

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE MOLINO

M. PIERROT

Théorèmes de slice et holonomie des feuilletages riemanniens singuliers

Annales de l'institut Fourier, tome 37, n° 4 (1987), p. 207-223

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_207_0

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES DE SLICE ET HOLONOMIE DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS SINGULIERS

par P. MOLINO et M. PIERROT

Le but de ce travail est d'appliquer à la géométrie globale des feuilletages riemanniens les techniques de « slice » relatives aux actions différentiables des groupes de Lie compacts. On sait en effet [10] que les adhérences des feuilles d'un feuilletage riemannien \mathcal{F} sur une variété compacte forment un feuilletage riemannien singulier $\overline{\mathcal{F}}$ et que, transversalement aux feuilles de \mathcal{F} , $\overline{\mathcal{F}}$ est localement équivalent au feuilletage singulier défini par les orbites de l'action différentiable d'un groupe de Lie compact.

Au premier paragraphe, on interprète le théorème de slice de J. L. Koszul [6] en termes d'holonomie de feuilletage riemannien singulier. On s'inspire du point de vue de J. Pradines [12] suivant lequel l'holonomie d'une feuille singulière dans un feuilletage de H. Sussmann [16] et P. Stefan [15] peut être décrite [dans les bons cas...] à l'aide d'un « fibré principal d'holonomie » au-dessus de la feuille. On donne la construction du voisinage de l'adhérence d'une feuille dans un feuilletage riemannien ; voir à ce sujet A. Haefliger [5].

Le résultat principal, démontré au second paragraphe, est l'analogue en géométrie transverse d'un théorème de J. Szenthe [18] : celui-ci étend sous certaines hypothèses aux actions différentiables de groupes de Lie compacts les propriétés classiques de la représentation adjointe, en particulier l'existence de transversales globales aux orbites et la définition du groupe de Weyl. Ici, on se donne un feuilletage riemannien (M, \mathcal{F}) sur une variété compacte ; on note $(\overline{F}, \overline{\mathcal{F}})$ le feuilletage induit sur une adhérence de feuille « générique », et $\mathcal{L}(\overline{F}, \overline{\mathcal{F}})$ l'algèbre de Lie des champs

Mots-clés : Feuilletages riemanniens - Holonomie - Slice.

transverses de ce feuilletage induit, qui est de dimension finie. Le résultat démontré est le suivant :

THÉORÈME. — Si $\ell(\bar{F}, \mathcal{F}) = 0$, alors :

(i) l'espace $M/\bar{\mathcal{F}}$ des adhérences des feuilles admet une structure naturelle de variété de Sataké [14] telle que la projection $M \rightarrow M/\bar{\mathcal{F}}$ soit un morphisme avec pliage autour des adhérences singulières,

(ii) (M, \mathcal{F}) admet un champ transverse sans singularités si, et seulement si, $M/\bar{\mathcal{F}}$ admet un champ de vecteurs sans singularités,

(iii) par chaque point de M passe une sous-variété immergée $S \rightsquigarrow M$ partout dense, réunion de feuilles, et qui rencontre toutes les adhérences ; transversalement à \mathcal{F} , S est totalement géodésique et orthogonale aux adhérences pour toute métrique transverse.

Dans cette situation, on a une famille \mathcal{S} de « sections transverses globales » de $\bar{\mathcal{F}}$. Dans l'ouvert régulier du feuilletage, réunion des adhérences régulières, \mathcal{S} et $\bar{\mathcal{F}}$ forment transversalement à \mathcal{F} deux feuilletages orthogonaux, l'un géodésique et l'autre riemannien ; voir, pour l'étude d'un tel couple de feuilletages, R. Blumenthal-J. Hebda [1] et G. Cairns [2]. Mais en dehors de l'ouvert régulier, les sous-variétés de la famille \mathcal{S} « pivotent » autour des adhérences singulières.

Le point (ii) du théorème correspond à la motivation initiale de cette étude, qui était de chercher la condition d'existence sur (M, \mathcal{F}) d'un champ transverse sans singularités. On voit que, sous l'hypothèse faite, ce problème est ramené au problème d'existence d'un champ de vecteurs sans singularités sur une variété de Sataké. Signalons pour terminer que tout champ feuilleté global est tangent aux sous-variétés de la famille \mathcal{S} .

1. Slices locaux et holonomie.

1.1. Rappelons la construction de J. L. Koszul [6] : G est un groupe de Lie compact opérant différenciablement sur la variété M . On utilise une métrique riemannienne g invariante par G . Soient $x \in M$, $G.x$ l'orbite et G_x le groupe d'isotropie de ce point. L'exponentielle le long de $G.x$ dans les directions perpendiculaires transforme, pour $\rho > 0$ assez petit, le fibré en disques de rayon ρ [dans le fibré normal à l'orbite] en un voisinage tubulaire U de $G.x$. En particulier, la fibre

en x de ce voisinage tubulaire est l'image \mathcal{D}_x du disque D_x de rayon ρ dans l'espace normal en ce point. Via la différentielle en x , les éléments de G_x opèrent comme rotations dans D_x , et l'exponentielle en x échange cette action linéaire avec l'action de G_x sur \mathcal{D}_x . Ceci permet d'identifier U , muni de l'action de G , avec le fibré associé au fibré principal $G \rightarrow G \cdot x$ pour la représentation linéaire de G_x dans D_x . On dira que \mathcal{D}_x est un « slice local » en x pour l'action.

