i\tau\varphi_x$ et $A$ et $C$ assez grandes,

(7) $$2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 + C|p(x,\zeta)| \geq 0 ,$$

et

(8) $$2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 + C|p(x,\zeta)| + \frac{\tau}{2}|p_\xi(x,\zeta)|^2 \geq \frac{\tau}{C}.$$

Nous utilisons alors la compacité de $K = \{(x,\xi,\tau)\,;\, x = x_0 \,,\ |\xi - i\tau\varphi_x| = 1$ et $\tau \geq 0\}$ pour déduire de ce qui précède l'existence de deux constantes $A > 0$ et $C > 0$ telles que pour $(x, \xi, A(1-\psi(x))\gamma)$ dans un voisinage de $K$ et pour $\gamma \geq 0$ ,

$$\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}(x,\xi)/i + C|p_{\gamma\psi}(x,\xi)| \geq 0 ,$$

et

$$\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}(x,\xi)/i + C|p_{\gamma\psi}(x,\xi)| + A\gamma \sum_j \left|\frac{\partial p_{\gamma\psi}}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right|^2 \geq \frac{\gamma}{C} \ ;$$

on obtient donc les estimations annoncées avec $C_1 = 2A^{m-1}C$ par homogénéité.

*Démonstration des inégalités* (7) *et* (8). — Elles seront obtenues par des arguments différents suivant la position du point $(x_0, \xi_0, \tau_0)$ . Pour alléger les notations, nous continuons à poser $\zeta = \xi - i\tau\varphi_x$ et $\zeta_0 = \xi_0 - i\tau_0\varphi_x$ .

*(a).* — Si $(x_0, \xi_0, \tau_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(\varphi)$ avec $\mathcal{F}_\varphi(x_0, \zeta_0) = 0$ , on peut écrire grâce au lemme 2.2 une formule de Taylor pour la fonction $F_\varphi$ à partir d'un point $(x_1, \xi_1, \tau_1) \in \mathcal{C}ar_p^2(\varphi)$ qui conduit à l'estimation

$$\begin{aligned} F_\varphi(x,\xi,\tau,\varphi_x) \geq\ & F_\varphi(x_1,\xi_1,\tau_1,\varphi_x) \\ & - C_1 \left| \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \xi_n} + i\frac{\partial F_\varphi}{\partial \tau}\right)(x_1,\xi_1,\tau_1,\varphi_x)\right| |\{p,\varphi\}(x,\zeta)| \\ & - C_2 |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \ , \end{aligned}$$

d'où, avec $\zeta_1 = \xi_1 - i\tau_1\varphi_x$ ,

$$F_\varphi(x,\xi,\tau,\varphi_x) \geq \mathcal{F}_\varphi(x_1,\zeta_1) - \varepsilon|\mathcal{G}_\varphi(x_1,\zeta_1)|^2 - \left(\frac{C_1^2}{4\varepsilon} + C_2\right)|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2$$

valable pour $(x,\xi,\tau) \in \mathcal{C}ar_p^1(\varphi)$ proche de $(x_0,\xi_0,\tau_0)$ . En utilisant l'hypothèse (ii) du théorème 1.2, on en déduit que

$$(9) \qquad F_\varphi(x,\xi,\tau,\varphi_x) + A|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \geq 0 \quad \text{pour} \quad (x,\xi,\tau) \in \mathcal{C}ar_p^1(\varphi)$$

pour $A \geq (C_1^2/4\varepsilon) + C_2$ , ce que nous supposerons pour la suite de l'examen de ce cas (a).

Si $\tau_0 > 0$ , la multiplication de (9) par $2\tau$ puis une formule de Taylor montrent que pour une fonction $r(x,\zeta)$ ,

$$2\,\mathcal{I}m\langle \overline{p_\xi(x,\zeta)}, p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \geq \mathcal{R}e(\overline{r(x,\zeta)}p(x,\zeta))$$

ce qui justifie (7).

