

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

J. WEIER

Sur des invariants intégraux de champs enlacés

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 179-183

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__179_0

© Annales de l'institut Fourier, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR DES INVARIANTS INTÉGRAUX DE CHAMPS ENLACÉS

par Joseph WEIER (Fribourg Br.)

Étant donnés V une variété différentiable, f un champ de r -plans tangents et g un champ de s -plans tangents à V avec $r \geq s$, nous dirons que f et g sont « enlacés » s'il est impossible de déformer les champs f, g en des champs f', g' de manière que $g(p) \subset f(p)$ pour tous les points $p \in V$. A quelles conditions les champs f et g sont-ils enlacés? C'est cette question que traite notre note. M. le Professeur R. ТНОМ a bien voulu lire une première version de mon manuscrit et m'a suggéré différentes généralisations. Je lui en exprime ma très vive gratitude.

1. Un premier système invariant. — Soient R un espace numérique et r, n des entiers avec $1 \leq r < n$, V une n -variété différentiable compacte orientée plongée dans R , f un champ de r -plans tangents orientés et g un champ de directions tangentes à V .

On peut supposer: l'ensemble, A , de tous les points $p \in V$ satisfaisant $g(p) \subset f(p)$ est un r -polyèdre fini; l'ensemble, B , de tous $p \in V$ où $g(p)$ est orthogonal à $f(p)$ est un $(n-r)$ -polyèdre fini. Par (A, f, g) est déterminé (voir la deuxième section) un r -cycle, z , à coefficients entiers, par (B, f, g) un $(n-r)$ -cycle, ζ , de même à coefficients entiers. Si $z \neq 0$, alors les champs f et g sont sûrement enlacés. Il est donc impossible de déformer g en un champ g' tel que $g'(p) \subset f(p)$ pour tout point p .

Alors soit $z \sim 0$. Deux $(r + 1)$ -chaînes, x_1 et x_2 , de V avec $\partial x_1 = \partial x_2 = z$ seront dites appartenir à la même classe d'équivalence par rapport à z si $x_1 - x_2 \sim 0$. Soient X_1, X_2, \dots les classes d'équivalence obtenues de cette manière. Alors toute paire (X_i, ζ) définit, univoquement modulo les cycles homologues à zéro, un 1-cycle d'intersection, $S(i)$.

Si maintenant $\omega_1, \omega_2, \dots$, forment une base des 1-formes différentielles closes sur V , alors les nombres

$$\omega_{ij} = \int_{S(i)} \omega_j, \quad i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots,$$

sont univoquement déterminés par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant: Si l'on déforme f, g en des champs f', g' et si ω'_{ij} sont des nombres appartenant à (f', g') qui correspondent aux ω_{ij} , alors on peut supposer les ω'_{ij} munies d'indices de façon que $\omega_{ij} = \omega'_{ij}$ pour toute paire (i, j) avec $i \leq m$ et que $\omega_{ij} = 0, \omega'_{ij} = 0$ pour $i > m$.

2. Une caractérisation numérique de l'enlacement. — Au lieu des classes d'homotopie de champs de directions envisagées ci-dessus, on peut aussi prendre pour base des classes d'homologies: Soient g, g' deux champs de direction tangents à V . Alors il existe une homotopie $\{g^\tau\}$ de g en g' telle que chacun des champs g^τ possède au plus un nombre fini de singularités et que l'ensemble de toutes les paires (p, τ) , où p est singularité de g^τ , représente un 1-polyèdre fini, P . Ce dernier polyèdre est donc situé dans le cylindre ouvert $V \times (0,1)$. Soient s_i les 1-simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de P , s_j un des s_i et t un n -simplexe situé en $V \times (0,1)$ orthogonal à s_j et orienté par $V \times (0,1)$ et s_j . Alors $g^\tau(p)$ est, pour tout point (p, τ) de la $(n - 1)$ -sphère ∂t , un demi-rayon tangent à V . On obtient donc une transformation de la $(n - 1)$ -sphère ∂t dans la $(n - 1)$ -sphère de direction au point p . Soit b_j le degré de cette transformation. Alors $\sum b_i s_i$ est un 1-cycle. S'il existe une homotopie de g en g' , dont le 1-cycle ainsi construit est homologue à zéro, alors nous dirons que g et g' appartiennent à la même classe d'homologie.

Pour définir le cycle z de la première section, soient de nouveau s_i les r -simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de A , s_j un des s_i et t un petit $(n - r)$ -simplexe en V

orthogonal à s_i et orienté par (V, s_i) . Pour tout $p \in V$, soit $f^*(p)$ le $(n - r)$ -plan orthogonal à $f(p)$ et tangent à V au point p . Soit $f^*(p)$ orienté par la paire $(V, f(p))$. Alors $g(p)$ est, pour tout $p \in \partial t$, non orthogonal à $f^*(p)$. C'est pourquoi la projection orthogonale, $g^*(p)$, de $g(p)$ sur $f^*(p)$ est un demi-rayon en $f^*(p)$, non pas un point. Le simplexe t étant suffisamment petit, on peut supposer que tous les plans $f(p)$ avec $p \in t$ sont parallèles l'un à l'autre. Par suite, $g^*|\partial t$ détermine une transformation de la $(n - r - 1)$ -sphère ∂t dans une $(n - r - 1)$ -sphère de vecteurs. Soit de nouveau b_j le degré de cette transformation. Alors on a $z = \sum b_j s_j$.

