ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-YVES ÉTESSE

Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 4 (1988), p. 33-92

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_33_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 4 (1988), 33-92.

RATIONALITÉ ET VALEURS DE FONCTIONS L EN COHOMOLOGIE CRISTALLINE

par Jean-Yves ETESSE

TABLE DES MATIÈRES

Mots-clés : Fonctions L - Formule des traces - Cohomologie cristalline - F-Cristaux - Complexe de De Rham-Witt à coefficients - Cohomologie étale - Groupe fondamental.

INTRODUCTION

Dans l'exposé Bourbaki 409 ([K 1]), Katz a défini la fonction $L(X,E,t)$ attachée à une variété lisse X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $p > 0$, et à un F-cristal E localement libre de type fini sur X.

Katz conjecture (*loc. cit.* 6.1.1) que cette fonction L est méromorphe en la variable p-adique t. Dans le cas où X est propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$ (ce que nous supposerons désormais), nous résolvons par l'affirmative cette conjecture et nous obtenons même plus : $L(X,E,t)$ est une fonction rationnelle de t et on a l'expression (II, 2.2)

$$(*) \quad L(X,E,t) = \prod_{i \leqslant 0 \leqslant 2n} [\det(1-tF|H^i_{\mathrm{cris}}(X/W,E)\otimes_W K)]^{(-1)^{i+1}},$$

où n est la dimension de X sur $\mathbb{F}_q$, W l'anneau des vecteurs de Witt de $\mathbb{F}_q$, K le corps des fractions de W et F le Frobenius. Comme cas particulier on retrouve la rationalité des fonctions L de Grothendieck attachées à un groupe fini. La formule (*) est conséquence d'une formule des traces de Lefschetz en cohomologie cristalline (II, 1.6) : si $\gamma : X \hookrightarrow Z := X \times_{\mathbb{F}_q} X$ est le graphe du Frobenius de X, le point important est de généraliser la classe fondamentale $s_{X/Z}$ de Berthelot ([B 1]) en une classe $s^u_{X/Z}$ attachée au morphisme $u : F^*E \to E$ donné avec le F-cristal E, cette nouvelle classe ayant les mêmes propriétés de transitivité, projection et fonctorialité (I). En plus d'un théorème de Lefschetz faible, nous étudions dans la 3[e] partie les coefficients de cette fonction L: si E est un F-cristal unité, $L(X,E,t)$ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Si E est un F-cristal unité, Katz donne une description conjecturale (*loc. cit.* 6.1.2) des zéros et pôles de L qui sont des unités p-adiques, ceci en termes de cohomologie étale du $\mathbb{Z}_p$-faisceau M associé à E. Nous résolvons aussi, affirmativement, cette conjecture si X est propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$, en donnant une interprétation précise des zéros et pôles de L de la forme $q^r u$, où r est un entier et u une unité p-adique : ce sont les valeurs propres du Frobenius géométrique sur les groupes de cohomologie de faisceaux $\nu(E,r)$ (cf. II, 2.8 pour une formulation précise). Pour $r = 0$, $\nu(E,0)$ est le faisceau étale M associé à E, ce qui résout la conjecture de Katz (*loc. cit.* 6.1.2) (cf. II, 2.9).

Ces faisceaux étales $\nu(E,r)$ pour un F-cristal unité E jouent un grand rôle : ils permettent notamment des évaluations p-adiques de $L(X,E,t)$ quand $t \to q^{-r}$ (cf. l'introduction de la 4^e partie pour une formulation précise). Lorsque la dimension n de X est de la forme $n = 2r$, on obtient en outre un équivalent p-adique, quand $t \to q^{-r}$, du terme médian $\det(1-tF|H^{2r}(X/W,E)\otimes_W K)$ de la fonction $L(X,E,t)$: l'outil essentiel est un théorème de dualité satisfait par les faisceaux $\nu(E,r)$ ([E 2]). Les évaluations p-adiques ainsi obtenues sont les prolongements naturels aux fonctions L des résultats de Milne sur « les valeurs des fonctions zêta pour des variétés sur des corps finis » ([M 4]) : ceci s'inscrit dans la ligne de travaux de Birch et Swinnerton-Dyer ([T]), Lichtenbaum ([L 1] à [L 3]), et d'autres ([B-N], [Sch]). Lorsque E est à monodromie finie entière (cf. III, 3) nous pouvons étendre au cas $l \neq p$ nos résultats précédents pour obtenir des équivalents (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$) de $L(X,E,q^{-s})$ et du terme médian quand $s \to r$ (cf. IV, 6).

Dans cet article l'influence de la thèse de P. Berthelot ([B 1]) apparaîtra clairement au lecteur : elle m'a servi de guide pour démontrer la rationalité de la fonction L. Je tiens à le remercier aussi pour ses conseils et les raccourcis qu'il m'a suggérés.

I. GYSIN ET IMAGE DIRECTE

Pour obtenir la formule des traces de Lefschetz pour les F-cristaux on est amené à construire d'abord, via la dualité de Poincaré, une classe de cohomologie $f_*(u)$ et celle-ci doit vérifier les propriétés habituelles de transitivité, projection et fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux. Cette dernière propriété s'établit directement sur la classe $s^u_{Y/X}$ que l'on construit au § 1 ; on montre ensuite au § 2 que $s^u_{Y/X}$ coïncide avec $f_*(u)$.

Tous les Ext^i cristallins que nous utiliserons dans cet article seront calculés sur le topos cristallin *restreint* (cf. [B 1], p. 418).

On suppose p localement nilpotent sur les schémas considérés.

1. Classe de cohomologie associée à un morphisme de cristaux et Gysin.

1.1. *Classe* $s^u_{Y/X}$.

1.1.0. Soient (S,I,γ) un *PD*-schéma, I_0 un sous *PD*-idéal quasi-cohérent de I, S_0 le sous-schéma fermé de S défini par I_0, X un S_0-schéma lisse, Y un sous-schéma fermé de X, lisse sur S_0 et de codimension d dans X, i l'immersion de Y dans X.

1.1.1. Donnons-nous d'autre part un $\mathcal{O}_{X/S}$-module localement libre F. Dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$-modules sur le site cristallin restreint $R_{\text{cris}}(X/S)$ on dispose, comme F est plat, du morphisme

$$(1.1.1.1)\qquad \begin{array}{ccc} G^F_{Y/X} := G_{Y/X} \otimes \mathrm{Id} : i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F & \to & \mathcal{O}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F[2d] \\ \wr\| & & \wr\| \\ i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F) & & F[2d] \end{array}$$

où $G_{Y/X}$ est le morphisme de Gysin de ([B 1], VI, (3.3.8), p. 483); $G^F_{Y/X}$ est appelé *morphisme de Gysin relatif à l'immersion i et au faisceau F*. Le morphisme $G^F_{Y/X}$ définit une classe $s^F_{Y/X} \in \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F), F)$ appelée *classe de cohomologie de Y dans X relativement au faisceau F*. En appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma(X/S, -)$ à $G^F_{Y/X}$ on obtient un morphisme encore noté $G^F_{Y/X}$, ou i_* :

$$(1.1.1.2)\qquad i_* : \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(F)) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d],$$

et appelé aussi morphisme de Gysin relatif à l'iimmersion i et au faisceau F (ou *image directe*).

1.1.2. Soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$-module localement libre), et $u : E \to i_{\text{cris}}^*(F)$ un morphisme de cristaux. L'image du couple $(i_{\text{cris}*}(u), s^F_{Y/X})$ par l'accouplement canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*}(E), i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F)) \times \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F), F) \to \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*}(E), F)$$

sera notée $s^u_{Y/X}$: cette classe de cohomologie fournit un morphisme dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$-modules

$$(1.1.2.1)\qquad G^u_{Y/X} : i_{\text{cris}*}(E) \to F[2d].$$

1.1.3. Soient maintenant F (resp. E) un $\mathcal{O}_{X/S}$-module (resp. et localement libre de type fini), et $E^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/S}}(E,\mathcal{O}_{X/S})$. Il existe un isomorphisme canonique

$$\text{(1.1.3.1)} \qquad \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}i_{\mathrm{cris}}{}^*(E),F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(\mathcal{O}_{Y/S}),E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$

associant à tout morphisme $v:\ i_{\mathrm{cris}_*}i_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \to F[j]$ de la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$-modules, le composé

$$\begin{tikzcd} i_{\mathrm{cris}_*}(\mathcal{O}_{Y/S}) \arrow[r, "\text{can.}"] & i_{\mathrm{cris}_*}i_{\mathrm{cris}_*}(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{E^\vee}\otimes v"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F[j] \\ & E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} i_{\mathrm{cris}_*}i_{\mathrm{cris}_*}(E). & \end{tikzcd}$$

Si l'on suppose de plus F localement libre et que u est un morphisme $i_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$, l'image de $s^u_{Y/X}$ par le composé de (1.1.3.1) et du morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(\mathcal{O}_{Y/S}),E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$
$$\to \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(\mathcal{O}_{Y/S},E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) \simeq H^{2d}(X/S,E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$

sera encore notée $s^u_{Y/X}$: cette dernière classe n'est autre que l'image par le morphisme image directe

$$i_*: H^0(Y/S,i_{\mathrm{cris}}{}^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)) \to H^{2d}(X/S,E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$

de u considéré comme élément de $H^0(Y/S,i_{\mathrm{cris}}{}^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F))$, i.e.

$$\text{(1.1.3.2)} \qquad s^u_{Y/X} = i_*(u).$$

1.1.4. Sous les hypothèses de 1.1.0, supposons que $Y = Y_1 \cup Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont des sous-schémas fermés de X, lisses sur S et de codimension d dans X, tels que $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ et soit $i_\alpha (\alpha=1,2)$ le morphisme composé

$$Y_\alpha \overset{j_\alpha}{\hookrightarrow} Y \overset{i}{\hookrightarrow} X.$$

Proposition 1.1.5. — *(a) Sous les hypothèses* 1.1.4 *soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$-module localement libre) et u un morphisme $E \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$; notons*

$$u_\alpha = j_{\alpha\,\mathrm{cris}}{}^*(u) : j_{\alpha\,\mathrm{cris}}{}^*(E) \to i_{\alpha\,\mathrm{cris}}{}^*(F), \qquad \alpha = 1.2.$$

Alors

$$s^{u}_{Y/X} = s^{u_1}_{Y_1/X} + s^{u_2}_{Y_2/X}$$

dans $\mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{cris_*}(E),F)$.

(*b*) *Sous les hypothèses* 1.1.4, soient E *un* $\mathcal{O}_{X/S}$-*module localement libre, u un morphisme* $\mathcal{O}_{Y/S} \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(E)$ *et* $u_\alpha = j_{\alpha\,\mathrm{cris}}{}^*(u)$, $\alpha = 1, 2$; *alors*

$$i_*(u) = i_{1*}(u_1) + i_{2*}(u_2)$$

dans $H^{2d}(X/S,E)$.

Cela résulte de la définition de $s^{u}_{Y/X}$ et de la propriété correspondante pour $s_{Y/X} = s^{\mathcal{O}_{X/S}}_{Y/X}$ ([B 1]), VI, 3.3.10). □

1.2. *Formule de transitivité.*

1.2.1. Plaçons-nous dans les hypothèses 1.1.0 ; soient Z un sous-schéma fermé de Y, lisse sur S_0, et de codimension d' dans Y, j l'immersion de Z dans Y, E un $\mathcal{O}_{Z/S}$-module, F (resp. G) un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module (resp. $\mathcal{O}_{X/S}$-module) localement libre, $u: E \to j_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$ (resp. $v: F \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(G)$) des morphismes de cristaux et $w = j_{\mathrm{cris}}{}^*(v)_0 u : E \to (i_0 j)_{\mathrm{cris}}{}^*(G)$.

PROPOSITION 1.2.2. — *Sous les hypothèses* 1.2.1, *on a, avec la notation* (1.1.2.1) :

$$G^{w}_{Z/X} = G^{v}_{Y/X} \circ i_{R\,\mathrm{cris}}{}^*(G^{u}_{Z/Y}).$$

Résulte de la définition (1.1.2.1) et de ([B 1], VI, 4.2.3). □

COROLLAIRE 1.2.3. — *Sous les hypothèses* 1.2.1 *soient*

$$\begin{aligned}
i_* &: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(G)) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S,G)[2d]\\
j_* &: \mathbb{R}\Gamma(Z/S, j_{\mathrm{cris}}{}^* i_{\mathrm{cris}}{}^*(G)) \to \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(G))[2d']\\
(i \circ j)_* &: \mathbb{R}\Gamma(Z/S, j_{\mathrm{cris}}{}^* i_{\mathrm{cris}}{}^*(G)) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S,G)[2d+2d']
\end{aligned}$$

les morphismes de Gysin sur la cohomologie. Alors on a :

$$(i \circ j)_* = i_* \circ j_*.$$

1.3. *Fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux.*

1.3.1. Supposons 1.1.0 vérifié et soit $j: T \hookrightarrow Z$ une immersion fermée de codimension d, entre des schémas lisses sur S_0, s'insérant dans un carré cartésien au-dessus de S_0 :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, hook, "i"] \\ Z \arrow[r, "f"'] & X ; \end{tikzcd}$$

en particulier f est transversal à i.

1.3.2. Soit de plus E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$-module) localement libre. On définit pour tout entier r un homomorphisme

$$(1.3.3) \qquad \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E),F) \to \mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{Z/S}}(j_{\mathrm{cris}_*}g_{\mathrm{cris}}{}^*(E),f_{\mathrm{cris}}{}^*(F)),$$

de la façon suivante. Par adjonction de la flèche canonique

$$i_{\mathrm{cris}_*}(E) \to f_{\mathrm{cris}_*}j_{\mathrm{cris}_*}g_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \simeq i_{\mathrm{cris}_*}g_{\mathrm{cris}_*}g_{\mathrm{cris}}{}^*(E),$$

il existe tout d'abord un morphisme

$$(1.3.4) \qquad f_{\mathrm{cris}}{}^*i_{\mathrm{cris}_*}(E) \to j_{\mathrm{cris}_*}g_{\mathrm{cris}}{}^*(E),$$

et c'est un isomorphisme : E étant localement libre, on se ramène facilement au cas $E = \mathcal{O}_{Y/S}$ ([B 1], VI, 4.3.9). Soit $J^\bullet$ une résolution injective de $f_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_{Z/S}$-modules. D'après ([B 1], IV, (2.5.3)) on a un isomorphisme canonique de complexes

$$(1.3.5) \qquad \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E),f_{R\mathrm{cris}_*}(J^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_{Z/S}}(f_{\mathrm{cris}}{}^*i_{\mathrm{cris}_*}(E),J^\bullet).$$

Or $L^if_{\mathrm{cris}}{}^*(i_{\mathrm{cris}_*}(E)) = 0$ pour $i \geqslant 1$, puisque E est localement libre sur $\mathcal{O}_{Y/S}$, et que l'on a ce résultat pour $E = \mathcal{O}_{Y/S}$([B 1], VI, 4.3.9) ; $f_{R\mathrm{cris}}{}^*(J^\bullet)$ est donc ([B 1], VI, 4.3.6) un complexe à termes acycliques pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E),-)$ et $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E), f_{R\mathrm{cris}_*}(J^\bullet))$ fournit dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$-modules le complexe $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E), \mathbb{R}f_{R\mathrm{cris}_*}\, f_{\mathrm{cris}}{}^*(F))$. En utilisant le morphisme canonique $F \to f_{R\mathrm{cris}_*}f_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$ et l'isomorphisme (1.3.4) la flèche (1.3.5) donne ainsi sur la cohomologie l'homomorphisme cherché (1.3.3).

THÉORÈME 1.3.6. *Supposons* 1.3.1 *satisfait.*

(*a*) *Soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$-module) localement libre et u un morphisme $E \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$ induisant $g^*(u)$:*

$g_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \to g_{\mathrm{cris}}{}^* i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$, *alors l'homomorphisme* (1.3.3)

$$\mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*}(E), F) \to \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{Z/S}}(j_{\mathrm{cris}_*} g_{\mathrm{cris}}{}^*(E), f_{\mathrm{cris}}{}^*(F))$$

envoie $s^u_{Y/X}$ *sur* $s^{g^*(u)}_{T/Z}$.

(*b*) *Soient E et F deux $\mathcal{O}_{X/S}$-modules localement libres, avec E de type fini, et* $u: i_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \to i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)$. *Alors le carré suivant, où f^* est le morphisme image inverse, est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\mathrm{cris}_*} i_{\mathrm{cris}}{}^*(E), F) \arrow[r, "(1.3.3)"] \arrow[d, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Ext}^{2d}_{\mathcal{O}_{Z/S}}(j_{\mathrm{cris}_*} j_{\mathrm{cris}}{}^* f_{\mathrm{cris}}{}^*(E), f_{\mathrm{cris}}{}^*(F)) \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
H^{2d}(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) \arrow[r, "f^*"'] & H^{2d}(Z/S, f_{\mathrm{cris}}{}^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} f_{\mathrm{cris}}{}^*(F))\,;
\end{tikzcd}$$

de plus on a $f^*(s^u_{Y/X}) = s^{g^*(u)}_{T/Z}$.

Le théorème résulte de la fonctorialité des accouplements définissant $s^u_{Y/X}$ (cf. 1.1.2) et de la propriété correspondante pour $s_{Y/X} = s^{\mathcal{O}_{X/S}}_{Y/X}$ ([B 1], VI, 4.3). □

1.4. *Formule de projection*

1.4.1. On reprend ici les hypothèses 1.1.0 en supposant de plus S et $f: X \to S$ quasi-séparés et quasi-compacts. On se donne également deux $\mathcal{O}_{X/S}$-modules localement libres E et F.

Proposition 1.4.2. — *Sous les hypothèses* 1.4.1, *le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(E)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) \arrow[rr, "i^* \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes i^*"'] & & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d] \arrow[d, "\sigma_X"] \\
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(E)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(F)) \arrow[r, "\sigma_Y"'] & \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\mathrm{cris}}{}^*(E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)) \arrow[r, "i_*"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, (E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)[2d],
\end{tikzcd}$$

où σ sont les morphismes de cup-produit et $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. *En particulier le morphisme*

$$i_* \circ i^* : \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d]$$

est le cup-produit pour la classe $s_{Y/X} = i_*(1)$ *de* ([B1], VI, 3.3.6).