Si $\tau_0 = 0$ , posons

$$I(x,\zeta) = -\int_0^1 \Big[\mathcal{I}m(\bar{q}(x,\xi)\{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)) + \mathcal{R}e\, G_{\varphi_x}(x,\zeta_\theta)\Big]\, d\theta \ ;$$

d'après (6), on a $I(x,\zeta) = F_\varphi(x,\xi,\tau,\varphi_x)$ pour $(x,\xi,\tau) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$ et donc, d'après (9) et une formule de Taylor, on a pour une fonction $r(x,\zeta)$ ,

$$I(x,\zeta) + A|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \geq \mathcal{R}\mathrm{e}(\overline{r(x,\zeta)}p(x,\zeta)) ;$$

la formule (6) implique alors que pour $\tau \geq 0$ ,

$$2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)},p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \geq 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}[(\overline{q(x,\xi)+\tau r(x,\zeta)})p(x,\zeta)]$$

ce qui justifie l'inégalité (7) comme dans le cas où $\tau_0 > 0$ .

Enfin, (8) découle de (7) dans ces deux cas puisque d'après le type biprincipal $p_\xi(x_0,\zeta_0) \neq 0$ .

*(b).* — Si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$ avec $\tau_0 = 0$ (à l'exclusion du cas $(a)$), la formule (4) montre que pour $\tau \geq 0$

$$2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)},p_x(x,\zeta)\rangle + C|p(x,\zeta)| \geq 2\tau J(x,\zeta)$$

où $J(x,\zeta) = -\int_0^1 \mathcal{R}\mathrm{e}\, G_{\varphi_x}(x,\zeta_\theta)d\theta - C\left|\int_0^1 \{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)d\theta\right|/2$ est une fonction continue.

Si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2(\varphi)$ , $J(x_0,\zeta_0) = \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) > 0$ (car sinon c'est le cas $(a)$) donc $J(x,\zeta) \geq 1/2C$ au voisinage pour $C$ assez grande, ce qui justifie (7) et (8).

Si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)\backslash\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2(\varphi)$ ,

$$\begin{aligned}2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x,\zeta)},p_x(x,\zeta)\rangle + 2A\tau|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 + C|p(x,\zeta)|\\ \geq 2\tau(J(x,\zeta) + A|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2) ,\end{aligned}$$

et on peut conclure de la même façon si on a choisi la constante $A$ assez grande pour que $J(x_0,\zeta_0) + A|\{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0)|^2 > 0$ (ce qui est possible puisqu'ici $\{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0) \neq 0$).

*(c).* — Si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$ avec $\tau_0 > 0$ (à l'exclusion du cas $(a)$), les expressions (7) et (8) peuvent être rendues strictement positives en $(x_0,\zeta_0)$ , donc au voisinage. En effet,

si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2(\varphi)$ , $\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi(x_0,\zeta_0)},p_x(x_0,\zeta_0)\rangle = \tau_0\mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) > 0$ (car sinon c'est le cas $(a)$);

si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)\backslash\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2(\varphi)$ , il suffit de prendre $A$ suffisamment grande pour que $A\tau|\{p,\varphi\}|^2$ domine $\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi},p_x\rangle$ .

*(d).* — Enfin, si $(x_0,\xi_0,\tau_0) \notin \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^1(\varphi)$ , c'est la constante $C$ qui doit être choisie assez grande pour que $2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\langle\overline{p_\xi},p_x\rangle + C|p| > 0$ , et l'examen de ce dernier cas achève la démonstration du lemme 3.3.

*3.3. Estimations sur les opérateurs.*

En utilisant l'inégalité de Fefferman-Phong (*cf.* th. 3.1(c) ci-dessus), nous déduisons du lemme 3.3 les inégalités suivantes sur les opérateurs $P_\gamma^*$ et $P_\gamma$ .

LEMME 3.4. — *Sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe trois constantes $A > 0$, $C_2 > 0$ et $\delta_2 > 0$ telles que, avec $\psi = 1 - e^{-A\varphi}$ et $P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi}$ , on ait : $\forall\delta \in ]0, \delta_2]$ , $\forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ , $\forall\gamma \geq 1/\delta$ ,*

$$\|P_\gamma^* u\|_0^2 \leq C_2(\|P_\gamma u\|_0^2 + \|u\|_{m-1}^2) ,$$

*et*

$$\|u\|_{m-1}^2 \leq \frac{\delta}{\delta_2}\left(\|P_\gamma^* u\|_0^2 + \|P_\gamma u\|_0^2\right) .$$

*Démonstration.* — Soient $A$, $C_1$ et $\delta_1$ comme dans le lemme 3.3, puis $\chi \in C_0^\infty(\Omega_{2\delta_1})$ une fonction de troncature à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur $\Omega_{\delta_1}$ ; comme l'opérateur $P_\gamma$ est différentiel et donc local, $\chi P_\gamma u = P_\gamma u$ et $(\chi P_\gamma)^* u = P_\gamma^*(\chi u) = P_\gamma^* u$ pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega_{\delta_1})$ , si bien que nous pouvons supposer que le symbole de $P_\gamma$ est défini sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \backslash 0$, et vaut $\chi p_{\gamma\psi} + r_1$ avec $r_1 \in \Sigma^{m-1}$ .