Le cycle ζ se définit de façon analogue.

3. Sur la structure plus fine de la situation mutuelle. — Comme plus haut, soient V une n -variété différentiable compacte orientée plongée dans un espace numérique, r un entier positif $< n$, f un r -champ orienté et g un 1-champ orienté tangent à V . Soient à nouveau l'ensemble de tous les points $p \in V$ avec $g(p) \subset f(p)$ un r -polyèdre, A , et l'ensemble de tous $p \in V$ satisfaisant $g(p) \perp f(p)$ un $(n - r)$ -polyèdre, B . Comme plus haut, soient z le cycle défini par (A, f, g) et ζ celui déterminé par (B, f, g) .

Soient A_1, A_2, \dots les composantes connexes du polyèdre A et z_h^* le cycle $z|A_h$. Deux z_h^* , désignés par z_i^* et z_j^* , seront dits appartenir à la même « *composante d'homotopie* » au sens de M. J. NIELSEN (voir par exemple [2] et [3]) s'il existe un ensemble, W , ouvert par rapport à V satisfaisant à

$$A_i \cup A_j \subset W \quad \text{et} \quad (A_h \cup B) \cap \overline{W} = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \neq i, j$$

tel que l'on peut, sans changement sur $V - W$, déformer f, g en des champs f', g' qui jouissent de la propriété : l'ensemble de tous les points $p \in W$ avec $g'(p) \subset f'(p)$ est un polyèdre fini connexe.

Soient z_1, z_2, \dots les composantes d'homotopie de z et ζ_1, ζ_2, \dots , les composantes d'homotopie de ζ . Soient z'_1, z'_2, \dots celles des z_i homologues à zéro. Rangeons deux $(r + 1)$ -chaînes, x_1 et x_2 , à coefficients entiers satisfaisant $\partial x_1 = \partial x_2 = z'_h$ dans la même classe d'équivalence par rapport à z'_h si $x_1 - x_2 \sim 0$. De cette manière, les $(r + 1)$ -chaînes x avec $\partial x = z'_h$ se décomposent

en des classes d'équivalence, X_{h_1}, X_{h_2}, \dots , relativement à z'_h .
Toute paire

$$(X_{h_i}, \zeta_j)$$

définit, à des chaînes homologues à zéro près, un 1-cycle d'intersection, $S(h, i, j)$.

Soient $\omega_1, \omega_2, \dots$ les formes différentielles définies en la première section. Alors le système des nombres

$$\omega_{hijk} = \int_{S(h, i, j)} \omega_k,$$

$h = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$, est univoquement défini par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant :

Si f' est homotope à f et g' homotope à g et si les ω'_{hijk} forment un système appartenant à (f', g') , alors on peut supposer les ω'_{hijk} munies d'indices tels que l'on a : $\omega'_{hijk} = \omega_{hijk}$ pour tout quadruple (h, i, j, k) de façon que ω_{hijk} et ω'_{hijk} est définie, $\omega_{hijk} = 0$ si ω'_{hijk} n'est pas définie, $\omega'_{hijk} = 0$ si ω_{hijk} n'est pas définie.

De plus soient α_h une forme différentielle duale à z_h au sens du théorème d'isomorphisme de M. G. DE RHAM [1] et β_i une telle duale à ζ_i . Alors les nombres

$$\Omega_{hi} = \int_V \alpha_h \wedge \beta_i$$

sont uniquement déterminés au sens suivant : les Ω'_{hi} étant des nombres d'espèce analogue appartenant à (f', g') , alors le système des Ω'_{hi} est, à des zéros et des permutations près, égal au système des Ω_{hi} .

Les champs f et g sont sûrement enlacés si $\omega_{hijk} \neq 0$ pour au moins un quadruple (h, i, j, k) ou si $\Omega_{hi} \neq 0$ pour au moins une paire (h, i) .

Dans le cas général où g est un s -champ, on obtient, au lieu des cycles z et ζ définis plus haut, des cycles à coefficients locaux pris dans des groupes d'homotopie de variétés grassmanniennes (voir par exemple [4]). L'application du théorème d'isomorphisme de M. G. DE RHAM n'est plus possible maintenant sans constructions auxiliaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. V. D. HODGE, The theory and applications of harmonic integrals, *Cambridge*, 87-101 (1952).
 - [2] J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie zweiseitiger Flächen I, II, *Acta Mathem.* 50, 189-358 (1927), 53, 1-76 (1929).
 - [3] J. NIELSEN, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Kgl. Dänische Akad. Wiss.* 21, 1-89 (1944).
 - [4] N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton Mathem. Series* 12 (1957).
-