Résulte de la définition (1.1.1.2) de i_* par une démonstration analogue à celle de la formule de projection ([B 1], VI, 4.1.4). □

2. Morphisme image directe.

2.1. Nous ferons les hypothèses suivantes : k est un corps de caractéristique $p > 0$, W un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques, d'indice de ramification absolu $e \leqslant p - 1$, de corps résiduel k, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $W_m = W/\mathfrak{m}^{m+1}$ (pour $m \in \mathbb{N}$), muni des puissances divisées définies par les puissances divisées naturelles de $\mathfrak{m}$, $S = \operatorname{Spec} W_m$, $\mathscr{I} = \mathfrak{m}.\mathscr{O}_S$, γ les puissances divisées de $\mathscr{I}$, $S_0 = \operatorname{Spec} k$. Tous les schémas considérés seront supposés équidimensionnels. Soient de plus X et Y deux S_0-schémas propres et lisses, de dimension n et q, $h : Y \to X$ un S_0-morphisme et E un $\mathscr{O}_{X/S}$-module localement libre de type fini. Si l'on note $E^\vee$ le dual de E, le morphisme image inverse $h^* : \mathbb{R}\Gamma(X/E^\vee) \to \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee)$ donne par dualité

$$(h^*)^\vee : \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee), W_m) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m).$$

Or la dualité de Poincaré ([B 1], VII, 2.1.3) fournit des isomorphismes

$$\varepsilon_X : \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n]$$

et $$\varepsilon_Y : \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee), W_m)[-2q] ;$$

nous définirons le *morphisme image directe*

$$h_* : \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2n-2q] \tag{2.2}$$

par $$h_* = \varepsilon_X^{-1} \circ (h^*)^\vee \circ \varepsilon_Y .$$

2.3. On vérifie sans peine la transitivité du morphisme image directe (2.2) et la formule de projection (avec le diagramme 1.4.2, mais où cette fois X et Y sont propres et lisses sur S_0 et E et F localement libres de type fini sur $\mathscr{O}_{X/S}$). De plus

$$h_* \circ h^* : \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2n-2q]$$

est le morphisme de cup-produit par $h_*(1) \in \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathscr{O}_{X/S})[2n-2q]$. On montre également la compatibilité de l'image directe à l'isomorphisme de Künneth.

Nous allons comparer la définition (2.2) du morphisme image directe à celle de (1.1.1.2).

PROPOSITION 2.4. — *Sous les hypothèses* 2.1, *supposons que h soit une immersion fermée de codimension $d = n - q$, alors le morphisme h_* de* 2.2 *est égal au morphisme de Gysin $G^E_{Y/X}$ de* (1.1.1.2).

Notons $f\colon X \to S$ et $g\colon Y \to S$ les morphismes structuraux et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m}\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E)[-2d] \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes G^E_{Y/X}"] \arrow[d, "h^*\otimes \mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m}\mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \arrow[dd, "\sigma_X"] \\
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m}\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E)[-2d] \arrow[d, "\sigma_Y"] & \\
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*(E^\vee\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E))[-2d] \arrow[r, "G^{E^\vee\otimes E}_{Y/X}"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E) \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, \mathscr{O}_{Y/S})[-2d] \arrow[r, "G_{Y/X}"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_g"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathscr{O}_{X/S}) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] \\
W_m[-2n] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W_m[-2n].
\end{tikzcd}$$

Le carré du haut est commutatif d'après la formule de projection (2.3) et celui du bas d'après ([B 1], VII, 2.3.1). Le carré du milieu commute car il est obtenu en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma(X/S, -)$ au carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
h_{\mathrm{cris}*}(\mathscr{O}_{Y/S})\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E^\vee\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E[-2d] \arrow[r, "G_{Y/X}\otimes \mathrm{Id}_{E^\vee\otimes E}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{can.}"] & \mathscr{O}_{X/S}\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E^\vee\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}E \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathscr{O}_{X/S}}\otimes\mathrm{can.}"] \\
h_{\mathrm{cris}*}(\mathscr{O}_{Y/S})\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}\mathscr{O}_{X/S}[-2d] \arrow[r, "G_{Y/X}\otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}_{X/S}}"] & \mathscr{O}_{X/S}\otimes_{\mathscr{O}_{X/S}}\mathscr{O}_{X/S}.
\end{tikzcd}$$

Par adjonction entre $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ et $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet$, on en déduit la commutativité du triangle

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*(E)) \arrow[dr, "(h^*)^\vee\circ\varepsilon_Y"] \arrow[dd, "G^E_{Y/X}"'] & \\
& \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n+2d] \\
\mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2d] \arrow[ur, "\sim", "\varepsilon_X"'] &
\end{tikzcd}$$

ce qui donne la proposition d'après la définition de h_* (2.2). $\square$

II. RATIONALITÉ DE LA FONCTION L

Comme en cohomologie étale ([M 3], VI, § 3) nous allons prouver, en cohomologie cristalline cette fois, la rationalité des fonctions L par une formule des traces de Lefschetz.

1. Formule des traces de Lefschetz.

LEMME 1.1. — *Soient* $(S, \mathscr{I}, \gamma)$ *un PD-schéma quasi-compact,* S_0 *un sous-schéma fermé de* S, *défini par un sous PD-idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{I}$, $f_0 : X \to S_0$ *un morphisme lisse quasi-séparé et quasi-compact,* $f : X \xrightarrow{f_0} S_0 \to S$, $Z = X \times_{S_0} X$, $h : Z \to S$, $\Delta : X \hookrightarrow Z$ *l'immersion diagonale, E et F deux* $\mathcal{O}_{X/S}$*-modules localement libres de type fini. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{R}f_{X/S*}(E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X/S}} \mathbb{R}f_{X/S*}(F) \arrow[rr, "k_{E,F}", "\sim"'] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathbb{R}h_{Z/S*}(p_1^*(E) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_2^*(F)) \arrow[dl, "\Delta^*"] \\ & \mathbb{R}f_{X/S*}(E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) & \end{tikzcd}$$

où σ *est le cup-produit,* $k_{E,F}$ *l'isomorphisme de Künneth, et* $f_{X/S}$, $h_{Z/S}$ *ont le sens habituel* ([B 1], VII, 1.1.1), *est commutatif.*

Même démonstration que ([B 1], VII, 3.1.1.). □

LEMME 1.2. — *Soient A un anneau commutatif,* $K^\bullet$ *et* $K'^\bullet$ *deux complexes parfaits de* $D^b(A)$, *n un entier et* $\tau : K^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A K'^\bullet \to A[n]$ *un morphisme de* $D^b(A)$, *définissant par adjonction un morphisme* $\varepsilon : K^\cdot \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(K'^\bullet, A)[n]$. *Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A K'^\bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}"] & A[n] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(K'^\bullet, A) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A K'^\bullet[n] \arrow[r, "\tau'"] & A[n] \end{tikzcd}$$

où τ' *est l'accouplement naturel, est commutatif.*

Même démonstration que ([B 1], VII, 3.1.2). □

1.3. Reprenons maintenant jusqu'en 1.6 inclus les hypothèses du (I, 2.1) sur S et S_0, si bien que $S = \operatorname{Spec} W_m$, $S_0 = \operatorname{Spec} k$. Soient X un S_0-schéma propre et lisse de dimension n, $f \colon X \to S$, et E un $\mathcal{O}_{X/S}$-module localement libre de type fini. Le lemme 1.2 montre la commutativité du diagramme

(1.3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(X/S,E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E^{\vee}) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varepsilon_X \otimes \mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,\mathcal{O}_{X/S}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] & W_m[-2n] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet}_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S,E^{\vee}), W_m) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E^{\vee})[-2n] \arrow[rr, "\sigma'"'] & & W_m[-2n],
\end{tikzcd}$$

où σ est le cup-produit et σ' l'accouplement naturel.

Supposons donnés de plus un S_0-schéma propre et lisse Y de dimension q, un S_0-morphisme $\varphi : X \to Y$, un $\mathcal{O}_{Y/S}$-module F localement libre de type fini et un homomorphisme $u : \varphi^*(F) \to E$. Nous noterons Φ^* le morphisme de complexes parfaits

(1.3.2) $\quad \Phi^* = \mathbb{R}\Gamma(u) \circ \varphi^* : \mathbb{R}\Gamma(Y/S,F) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S,E),$

composé du morphisme image inverse φ^* et de $\mathbb{R}\Gamma(X/S,u)$. Via l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(\varphi^*(F),E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X/S, \varphi^*(F^{\vee}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)$$

[resp. $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet}_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F)), \mathbb{R}\Gamma(X/S,E))$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F))^{\vee} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)],$$

u [resp. $\mathbb{R}\Gamma(u)$] définit un morphisme $u' : W_m \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F^{\vee}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)$ [resp. $u'' : W_m \to \mathbb{R}\Gamma(X/S,\gamma^*(F))^{\vee} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)$] s'insérant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F)) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes u''"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F))^{\vee} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E) \arrow[r, "\sigma'\otimes \mathrm{Id}"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,E) \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F)) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes u'"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,\varphi^*(F^{\vee}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E) \arrow[r, "\sigma_X"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)
\end{tikzcd}$$

i.e. ([B 1], VII, démonstration de 3.1.5) :

(1.3.3) $\quad \mathbb{R}\Gamma(u) = \sigma_X \circ (\mathrm{Id} \otimes u').$

LEMME 1.4. — *Sous les hypothèses* 1.3, *soient* $Z = X \times_{S_0} Y$ *de projections* p_1 *et* p_2 *sur* X *et* Y, $\gamma : X \to Z$ *le morphisme graphe de* φ et u_Φ : $\mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F) \to \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_1^*(E))[2q]$ *le morphisme de cup-produit par* $\gamma_*(u) \in H^{2q}(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))$, *où* u *est vu comme élément de* $\Gamma(X/S, \gamma^*(p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E)))$. *Alors on a*

$$\Phi^* = p_{1*} \circ u_\Phi \circ p_2^* . \tag{1.4.1}$$

Par définition on a $\Phi^* = p_{1*} \circ \gamma_* \circ \sigma_X \circ (\gamma^* \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes u') \circ p_2^*$, et donc, par la formule de projection (I, 2.3),

$$\Phi^* = p_{1*} \circ \sigma_Z \circ (\mathrm{Id} \otimes \gamma_*) \circ (\mathrm{Id} \otimes u') \circ p_2^* ,$$

où σ_Z est le cup-produit

$$\mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q] \\ \to \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_1^*(E))[2q] .$$

Comme la classe de cohomologie $\gamma_*(u)$ définit un morphisme $W_m \to \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q]$ composé de u' et γ_*, la formule (1.4.1) en résulte. □

Ce lemme 1.4 et la commutativité de (1.3.1) fournissent alors par la méthode de ([B 1], VII, 3.1.5) le lemme :

LEMME 1.5. — *Sous les hypothèses* 1.4, *la suite d'isomorphismes*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, F), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{R}\Gamma(Y/S, F)^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \arrow[d, "\varepsilon_Y^{-1} \otimes \mathrm{Id}", "\wr"'] \\ \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q] & \mathbb{R}\Gamma(Y/S, F^\vee) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2q] \arrow[l, "\sim", "k_{F^\vee, E}"'] \end{tikzcd}$$

où $k_{F^\vee, E}$ *est l'isomorphisme de Künneth, identifie la classe de* Φ^* *dans* $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, F), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E))$ *à* $\gamma_*(u)$.

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème suivant, où, pour un corps parfait k' de caractéristique $p > 0$, $W(k')$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt de k' et $W_m(k') = W(k')/p^m W(k')$; nous noterons X^φ le schéma des points fixes de φ et, pour $x \in X^\varphi$, j_x l'inclusion Spec $(k(x)) \hookrightarrow X$. Lorsque k est parfait, $F = E$ et $x \in X^\varphi$, nous considérerons le module

$$E_x := (j^*_{x\mathrm{cris}}(E))(\mathrm{Spec}(k(x)),\ \mathrm{Spec}\, W_m(k(x))) :$$

c'est un $W_m(k(x))$-module libre de type fini, et un $W_m(k)$-module libre de type fini ; dans ce dernier cas nous le noterons $\tilde{E}_x$ et $\tilde{u}_x : \tilde{E}_x \to \tilde{E}_x$ désignera l'endomorphisme induit par u.

THÉORÈME 1.6. — *Soient S comme en 1.3, X un schéma propre et lisse sur k, de dimension n, $f : X \to S$, $h : Z = X \times_{S_0} X \to S$, $\varphi = X \to X$ un k-endomorphisme de X, de morphisme graphe $\gamma : X \to Z$, E un $\mathcal{O}_{X/S}$-module localement libre de type fini muni d'un morphisme $u : \varphi^*(E) \to E$. Si* $\mathrm{Tr}\,\Phi^*$ *est la trace de l'endomorphisme* $\Phi^* = \mathbb{R}\Gamma(u)_0\varphi^*$ *du complexe parfait* $\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)$, *alors*

i) (1.6.1) $\mathrm{Tr}\,\Phi^* = \mathrm{Tr}_f \circ \alpha \circ \Delta^*(\gamma_*(u))$,
où α est la flèche canonique

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \to \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n],$$

et
$$\gamma_*(u) \in H^{2n}(Z/S, p_2^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E)).$$

ii) *Supposons de plus que k soit parfait et que le graphe de φ et la diagonale de Z se coupent transversalement ; dans ce cas on a la formule des traces de Lefschetz :*

(1.6.2)
$$\mathrm{Tr}\,\Phi^* = \sum_{x \in X^\varphi} \mathrm{Tr}\,\tilde{u}_x .$$

Par définition ([SGA 6], I, 8.1) la trace de Φ^* est l'image par le morphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S,E), \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E) \xrightarrow{\sigma'} W_m$$

de la classe de cohomologie définie par Φ^*. Soient c' l'image de celle-ci dans $\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)$ et Δ l'immersion diagonale de X dans Z. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E) \arrow[rrr, "\sigma'"] \arrow[d, "\varepsilon_X^{1} \otimes \mathrm{Id}"'] & & & W_m \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\mathbb{R}\Gamma(X/S,E^\vee) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{W_m} \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)[2n] \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "k_{E^\vee,E}"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S,\mathcal{O}_{X/S})[2n] \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] & W_m \\
\mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2n] \arrow[ur, "\Delta^*"'] & & &
\end{tikzcd}$$

le rectangle du haut est commutatif d'après (1.3.1) et le triangle du bas d'après 1.1. Puisque $k_{EE^\vee,E}\circ(\varepsilon_X^{-1}\otimes \mathrm{Id})(c') = \gamma_*(u)$ (cf. 1.5), on a

$$\mathrm{Tr}\,\Phi^* = \mathrm{Tr}_f \circ \alpha \circ \Delta^*(\gamma_*(u)).$$

Pour ii) considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\ k(x) \arrow[r, hook, "j'_x"] \arrow[dr, "j_x"'] & T \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, hook, "\Delta"] \\ & X \arrow[r, hook, "\gamma"'] & X \times_{S_0} X = Z, \end{tikzcd}$$

où le carré est cartésien et j'_x l'inclusion d'un point de $T = X^\varphi$ dans T. Puisque γ et Δ sont transverses, T est formé de points fermés lisses sur S_0, d'où, d'après (I, 1.3.6 (b) et 2.4)

$$\Delta^*(\gamma_*(u)) = i'_*(j'^*(u))\,;$$

de plus, par l'additivité (I, 1.1.5 (b)) on a

$$i'_*(j'^*(u)) = \sum_{x\in T} j_{x*}(u_x),$$

où $u_x := j_x^*(u) \in \Gamma\ (\mathrm{Spec}\,(k(x))/S, j_x^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)) \simeq \mathrm{Hom}_{W_m(k(x))}(E_x, E_x)$. Soit $f_0 : X \to S_0$ le morphisme structural. Comme $\mathrm{Tr}_f = (f_0)_*$ ([B 1], VII, 2.2.4), que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\Gamma(\mathrm{Spec}\,(k(x))/S, j_x^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)) \arrow[r, "j_{x*}"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{R}\Gamma(\mathrm{Spec}\,(k(x))/S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,(k(x))/S}) \arrow[r, "j_{x*}"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n], \\ W_m(k(x)) & \end{tikzcd}$$

où χ est la flèche canonique, et que $\chi(u_x)$ est la trace $\mathrm{Tr}\,(u_x)$ de u_x, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\Phi^* &= \sum_{x\in T} (f_0)_* \circ (j_x)_*(\mathrm{Tr}\,(u_x)) \\ &= \sum_{x\in T} \mathrm{Tr}_{W_m(k(x))/W_m(k)}(\mathrm{Tr}\,(u_x)) \\ &= \sum_{x\in T} \mathrm{Tr}\,(\tilde{u}_x) \quad \text{([Bour], A III, prop. 6, p. 112),} \end{aligned}$$

car

$$\begin{tikzcd} (f_0 \circ j_x)_* : \mathbb{R}\Gamma(\mathrm{Spec}\,(k(x))/S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,(k(x))/S}) \arrow[r] \arrow[d, no head, "\wr"] & \mathbb{R}\Gamma(S_0/S, \mathcal{O}_{S_0/S}) \arrow[d, no head, "\wr"] \\ W_m(k(x)) & W_m(k) \end{tikzcd}$$

est la trace $\mathrm{Tr}_{W_m(k(x))/W_m(k)}$. □

1.7. Plaçons-nous dans l'hypothèse 1.6 (ii). Pour $x \in X^{\varphi}$, u induit un endomorphisme $\tilde{u}_x$ du W-module libre $\tilde{E}_x$ (notations par analogie avec 1.6 en passant à la limite sur m).

Comme dans ([B1], VII, 3.1.10) il existe un complexe strictement parfait de W-modules $L^\bullet$ et un endomorphisme ψ de $L^\bullet$ tel que, dans l'isomorphisme de $D^b(W_m)$

$$(1.7.1) \qquad L^\bullet_m : L^\bullet \otimes_W W_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(X/W_m, E),$$

l'endomorphisme ψ_m de $L^\bullet_m$, induit par ψ, corresponde à l'endomorphisme Φ^*_m de $\mathbb{R}\Gamma(X/W_m, E)$ défini par φ et u à la manière (1.3.2). On a donc

$$\mathrm{Tr}\,\psi_m = \mathrm{Tr}\ \Phi^*_m,$$

d'où, par passage à la limite projective dans (1.6.2) :

COROLLAIRE 1.7.2. — *Avec les notations précédentes on a :*

$$\mathrm{Tr}\,\psi = \sum_{x \in X^{\varphi}} \mathrm{Tr}\,(\tilde{u}_x).$$

2. Application à la fonction L.

Soient X un schéma propre et lisse sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$ à $q = p^a$ éléments, n la dimension de X sur k, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, K le corps des fractions de W et E un F-cristal (i.e. un cristal E muni de $u : F^*E \to E$, où F^*E est l'image inverse de E par le Frobenius absolu F de X, F étant l'identité sur l'espace sous-jacent et la puissance $q^{\text{ième}}$ sur le faisceau $\mathcal{O}_X$) localement libre de type fini sur X. Le couple (F,u) induit un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$ noté F_E (ou Φ^*), et pour tout entier i un endomorphisme de $H^i(X/W, E)$ noté $F_{i,E}$ (ou F).

On dira que E est un F-cristal non dégénéré de niveau N s'il existe de plus un morphisme $v : E \to F^*E$ et un entier N tels que $u \circ v = q^N$ et $v \circ u = q^N$; si $N = 0$ on dit que E est un F-cristal unité.