Soit $S = 3P_\gamma^* P_\gamma - P_\gamma P_\gamma^*$ dont le symbole, calculé à l'aide des formules du théorème 3.1(b), vaut

$$\begin{aligned} s = 2\chi^2 |p_{\gamma\psi}|^2 - 2i\chi^2 \langle (\overline{p_{\gamma\psi}})_\xi, (p_{\gamma\psi})_x\rangle - i\chi^2\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\} \\ + \overline{r_2}(\chi p_{\gamma\psi}) + r_3(\overline{\chi p_{\gamma\psi}}) + r_4 \ , \end{aligned}$$

où $r_2 \in \Sigma^{m-1}$ , $r_3 \in \Sigma^{m-1}$ et $r_4 \in \Sigma^{2m-2}$ . Ce symbole vérifie donc

$$s + \frac{i}{2} s_{\langle x,\xi\rangle} = 2|\chi p_{\gamma\psi}|^2 + 2\chi^2 \frac{\{\overline{p_{\gamma\psi}}, p_{\gamma\psi}\}}{i} + \overline{r_2'}(\chi p_{\gamma\psi}) + r_3'(\overline{\chi p_{\gamma\psi}}) + r_4',$$

et en utilisant la première estimation du lemme 3.3, on obtient

$$\mathcal{Re}\left(s + \frac{i}{2} s_{\langle x,\xi\rangle}\right) \geq 2|\chi p_{\gamma\psi}|^2 - 4C(|\xi|^2+\gamma^2)^{(m-1)/2}|\chi p_{\gamma\psi}| - C_0(|\xi|^2+\gamma^2)^{m-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}\left(s + \frac{i}{2} s_{\langle x,\xi\rangle}\right) + (2C^2 + C_0)(|\xi|^2 + \gamma^2)^{m-1} \\ \geq 2\Big(|\chi p_{\gamma\psi}| - C(|\xi|^2 + \gamma^2)^{(m-1)/2}\Big)^2 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer l'inégalité de Fefferman-Phong rappelée au théorème 3.1(c) pour obtenir $\mathcal{Re}(Su, u) + C_2\|u\|_{m-1}^2 \geq 0$ , soit

$$3\|P_\gamma u\|_0^2 - \|P_\gamma^* u\|_0^2 + C_2\|u\|_{m-1}^2 \geq 0 ,$$

ce qui fournit la première estimation du lemme 3.4.

On procède de la même façon pour obtenir la deuxième estimation : avec les opérateurs différentiels $Q_j = [P_\gamma, ix_j]$ de symboles $\chi\partial p_{\gamma\psi}/\partial\xi_j + r_j$ avec $r_j \in \Sigma^{m-2}$ et l'opérateur pseudo-différentiel $\Lambda_{m-1} = (|D|^2 + \gamma^2)^{(m-1)/2}\chi(x)$ de symbole $\chi(|\xi|^2 + \gamma^2)^{(m-1)/2} + r_0$ avec $r_0 \in \Sigma^{m-2}$ (et qui vérifie $\|\Lambda_{m-1}u\|_0 = \|u\|_{m-1}$ pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega_{\delta_1})$), on construit l'opérateur

$$T = 2P_\gamma^* P_\gamma + A\gamma \sum_j Q_j^* Q_j - \frac{\gamma}{C_1}\Lambda_{m-1}^*\Lambda_{m-1} \ ;$$

on montre à l'aide de la deuxième estimation du lemme 3.3 qu'on peut appliquer une inégalité de Fefferman-Phong à cet opérateur $T$ , ce qui donne

$$2\|P_\gamma u\|_0^2 + A\gamma \sum_j \|Q_j u\|_0^2 - \frac{\gamma}{C_1}\|u\|_{m-1}^2 + C_3\|u\|_{m-1}^2 \geq 0 \ ;$$

comme nous le prouverons plus loin, chaque $Q_j$ vérifie l'estimation

$$\|Q_j u\|_0^2 \leq C_4\delta\|u\|_{m-1}(\|P_\gamma^* u\|_0 + \|P_\gamma u\|_0 + \|u\|_{m-1}) \ ; \tag{10}$$

comme de plus $\gamma \geq 1/\delta$ implique $1 \leq \gamma\delta$ , on en déduit que

$$\frac{\gamma}{C_1}\|u\|_{m-1}^2 \leq C_5\gamma\delta(\|P_\gamma^* u\|_0^2 + \|P_\gamma u\|_0^2 + \|u\|_{m-1}^2) \ ,$$

ce qui fournit la deuxième estimation du lemme 3.4 si on choisit $\delta_2 = \min\{\delta_1 \ , \ 1/2C_1C_5\}$ .