Soit Δ_m l'ensemble des points de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^m}$ de degré exactement m, i.e.

$$\Delta_m = \{e : \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q m) \to X/e \text{ d'image } x, \text{ tel que } k(x) \simeq \mathbb{F}_q m\}.$$

Pour $e \in \Delta_m$, posons

$$e^*(E) := \varprojlim_r (e_{\text{cris}}{}^*(E))(\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q m), \operatorname{Spec}(W_r(\mathbb{F}_{q^m}))) :$$

c'est un $W(\mathbb{F}_{q^m})$-module libre de type fini et l'itéré $m^{\text{ième}}$ de u induit un endomorphisme F^m de $e^*(E)$. On définit alors la fonction L associée à E ([K1], 6.0) par la formule

$$(2.1) \quad L(X, E, t) = \prod_{m \geqslant 1} \prod_{e \in \Delta_m} [\det_{W(\mathbb{F}_q m)}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}.$$

THÉORÈME 2.2. — *Si E est un F-cristal localement libre de type fini sur X, on a avec les hypothèses précédentes:*

$$(2.2.1) \qquad L(X, E, t) = \prod_{0 \leqslant i \leqslant 2n} [\det(1 - tF_i)]^{(-1)^{i+1}},$$

où F_i est l'endomorphisme défini par F sur la partie libre de $H^i(X/W, E)$; les polynômes $\det(1 - tF_i)$ *sont à coefficients dans W.*

2.2.2. *Si l'on suppose de plus le F-cristal E non dégénéré, alors les polynômes* $\det(1 - tF_i)$ *sont de degré* $\beta_i = \operatorname{rg}_W H^i(X/W, E)$.

Ce théorème résout une conjecture de Katz ([K 1], 6.1.1) dans le cas propre et lisse, et se démontre par une formule de traces de Lefschetz : on va d'abord transformer l'expression définissant $L(X, E, t)$ pour la rendre adaptée à une telle formule.

Soit X^0 l'ensemble des points fermés de X; on a

$$L(X, E, t) = \prod_{m \geqslant 1} \prod_{\substack{x \in X^0 \\ \deg x = m}} \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_q m)}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}.$$

Pour $x \in X^0$ fixé, de degré m, le produit

$$P = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_q m)}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}$$

est invariant par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, où $\overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$; donc P est à coefficients dans $W(\mathbb{F}_q)$. Notons $A = W(\mathbb{F}_q)[t^m]$, $B = W(\mathbb{F}_{q^m})[t^m])$ et $N_{B/A}$ la norme ; on a

$$P = N_{B/A}(P^{1/m}) = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} N_{B/A}\{[\det_{W(\mathbb{F}_{q^m})}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m^2}\}$$

$$P = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^m \widetilde{F}^m | \widetilde{e^*(E)})]^{-1/m^2},$$

où $\widetilde{e^*(E)}$ désigne le module $e^*(E)$ vu comme module sur $W(\mathbb{F}_q)$ et $\widetilde{F}^m$ est déduit de F^m. Ces $\widetilde{e^*(E)}$ sont tous isomorphes à $\widetilde{E}_x$, avec

$$E_x := \varprojlim_r (j_{x\,\mathrm{cris}}{}^*(E))(\mathrm{Spec}\,(k(x)), \mathrm{Spec}\, W_r(k(x)))$$

où j_x est l'inclusion $\mathrm{Spec}\,(k(x)) \hookrightarrow X$; on notera $\widetilde{F}_x^m$ l'endomorphisme de $\widetilde{E}_x$ induit par l'itéré $m^{\text{ième}}$ de u. Avec ces notations on a donc

$$P = \det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^m \widetilde{F}_x^m | \widetilde{E}_x)^{-1/m}.$$

D'où une nouvelle expression de $L(X, E, t)$:

$$L(X, E, t) = \prod_{x \in X^0} \det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^{\deg x} \widetilde{F}_x^{\deg x} | \widetilde{E}_x)^{-1/\deg x}. \tag{2.3}$$

Lorsque $E = \mathcal{O}_{X/W}$ on retrouve la fonction zêta.

Pour la démonstration du théorème on va appliquer le lemme suivant au K-espace vectoriel de dimension finie $H^i(X/W, E) \otimes_W K$, et pour $x \in X^0$ au W-module libre de type fini $\widetilde{E}_x$.

Lemme 2.4 (de démonstration analogue à ([M 3], V, 2.7)). – *Soit α un endomorphisme d'un module libre de type fini V sur un anneau A commutatif unitaire intègre, alors*

$$\log[(\det(1 - t\alpha | V))^{-1}] = \sum_{m > 0} \mathrm{Tr}(\alpha^m | V) t^m / m.$$

Soient D_l l'ensemble des points fermés de X de degré exactement l, et X^{F^m} l'ensemble des points fermés de X fixes sous F^m au sens schématique : on a $X^{F^m} = \cup_{l|m} D_l$. En appliquant le log à l'expression (2.3) de $L(X,E,t)$ on obtient

$$\begin{aligned}\log(L(X,E,t)) &= \sum_{x\in X^0}\sum_{r>0} \mathrm{Tr}_W(\tilde{F}_x^{r\deg x}\,|\,\tilde{E}_x)t^{r\deg x}/r\deg x\\ &= \sum_{l>0}\sum_{x\in D_l}\sum_{r>0} \mathrm{Tr}_W(\tilde{F}_x^{r\deg x}\,|\,\tilde{E}_x)t^{r\deg x}/r\deg x\\ &= \sum_{m>0}\sum_{l\mid m}\sum_{x\in D_l} \mathrm{Tr}_W(\tilde{F}_x^{m}\,|\,\tilde{E}_x)t^{m}/m\\ &= \sum_{m>0}\sum_{x\in X^{F^m}} \mathrm{Tr}_W(\tilde{F}_x^{m}\,|\,\tilde{E}_x)t^{m}/m.\end{aligned}$$

Quant au log de l'expression figurant dans le théorème, il s'écrit :

$$\sum_{m>0}\sum_{0\leqslant i\leqslant 2n} (-1)^i\,\mathrm{Tr}\,(F^m\,|\,H^i(X/W,E)\otimes_W K)t^m/m.$$

L'égalité (2.2.1) est donc équivalente à la formule des traces suivante :

Théorème 2.5. — *Pour tout entier $m \geqslant 1$ on a*

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X^{F^m}} \mathrm{Tr}_W(\tilde{F}_x^{m}\,|\,\tilde{E}_x) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant 2n} (-1)^i\,\mathrm{Tr}\,(F^m\,|\,H^i(X/W,E)\otimes_W K)\\ &=:\ \mathrm{Tr}\,(F^m\,|\,\mathbb{R}\Gamma(X/W,E)).\end{aligned}$$

Ce théorème 2.5 résulte de 1.7.2 puisque le graphe de F^m coupe la diagonale de $X\times_k X$ transversalement.

Pour 2.2.2, supposons E non dégénéré avec u: $F^*E\to E$ et v: $E\to F^*E$ tels que $u\circ v = q^N$ et $v\circ u = q^N$; notons $S=\mathrm{Spec}\,(W_m(k))$, Φ^* le composé $\mathbb{R}\Gamma(u)\circ F^*$

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)\xrightarrow{F^*}\mathbb{R}\Gamma(X/S,F^*E)\xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma(u)}\mathbb{R}\Gamma(X/S,E),$$

où F^* est l'image inverse, et Φ_* le composé $F_*\circ\mathbb{R}\Gamma(v)$

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)\xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma(v)}\mathbb{R}\Gamma(X/S,F^*E)\xrightarrow{F_*}\mathbb{R}\Gamma(X/S,E),$$

où F_* est le morphisme image directe. L'assertion 2.2.2 signifie que F_i est un isomorphisme modulo torsion : comme dans ([B1], VII, 3.2.3) c'est une conséquence de

Proposition 2.6. — *Sous les hypothèses 2.2 avec E non dégénéré, le morphisme composé*

$$\Phi_*\circ\Phi^*:\ \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)\to\mathbb{R}\Gamma(X/S,E)$$

est la multiplication par q^{q+N}; et ceci reste vrai en remplaçant S par Spec $W(k)$.

On a $\Phi_* \circ \Phi^* = F_* \circ \mathbb{R}\Gamma(v \circ u) \circ F^* = q^N F_* \circ F^*$.

D'après (I, 2.3) il suffit de montrer que $F_*(1) = q^n$, ce qui est établi dans la démonstration de ([B1], VII, 3.2.4). L'assertion pour $W(k)$ s'obtient par passage à la limite. □

2.7. On rappelle que X est propre et lisse sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$; soient E un F-cristal unité sur X et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. On notera $\bar{X} := X \times_k \bar{k}$, $\bar{W} = W(\bar{k})$ l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}$, $\bar{K} = \mathrm{Frac}\,(\bar{W})$ et $\bar{E}$ le $\mathcal{O}_{\bar{X}/\bar{W}}$-module image inverse de E.

Nous allons « décrire », pour tout entier r, les zéros et pôles de $L(X, E, t)$ sur les couronnes p-adiques $|t|_p = q^r$, où l'on a normalisé par $|p|_p = 1/p$; la fonction ord_q sera définie par $\mathrm{ord}_q(q^r u) = r$ si $|u|_p = 1$.

On a considéré dans ([E 1], III, 2.1) les faisceaux étales

$$\nu_m(E, r) = \mathrm{Ker}\,\{E_m \otimes W_m\Omega^r \xrightarrow{1-F} E_m \otimes W_m\Omega^r / \nabla V^{m-1}(E_1 \otimes \Omega^{r-1})\};$$

posons $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) = \varprojlim_m H^{i-r}(\bar{X}_{\text{ét}}, \nu_m(\bar{E}, r))$ et $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)) = H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$: ce dernier est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie ([E 1], III, 3.2.3).

Soit γ le générateur canonique de $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$, $x \mapsto x^q$; $\varphi = \gamma^{-1}$ agit sur $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ par $1 \otimes \varphi$ et donc sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$: on notera encore φ cette action.

PROPOSITION 2.8. — *Sous les hypothèses* 2.7 *on a*

$$\det\,[1 - \varphi t \,|\, H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))] = \prod_{\mathrm{ord}_q(a_{ij}) = r} (1 - q^{-r} a_{ij} t)$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(X/W, E) \otimes_W K$.

La proposition résulte de ([M 4], lemme 5.1) et de la suite exacte (cf. ([E 1], III, 3.2.3.2)

$$0 \to H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)) \to H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_{\bar{W}} \bar{K} \xrightarrow{\mathbf{F} - p^r} H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_{\bar{W}} \bar{K} \to 0,$$

où $\mathbf{F}$ est le Frobenius absolu sur la cohomologie cristalline de $\bar{E}$. □

COROLLAIRE 2.9. — *Sous les hypothèses 2.7, soit M* (resp. $\bar{M}$) *le $\mathbb{Z}_p$-faisceau étale lisse associé au F-cristal unité E* (resp. $\bar{E}$), *alors*

(i) *on a* $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) = 0$, *et q^r n'est pas valeur propre du Frobenius sur* $H^i(X/W, E) \otimes_W K$ *sous l'une des deux conditions :*

(i.1) *r est un entier vérifiant $r < 0$ ou $r > \dim X$,*

(i.2) $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant \dim X$, *et i est un entier vérifiant $i < r$ ou* $i > \dim X + r$,

(ii) *la fonction*

$$L(X, E, t) \times \prod_{r \leqslant i \leqslant n+r} [\det(1 - q^r t\varphi \mid H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)))]^{(-1)^i}$$

n'a ni zéros ni pôles sur la couronne $|t|_p = q^r$, *en particulier la fonction*

$$L(X, E, t) \times \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} [\det(1 - t\varphi \mid H^i(\bar{X}, \bar{M}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)]^{(-1)^i}$$

n'a ni zéros ni pôles sur la couronne unité $|t|_p = 1$.

La nullité de $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$ est claire sous l'hypothèse (i.1) : sous l'hypothèse (i.2) c'est établi dans ([E 1], III, (3.2.3.1)). Par 2.8 la 2^e assertion du (i) en résulte : dans le cas X projectif et lisse elle se déduit aussi de (III, 1.2.4) ci-après. Le (ii) est alors immédiat.

Remarque 2.10. — La 2[e] assertion de (ii) résout affirmativement une conjecture de Katz ([K 1], 6.1.2) dans le cas X propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$. Cette 2[e] assertion de (ii) est d'ailleurs obtenue par Crew ([Cr 1]) dans le cas où X est une courbe affine et lisse sur $\mathbb{F}_q$ et E de rang 1.

2.11. Sous les hypothèses du 2 supposons le F-cristal E non dégénéré. On va montrer que la fonction $L(X, E, t)$ satisfait à une équation fonctionnelle faisant intervenir $E^\vee$. Précisons tout d'abord la structure de F-cristal sur $E^\vee$. Puisque E est non dégénéré il existe des morphismes $u : F^*E \to E$ et $v : E \to F^*E$ tels que $u \circ v = q^N$ et $v \circ u = q^N$, et la structure de F-cristal sur $E^\vee$ sera fournie par le dual de v, soit ${}^t v : F^*E^\vee \to E^\vee$. On a donc

$$F_{i,E} = R^i\Gamma(u) \circ F^* : H^i(X/W, E) \to H^i(X/W, E),$$

et

$$F_{j,E^\vee} = R^j\Gamma({}^t v) \circ F^* : H^j(X/W, E^\vee) \to H^j(X/W, E^\vee),$$

où F^* est le morphisme image inverse.

THÉORÈME 2.12. — *Soient X un k-schéma propre, lisse et géométriquement connexe de dimension n, et E un F-cristal non dégénéré sur X de niveau N. Soient*

$$\varkappa(X,E) := \sum_{0\leq i\leq 2n} (-1)^i \, \mathrm{rg}_W H^i(X/W,E)$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré de (X,E) et

$$\begin{aligned}\varepsilon(E) : &= \det(-F|\mathbb{R}\Gamma(X/W,E))^{-1} : \\ &= \prod_{0\leq i\leq 2n} [\det(-F|H^i(X/W,E)\otimes_W K)]^{(-1)^{i+1}}.\end{aligned}$$

La fonction $L(X,E,t)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2.12.1)\qquad L(X,E,t) = \varepsilon(E)t^{-\chi(X,E)}\, L(X,E^\vee,1/q^{n+N}t).$$

Notons $f\colon X \to S = \operatorname{Spec} W_m(k)$ le morphisme structural, et montrons que le diagramme suivant commute :

(2.12.2)

$$\begin{tikzcd}
H^i(X/S,E)\otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S,E^\vee) \arrow[r, "\langle,\rangle"] \arrow[d, "F^*\otimes F^*"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & H^{2n}(X/S) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] \arrow[d, "F^*=q^n"'] & W_m \arrow[d, "q^n"] \\
H^i(X/S,F^*E)\otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S,F^*E^\vee) \arrow[r, "\langle,\rangle"] \arrow[d, "R^i\Gamma(u)\otimes R^{2n-i}\Gamma({}^tv)"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & H^{2n}(X/S) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] \arrow[d, "q^N"'] & W_m \arrow[d, "q^N"] \\
H^i(X/S,E)\otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S,E^\vee) \arrow[r, "\langle,\rangle"] & H^{2n}(X/S) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] & W_m,
\end{tikzcd}$$

où $\langle,\rangle$ est l'accouplement canonique et $\mathrm{Tr}_f\circ\langle,\rangle$ celui donnant la dualité de Poincaré ([B 1], VII, 2.1.3). Le carré 1 est commutatif par fonctorialité de l'image inverse F^* et le fait que $F^* = q^n$ sur $H^{2n}(X/S)$ ([B 1], VII, démonstration de 3.2.5) ; comme $v\circ u = q^N$ le carré 2 commute par définition de ${}^tv$. La commutativité du diagramme signifie que pour $x\in H^i(X/S,E)$ et $y\in H^{2n-i}(X/S,E^\vee)$ on a :

$$\langle F_{i,E}(x), F_{2n-i,E^\vee}(y)\rangle = q^{n+N}\,\langle x,y\rangle ;$$

cette relation demeure vérifiée en passant à la limite sur m : en voyant cette fois $F_{i,E}$(resp. $F_{2n-i,E^\vee}$) comme un endomorphisme (en fait un automorphisme d'après 2.2.2) de $H^i(X/W,E)\otimes_W K$(resp. $H^{2n-i}(X/W,E^\vee)\otimes_W K$) on a montré que

$$ {}^t(F_{2n-i,E^\vee}) = q^{n+N}(F_{i,E})^{-1}, $$

i.e., si α_j décrit les valeurs propres de $F_{i,E}$, alors les valeurs propres de $F_{2n-i,E^\vee}$ sont les q^{n+N}/α_j. L'équation fonctionnelle (2.12.1) en résulte via (2.2.1). Les calculs précédents fournissent en outre la relation

$$ (2.12.3) \qquad \varepsilon(E).\varepsilon(E^\vee) = q^{-(n+N)\chi(X,E)}. $$

Remarque 2.13. — Dans le cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$ l'équation fonctionnelle (2.12.1) pour la fonction L redonne celle de la fonction zêta. En effet E est alors un F-cristal unité ($N=0$) en dualité avec lui-même, si bien que $\varepsilon(E) = \pm\, q^{-(n/2)\chi(X)}$; on retrouve ainsi l'équation fonctionnelle ([B 1], VII, (3.2.8))

$$ \begin{aligned} Z(X,1/q^n t) = L(X,\mathcal{O}_{X/W},1/q^n t) &= \pm\, q^{(n/2)\chi(X)} t^{\chi(X)} L(X,\mathcal{O}_{X/W},t) \\ &= \pm\, q^{(n/2)\chi(X)} t^{\chi(X)} Z(X,t). \end{aligned} $$

COROLLAIRE 2.14. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.12 *soient* $q = \operatorname{card} k$ *et* s *un entier* $> n + N$, *alors*

$$ |L(X,E,q^{-s})|_p = |\varepsilon(E)|_p\, q^{-s\chi(X,E)}, $$

où $|\ |_p$ *désigne la valeur absolue p-adique de K normalisée par* $|p|_p^{-1} = p$.

D'après 2.2 on a

$$ L(X,E^\vee,1/q^{n+N-s}) = \prod_{0\leqslant i\leqslant 2n} \det(1-q^{s-n-N}F_{i,E^\vee})^{(-1)^{i+1}}, $$

où $\det(1-tF_{i,E^\vee})$ est à coefficients dans W, d'où, puisque $s-n-N>0$, $|L(X,E^\vee,1/q^{n+N-s})|_p = 1$. L'équation fonctionnelle fournit alors le corollaire. □

Remarque 2.15. — Dans le cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$, ce corollaire redonne la proposition (10.4) de [M 4] car $|\varepsilon(\mathcal{O}_{X/W})|_p = q^{(n/2)\chi(X)}$. Nous reviendrons dans la quatrième partie plus longuement sur ces questions de valeurs de fonctions L.