*Démonstration de l'inégalité* (10). — Pour $Q_j = [P_\gamma, ix_j]$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|Q_j u\|_0^2 &= (P_\gamma(ix_j u), Q_j u) - (ix_j P_\gamma u, Q_j u) \\
&= (ix_j u, P_\gamma^* Q_j u) - (ix_j P_\gamma u, Q_j u) \\
&= (ix_j u, [P_\gamma^*, Q_j]u) + (ix_j u, Q_j P_\gamma^* u) - (ix_j P_\gamma u, Q_j u) \\
&= \sum_k (ix_j u, Q_{j,k}^* R_{j,k} u) + (Q_j^*(ix_j u), P_\gamma^* u) - (ix_j P_\gamma u, Q_j u) \\
&\leq C_6 \sum_k \|Q_{j,k}(ix_j u)\|_0 \|u\|_{m-1} + \|Q_j^*(ix_j u)\|_0 \|P_\gamma^* u\|_0 \\
&\qquad + C_7\|ix_j P_\gamma u\|_0 \|u\|_{m-1}
\end{aligned}$$

où l'on a décomposé l'opérateur $[P_\gamma^*, Q_j]$ (dont le symbole appartient à $\Sigma^{2m-2}$) en une somme de monômes écrits $Q_{j,k}^* R_{j,k}$ (avec $q_{j,k}$ et $r_{j,k} \in \Sigma^{m-1}$) pour matérialiser les intégrations par parties. Par définition de la norme $L^2$ , on a $\|ix_j P_\gamma u\|_0 \leq \delta\|P_\gamma u\|_0$ pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$; de même, les opérateurs $Q_{j,k}$ et $Q_j^*$ vérifient

$$\|Q(ix_j u)\|_0 \leq \|[Q, ix_j]u\|_0 + \|ix_j Q u\|_0 \leq C_8(\|u\|_{m-2} + \delta\|u\|_{m-1})$$

car l'opérateur $[Q, ix_j]$ a pour symbole $\partial q/\partial\xi_j \in \Sigma^{m-2}$ ; enfin,

$$\|u\|^2_{m-2} = \int (|\xi|^2 + \gamma^2)^{m-2} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le \int \frac{(|\xi|^2 + \gamma^2)^{m-1}}{\gamma^2} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \left(\frac{\|u\|_{m-1}}{\gamma}\right)^2$$

d'où l'estimation (10) pour $\gamma \ge 1/\delta$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.4.

*Démonstration de la proposition* 3.2. — Elle est maintenant immédiate : en injectant la première estimation du lemme 3.4 dans la seconde, on obtient une inégalité de la forme

$$\|u\|^2_{m-1} \le C\delta(\|P_\gamma u\|^2_0 + \|u\|^2_{m-1})$$

qui donne l'inégalité cherchée pourvu que $C\delta \le 1/2$ .

## 4. Démonstration du théorème 1.3.

### *4.1. Utilisation d'une méthode de déformation de surface.*

Comme dans Saint Raymond [12, th. 2.1], nous prouvons le théorème 1.3 par une méthode de déformation de surface dont le principe est décrit dans le lemme suivant.

LEMME 4.1. — *Supposons que $P$ est un opérateur principalement normal défini dans un ouvert $\Omega \ni x_0$ de $\mathbf{R}^n$ , et qu'il existe une fonction $\varphi_0 \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles telle que $\varphi_{0_x} \neq 0$ dans $\Omega$ , et que*

(vii) $K = \{x \in \Omega\ ;\ \varphi(x) \ge 0$ *et* $\varphi_0(x) \le \varphi_0(x_0)\}$ *est compact;*

(viii) $F_{\varphi_0} > 0$ *sur* $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\!ar^2_p; x \in K, N = \varphi_{0_x}(x)$ *et* $\xi - i\tau N \neq 0\}$.