Remarque 2.16. — Supposons 2.11 vérifié ; on a noté $F_E = \mathbb{R}\Gamma(u)\circ F^*$ et $F_{E^\vee} = \mathbb{R}\Gamma({}^t v)\circ F^*$. Comme pour (2.12.2) on prouve la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\Gamma(X/S,E) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_X} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S,E^\vee),W_m)[-2n] \\
\downarrow{\scriptstyle F_E} & & \downarrow{\scriptstyle q^{n+N}(F_{E^\vee})^\vee} \\
\mathbb{R}\Gamma(X/S,E) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_X} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{W_m}(\mathbb{R}\Gamma(X/S,E^\vee),W_m)[-2n],
\end{array}$$

où ε_X résulte de la dualité de Poincaré.

Si l'on se donne un autre k-schéma propre et lisse Y, de dimension r sur k et $h: Y \to X$ un k-morphisme, on définit de même F_{h^*E} et $F_{h^*E^\vee}$. Il est alors immédiat que le morphisme image directe

$$h_*: \mathbb{R}\Gamma(Y/S,h^*E) \to \mathbb{R}\Gamma(X/S,E)[2n-2r]$$

vérifie la relation

(2.16.1) $$h_* \circ F_{h^*E} = q^{r-n} F_E \circ h_*.$$

III. COEFFICIENTS DE LA FONCTION L

Par l'expression (II, 2.2.1), les valeurs propres du Frobenius sur la cohomologie cristalline fournissent les coefficients de la fonction L : nous établissons donc au paragraphe 1 un théorème de Lefschetz faible duquel nous déduisons des évaluations p-adiques de ces valeurs propres.

Dans le cas d'un F-cristal unité, on montre au paragraphe 2 que la fonction L est à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Enfin, pour un F-cristal unité à monodromie finie (§ 3), les zéros et pôles de L sont des entiers algébriques vérifiant l'hypothèse de Riemann (3.2). Une telle fonction L est également reliée directement aux fonctions L de Grothendieck (3.5).

1. Lefschetz faible et application aux pentes.

1.1. *Lefschetz faible avec coefficients.*

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k.

THÉORÈME 1.1.1 (dit de « Lefschetz faible »). — *Soient X un k-schéma projectif et lisse, de dimension n, muni d'un plongement fixé dans un espace projectif $\mathbb{P}_k^N$ et E un F-cristal localement libre de type fini sur X. Nous noterons $E_0 = E/pE$ et* $\mathrm{gr}^S E_0 = \mathscr{F}^S E_0/\mathscr{F}^{S+1} E_0$ *où $\mathscr{F}^\bullet E_0$ est la filtration conjuguée de la filtration de Hodge sur E_0* ([0], 1.9). *Nous nous placerons dans l'un des deux cas suivants :*

(i) *E_0 admet localement une base de sections horizontales (par exemple pour E un F-cristal unité),*

(ii) $\mathrm{gr}^\bullet E_0$ *est localement libre.*

Alors si $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est une section hyperplane lisse de X, de degré assez élevé, l'homomorphisme canonique

$$j^* : H^i(X/W, E) \to H^i(Y/W, j_{\mathrm{cris}}{}^*(E))$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$, et est injectif pour $i = n - 1$. De plus la cohomologie évanescente

$$\mathscr{E}(Y, E) := H^{n-1}(Y/W, j_{\mathrm{cris}}{}^*(E))/H^{n-1}(X/W, E)$$

est un W-module libre de type fini.

Comme dans [B 2] le théorème se ramène à montrer que le morphisme canonique

$$(1.1.2) \qquad j^* : H^i(X/k, E_0) \to H^i(Y/k, j^* E_0)$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$ et une injection pour $i = n - 1$.

D'après ([0], 1.6.3) $\mathrm{gr}^S E_0$ est engendré par ses sections horizontales. Dans la suite $\mathscr{E}$ désignera ou bien E_0, ou bien $\mathrm{gr}^S E_0$: d'après (i) et (ii) $\mathscr{E}$ admet localement des bases de sections horizontales. Nous allons montrer que

$$(1.1.3) \qquad \begin{tikzcd} H^i(X/k, \mathscr{E}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\wr"] & H^i(Y/k, j^*\mathscr{E}) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbb{H}^i(X, \mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}) & \mathbb{H}^i(Y, (j^*\mathscr{E})_{(Y,Y)} \otimes \Omega^\bullet_{Y/k}) \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$ et une injection pour $i = n - 1$.

Le théorème sera ainsi démontré pour le cas (i). Pour le cas (ii) on sait d'après ([0], 1.12.3) que le gradué $\mathrm{gr}^S E_0$ commute aux images inverses : puisque la filtration $\mathscr{F}^S E_0$ est séparée, finie et exhaustive

([0], 1.6.4) on est ramené par le lemme des cinq et la suite de cohomologie relative à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{gr}^S E_0 \to E_0/\mathscr{F}^{S+1}E_0 \to E_0/\mathscr{F}^S E_0 \to 0,$$

à démontrer l'assertion (1.1.3) pour obtenir le théorème dans le cas (ii).

Pour ce faire on filtre le complexe $\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}$ par les sous-complexes

$$\mathrm{Fil}^j(\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}) = \mathscr{I} . \tau_j(\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}) + \nabla(\mathscr{I} . \tau_j(\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}))$$

où $\mathscr{I}$ est l'idéal de Y dans X, ∇ la différentielle de $\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}$ et $\tau_j(\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k})$ est le complexe égal à $\mathscr{E}_{(X,X)} \otimes \Omega^\bullet_{X/k}$ en degré $\geqslant j$, et à 0 en degré $< j$. Puisque $\mathscr{E}_{(X,X)}$ admet localement des bases de sections horizontales on conclut comme dans [B 2]. □

1.2. *Application aux pentes du Frobenius sur* $H^i(X/W,E)$.

Sous les hypothèses de 1.1.1 supposons maintenant que E soit non dégénéré de niveau N, i.e. est muni de $u : F^*E \to E$ et $v : E \to F^*E$ tels que $u \circ v = p^N$ et $v \circ u = p^N$ pour $N \in \mathbb{N}$. Si l'on munit $\mathbb{R}\Gamma(X/W,E)$ des endomorphismes (cf. II, 2.5) $\Phi^*_E = \mathbb{R}\Gamma(u) \circ F^*$ (encore noté Φ^*) et $\Phi_{*E} = F_* \circ \mathbb{R}\Gamma(v)$ (noté Φ_*) on sait (II, 2.5) que

$$\Phi_*\Phi^* = p^{n+N}. \tag{1.2.1}$$

Nous noterons encore Φ_* et Φ^* les endomorphismes induits sur la partie libre $H^*(X/W,E)_l$ de $H^*(X/W,E)$.

La proposition suivante s'établit comme dans ([B 2], 2°).

Proposition 1.2.2. — *Soit* $0 \leqslant i \leqslant n$ *; alors*

$$\Phi_*(H^i(X/W,E)_l) \subset p^{n-i}H^i(X/W,E)_l.$$

Corollaire 1.2.3. — *Soit* $0 \leqslant i \leqslant n$ *; alors*

$$\Phi^*(H^{n+i}(X/W,E)_l) \subset p^i H^{n+i}(X/W,E)_l.$$

En effet $H^{n+i}(X/W,E)_l$ est dual de $H^{n-i}(X/W,E^\vee)_l$ et la dualité transforme $\Phi_{*E^\vee} = F_{*E^\vee} \circ \mathbb{R}\Gamma(v_{E^\vee}) = F_{*E^\vee} \circ \mathbb{R}\Gamma((u_E)^\vee)$ en $\Phi^*_E = \mathbb{R}\Gamma(u_E) \circ F^*_E$: le corollaire résulte alors de 1.2.2 appliqué à $E^\vee$. □

THÉORÈME 1.2.4. — *Pour* $0 \leqslant i \leqslant n$, *chaque pente* α *du F-cristal* $(H^i(X/W,E)_l,\Phi^*)$ [resp. $(H^{n+i}(X/W,E)_l,\Phi^*)$] *satisfait* $0 \leqslant \alpha \leqslant i + N$ [resp. $i \leqslant \alpha \leqslant n + N$], *où* N *est le niveau du F-cristal* E.

Compte tenu de la relation (1.2.1) ce théorème se démontre comme celui de ([B 2], 2). □

2. Cas d'un F-cristal unité.

On reprend ici les hypothèses et notations de (II, 2) en supposant que E est un F-cristal unité muni de $u : F^*E \xrightarrow{\sim} E$. Nous allons montrer que la fonction $L(X,E,t)$ est quotient de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Explicitons tout d'abord l'endomorphisme de Frobenius F de

$$H^0(X/W_m,(F^*E)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/W_m}} E) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W_m}}(F^*E,E)\,;$$

plus généralement si E_1 est un F-cristal unité et E_2 un F-cristal quelconque, avec $\Phi_1 : E_1^\sigma := F^*E_1 \xrightarrow{\sim} E_1$, $\Phi_2 : E_2^\sigma \to E_2$, et $\varphi \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ on pose $F(\varphi) = \Phi_2 \circ \varphi^\sigma \circ \Phi_1^{-1}$: dans le cas où $E_2 = E$, $E_1 = E^\sigma$, $\Phi_1 = u^\sigma$, $\Phi_2 = u$, on a alors

(2.1) $$F(u) = u \circ u^\sigma \circ (u^\sigma)^{-1} = u\,.$$

Pour $x \in X^{F^r}$, soit g_x : $\operatorname{Spec}(k(x)) \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural et j_x: $\operatorname{Spec}(k(x)) \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique ; la trace de l'endomorphisme F^r de $\mathbb{R}\Gamma(X/W_m,E)$ est fournie par (démonstration de II, (1.6.2)) :

$$\operatorname{Tr}(F^r) = \sum_{x \in X^{F^r}} g_{x*}(\operatorname{Tr}(F_x^r))\,.$$

Nous venons d'établir que $u \in H^0(X/W_m,(F^*E)^\vee \otimes \mathrm{E})$ est fixe sous F ; il en est de même de $F_x^r \in H^0(\operatorname{Spec}(k(x))/W_m, j_{x\,\mathrm{cris}}{}^*(E^\vee \otimes \mathrm{E}))$ qui est induit par l'itéré de u, et de $\chi(F_x^r) = \operatorname{Tr}(F_x^r) \in W_m(k(x))$ où le morphisme χ est défini dans la démonstration de (II, (1.6.2)) ; comme g_x est un morphisme entre schémas de dimension 0, la relation (II, (2.16.1)) montre que $\operatorname{Tr} F^r \in W_m(k)$ est fixe par le Frobenius, i.e. $\operatorname{Tr} F^r \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Par passage à la limite projective on déduit de (II, 2.2 et (2.3)) que

(2.2) $$L(X,E,t) \in (1 + t\mathbb{Z}_p[[t]]) \cap K(t)\,;$$

la méthode des déterminants de Hankel ([Bour.], A IV, 4., exercice 1) fournit alors $L(X,E,t) \in (1+t\mathbb{Z}_p[[t]]) \cap \mathbb{Q}_p(t)$. Or la formule (II, 2.2.1) montre que $L(X,E,t) = R(t)/S(t)$, avec $R, S \in 1 + tW[t]$. Si on choisit $P, Q \in \mathbb{Q}_p[t]$ tels que $L(X,E,t) = P(t)/Q(t)$ avec $(P,Q) = 1$, on a $P|R$, $Q|S$, et donc les racines inverses de P et Q sont de valuations p-adiques $\geqslant 0$; d'où $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}_p[t]$. Nous avons établi

PROPOSITION 2.3. — *Soient X un schéma propre et lisse de dimension n sur $\mathbb{F}_q$, et E un F-cristal unité sur X, alors*

$$L(X,E,t) = P(t)/Q(t),$$

avec $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}_p[t]$, P et Q premiers entre eux.

3. Cas d'un *F*-cristal unité à monodromie finie.

3.1. *Revêtements étales et cristaux.*

Nous ferons pour ce 3.1 les hypothèses suivantes : k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et K le corps des fractions de W, X est un schéma propre et lisse sur k, G un groupe fini, $f: Y \to X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G et E un $\mathcal{O}_{X/W}$-module localement libre.

PROPOSITION 3.1.1. — *Sous les hypothèses précédentes on a les isomorphismes :*

$$\begin{aligned} H^i(X/W,E) \otimes_W K &\simeq \{H^i(X/W, f_{\mathrm{cris}*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(E)) \otimes_W K\}^G \\ &\simeq \{H^i(Y/W, f_{\mathrm{cris}}{}^*(E)) \otimes_W K\}^G . \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme de la proposition est clair car $f_{\mathrm{cris}*}$ est un foncteur exact (f est fini et étale !).

Établissons d'abord le

LEMME 3.1.2. — *Sous les hypothèses* 3.1 *on a*

$$(f_{\mathrm{cris}*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(E))^G \simeq E .$$

Comme E est localement libre on a un isomorphisme

$$f_{\mathrm{cris}*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \simeq f_{\mathrm{cris}*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(\mathcal{O}_{X/W}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/W}} E ,$$

et l'action de G sur le membre de gauche se fait par l'intermédiaire de $f_{\mathrm{cris}_*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(\mathcal{O}_{X/W})$ puisque G agit trivialement sur E : on est ramené à prouver le lemme pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$. Soit (U,T) un ouvert du site cristallin zariskien $\mathrm{Cris}(X/W)$: l'image inverse de f sur U est aussi un revêtement fini étale galoisien $Y \times_X U \to U$ de groupe G, qui se relève de manière unique, par l'équivalence des sites étales de U et T (puisque U et T ont même espace sous-jacent), en $h : T' \to T$ fini étale galoisien de groupe G ; il s'agit de démontrer que

$$\{f_{\mathrm{cris}_*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(\mathcal{O}_{X/W})_{(U,T)}\}^G \simeq \mathcal{O}_T,$$

i.e. $(h_* h^*(\mathcal{O}_T))^G \simeq \mathcal{O}_T$, ce qui est clair car $h^*(\mathcal{O}_T) \simeq \mathcal{O}_{T'}$.

Grâce à 3.1.2 il nous suffit donc de montrer que pour tout $\mathcal{O}_{X/W}[G]$-module A on a un isomorphisme

$$(3.1.3) \qquad (H^i(X/W,A) \otimes_W K)^G \simeq H^i(X/W,A^G) \otimes_W K.$$

Pour cela on va établir l'existence et la dégénérescence de deux suites spectrales de même aboutissement et dont les termes E_2 sont :

$$\begin{aligned} E_2'^{i,j} &= H^j(G,H^i(X/W,A) \otimes_W K), \\ E_2''^{i,j} &= H^j(X/W,\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W},A)) \otimes_W K, \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_{X/W}$ étant muni de l'action triviale de G. Compte tenu des isomorphismes

$$\begin{aligned} \Gamma(X/W,A)^G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W}}(\mathcal{O}_{X/W},A)^G &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W},A) \\ &\simeq \Gamma(X/W,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W},A)) \simeq \Gamma(X/W,A^G), \end{aligned}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X/W}[G]\text{-mod} \arrow[r, "\mathcal{F}_1=\Gamma(X/W,-)\otimes_W K"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & K[G]\text{-mod.} \arrow[r, "\mathcal{F}_2=(-)^G"] & K-\mathrm{ev.} \arrow[d, equal, "\mathrm{Id.}"] \\ \mathcal{O}_{X/W}[G]\text{-mod} \arrow[r, "\mathcal{F}_3=(-)^G"'] & \mathcal{O}_{X/W}\text{-mod.} \arrow[r, "\mathcal{F}_4=\Gamma(X/W,-)\otimes_W K"'] & K-\mathrm{ev.}, \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{A}$-mod (resp. K-ev.) désigne la catégorie des $\mathcal{A}$-modules (resp. des K-espaces vectoriels). Les quatre catégories du diagramme sont abéliennes et ont suffisamment d'injectifs ; $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ sont des foncteurs exacts à gauche, de même que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_4$ car K est plat sur W. On notera $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_4 \circ \mathcal{F}_3$. Pour tout $\mathcal{O}_{X/W}$[G]-module A, l'ordre de G annule $H^j(G,H^i(X/W,A))$ pour $j \geqslant 1$ ([Se 1], VIII, § 2, cor. 1 de prop. 4), donc $E_2'^{i,j} = H^j(G, H^i(X/W, A) \otimes_W K) = 0$ pour $j \geqslant 1$: en particulier $\mathscr{F}_1$ transforme les injectifs en $\mathscr{F}_2$-acycliques, d'où l'existence de la première suite spectrale ([M 3], App. B, th. 1)

$$E_2'^{i,j} \Rightarrow R^{i+j}\mathscr{F}(A),$$

et de plus on a

$$R^n\mathscr{F}(A) \simeq E_2'^{n,0} = (H^n(X/W, A) \otimes_W K)^G.$$

Pour l'existence de la deuxième suite spectrale et la dégénérescence en E_2 il nous suffit de même de montrer que $\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W}, A)$ est annulé par l'ordre de G pour $i \geqslant 1$: cela se fait en remplaçant dans les constructions de Serre (*loc. cit.*) l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers par $\mathcal{O}_{X/W}$; d'où un second isomorphisme

$$R^n\mathscr{F}(A) \simeq E_2''^{0,n} = H^n(X/W, A^G) \otimes_W K.$$

On a ainsi établi (3.1.3), donc 3.1.1. □

3.2. *Représentations p-adiques et F-cristaux à monodromie finie.*

On reprend, pour ce 3.2, les hypothèses du 2. Nous noterons $M \simeq (\mathbb{Z}_p)^h$ le $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini associé à E ([K 1], Rk 5.5) ; le F-cristal E correspond alors à une représentation continue (*loc. cit.*)

$$\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M).$$

DÉFINITION 3.2.1. — *Le F-cristal unité E est dit à monodromie finie (resp. et entière) si l'image de* ρ *est un groupe fini (resp. s'il existe un* $\mathbb{Z}$*-module libre de type fini* M' *et un isomorphisme* $M' \otimes \mathbb{Z}_p \simeq M$ *tels que* $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ *se factorise par* $\rho' : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$*, d'image finie).*

Un exemple trivial est fourni par le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/W}$.

Pour une notion voisine, celle de représentation p-adique à monodromie locale finie, on pourra consulter l'article de Richard Crew ([Cr 2]).

Avant d'étudier les propriétés des F-cristaux à monodromie finie et de fournir des exemples non triviaux, rappelons comment à une représentation continue $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ du π_1 dans un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini M on associe un F-cristal unité E (cf. [K 1] ; [K 3], 4.1 ; [Sa], VI, 3.1).

Au $\mathbb{Z}_p$-module M on associe le système local p-adique $(N_n)_{n \geqslant 1}$ suivant : N_n est le système local sur X associé au $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de type fini M/p^nM muni d'une action d'un quotient fini G_n de $\pi_1(X)$ (puisque l'action de ρ est continue). En particulier, pour chaque entier n, N_n se trivialise sur un revêtement fini étale galoisien de groupe G_n ; de plus, dire que E est à monodromie finie signifie que le groupe $\varprojlim_n G_n$ est fini, i.e. que le système de tous les N_n est trivialisé sur un même revêtement fini étale galoisien de X de groupe le groupe fini $\varprojlim_n G_n$. Le cristal E s'obtient comme suit : soit (U,T) un objet du site cristallin zariskien $\mathrm{Cris}\,(X/W)$; comme p est nilpotent sur T, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $p^n\mathcal{O}_T = 0$, d'où un homomorphisme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_T$ et on pose

$$E_{(U,T)} = (N_n^T)_{\mathrm{Zar}} \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_T,$$

(où $(N_n^T)_{\mathrm{Zar}}$ est le faisceau zariskien sur T déduit du faisceau étale N_n sur T relevant $N_{n|U}$ (les sites étales sur T et U sont équivalents). Pour décrire l'action du Frobenius sur E nous supposerons dans la suite que T est lisse sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$; la puissance $p^{\text{ième}}$ sur U se relève, puisque U est affine, en un endomorphisme (pas nécessairement unique !) φ_T de T et on définit le Frobenius F_T sur $E_{(U,T)}$ par

$$F_T(x \otimes t) = x \otimes \varphi_T(t).$$

En fait, $(E_{(U,T)}, F_T)$ s'obtient par descente via l'action de $\pi_1(X)$: voici comment. Soit $U_n \to U$ un revêtement fini étale galoisien de groupe $G_n = \mathrm{Aut}(T_n/T)$ tel que la représentation

$$\pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M) \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/p^n}(M/p^nM)$$

se factorise par G_n et soit $h : T_n \to T$ le relèvement de $U_n \to U$. Alors $h^*(N_n^T)$ est le faisceau constant M/p^nM et on a

$$E_{(U_n, T_n)} \simeq (M/p^nM) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T_n}.$$

Puisque $T_n \to T$ est étale, φ_T se relève de manière unique en φ_{T_n} sur T_n : par l'unicité, φ_{T_n} commute avec $\mathrm{Aut}(T_n/T)$. Le Frobenius F_{T_n} sur $E_{(U_n, T_n)}$ est défini par l'endomorphisme φ_{T_n}-linéaire

$$F_{T_n}(x \otimes t) = x \otimes \varphi_{T_n}(t).$$

L'action de $g \in G_n = \mathrm{Aut}(T_n/T)$ sur $E_{(U_n, T_n)}$ est donnée par

$$g(x \otimes t) = (\rho(g))(x) \otimes (g^{-1})^*(t),$$

où $(g^{-1})^* : \mathcal{O}_{T_n} \to \mathcal{O}_{T_n}$ est associé à $g^{-1} : T_n \xrightarrow{\sim} T_n$. Par descente, $(E_{(U,T)}, F_T)$ est l'unique objet sur T dont l'image inverse sur T_n est $\mathrm{Aut}(T_n/T)$-isomorphe à $(E_{(U_n, T_n)}, F_{T_n})$; en particulier on a un isomorphisme de faisceaux

$$E_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} \{h_* h^*(E_{(U,T)})\}^{G_n}. \tag{3.2.2}$$

Pour la construction inverse, qui à un F-cristal unité E associe la représentation ρ on consultera l'exposé de Katz ([K 3], 4.1).

Nous *supposerons désormais*, dans ce paragraphe 3.2, que le *F-cristal unité E est à monodromie finie*, et nous allons étudier les propriétés de sa fonction L. La représentation ρ associée à E se factorise donc en

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M),$$

où G est un groupe fini qui s'identifie, avec les notations de 3.2, à $\varprojlim_n G_n$. Par suite il existe un revêtement $f : Y \to X$ fini étale galoisien de groupe G qui trivialise le système local p-adique $(N_n)_{n \geqslant 1}$, i.e. qui trivialise E : $f_{\mathrm{cris}}{}^*(E) \simeq (\mathcal{O}_{Y/W})^h$; on notera au passage que (3.2.2) refournit ici l'isomorphisme 3.1.2

$$E \simeq \{f_{\mathrm{cris}_*} f_{\mathrm{cris}}{}^*(E)\}^G.$$

D'après 3.1.1 on a donc

$$H^i(X/W, E) \otimes_W K \simeq \{H^i(Y/W, f_{\mathrm{cris}}{}^*(E)) \otimes_W K\}^G \simeq \{H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^G.$$

Par conséquent le polynôme caractéristique de F sur

$$H^i(X/W, E) \otimes_W K \subset H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

divise $\det(1 - tF | H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^{\mathrm{rg}(M)}$. Compte tenu de [K-M] ceci prouve la 1re assertion de

PROPOSITION 3.2.3. — *Soient X un schéma projectif, lisse, géométriquement connexe de dimension n sur $\mathbb{F}_q$ et E un F-cristal unité à monodromie finie sur X, alors*

(3.2.3.1) *les valeurs propres de F sur $H^i(X/W, E) \otimes_W K$ sont des entiers algébriques de valeurs absolues (archimédiennes) égales à $(\sqrt{q})^i$,* (3.2.3.2) *la seule valeur propre possible de* F *sur* $H^0(X/W,E)\otimes_W K$ (resp. *sur* $H^{2n}(X/W,E)\otimes_W K$) *est* 1 (resp. q^n),

(3.2.3.3) $\det(1-tF|H^i(X/W,E)\otimes_W K)\in 1+t\mathbb{Z}_p[t]$.

La 2^e assertion résulte des égalités

$$\det(1-tF|H^0(Y/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)=1-t$$

et

$$\det(1-tF|H^{2n}(Y/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)=1-q^n t.$$

La 3^e assertion s'établit facilement, compte tenu de la 1^re et de 2.3, en paraphrasant une argumentation de Deligne ([D], preuve de (1.7) ⇒ (1.6)). □

Compte tenu de (II, 2.2) on a aussi montré que

(3.2.4) $$L(X,E,t)=\prod_{0\leqslant i\leqslant 2n}[\det\{1-tF|(H^i(Y/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}M\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)^G\}]^{(-1)^{i+1}}.$$

Comme on définit la fonction L de Grothendieck attachée à une représentation ρ d'un groupe fini G agissant sur un $\mathbb{F}_q$-schéma Y propre et lisse à fibres géométriquement connexes ([M 3], V, § 2, exercise 2.21 ; et [K 2] p. 170) par

(3.2.5) $$L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho,t):=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}t^n/n.(1/\#G)\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho(g)).\#(Y(\overline{\mathbb{F}}_q)^{F_Y^n\circ g})\right),$$

où $\overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et F_Y le Frobenius géométrique de Y, on a aussi établi, via (3.2.4) et ([K 2], p. 171) la proposition :

Proposition 3.2.6. — *Soient X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe de dimension n sur $\mathbb{F}_q$, E un F-cristal unité sur X à monodromie finie de groupe G, $\rho:\pi_1(X)\to G\to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ la représentation attachée à E et $Y\to X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G, alors*

$$L(X,E,t)=L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho,t).$$

Cette proposition fournit par (II, 2.2) une autre démonstration de la rationalité des fonctions L de Grothendieck associées à une représentation p-adique d'un groupe fini, dans le cas propre et lisse.

Corollaire 3.2.7. — *Sous les hypothèses de* 3.2.3, *et en supposant E à monodromie finie entière on a, pour tout entier i* :

$$\det(1-tF|H^i(X/W,E)\otimes_W K)\in 1+t\mathbb{Z}[t].$$

Par 3.2.6 on sait que $L(X,E,t) = L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho,t) \in 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$, d'où, par les déterminants de Hankel, $L(X,E,t) \in \mathbb{Q}(t)$; comme les racines et pôles de $L(X,E,t)$ sont les inverses d'entiers algébriques, on en déduit, par la même méthode que pour la fonction zêta ([M 3], VI, § 13, 12.5 (*c*)), que $L(X,E,t) = P(t)/Q(t)$ avec $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}[t]$. On conclut alors, par l'argument de Deligne (démonstration de (3.2.3.3)). □

3.3. *Exemples liés à la représentation régulière.*

Soient G un groupe fini d'ordre d premier à p, X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ et $f: Y \to X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G : nous allons donner un exemple non trivial de F-cristal unité à monodromie finie attaché à cette situation.

Soit M un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d, ayant une base $(e_t)_{t \in G}$ indexée par les éléments de G ; la représentation régulière $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ est donnée par $\rho(s)(e_t) = e_{st}$. Posons $v_1 = \sum_{t \in G} e_t$, $V_1 = \mathbb{Z}_p v_1$ et choisissons une bijection $\varphi : \{1, \ldots, d\} \to G$: soit V_2 le $\mathbb{Z}_p$-module libre de base $(e_{\varphi(i)} - e_{\varphi(i+1)})_{i=1,\ldots d-1}$. Puisque ρ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on peut la considérer comme une représentation à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, $\rho' : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M \otimes \mathbb{Z}_p)$, où $M \otimes \mathbb{Z}_p \simeq V_1 \oplus V_2$ car $p \nmid d$; V_1 est clairement stable par G et V_2 aussi, en effet :

pour $s \in G$, $\rho(s)(e_{\varphi(i)} - e_{\varphi(i+1)}) = e_{s\varphi(i)} - e_{s\varphi(i+1)} = e_{\varphi(j)} - e_{\varphi(h)}$

et si $h > j$ on a

$$e_{\varphi(j)} - e_{\varphi(h)} = (e_{\varphi(j)} - e_{\varphi(j+1)}) + (e_{\varphi(j+1)} - e_{\varphi(j+2)}) + \cdots + (e_{\varphi(h-1)} - e_{\varphi(h)}) ;$$

raisonnement analogue si $h < j$. La représentation ρ' se décompose donc en $\rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$, où $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(V_1)$ est la représentation triviale et $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(V_2)$ est la restriction de ρ' à V_2. A chaque ρ_i ($i = 1,2$) on peut associer un F-cristal unité à monodromie finie E_i sur X. D'après la description 3.2 du F-cristal unité associé à une représentation, il est clair que $E_1 = \mathcal{O}_{X/W}$, et donc par 3.2.6 que la fonction $L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho_1,t)$ est la fonction zêta de X, $Z(X,t)$. Comme la fonction zêta de Y est fournie par la représentation régulière ρ de G ([K 2]) on obtient

$$Z(Y,t) = L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho,t) = L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho_1,t) . L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho_2,t),$$

i.e.

$$Z(Y,t) = Z(X,t) . L(X,E_2,t) . \tag{3.3.1}$$

Dans la situation de (3.3.1) on calcule facilement la constante de l'équation fonctionnelle (II, 2.12)

$$\varepsilon(E_2) = \pm\ q^{n(\chi(X)/2)(1-d)},$$

où $n = \dim X$ et $d = \# G$, et on obtient

$$L(X, E_2^\vee, t) = L(X, E_2, t)\,;$$

il suffit pour cela d'écrire les équations fonctionnelles pour les fonctions L et zêta via (3.3.1).

On aurait pu aussi associer directement à la représentation régulière $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}}(M)$, un F-cristal unité E à monodromie finie sur X tel que

$$L^{\mathrm{Groth}}(Y, \rho, t) = L(X, E, t)\,;$$

ci-dessus on a obtenu la décomposition $E \simeq E_1 \oplus E_2$.

Particularisons encore la situation pour exhiber un exemple où le facteur $L(X, E_2, t)$ de (3.3.1) n'est pas trivial, i.e. tel que $L(X, E_2, t) \not\equiv 1$. Nous supposerons pour cela que X est une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$, et $Y \to X$ est un revêtement fini étale galoisien de X, de groupe G, par une courbe Y géométriquement connexe. On sait qu'alors

$$Z(X,t) = \frac{P_X(t)}{(1-t)(1-qt)} \quad \left(\text{resp. } Z(Y,t) = \frac{P_Y(t)}{(1-t)(1-qt)}\right)$$

où $P_X(t)$ (resp. $P_Y(t)$) est un polynôme de degré $2g(X)$ (resp. $2g(Y)$). D'après la formule d'Hurwitz on a $g(Y) - 1 = d(g(X)-1)$. Donc si X est une courbe rationnelle (resp. elliptique), Y l'est aussi et le facteur $L(X, E_2, t)$ est trivial comme on le voit sur les degrés de $P_X(t)$ et $P_Y(t)$.

Par contre si $g(X) > 1$ il existe des revêtements finis étales galoisiens $Y \to X$ non triviaux, i.e. de groupe $G \neq \{1\}$, donc avec $g(Y) > g(X)$: en effet si $\bar{X}$ désigne l'image inverse de X sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, la partie première à p, $\pi_1(\bar{X})^{(p)}$, de $\pi_1(\bar{X})$ est un groupe libre à $2g(\bar{X})$ générateurs et une relation. J.-P. Serre fournit également des exemples de tels revêtements non triviaux ([Se 4], prop. 13 et 15). Dans un tel cas $L(X, E_2, t) = P_Y(t)/P_X(t)$ est un polynôme à coefficients entiers (cf. 3.2.7) de degré $2(g(Y)-g(X)) = 2(d-1)(g(X)-1) > 0$, ce qui fournit un *exemple non trivial de F-cristal unité à monodromie finie.*

Dans ce cas le signe de $\varepsilon(E_2)$ est bien déterminé :

$$\varepsilon(E_2) = + q^{(d-1)(g(X)-1)},$$

car $L(X,E_2,t) = \det(1-tF|H^1(X/W,E) \otimes_W K)$ est de degré pair. Si l'on décompose ρ_2 en somme de représentations irréductibles non triviales θ_i de degré d_i et que l'on suppose les θ_i réalisables sur $\mathbb{Z}_p$ (par exemple si les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité $\in \mathbb{Z}_p$, où m est le p.p.c.m. des ordres des éléments de G), on peut leur associer des F-cristaux unité $\mathscr{E}_i$ à monodromie finie et donc factoriser le polynôme

$$L(X,E_2,t) = \prod_i (L(X,\mathscr{E}_i,t))^{d_i},$$

où $L(X,\mathscr{E}_i,t)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$: si en outre G est commutatif, les $\mathscr{E}_i$ sont de rang 1 ([Se 3], I, 3.1, Théo. 9).

IV. VALEURS DE FONCTIONS L

Soient X un schéma propre et lisse, géométriquement connexe de dimension d sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$ à $q = p^a$ éléments, et E un F-cristal unité sur X. On a montré que

$$L(X,E,t) = \prod_{0 \leqslant i \leqslant 2d} (P_i(X,E,t))^{(-1)^{i+1}},$$

avec $P_i(X,E,t) = \det(1-tF|H^i(X/W,E) \otimes_W K)$. Le but de cette 4^e partie sera de donner un équivalent de la fonction $L(X,E,t)$ de la variable p-adique t lorsque $t \to q^{-r}$; lorsque $d = 2r$, on donnera également, comme conséquence du théorème de dualité de ([E 2]), un équivalent p-adique de $P_{2r}(X,E,t)$ lorsque $t \to q^{-r}$.

Dans le cas où X est projectif et E à monodromie finie entière on obtient même plus : on donnera en (IV, 6) des équivalents lorsque $t \to q^{-r}$ (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$) des deux quantités précédentes, grâce à l'introduction de faisceaux l-adiques (l premier distinct de p).

Pour formuler nos résultats nous reprendrons la plupart des notations de l'introduction de ([M 4]).

L'ordre d'un groupe M est noté $\# M$, et son sous-groupe de torsion, M_{tors}. Pour un morphisme $\alpha : M \to N$ de groupes abéliens on pose

$$z(\alpha) = \# \operatorname{Ker} \alpha / \# \operatorname{Coker} \alpha,$$

quand les deux ordres sont finis. Supposons que M et N sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini de même rang et que (a_i) (resp. (b_i)) est une base de M (resp. N) mod. torsion : si $\alpha : M \to N$ est tel que $\alpha(a_i) = \sum_j z_{ij} b_j$ mod-torsion alors ([T], lemma Z. 1) $z(\alpha)$ est défini si et seulement si $\det(z_{ij}) \neq 0$ et dans ce cas on a

$$z(\alpha) = \# M_{\text{tors}} / (\# N_{\text{tors}}) . \det \alpha,$$

où l'on a posé $\det \alpha = |\det(z_{ij})|_p^{-1}$ et $|p|_p^{-1} = p$.

Il existe des applications canoniques

$$\varepsilon^i : H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r)) \to H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(E,r)),$$

où les $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r))$ seront définis en 1.4 à la façon de (II, 2.7) ; on pose alors

$$\chi(X, \mathbb{Z}_p(E,r)) = z(\varepsilon^{2r}) . \prod_{i \neq 2r,\, 2r+1} (\# H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r)))^{(-1)^i}$$

quand tous les termes sont définis et finis. Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, $\bar{W}$ l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}$, $\bar{K} = \operatorname{Frac}(\bar{W})$ et $\bar{E}$ l'image inverse de E sur $\bar{X}$. Notons H.R. l'hypothèse suivante.

H.R. — *q^r n'est pas valeur propre du Frobenius géométrique sur $H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_{\bar{W}} \bar{K}$ pour $i \neq 2r$.*

Cette hypothèse H.R. est notamment vérifiée pour X projectif et $E = \mathcal{O}_{X/W}$ d'après l'« hypothèse de Riemann » démontrée par Deligne ([D] et [K-M]), ou pour un F-cristal unité E à monodromie finie (cf. III, 3). Nous montrerons (1.3.2), sous l'hypothèse H.R., que $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r))$ est fini pour $i \neq 2r$, $2r + 1$. Comme les groupes $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r))$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ (1.1.1), $\chi(X, \mathbb{Z}_p(E,r))$ est défini si et seulement si $\det(\varepsilon^{2r})$ est défini ; dans ce cas on a

$$\chi(X, \mathbb{Z}_p(E,r)) = \prod_{0 \leq i \leq 2d+1} (\# H^i(X, \mathbb{Z}_p(E,r))_{\text{tors}})^{(-1)^i} / \det(\varepsilon^{2r}).$$

Soit $\gamma : x \to x^q$ le générateur de $\Gamma = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$; nous noterons $SS(X,E,r)$ l'hypothèse suivante :

$SS(X,E,r)$: 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$.

Cette hypothèse, qui est en fait une conjecture, est vérifiée pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$ dans certains cas (cf. [M 4]).