*Alors pour toute fonction $u \in H^{m-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ à valeurs complexes solution dans $\Omega$ de l'équation $P(x,D)u(x) = 0$ , la condition "$u(x) = 0$ si $\varphi(x) < 0$ dans $\Omega$" entraîne que $u$ s'annule dans tout un voisinage de $x_0$ .*

La démonstration de ce lemme, laissée au lecteur, est identique à celle du lemme 3.1 de [12] à condition d'utiliser le théorème de Hörmander [4, th. 28.3.4] cité ci-dessus comme théorème 1.1.

Le schéma de la démonstration du théorème 1.3 est alors le suivant : nous construisons des ouverts $\Omega_\varepsilon$ et des fonctions $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ à valeurs réelles tels que les $\Omega_\varepsilon$ constituent une base de voisinages de $x_0$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro et que pour $\varepsilon$ assez petit,

(vii)' $K_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon; \varphi(x) \geq 0 \text{ et } \varphi_\varepsilon(x) \leq \varphi_\varepsilon(x_0)\}$ est compact;

(viii)' $F_{\varphi_\varepsilon} > 0$ sur $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2; x \in K_\varepsilon, N = \varphi_{\varepsilon_x}(x) \text{ et } \xi - i\tau N \neq 0\}$.

Il suffit alors pour obtenir le théorème d'appliquer le lemme 4.1 dans l'ouvert $\Omega_\varepsilon$ où $u$ vérifie l'équation et la condition de support.

*4.2. Construction des $\Omega_\varepsilon$ et $\varphi_\varepsilon$.*

On peut supposer que l'équation (2) admet une solution $\zeta_0 \neq 0$ car sinon (i)' implique (i) et le résultat découle alors du théorème de Hörmander (th. 1.1 ci-dessus); il résulte donc de l'hypothèse $\{p,\psi\}(x_0,\zeta_0) \neq 0$ que $\varphi_x$ et $\psi_x$ sont linéairement indépendants en $x_0$ , et nous utilisons cette information pour choisir des coordonnées locales telles que $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_0)$ et $x_n = \varphi(x)$ ce qui nous permettra de disposer du résultat du lemme 2.3.

Par un argument de compacité, nous pouvons tirer des hypothèses (i)' et (ii)' la propriété suivante :

$$\forall \zeta = \xi - i\tau\varphi_x \ ,$$

$$\text{(ii)''} \begin{cases} \varphi(x) = p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \\ x_{n-1} \geq 0, |x - x_0| \leq c_1 \text{ et } 1/2 \leq |\zeta| \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \geq c_0 x_{n-1}^k$$

pour des constantes uniformes strictement positives $c_0, c_1$ et $k$. La constante $c_1$ étant ainsi fixée, le lemme 2.3 nous fournit une autre constante $c_2 > 0$ que nous utiliserons dans notre démonstration; quitte à diminuer cette constante $c_2$, l'hypothèse $\{p,\psi\}(x_0,\zeta_0) \neq 0$ pour les solutions de (2) et encore un argument de compacité nous permettent d'écrire

$$\text{(ii)'''} \qquad \delta \leq |\{p,\psi\}(x,\xi - i\tau N)| \leq C_0 \ \text{ sur } \ \mathcal{C}\mathrm{ar}_{p,c_2}^2(\varphi, x_0)$$

pour deux nouvelles constantes uniformes $\delta > 0$ et $C_0 > 0$ .

Indiquons maintenant nos choix de $\varphi_\varepsilon$ et $\Omega_\varepsilon$ : nous posons

$$\varphi_\varepsilon(x) = x_n - \varepsilon^{k+2} f(x_{n-1}/\varepsilon) + \varepsilon^{k+1}|x'|^2 \ ,$$

où

$$f(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2}\frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \quad \text{et} \quad |x'|^2 = \sum_{j=1}^{n-2} x_j^2 \ .$$

Nous avons montré dans [12] qu'il existe alors deux réels $\alpha$ et $\gamma$, $\alpha < 0 < \gamma$, tels qu'avec $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ |x'| < \varepsilon^{1/3}, \alpha < (x_{n-1}/\varepsilon) < \gamma \text{ et } |x_n| < \varepsilon\}$ la propriété (vii)' est vérifiée (et notons au passage que $x_{n-1} \geq 0$ et

$x_n = O(\varepsilon^{k+2})$ dans $K_\varepsilon$). Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier la propriété (viii)', c'est-à-dire, d'après les propriétés d'homogénéité de $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$ et de $F_{\varphi_\varepsilon}$, à montrer que $F_{\varphi_\varepsilon} > 0$ sur $M_\varepsilon = \{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2 \ ; \ x \in K_\varepsilon, N = \varphi_{\varepsilon_x}(x)$ et $|\xi - i\tau N| = 1\}$.