Fixons les dernières notations avant d'énoncer nos résultats. Sur l'ouvert $(\bar{X},\bar{X})$ du site cristallin Cris $(\bar{X}/\bar{k})$ est associé au cristal $\bar{E}$ un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module $\bar{E}_{(\bar{X},\bar{X})}$: on posera

$$h^{ij} = \dim H^j(\bar{X},\bar{E}_{(\bar{X},\bar{X})} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \Omega^i_{\bar{X}})$$

et

$$\chi(X,E,r) = \sum_{0\leqslant i\leqslant r}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant d} (-1)^{i+j}(r-i)h^{ij}.$$

Si M est un Γ-module, soit M^Γ (resp. M_Γ) le noyau (resp. le conoyau) de γ-Id : notons

$$\rho_r = \dim_{\mathbb{Q}_p}(H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))^\Gamma).$$

Posons enfin

$$\alpha_r(X,E) = s^{2r+1}(E,r) - s^{2r}(E,r) - s^{2r}(E^\vee,r) + \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})<r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})),$$

où $E^\vee$ est le dual linéaire de E, $s^i(E,r) := \dim \mathbf{H}^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r))$ (comme schéma en groupe parfait : cf. 1 et 2), $\{a_{i,1}, a_{i,2} \ldots, a_{i,j} \ldots)$ étant les inverses des racines de $P_i(X,E,t)$ et $\mathrm{ord}_q(q^m u) = m$ si $|u|_p = 1$.

Les deux théorèmes qui suivent généralisent des théorèmes de Milne ([M 4], 0.1 et 0.2) :

THÉORÈME 0.1. — *Supposons H.R. satisfaite ; alors le nombre $\chi(X,\mathbb{Z}_p(E,r)))$ est défini si et seulement si $SS(X,E,r)$ est satisfaite, et dans ce cas on a l'équivalent suivant pour la topologie p-adique :*

$$L(X,E,t) \sim c_0.\chi(X,\mathbb{Z}_p(E,r)).q^{\chi(X,E,r)}.(1-q^r t)^{-\rho_r},$$

quand $t \to q^{-r}$, avec $c_0 \in \mathbb{Z}_p$, $|c_0|_p = 1$.

THÉORÈME 0.2. — *Soit $d = \dim X = 2r$, et supposons H.R. et $SS(X,E,r)$ satisfaits. Alors $P_{2r}(X,E,t)$ est équivalent à*

$$c_1 \cdot \frac{\# H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}}{q^{\alpha_r(X,E)}.(\# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma_{\mathrm{tors}})(\# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee,\mathrm{r}))^\vee_{\mathrm{tors}})} \cdot \det(\varepsilon^{2r})(1-q^r t)^{\rho_r}$$

pour la topologie p-adique, quand $t \to q^{-r}$, avec $c_1 \in W$, $|c_1|_p = 1$.

Remarque. — Ce théorème 0.2 généralise le théorème 0.2 de Milne ([M 4]), dans lequel il faut noter l'expression erronée de $\alpha_r(X)$: il faut y lire

$$\alpha_r(X) = s^{2r+1}(r) - 2s^{2r}(r) + \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})<r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})),$$

et non pas $-s^{2r}(r)$ à la place du $-2s^{2r}(r)$; Milne a publié des corrections [M 5]. Cette différence provient d'une erreur dans le lemme ([M 4], 6.7) (pour l'énoncé correct voir 5.1 et 5.1.7), erreur due à l'assertion suivante de ([M 4], 6.7) « $H^{2r}(\bar{X},\hat{\mathbb{Z}}(r)_{\mathrm{tors}}$ est fini », ce qui est faux en général ([I-R], IV, 3), mais vrai quand X est une surface ([I-R], IV, 3.5).

1. Résultats de finitude pour les faisceaux $\nu_n(E,r)$.

Soient $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^a$ éléments, X un schéma propre et lisse de dimension d sur $S = \operatorname{Spec} k$ et E un F-cristal unité sur X. W (resp. $\bar{W}$) désigne l'anneau des vecteurs de Witt de k (resp. d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k), $K = \operatorname{Frac}(W)$, $\bar{K} = \operatorname{Frac}(\bar{W})$. On notera $\bar{E}$ l'image inverse de E sur $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, et γ le générateur canonique de $\Gamma = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$, $x \mapsto x^q$; $\varphi = \gamma^{-1}$ agit sur $\bar{X}$ par $1 \otimes \varphi$ et donc sur (cf. [E 1], III, 2)

$$H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r)) := \varprojlim_n H^i(\bar{X},\nu_n(\bar{E},r));$$

on note encore φ cette action sur $H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Si π est le morphisme de topos $(X/S)_{\mathrm{parf}} \to S_{\mathrm{parf}}$ ([E 1], III) on rappelle que $R^i\pi_*(\nu_n(E,r))$ est représentable par un S-schéma en groupes parfait algébrique $\mathbf{H}^i(X,\nu_n(\mathrm{E},r))$ (noté parfois $\mathbf{H}^i_n$) : on désigne par $\mathbf{U}^i(X,\nu_n E,r))$ (ou $\mathbf{U}^i_n$) la composante neutre de celui-ci et par $\mathbf{D}^i(X,\nu_n(E,r))$ (ou $\mathbf{D}^i_n$) le quotient $\mathbf{H}^i_n/\mathbf{U}^i_n$. Nous avons vu ([E 1], III, 3.1) que $H^i_n := H^i(\bar{X},\nu_n(\bar{E},r))$ (resp. $H^i := H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))$ est l'ensemble des $\bar{k}$-points du groupe quasi-algébrique ([Se 2]) $\mathbf{H}^i_n$ (resp. du groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^i(X,\nu.(E,r))$ noté aussi $\mathbf{H}^i$). On montre comme dans ([I-R], IV, 3.4 p. 193) que le pro-objet des composantes neutres $\mathbf{U}^i_.$ est essentiellement constant ; on note $\mathbf{U}^i$ le groupe quasi-algébrique $\mathbf{U}^i(X,\hat{\nu}(E,r)) := \varprojlim_n \mathbf{U}^i_n$, qui est annulé par une puissance de p

puisqu'unipotent. Notons $\mathbf{D}^i = \varprojlim_n \mathbf{D}^i_n$; puisque $\varprojlim$ est exact dans la catégorie des groupes pro-algébriques ([Se 2]) on a $\mathbf{D}^i = \mathbf{H}^i/\mathbf{U}^i$.

On désignera par $s^{i+r}(E,r))$ la dimension du schéma en groupes parfait pro-algébrique $\varprojlim_n \mathbf{H}^i(X, \nu_n(E,r))$. On montre comme Milne ([M 4], § 3) que $s^{i+r}(E,r)$ est fini : c'est le nombre de copies de $\mathbb{G}_a^{pf}$ (= perfectisé de $\mathbb{G}_a$) intervenant dans les quotients d'une suite de composition du groupe quasi-algébrique $\mathbf{U}^i(X,\hat{\nu}(E,r))$.

Proposition 1.1. — *Soient i et r deux entiers. Sous les hypothèses précédentes on a :*

(1.1.1) *$H^i(X,\hat{\nu}(E,r)) := \varprojlim_n H^i(X,\nu_n(E,r))$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, nul pour $i > d+1$;*

(1.1.2) *$H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini pour $r = 0$ ou $\dim X$, ou pour $i = 0,1$; de plus $H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r)) = 0$ pour $i > d$;*

(1.1.3) *$H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}$, $H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))_{\mathrm{tors}})_{\Gamma}$ et $H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))_{\Gamma})_{\mathrm{tors}}$ sont des p-groupes finis ;*

(1.1.4) *la suite longue suivante est exacte*

$$\cdots \to H^i(X,\hat{\nu}(E,r)) \to H^i(X,E\otimes W\Omega^r) \xrightarrow{1-F} H^i(X,E\otimes W\Omega^r) \to \cdots,$$

où l'on a posé $H^i(X,E\otimes W\Omega^r) := \varprojlim_n H^i(X,E_n\otimes W_n\Omega^r)$.

Nous donnerons plus loin (5.1.5) une relation précise entre $\# H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}$ et $\# H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r))_{\mathrm{tors}})_{\Gamma}$.

On a établi (1.1.1) en ([E 2], II, 3.3) et on prouve la 1^re^ assertion de (1.1.2) comme ([I-R], IV, (3.5.3) p. 194) ; la 2^e^ est établie en ([E 1], III, (3.2.3.1)).

Pour prouver (1.1.3) nous aurons besoin d'un lemme. Puisque $\mathbf{D}^i = \mathbf{H}^i/\mathbf{U}^i$ on a une suite exacte

$$(1.1.5) \qquad 0 \to \mathbf{U}^i(\bar{k}) \to \mathbf{H}^i(\bar{k}) \to \mathbf{D}^i(\bar{k}) \to 0.$$

Lemme 1.1.6. — *$\mathbf{D}^i(\bar{k})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini.*

Pour ce lemme on notera $D^i = \mathbf{D}^i(\bar{k})$, $U^i = \mathbf{U}^i(\bar{k})$, $D^i_n = \mathbf{D}^i_n(\bar{k})$ et ${}_{p^n}A$ le noyau de la multiplication par p^n sur un groupe A. Comme

$\mathbf{H}_n^i$ et $\mathbf{D}_n^i$ sont annulés par p^n, le seul élément infiniment p-divisible de $\mathbf{H}^i$ et $\mathbf{D}^i$ est 0, donc

$$\varprojlim_n {}_{p^n}\mathbf{H}^i = \varprojlim_n {}_{p^n}\mathbf{D}^i = 0. \tag{1.1.7}$$

D'autre part les suites exactes ([E 1], III, 2.8) fournissent la suite exacte

$$0 \to \mathbf{H}^i/p^n \to \mathbf{H}_n^i \to {}_{p^n}\mathbf{H}^{i+1} \to 0, \tag{1.1.8}$$

d'où, via (1.1.7), l'isomorphisme

$$\mathbf{H}^i = \varprojlim_n \mathbf{H}_n^i \simeq \varprojlim_n (\mathbf{H}^i/p^n). \tag{1.1.9}$$

Si $n \gg 0$ on a vu que $p^n\mathbf{U}^i = 0$; pour un tel n la multiplication par p^n sur la suite exacte

$$0 \to \mathbf{U}^i \to \mathbf{H}^i \to \mathbf{D}^i \to 0,$$

fournit, via le lemme du serpent, la suite exacte

$${}_{p^n}\mathbf{D}^i \to \mathbf{U}^i \to \mathbf{H}^i/p^n \to \mathbf{D}^i/p^n \to 0 ;$$

puisque $\varprojlim_n$ est exact dans la catégorie des groupes quasi-algébriques ([Se 2]), il résulte de (1.1.7) et (1.1.9) que

$$\mathbf{D}^i \simeq \varprojlim_n (\mathbf{D}^i/p^n),$$

et donc que

$$D^i \simeq \varprojlim_n (D^i/p^n). \tag{1.1.10}$$

Comme $\mathbb{Z}_p$ est complet, la relation (1.1.10) montre que D^i est engendré par tout sous-ensemble qui l'engendre mod. p^n. Or si $n \gg 0$ il existe un tel sous-ensemble qui soit fini : en effet si n est tel que $p^n\mathbf{U}^i = 0$ on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbf{U}^i & \to & \mathbf{H}^i/p^n & \to & \mathbf{D}^i/p^n & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbf{U}_n^i & \to & \mathbf{H}_n^i & \to & \mathbf{D}_n^i & \to & 0,
\end{array}$$

où l'injection au milieu est celle de (1.1.8) ; d'où une injection de $\mathbf{D}^i/p^n$ dans le groupe quasi-algébrique fini $\mathbf{D}_n^i$, ce qui fournit une injection de D^i/p^n dans le groupe abstrait fini D_n^i. D'où le lemme.

Établissons à présent (1.1.3). Puisque $p^n U^i = 0$ pour $n \gg 0$, (1.1.5) fournit une suite exacte

$$(1.1.11) \qquad 0 \to U^i \to H^i_{\mathrm{tors}} \to D^i_{\mathrm{tors}} \to U^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0\,.$$

Or $U^i_\Gamma = 0$: en effet $\mathbf{U}^i$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_a^{pf}$; on peut donc se ramener à $\mathbf{U}^i(\bar{k}) = \bar{k}$, et $\gamma - 1$ est surjectif sur $\bar{k}$. Le lemme du serpent appliqué à (1.1.11) fournit alors l'isomorphisme (où $M := \mathbf{H}^i(\bar{k})$)

$$(M_{\mathrm{tors}})_\Gamma \xrightarrow{\sim} (\mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}})_\Gamma$$

et la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbf{U}^i(\bar{k})^\Gamma & \to & (M_{\mathrm{tors}})^\Gamma & \to & (\mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}})^\Gamma & \to 0 \\ & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & \\ & \mathbf{U}^i(k) & & (M^\Gamma)_{\mathrm{tors}} & & (\mathbf{D}^i(\bar{k})^\Gamma)_{\mathrm{tors}}. & \end{array}$$

Par le même argument, on a aussi $M_\Gamma \simeq \mathbf{D}^i(\bar{k})_\Gamma$ et $(M_\Gamma)_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathbf{D}^i(\bar{k})_\Gamma)_{\mathrm{tors}}$. Puisque $\mathbf{U}^i(k)$ est fini et que $\mathbf{D}^i(\bar{k})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, la propriété (1.1.3) en découle.

L'assertion (1.1.4) résulte de la suite exacte ([E 1], III, 2.4.1)

$$0 \to \nu.(E,r) \to E.\otimes W.\Omega^r \xrightarrow{1-F} E.\otimes W.\Omega^r \to 0,$$

en passant à la limite projective dans la suite exacte longue de pro-objets

$$\cdots \to H^i(X,\nu.(E,r))$$
$$\to H^i(X,E.\otimes W.\Omega^r) \xrightarrow{1-F} H^i(X,E.\otimes W.\Omega^r) \to \cdots :$$

un tel passage à la limite est légitime car les $H^i(X,\nu_n(E,r))$ sont finis et le système projectif $\{H^i(X,E_n\otimes W_n\Omega^r)\}_n$ vérifie la condition de Mittag-Leffler ([E 1]). □

Résultats de finitude avec l'hypothèse H.R.

1.2. Sous les hypothèses de **1** nous supposons de plus H.R. satisfaite, i.e., d'après (II, 2.8), que 1 n'est pas valeur propre de φ agissant sur $H^i(\bar{X},\hat{\nu}(\bar{E},r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ pour $i \neq r$.

On note $H^i(X,\nu_\infty(E,r)) = \varinjlim_n H^i(X,\nu_n(E,r))$, où les flèches de transition du système inductif sont la multiplication par p.

THÉORÈME 1.3. — *Sous les hypothèses* 1.2 *on a* :

1.3.1. $H^i(X, \nu_\infty(E,r))$ *est un p-groupe fini pour* $i \neq r$, $r+1$;

1.3.2. $H^i(X, \hat{\nu}(E,r))$ *est un p-groupe fini pour* $i \neq r$, $r+1$;

1.3.3. $H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))_\Gamma$ *sont des p-groupes finis pour* $i \neq r$.

La démonstration de 1.3.1 est celle de ([C-S-S], théorème 3, p. 782), la seule différence résidant dans le pas n° 9 de *loc. cit.* où l'on remplace l'hypothèse de Riemann par notre hypothèse H.R. (qui est plus faible mais fournit l'argument).

Pour 1.3.2 prouvons d'abord le lemme :

LEMME 1.3.4. — *Sous les hypothèses* 1.2, *et pour* $i \neq r$, *il existe un entier n tel que* $p^n H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))^\Gamma = p^n H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))_\Gamma = 0$.

Posons $M = H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))$ et $H = H^i(\bar{X}, \bar{E}_{W(\bar{X})} \otimes W\Omega^r)$. Puisqu'il existe un entier n tel que $p^n H_{\text{tors}} = 0$ ([E 1], II, 4.1.3) la suite exacte ([E 1], III, (3.2.3.1))

$$0 \to M \to H \xrightarrow{1-F} H \to 0$$

fournit l'inclusion

$$M/M_{\text{tors}} \subset \operatorname{Ker}\{1-F : H/H_{\text{tors}} \to H/H_{\text{tors}}\} ;$$

H/H_{tors} étant de type fini sur W ([E 1], II, 4.1.3), il résulte de ([I], II, 5.11) que M/M_{tors} est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Donc M est somme directe d'un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini et d'un $\mathbb{Z}_p$-module de torsion annulé par une puissance de p. Sous les hypothèses du lemme, 1 n'est pas valeur propre de φ agissant sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, ce qui fournit un isomorphisme $1-\varphi$: $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$; donc la suite exacte

$$0 \to M^\Gamma \to M \xrightarrow{1-\varphi} M \to M_\Gamma \to 0$$

prouve que M^Γ et M_Γ sont de p-torsion, ce qui établit le lemme compte tenu de la description précédente de M.

Revenons à 1.3.2. La dégénérescence de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^i(k, H^j(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r)) \Rightarrow H^{i+j}(X, \hat{\nu}(E,r))$$

fournit des suites exactes

$$(1.3.5) \qquad 0 \to H^{i-1}(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))_\Gamma \to H^i(X, \hat{\nu}(E,r)) \to H^i(\bar{X}, \hat{\nu}(\bar{E},r))^\Gamma \to 0,$$

ce qui prouve, par le lemme 1.3.4, l'existence d'un entier n tel que $p^nH^i(X,\hat{\nu}(E,r)) = 0$ pour $i \neq r,\ r+1$; l'assertion 1.3.2 en résulte puisque $H^i(X,\hat{\nu}(E,r))$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ (1.1.1).

La propriété 1.3.3 résulte des suites exactes (1.3.5), de (1.1.1) et de 1.3.4. □

Notation 1.4. — Par analogie avec la cohomologie l-adique ($l \neq p$) nous introduisons les notations suivantes (cf. [M 4], 1) :

$$\begin{aligned}
&H^i(X,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(E,r)) := H^{i-r}(X,\nu_n(E,r))\\
&H^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) := \varprojlim_n H^i(X,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(E,r)) = H^{i-r}(X,\hat{\nu}(E,r))\\
&H^i(X,\mathbb{Q}_p(E,r)) := H^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\\
&H^i(X,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(E,r)) := \varinjlim_n H^i(X,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(E,r)) = H^{i-r}(X,\nu_\infty(E,r))\\
&\mathbf{U}^i(X,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(E,r)) := \mathbf{U}^{i-r}(X,\nu_n(E,r)),\\
&\mathbf{D}^i(X,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(E,r)) := \mathbf{D}^{i-r}(X,\nu_n(E,r)),
\end{aligned}$$

et $\quad \mathbf{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r)),\ \ldots,\ U^i = \mathbf{U}^i(k),\ D^i = \mathbf{D}^i(k).$

Le F-cristal unité E est le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ ([B-M], 4.1) d'un groupe p-divisible étale G, i.e. le groupe p-divisible correspondant à E par [Sa] est $G^\vee$ défini par les duaux de Pontryagin $G^\vee(n)$ de $G(n) := \operatorname{Ker}\{p^n : G \to G\}$. On a alors les *interprétations suivantes :*

$$\text{(1.4.1)}\quad \begin{aligned} H^i(X,\mathbb{Z}_p(E,0)) &= H^i(X_{\text{ét}},M)\\ &= \varprojlim_n H^i(X_{\text{ét}},G^\vee(n)) \quad \text{(cohomologie étale)}, \end{aligned}$$

où $M =$ « $\varprojlim_n$ » $G^\vee(n)$ est le $\mathbb{Z}_p$-faisceau étale lisse associé à E ;

$$\text{(1.4.2)}\quad H^i(X,\mathbb{Z}_p(E,1)) = \varprojlim_n H^i(X_{fppf},G^*(n)) \quad \text{(cohomologie plate)},$$

où $G^*(n)$ est le dual de Cartier de $G(n)$.

Par contre pour $r > 1$ on n'a pas d'interprétation analogue.

Les valeurs propres du Frobenius (resp. du Frobenius géométrique) agissant sur $H^i(X/W,E) \otimes_W K$ (resp. sur $H^i(\bar{X}/\bar{W},\bar{E}) \otimes_{\bar{W}} \bar{K}$) seront notées a_{ij} et on posera

$$P_i(X,E,t) = \prod_j (1-a_{ij}t).$$

2. Expression de $\chi(X,E,r)$ et de l'action de φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$.

Avec les hypothèses et notations du **1** on suppose de plus X géométriquement connexe sur $k = \mathbb{F}_q$.

Rappelons que $s^i(E,r)$ désigne la dimension du schéma en groupes parfait pro-algébrique $\mathbf{H}^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r))$, et que dans l'introduction on a défini le nombre

$$\chi(X,E,r) = \sum_{0\leqslant i\leqslant r}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant d} (-1)^{i+j}(r-i)h^{ii},$$

avec $h^{ij} = \dim H^j(\bar{X},\bar{E}_{(\bar{X},\bar{\mathfrak{X}})}\otimes\Omega^i_{\bar{\mathfrak{X}}})$. De la même façon que Milne dans ([M 4], § 3 et 4) on démontre alors la proposition suivante qui relie $\chi(X,E,r)$ aux $s^i(E,r)$:

PROPOSITION 2.1. — *Avec les hypothèses ci-dessus on a la formule*

$$\chi(X,E,r) = \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{ij})\leqslant r} (-1)^i(r-\mathrm{ord}_q(a_{ij})) - \sum_i (-1)^i s^i(E,r),$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(X/W,E)\otimes_W K$.

En utilisant la notation 1.4, la proposition (II, 2.8) donne l'action de φ sur $H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$:

PROPOSITION 2.2. — *Avec les hypothèses du* 2 *on a :*

(2.2.1) $$\det(1-\varphi t\,|\,H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))) = \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{ij})=r} (1-q^{-r}a_{ij}t).$$

La formule (2.2.1) est à rapprocher du résultat en cohomologie l-adique ($l\neq p$) ([B-N], § 2, p. 41) :

(2.2.2) $$\det(1-\varphi t\,|\,H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_l(r))) = \prod_j (1-q^{-r}a'_{ij}t),$$

où les a'_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius géométrique sur $H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_l)$. Si X est projectif sur k et $E = \mathcal{O}_{X/W}$, on a $a'_{ij} = a_{ij}$ ([K-M]).

3. Calculs préliminaires.

3.1. *Remarque liminaire.* — Les calculs qui suivent reprennent le travail de Milne ([M 4], § 6). On aura soin de noter toutefois que Milne y utilise à plusieurs reprises l'assertion selon laquelle « $H^i(\bar{X},\hat{\mathbb{Z}}(r))_{\mathrm{tor}}$ est fini », ce qui est faux en général, puisque $H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\mathrm{r}))_{\mathrm{tors}}$ n'est pas nécessairement fini ([I-R], IV, 3) : cette erreur n'a pas d'incidence avant le lemme 6.7 de [M 4], dans lequel il faut apporter un terme correcteur (cf. 5.1, 5.1.7 et [M 5]) ; le théorème 0.2 de Milne ([M 4]) s'en trouve modifié comme indiqué dans l'introduction de la 4^e partie.

3.2. Si M est un Γ-module, on désignera par $f : M^\Gamma \to M_\Gamma$ l'application induite par l'identité de M : plus particulièrement on la notera $f^{i,r}$ pour $M = H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))$ et $f^{2r} := f^{2r,r}$. On note (cf. introduction)

$$z(f) = \#\,\mathrm{Ker} f/\#\,\mathrm{Coker} f.$$

On a le lemme suivant ([T] lemma Z 4, p. 208).

LEMME 3.3. — *Soit M un Γ-module de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Alors $z(f)$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, auquel cas*

$$z(f) = \left|\prod_{a_i \neq 1} (a_i - 1)\right|_p,$$

où $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sont les valeurs propres de γ sur $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

LEMME 3.4. — *Soit $f^{ir} : H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma \to H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma$ l'application induite par l'identité. Alors $z(f^{ir})$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ sur $H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$, auquel cas*

$$z(f^{ir}) = \left|\prod_{a_{ij} \neq q^r} (1 - q^{-r} a_{ij})\right|_p \cdot \left|\prod_{\mathrm{ord}_q(a_{ij}) < r} q^r/a_{ij}\right|_p \cdot q^{s^i(E,r)}.$$

Par la démonstration de (1.1.2) on a montré l'existence d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{lccccccc} & 0 \to \mathbf{U}^i(\bar{k})^\Gamma & \to & H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma & \to & \mathbf{D}^i(\bar{k})^\Gamma \to 0 \\ (3.4.1) & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f^{ir}} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ & 0 & \to & H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{D}^i(\bar{k})_\Gamma \to 0, \end{array}$$

f' et f'' étant induites par l'identité. On a

$$z(f') = \#\mathbf{U}^i(\bar{k})^\Gamma = \#\,\mathbf{U}^i(k) = q^{s^i(E,r)}.$$

Comme $\mathbf{D}^i(\bar{k})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini (1.1.6) et $\mathbf{D}^i(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$, on lui applique 3.3 : $z(f'')$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$ et alors

$$\begin{aligned} z(f'') &= \left| \prod_{\substack{\mathrm{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij}\neq q^r}} (1-(q^r/a_{ij})) \right|_p \quad (\text{cf. } 2.2.1) \\ &= \left| \prod_{\substack{\mathrm{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij}\neq q^r}} (1-(q^r/a_{ij}))q^{-r}a_{ij} \right|_p \\ &= \left| \prod_{\substack{\mathrm{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij}\neq q^r}} (1-q^{-r}a_{ij}) \right|_p . \end{aligned}$$

Or, puisque

$$|1-q^{-r}a_{ij}|_p = \begin{cases} |q^{-r}a_{ij}|_p & \text{si } \mathrm{ord}_q(a_{ij}) < r \\ 1 & \text{si } \mathrm{ord}_q(a_{ij}) > r, \end{cases}$$

on obtient

$$z(f'') = \left| \prod_{a_{ij}\neq q^r} (1-q^{-r}a_{ij}) \right|_p \times \left| \prod_{\mathrm{ord}_q(a_{ij})<r} q^r/a_{ij} \right|_p .$$

D'où le résultat par $z(f^{ir}) = z(f')z(f'')$. □

(3.5) *Dans toute la suite de cet article on supposera l'hypothèse H.R. de l'introduction satisfaite.*

Cette hypothèse H.R. est équivalente par 2.2 à l'hypothèse :

(3.6) *1 n'est pas valeur propre de* φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E},r))$ *pour* $i \neq 2r$.

On déduit du lemme 3.4 :

PROPOSITION 3.7. — *Supposons H.R. satisfaite et soit* f^{ir} : $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma \to H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma$ *l'application induite par l'identité de* $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E},r))$. *Si* $i \neq 2r$, $z(f^{ir})$ *est toujours défini, et pour* $i = 2r$,

$z(f^{ir})$ est défini si et seulement si $SS(X,E,r)$ est satisfaite. Quand $z(f^{ir})$ est défini on a

$$z(f^{ir}) = \left|\prod_{a_{ij}\neq q^r} (1-q^{-r}a_{ij})\right|_p q^e,$$

avec $e = s^i(E,r) - \prod_{\operatorname{ord}_q(a_{ij})<r} (r-\operatorname{ord}_q(a_{ij}))$.

COROLLAIRE 3.8. — *Supposons H.R. satisfaite et $i \neq 2r$; alors $H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma$ sont finis et*

$$\# H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma / \# H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma = |P_i(X,E,q^{-r}|_p\, q^e,$$

avec $e = s^i(E,r) - \sum_{\operatorname{ord}_q(a_{ij})<r} (r-\operatorname{ord}_q(a_{ij}))$.

On applique le lemme Z. 1 de Tate [T] aux groupes finis $H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma$ (1.3.3), d'où

$$z(f^{ir}) = \# H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma / \# H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma\,;$$

le corollaire en résulte via 3.7. □

3.9. *Définissons ici les applications ε^i de l'introduction.*

On a supposé $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^a$ et $\gamma : \bar{k} \to \bar{k}$, $x \mapsto x^q$ est le générateur canonique de $\Gamma = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. On a un isomorphisme $\Gamma \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}$, $\gamma^\alpha \mapsto \alpha$, d'où

$$H^1(k,\hat{\mathbb{Z}}) := H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k),\hat{\mathbb{Z}}) \simeq H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k),\operatorname{Gal}(\bar{k}/k))\,;$$

or l'identité de Γ est un cocycle, et la classe de ce cocycle définit un élément θ_0

$$\theta_0 \in H^1(\Gamma,\Gamma) \simeq H^1(k,\hat{\mathbb{Z}}) = H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k,\hat{\mathbb{Z}}).$$

Par image inverse θ_0 fournit un élément θ

$$\theta \in H^1(X,\hat{\mathbb{Z}}) := \prod_l H^1(X,\mathbb{Z}_l),$$

et la composante $\theta_p \in H^1(X,\mathbb{Z}_p)$ de θ définit par cup-produit une application

(3.9.1) $$\begin{aligned}\varepsilon^i : H^i(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) &\to H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))\\ x &\mapsto \theta_p \cup x.\end{aligned}$$

En particulier l'application ε^{2r} s'insère, d'après ([M 4], 6.5) dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) & \xrightarrow{\varepsilon^{2r}} & H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma} & \xrightarrow{f^{2r}} & H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma}, \end{array} \tag{3.9.2}$$

où i et j sont donnés par (1.3.5). Comme $z(\varepsilon^{2r}) = z(j)z(f^{2r})z(i)$ ([T], lemma Z. 2), on en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.10. — *Supposons H.R. satisfaite. Alors le déterminant de* $\varepsilon^{2r}: H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) \to H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))$ *est défini si et seulement si* $SS(X,E,r)$ *est vrai. Dans ce cas* $z(\varepsilon^{2r})$ *est défini et l'on a*

$$\begin{aligned} z(f^{2r}) &= z(\varepsilon^{2r})\ \#\ H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma}/\#\ H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma} \\ &= [1/\det(\varepsilon^{2r})] \times [\#\ H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}/\#\ H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}] \\ &\quad \times [\#\ H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma}/\#\ H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma}] \end{aligned}$$

où $f^{2r}: H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma} \to H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma}$ *est induite par l'identité.*

4. Démonstration du théorème 0.1.

4.1. On suppose donc H.R. satisfaite. Il résulte de 3.10 et 1.3.2 que $\chi(X,\mathbb{Z}_p(E,r))$ est défini si et seulement si $SS(X,E,r)$ est satisfaite. Dans ce cas les suites exactes (1.3.5)

$$0 \to H^{i-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma} \to H^{i}(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) \to H^{i}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma} \to 0$$

montrent que

$$\begin{aligned} \chi(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) &= \left[\prod_{i\neq 2r} (\#\ H^{i}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma}/\#\ H^{i}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma})^{(-1)^i}\right] \\ &\quad \times [\# H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^{\Gamma}/\#\ H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_{\Gamma}] \times z(\varepsilon^{2r}) \\ &= \left[\prod_{i\neq 2r} (|P_i(X,E,q^{-r})|_p)^{(-1)^i}\right] z(f^{2r})q^{\delta} \quad \text{(cf. 3.10, 3.8),} \end{aligned}$$

avec

$$\delta = \sum_{i\neq 2r} (-1)^i s^i(E,r) + \sum_{i\neq 2r} (-1)^{i+1} \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{ij})<r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{ij}))$$

$$\delta = -\left[\chi(X,E,r)+s^{2r}(E,r)-\sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})\leqslant r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j}))\right] \quad \text{(cf. 2.1)}.$$

Or
$$z(f^{2r}) = \Big|\prod_{a_{2r,j}\neq q^r}(1-q^{-r}a_{2r,j})\Big|_p \times q^e,$$
avec
$$e = s^{2r}(E,r) - \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})<r}(r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})).$$
D'où
$$\chi(X,\mathbb{Z}_p(E,r)) = \Big|\Big\{\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant 2d} P_i(X,E,t)^{(-1)^i}\Big)/(1-q^rt)^{\rho_r}\Big\}_{t=q^{-r}}\Big|_p\ q^{-\chi(X,E,r)}$$
avec $\rho_r = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Q}_p(\bar{E},r))^\Gamma$ (cf. [T], lemma Z.4) ; c'est le théorème 0.1, car l'appartenance de C_0 à $\mathbb{Q}_p$ vient de ce que $L(X,E,t)$ est élément de $\mathbb{Q}_p(t)$ (III, 2.3). □

4.2. Soient X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe de dimension d sur $\mathbb{F}_q$, et E un F-cristal unité sur X ; on a noté (II, 2.12)
$$\varepsilon(E) = \det(-F|\mathbb{R}\Gamma(X/W,E))^{-1}$$
$$:= \prod_{0\leqslant i\leqslant 2d}[\det(-F|H^i(X/W,E)\otimes_W K)]^{(-1)^{i+1}}.$$

COROLLAIRE DU THÉORÈME 0.1. — *Avec les hypothèses* 4.2 *on a, pour tout entier* $r > d$
$$|\varepsilon(E)|_p = q^{r\chi(X,E)-\chi(X,E,r)}\,;$$
en particulier $\chi(X,\mathcal{O}_{X/W},r) = (r-d/2)\chi(X)$ *si* $r > d$.

Comme $\mathbb{Z}_p(E,r) = 0$ pour $r > d$ il suffit d'appliquer (II, 2.14) et le théorème 0.1 pour obtenir la 1re formule. La 2e formule résulte de $\varepsilon(\mathcal{O}_{X/W}) = \pm\, q^{-d\chi/2}$ où $\chi = \chi(X)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré ([B 1], VII, 3.2.5, p. 585). □

5. Démonstration du théorème 0.2.

On se place dorénavant dans les hypothèses du théorème 0.2 : en particulier H.R. est satisfaite et $d = 2r$.

LEMME 5.1. — *Sous les hypothèses précédentes on a :*
$$[1/\#\, H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}] \times [\#\, H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma/\#\, H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma]$$
$$= q^{-s^{2r+1}(E,r)+s^{2r}(E^\vee,r)}/[\#\, H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma_{\mathrm{tors}} \times \#\, H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee,\mathrm{r}))^\Gamma_{\mathrm{tors}}].$$

D'après le théorème de dualité ([E 2], II, 3.5]) on a une suite exacte

$$0 \to U^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r) \to H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r) \to D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^* \to 0,$$

où * désigne la dualité de Pontryagin; cette suite reste exacte en passant aux invariants sous Γ car $U^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma = 0$ (cf. la démonstration de (1.1.3)), d'où une suite exacte

$$\begin{aligned}(5.1.1)\quad 0 \to U^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E^\vee, r)) \to H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))^\Gamma \\ \to (D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma)^* \to 0.\end{aligned}$$

D'autre part, en passant à la limite inductive dans les suites exactes

$$\begin{aligned}0 \to H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))/p^n \to H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}/p^n(\bar{E}, r)) \\ \to {}_{p^n}H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \to 0,\end{aligned}$$

on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned}(5.1.2)\quad 0 \to H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes \mathbb{Z}_p\, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \\ \to H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\mathrm{tors}} \to 0;\end{aligned}$$

or $H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ étant fini (1.3.3), on a

$$(H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_\Gamma \simeq H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$$

ce qui fournit, par (5.1.2), un isomorphisme

$$\begin{aligned}(5.1.3)\quad H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma &\xrightarrow{\sim} (H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\mathrm{tors}})_\Gamma \\ \wr\Vert \\ D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma .\end{aligned}$$

Mettant (5.1.3) et (5.1.1) ensemble on obtient

$$(5.1.4)\quad \#(H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_{\mathrm{tors}})_\Gamma = q^{-s^{2r+1}(E^\vee, r)} \times \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))^\Gamma.$$

Admettons pour l'instant le lemme suivant :

LEMME 5.1.5. — *Pour tout couple d'entiers* (i, r) *on a une égalité où tous les termes sont finis :*

$$q^{s^i(E,r)} \times \# (H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\mathrm{tors}})_\Gamma = \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}.$$

La finitude du p-groupe $H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$, et les suites (1.3.5) fournissent la suite exacte

$$\begin{aligned}(5.1.6)\quad 0 \to H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \to H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\mathrm{tors}} \\ \to H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma_{\mathrm{tors}} \to 0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\# H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma/\# H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}} = 1/\# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}.$$

D'autre part, on tire de (5.1.4) et 5.1.5 :

$$1/\# H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma = q^{-s^{2r+1}(E,r)+s^{2r}(E^\vee,r)}/\ \# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee,r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}.$$

Le lemme 5.1 s'obtient en faisant le produit de ces deux égalités.

Prouvons le lemme 5.1.5. — La finitude des termes en présence résulte du **2** et de (1.1.3). Posons $M = H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))$, $\mathbf{U}^i(\bar{k}) = U^i(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))$ et $\mathbf{D}^i(\bar{k}) = M/\mathbf{U}^i(\bar{k})$. On a établi, dans la démonstration de (1.1.3), la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbf{U}^i(\bar{k})^\Gamma & \to & M^\Gamma_{\mathrm{tors}} & \to & \mathbf{D}^i(\bar{k})^\Gamma_{\mathrm{tors}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & = & \mathbf{U}^i(\bar{k})_\Gamma & \to & (M_{\mathrm{tors}})_\Gamma & \xrightarrow{\sim} & (\mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}})_\Gamma & \to & 0,
\end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales induites par l'identité. On obtient ainsi

$$\# M^\Gamma_{\mathrm{tors}}/\# (M_{\mathrm{tors}})_\Gamma = z(f) = z(f').(f'')\,; \quad \text{or} \quad z(f') = q^{s^i(E,r)}$$

et

$$z(f'') = \# \mathbf{D}^i(\bar{k})^\Gamma_{\mathrm{tors}}/\# (\mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}})_\Gamma = \# \mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}}/\# \mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}} \quad \text{car} \quad \mathbf{D}^i(\bar{k})_{\mathrm{tors}}$$

est fini, d'où $z(f'') = 1$, ce qui prouve 5.1.5. □

Remarque 5.1.7. — Le lemme 5.1 fournit le terme correcteur à apporter dans ([M 4], 6.7). La puissance de q qu'il faut lire dans *loc. cit.* est $-s^{2r+1}(r) + s^{2r}(r)$ et non pas $-s^{2r+1}(r)$.