Par définition de $\varphi_\varepsilon$, on a sur $M_\varepsilon$

$$N = \varphi_x + O(\varepsilon^{k+1}) \ ,$$

et

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) = F_\varphi(x,\xi,\tau,N) + \varepsilon^k |\{p,\psi\}(x,\xi - i\tau N)|^2 f''(x_{n-1}/\varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1});$$

comme $F_\varphi$ est continue sur $\mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2$ (*cf.* lemme 2.1) et que d'après l'hypothèse (i)' $F_\varphi \geq 0$ sur $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}\mathrm{ar}_p^2 \ ; \ x = x_0$ et $N = \varphi_x\}$, on a $|x - x_0| \leq c_2$, $|N - \varphi_x| \leq c_2$ et $F_\varphi(x,\xi,\tau,N) \geq -c_2$ sur $M_\varepsilon$ pour $\varepsilon$ assez petit. Sur $M_\varepsilon \setminus \mathcal{C}\mathrm{ar}_{p,c_2}^2(\varphi, x_0)$ on a

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geq c_2 + O(\varepsilon^k)$$

ce qui donne le résultat pour $\varepsilon$ assez petit. Enfin, sur $M_\varepsilon \cap \mathcal{C}\mathrm{ar}_{p,c_2}^2(\varphi, x_0)$, la propriété (ii)''' permet d'écrire

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geq \delta^2\varepsilon^k + F_\varphi(x,\xi,\tau,N) - c_0 x_{n-1}^k + O(\varepsilon^{k+1}) \ ,$$

et le lemme 2.3 fournit un point $(y,\zeta)$ avec $\zeta = \eta - i\gamma\varphi_x$ auquel on peut appliquer la propriété (ii)'' puisque $x_{n-1} \geq 0$ dans $K_\varepsilon$. On obtient ainsi

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geq \delta^2\varepsilon^k - C(|\varphi(x)| + |N - \varphi_x|) + O(\varepsilon^{k+1}) \ ,$$

et comme $\varphi(x) = O(\varepsilon^{k+2})$ dans $K_\varepsilon$, cela donne $F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geq \delta^2\varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1})$ sur $M_\varepsilon \cap \mathcal{C}\mathrm{ar}_{p,c_2}^2(\varphi, x_0)$, d'où le résultat pour $\varepsilon$ assez petit. Cela achève la démonstration de (viii)' et donc du théorème 1.3.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] S. ALINHAC, Non-unicité du problème de Cauchy, Annals of Math., 117 (1983), 77-108.

[2] S. ALINHAC, Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem, Contemporary Mathematics, 27 (1984), 1-22.

[3] H. BAHOURI, Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse de troisième cycle, Orsay, 1982.

[4] L. HÖRMANDER , The analysis of linear partial differential operators III & IV, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[5] N. LERNER, Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques, Ann. Sc. de l'E.N.S. de Paris, 4ème série, 17 (1984), 469-505.

[6] N. LERNER, Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux, J. des Math. Pures et Appl., 64 (1985), 1-11.

[7] N. LERNER & L. ROBBIANO, Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal, J. d'Analyse Math., 44 (1984/85), 32-66.

[8] L. ROBBIANO, Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes, J. of Diff. Equations, 57 (1985), 200-223.

[9] L. ROBBIANO, Sur les conditions de pseudo-convexité et l'unicité de Cauchy, Indiana Univ. Math. J., 36 (1987), 333-347.

[10] X. SAINT RAYMOND, Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux, Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 847-858.

[11] X. SAINT RAYMOND, L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre, l'Ens. Math., 32 (1986), 1-55.

[12] X. SAINT RAYMOND, Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère, Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa ser. IV, 13 (1986), 661-687.

[13] X. SAINT RAYMOND, Unicité de Cauchy pour les opérateurs de type principal réel d'ordre trois, à paraître.

[14] C. ZUILY, Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem, Progress in Math. 33, Birkhäuser, Boston, 1983.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1987,
révisé le 8 février 1988.

Xavier SAINT RAYMOND,
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris Sud
F 91405 Orsay Cedex (France).