Achevons maintenant la preuve de 0.2. — Notons $e = s^{2r}(E,r) - \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})<r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j}))$. De 3.7, 3.10 et 5.1 on déduit

$$\prod_{a_{2r,j}\neq q^r} |1-q^{-r}a_{2r,j}|_p^{-1} = z(f^{2r})^{-1}q^e$$

$$= [\# H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}/\# H^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}] \times [\# H^{2r-1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))_\Gamma/\# H^{2r+1}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma] \times \det(\varepsilon^{2r}) \times q^e$$

$$= [\# H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(E,r))_{\mathrm{tors}}/\{\# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E},r))^\Gamma_{\mathrm{tors}} \times \# H^{2r}(\bar{X},\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee,r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}\}] \times \det(\varepsilon^{2r}) \times q^{e-s^{2r+1}(E,r)+s^{2r}(E^\vee,r)}$$

ce qui est le théorème 0.2, puisque

$$- \alpha_r(X,E) = - s^{2r+1}(E,r) + s^{2r}(E,r) + s^{2r}(E^\vee,r) - \sum_{\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})<r} (r-\mathrm{ord}_q(a_{2r,j})).$$

□

6. Cas où E est à monodromie finie entière.

Soient X un schéma projectif, lisse, géométriquement connexe de dimension d sur $\mathbb{F}_q(q=p^a)$ et E un F-cristal unité à monodromie finie entière (III, 3.2.1), i.e. correspondant à une représentation

$$\rho : \pi_1(X) \to G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M),$$

où G est un groupe fini et M un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. On notera encore ρ la représentation

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M),$$

et $\rho_l : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l)$ désignera la composée de ρ avec l'injection $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l)$, où $M_l = M \otimes \mathbb{Z}_l$ (l premier quelconque).

Dans cette situation nous allons donner un *équivalent* (*pour la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$) *de la fonction* $L(X,E,t) \in \mathbb{Q}(t)$ au voisinage d'un pôle de la forme $t = q^{-r}$, généralisant ainsi les théorèmes 0.1 et 0.2 limités à des équivalents p-adiques. Il va nous falloir pour cela étendre (en les modifiant au besoin) les définitions de l'introduction du IV (cf. [M 4], Intr.) au cas $l \neq p$. Comme d'habitude on notera par une barre les images inverses sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$, et par Γ le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, de générateur $\gamma : x \mapsto x^q$.

Soit $Y \to X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G ; à ce revêtement et à la représentation ρ_l on associe le $\mathbb{Z}_l$-faisceau lisse $\mathscr{F}_l$ qui provient de la représentation

$$\rho_l : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l).$$

On vérifie alors immédiatement les identités ([Gr]) :

$$L(X,E,t) = L^{\mathrm{Groth}}(Y,\rho_l,t) = L(X,\mathscr{F}_l,t)$$

pour tout nombre premier l. Nous savons (III, (3.2.4)) que

$$(6.1)\quad L(X,E,t) = \prod_{0\leq i\leq 2d} \det(1-tF|H^i(X/W,E)\otimes_W K)^{(-1)^{i+1}}$$
$$= \prod_{0\leq i\leq 2d} \det(1-tF|\{H^i(Y/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p} M_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^G)^{(-1)^{i+1}}.$$

Il existe un analogue l-adique ($l \neq p$) de cette formule : puisque Y est projectif, l'égalité ([K 2], p. 170)

$$\det(1-tF|\{H^i(Y/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p} M_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^G) = \det(1-tF|\{H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l\}^G)$$

et l'isomorphisme

$$H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)^G \simeq H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)$$

provenant de la dégénérescence de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^j(G, H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)) \Rightarrow H^{i+j}(\bar{X}, \mathscr{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)$$

en E_2 ([Se 1], VIII, § 2, cor. 1 de prop. 4) fournissent

$$\begin{aligned}(6.2)\quad L(X,E,t) &= \prod_{0 \leqslant i \leqslant 2d} \det(1-tF|\{H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)\}^G)^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_{0 \leqslant i \leqslant 2d} \det(1-tF|H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l))^{(-1)^{i+1}};\end{aligned}$$

on retrouve ainsi l'expression l-adique ($l \neq p$) de Grothendieck pour les fonctions L ([Gr]). Ici il est à noter que

$$P_{i,l}(t) = \det(1-tF|H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l \otimes \mathbb{Q}_l) = \det(1-tF|H^i(X/W,E)\otimes_W K)$$

est à coefficients entiers relatifs indépendants de l : reprendre pour ça la démonstration de (III, 3.2.7) et l'argument de Deligne ([D], preuve de (1.7) $\Rightarrow$ (1.6)).

Pour $l \neq p$ et r un entier, notons

$$\mathscr{F}_l/l^n(r) = \mathscr{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}/l^n(r) \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_l(r) = \mathscr{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l(r)$$

les twistés à la Tate. La proposition suivante fournit les résultats de finitude analogues à ceux du 1 : ici l'hypothèse H.R. est satisfaite d'après (III, 3.2.3).

PROPOSITION 6.3. — *Sous les hypothèses de* 6 *avec* $l \neq p$ *et* r *un entier on a :*

(6.3.1) *Pour tout entier* i, $H^i(X, \mathscr{F}_l(r))$ *et* $H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l(r))$ *sont des* $\mathbb{Z}_l$-*modules de type fini,*

(6.3.2) *Pour tout entier* $i \neq 2r$, $2r+1$, $H^i(X, \mathscr{F}_l(r))$ *est fini,*

(6.3.3) *Pour tout entier* $i \neq 2r+1$, $H^i(X, \mathscr{F}_l(r))_{\text{tors}} = 0$ *pour presque tout* l, (6.3.4) *Pour tout entier* $i \neq 2r$, $H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l(r))^\Gamma$ *et* $H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l(r))_\Gamma$ *sont finis*,

(6.3.5) *Pour tout entier* $i \neq 2r,\ 2r+1$, $\varinjlim_n H^i(X, \mathscr{F}_l/l^n(r))$ *est fini et nul pour presque tout* l.

La démonstration reprend celle de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé ([C.S.S.], Théo. 2, p. 780) à ceci près que pour prouver (6.3.3) le polynôme

$$Q_i(t) = \det(1-\gamma t \mid H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l(r)) \otimes \mathbb{Q}_l) = \prod_j (1-(q^r/a_{ij})t), \tag{6.3.6}$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l) \otimes \mathbb{Q}_l$ (cf. [M 4], 5.6), est à coefficients rationnels (et non pas entiers) indépendants de l, car on a remarqué que $\det(1 - tF \mid H^i(\bar{X}, \mathscr{F}_l) \otimes \mathbb{Q}_l)$ est à coefficients entiers relatifs indépendants de l : ceci ne modifie toutefois pas le fait crucial que $|Q_i(1)|_l = 1$ pour presque tout l. On conclut comme dans (*loc. cit.*) grâce à un théorème de Gabber ([Ga]). □

Pour un morphisme $\alpha : A \to B$ de groupes abéliens on a noté $z(\alpha) = \# \operatorname{Ker} \alpha / \# \operatorname{Coker} \alpha$. Supposons que A et B sont de type fini sur $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, que $\alpha \otimes 1_{\mathbb{Q}} : A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme et que $\alpha_l := \alpha \otimes 1_{\mathbb{Z}_l} : A_l = A \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_l \to B_l = B \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_l$ est un isomorphisme modulo torsion pour presque tout l : si $(a_i^l)_i$ (resp. $b_i^l)_i$) est une base de A_l (resp. B_l) modulo torsion telle que

$$\alpha_l(a_i^l) = \sum_j z_{ij}^l b_j^l \text{ mod-torsion},$$

alors ([T], lemma Z.1) $z(\alpha)$ est défini si et seulement si $\det(z_{ij}^l) \neq 0$ et dans ce cas on a

$$z(\alpha) = \# A_{\text{tors}} / (\# B_{\text{tors}}) . \det \alpha,$$

où l'on a posé

$$\det \alpha = \prod_l |\det(z_{ij}^l)|_l^{-1}.$$

Pour $l \neq p$, $H^i(X, \mathscr{F}_l(r))$ désignera le groupe de cohomologie l-adique et pour $l = p$ ce sera $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ (cf. 1.4). Posons

$$H^i(X, \hat{\mathscr{F}}(r)) = \prod_l H^i(X, \mathscr{F}_l(r)).$$

L'élément $\theta \in H^1(X,\hat{\mathbb{Z}}) = \prod_l H^1(X,\mathbb{Z}_l)$ de 3.9 définit par cup-produit des applications

$$\varepsilon^i : H^i(X,\hat{\mathscr{F}}(r)) \to H^{i+1}(X,\hat{\mathscr{F}}(r)),$$

et l'on pose

$$\chi(X,\hat{\mathscr{F}}(r)) = z(\varepsilon^{2r}) . \prod_{\substack{i\neq 2r \\ 2r+1}} (\# H^i(X,\hat{\mathscr{F}}(r))^{(-1)^i}$$

quand tous les termes sont définis et finis. Il résulte de 6.3 et 1.3 que $H^i(X,\hat{\mathscr{F}}(r))$ est fini pour $i \neq 2r$, $2r+1$ et que $H^{2r}(X,\hat{\mathscr{F}}(r))_{\mathrm{tors}}$ est fini. Puisque les $\mathbb{Z}_l$-modules $H^i(X,\mathscr{F}_l(r))$ sont de type fini et que $H^{2r}(X,\mathscr{F}_l(r))_{\mathrm{tors}} = 0$ pour presque tout l, l'expression $z(\varepsilon^{2r}) = \Pi_l z(\varepsilon_l^{2r})$ est définie (donc $\chi(X,\hat{\mathscr{F}}(r))$ si et seulement si $H^{2r+1}(X,\hat{\mathscr{F}}(r))_{\mathrm{tors}}$ est fini et $\det(\varepsilon^{2r})$ est défini, auquel cas

$$\chi(X,\hat{\mathscr{F}}(r)) = \prod_{0\leqslant i\leqslant 2d+1} (\# H^i(X,\hat{\mathscr{F}}(r))_{\mathrm{tors}})^{(-1)^i}/\det(\varepsilon^{2r}).$$

Notons $SS(X,\mathscr{F}_l,r)$ l'hypothèse

$SS(X,\mathscr{F}_l,r)$: *1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $H^{2r}(\bar{X},\mathscr{F}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$.*

L'analogue du théorème 0.1 est alors :

THÉORÈME (0.1)′. — *Sous les hypothèses précédentes, le nombre $\chi(X,\hat{\mathscr{F}}(r))$ est défini si et seulement si $SS(X,\mathscr{F}_l,r)$ est vraie pour tout l, et dans ce cas*

$$L(X,E,q^{-s}) \sim \pm\ \chi(X,\hat{\mathscr{F}}(r))q^{\chi(X,E,r)}(1-q^{r-s})^{-\rho_r}$$

quand $s \to r$, où $\chi(X,E,r)$ et ρ_r ont le même sens qu'en 0.1.

La démonstration reprend celle de Milne ([M 4], 6) compte tenu du 4. □

Pour formuler la généralisation du théorème 0.2 il nous faut, pour tout nombre premier l, définir le groupe $H^i(X,\mathscr{F}_l^\vee(r))$: pour $l \neq p$ c'est celui de la cohomologie l-adique

$$H^i(X,\mathscr{F}_l^\vee(r)) := \varprojlim_n H^i(X,(\mathscr{F}_l/l^n)^\vee(r))$$

où

$$(\mathscr{F}_l/l^n)^\vee = \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}/l^n}(\mathscr{F}_l/l^n,\mathbb{Z}_l/l^n),$$

et pour $l = p$

$$H^i(X,\mathscr{F}_p^\vee(r)) := H^i(X,\mathbb{Z}_p(E^\vee,r))$$

où $E^\vee$ est le dual linéaire de E. On pose alors

$$H^i(X,\widehat{\mathscr{F}^\vee}(r)) = \prod_l H^i(X,\mathscr{F}_l^\vee(r)),$$

et de même sur $\bar{X}$. L'analogue de 0.2 s'énonce ;

THÉORÈME (0.2)'. — *Sous les hypothèses du 6, soit $d = 2r$ et supposons $SS(X,\mathscr{F}_l,r)$ satisfaite pour tout l. Alors $P_{2r}(X,E,q^{-s})$ est équivalent à*

$$\pm \frac{\# H^{2r+1}(X,\hat{\mathscr{F}}(r))_{\mathrm{tors}}}{q^{\alpha_r(X,E)}.(\# H^{2r}(\bar{X},\hat{\mathscr{F}}(r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}).(\# H^{2r}(\bar{X},\widehat{\mathscr{F}^\vee}(r))^\Gamma_{\mathrm{tors}})} \det(\varepsilon^{2r})(1-q^{r-s})^{\rho_r}$$

quand $s \to r$, où $\alpha_r(X,E)$ et ρ_r ont le même sens qu'en 0.2.

La démonstration est tout à fait semblable à celle du théorème 0.2 de Milne ([M 4]), compte tenu de la dualité de Poincaré pour le faisceau $\mathscr{F}_l/l^n$ $(l \neq p)$ et du 5. □

BIBLIOGRAPHIE

[B-N] P. BAYER, J. NEUKIRCH, On values of Zeta Functions and l-adic Euler characteristics, Invent. Math., 50 (1978), 35-64.

[B 1] P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, Lecture Notes in Math., n° 407, Springer Verlag, 1974.

[B 2] P. BERTHELOT, Sur le « théorème de Lefschetz faible » en cohomologie cristalline, C.R.A.S. Paris, t. 277, 12 nov. 1973, série A, p. 955-958.

[B 3] P. BERTHELOT, Le théorème de dualité plate pour les surfaces, d'après J. S. Milne, dans « Surfaces algébriques », Lecture Notes in Math., n° 868, Springer Verlag, 1981.

[B-M] P. BERTHELOT, W. MESSING, Théorie de Dieudonné cristalline I, Astérisque, 63 (1979), 17-38.

[B-O 1] P. BERTHELOT, A. OGUS, Notes on Crystalline Cohomology, Mathematical Notes, n° 21, Princeton University Press, (1978).

[B-O 2] P. BERTHELOT, A. OGUS, F-isocrystals and De Rham Cohomology I, Invent. Math,. 72 (1983), 159-199.

[Bour] N. BOURBAKI, Algèbre et Algèbre commutative, Hermann.

[C-E] H. CARTAN, S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[Cr 1] R. CREW : L-functions of p-adic characters and geometric Iwasawa theory, Invent. Math., 88 (1987), 395-403.

[Cr 2] R. CREW, F-isocrystals and p-adic representations. Algebraic geometry-Bowdoin 1985, *PSPM*, 46, Part 2 (1987), 111-138.

[C-S-S] J.-L. COLLIOT-THELENE, J.-J. SANSUC, C. SOULÉ, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. Journal, vol. 50, n° 3 (sept. 1983).

[D] P. DELIGNE, La conjecture de Weil I, Publ. Math. I.H.E.S., n° 43.

[E 0] J.-Y. ETESSE, Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un F-cristal unité et dualité plate pour les surfaces. Thèse 3e cycle, Rennes 1981.

[E 1] J.-Y. ETESSE, Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal *Compositio Math.*, 66 (1988), 57-120.

[E 2] J.-Y. ETESSE, Dualité plate pour les surfaces, à coeffients dans un groupe de type multiplicatif. Preprint Rennes. (A paraître au *Bulletin de la SMF.*)

[EGA] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32. EGA I, Grundlehren n° 166, Springer-Verlag, 1971.

[G] M. GROS, Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie logarithmique, Bull. Soc. Math. Fr., 113, Fasc. 4 (1985).

[Ga] O. GABBER, Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 297, Série I (1983), 179-182.

[Gr] A. GROTHENDIECK, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Séminaire Bourbaki n° 279, décembre 1964.

[I] L. ILLUSIE, Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 12 (1979), 501-661.

[I-R] L. ILLUSIE, M. RAYNAUD, Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt, Publ. Math. I.H.E.S., n° 57.

[K 1] N. KATZ, Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki n° 409, février 1972, Lecture Notes in Math., n° 383, Springer Verlag.

[K 2] N. KATZ, Crystalline Cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums, in Automorphic forms, Bombay 1979, Springer Verlag, 1981.

[K 3] N. KATZ, p-adic properties of modular schemes and modular forms, dans « Modular Functions of one Variable III », Lecture Notes in Math., n° 350, Springer Verlag (1973).

[K-M] N. KATZ, W. MESSING, Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields, Inventiones Math., 23 (1974), 73-77.

[L 1] S. LICHTENBAUM, Values of zeta and L-functions at zero, Astérisque, (1975), 24-25.

[L 2] S. LICHTENBAUM, Zeta functions of varieties over finite fields at $s = 1$, Arithmetic and Geometry, Progress in Math. 35, Birkhäuser (1983), 173-194.

[L 3] S. LICHTENBAUM, Values of zeta-functions at non-negative integers, Journées arithmétiques, Noordwijkerhout, July 1983.

[M 1] J.-S. MILNE, On a conjecture of Artin and Tate, Annals of Math., 102 (1975), 517-533.

[M 2] J.-S. MILNE, Duality in the Flat Cohomology of a Surface, Ann. Scient. Ec. Norm., Sup. 4e série, t. 9 (1976), 171-202.

[M 3] J.-S. MILNE, Etale cohomology, Princeton University Press, 1980.

[M 4] J.-S. MILNE, Values of Zeta Functions of Varieties over Finite Fields, Am. Jour. of Math., 108 (1986), 297-360.

[M 5] J.-S. MILNE, Values of Zeta Functions over Finite Fields : Complements and Corrections to, Amer. J. Math., 108 (1986), 297-360 5th May, 1986.

[O] A. OGUS, F-crystals and Griffiths transversality, Int. Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto (1977), 15-44.

[Sa] N. SAAVEDRA, Catégories tanakiennes, Lecture Notes in Math., n° 265, Springer Verlag (1972).

[Sch] P. Schneider, On the values of the zeta function of a variety over a finite field, Compositio Math., 46 (1982), 133-143.

[Se 1] J.-P. Serre, Corps locaux, Hermann, 1968.

[Se 2] J.-P. Serre, Groupes pro-algébriques, Publ. Math. I.H.E.S. n° 7 (1960).

[Se 3] J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, 1967.

[Se 4] J.-P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, Symposium internacional de topologia algebraica, Mexico (1958), 24-53.

[SGA $4^{1/2}$] Cohomologie étale, Lecture Notes in Math., n° 569, Springer Verlag (1977).

[SGA 5] Cohomologie l-adique et fonctions L, Lecture Notes in Math. n° 589, Springer Verlag (1977).

[SGA 6] Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Lecture Notes in Math., n° 225, Springer Verlag (1971).

[T] J. Tate, On a conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analogue, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam (1968), 189-214.

Manuscrit reçu le 29 septembre 1987.

Jean-Yves Etesse,
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.