La partition \mathcal{O} de M en orbites est un feuilletage riemannien singulier [FRS] au sens de [10]. Voyons comment le théorème de Koszul se traduit en termes d'holonomie pour ce feuilletage ; ceci revient à dire qu'on va « oublier » l'action de G et ne s'intéresser qu'au feuilletage singulier \mathcal{O} , en utilisant le module $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ des champs de vecteurs tangents aux orbites à la place de l'algèbre des champs fondamentaux.

Essentiellement, le procédé de linéarisation [par exponentielle le long de l'orbite $G \cdot x$] échange l'action naturelle de G sur le fibré normal avec l'action sur le voisinage tubulaire. De même, il échangera l'action naturelle de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ sur le fibré normal avec son action sur U . Formulons ceci en termes de fibrés de repères : $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ opère [via les groupes à un paramètre] sur le fibré $E_T^{G \cdot x}$ des repères orthonormés au fibré normal à $G \cdot x$ [fibré des « repères transverses orthonormés le long de l'orbite »]. Soient $\mathcal{X}'_{\mathcal{O}}^{G \cdot x}$ l'algèbre de Lie d'automorphismes infinitésimaux de $E_T^{G \cdot x}$ ainsi obtenue, et $e_T^{G \cdot x}$ l'une de ses orbites. Si q est la codimension de $G \cdot x$, $e_T^{G \cdot x}$ est un Γ -sous-fibré principal de $E_T^{G \cdot x}$, où Γ est un sous-groupe de Lie de $O(q, \mathbf{R})$.

Le voisinage tubulaire U s'identifie au fibré associé à $e_T^{G \cdot x}$ de fibre-type le disque $D(0, \rho)$ dans \mathbf{R}^q . Soit $\pi : e_T^{G \cdot x} \times D(0, \rho) \rightarrow U$ la projection définie par cette identification. Le feuilletage sur $e_T^{G \cdot x} \times D(0, \rho)$ défini par la seconde projection se projette alors sur U par π suivant le feuilletage singulier \mathcal{O} .

Cette construction généralise le procédé classique d'A. Haefliger qui permet de reconstruire, dans un feuilletage régulier, un voisinage feuilleté d'une feuille propre par suspension de l'holonomie. Ici, $e_T^{G \cdot x}$ joue le rôle de revêtement d'holonomie infinitésimale d'ordre 1 de la feuille $G \cdot x$ [il est obtenu en faisant glisser un repère transverse le long des feuilles de toutes les manières possibles]. L'exponentielle le long de $G \cdot x$ permet de linéariser le feuilletage singulier, et le passage au fibré associé correspond à l'opération de suspension. Remarquons en passant, que, si on utilise complètement le théorème de slice, on peut remplacer

$e_T^{G \cdot x}$ par une orbite de G dans $E_T^{G \cdot x}$; en général, $e_T^{G \cdot x}$ est réunion de telles orbites, mais ceci ne change rien car les orbites de \mathcal{X}_0 sont aussi celles de G .

La différence avec le cas des feuilletages réguliers est bien entendu que, si l'orbite $G \cdot x$ est singulière, le groupe de Lie Γ n'est pas discret. Ce fait illustre parfaitement une idée importante de J. Pradines [12] suivant laquelle, pour les « bons » feuilletages singuliers, la notion usuelle de revêtement d'holonomie d'une feuille doit être remplacée par une notion de « fibré principal d'holonomie ».

1.2. *Adaptions la technique précédente* à l'étude d'un feuilletage riemannien (M, \mathcal{F}) de codimension q sur une variété compacte, au voisinage de l'adhérence \bar{F} d'une feuille F . On utilisera une métrique riemannienne g sur M « bundle-like » pour \mathcal{F} au sens de B. Reinhart [13].

Considérons le fibré principal $E_T(M, p_T, O(q, \mathbf{R}))$ des repères transverses orthonormés, muni du feuilletage relevé \mathcal{F}_T [9]. Soient $x \in F$, et z un repère transverse orthonormé en ce point, adapté à \bar{F} en ce sens que ses r premiers vecteurs engendrent le sous-espace de l'espace normal à F en x défini par $T_x \bar{F}$. On notera F_T la feuille de \mathcal{F}_T passant par z , et \bar{F}_T son adhérence. On sait [9] que $(\bar{F}_T, \mathcal{F}_T)$ est un fibré principal feuilleté sur (\bar{F}, \mathcal{F}) à groupe structural compact $H \subset O(q, \mathbf{R})$. En outre, tous les points de \bar{F}_T sont des repères transverses orthonormés adaptés à \bar{F} , et par suite H est contenu dans $O(r, \mathbf{R}) \times O(\bar{q}, \mathbf{R})$, où $\bar{q} = q - r$ est la codimension de \bar{F} . Si E_T^F est le $O(\bar{q}, \mathbf{R})$ -fibré principal des repères transverses à \bar{F} orthonormés, la projection naturelle de $(\bar{F}_T, \mathcal{F}_T)$ sur E_T^F sera un H' -fibré principal feuilleté (e_T^F, \mathcal{F}_T^F) , où H' est la projection de H dans $O(\bar{q}, \mathbf{R})$.

Soit $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ le module des champs de vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F} . Ils sont tangents à \bar{F} et opèrent donc dans E_T^F . Soit $\mathcal{X}'_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie d'automorphismes infinitésimaux de E_T^F ainsi obtenue. Elle est tangente à e_T^F en chacun de ses points, et sa restriction à ce sous-fibré a pour orbites les feuilles de \mathcal{F}_T^F .

L'exponentielle le long de \bar{F} dans les directions perpendiculaires transforme, pour $\rho > 0$ assez petit, le fibré en disques de rayon ρ [dans le fibré normal à \bar{F}] en un voisinage tubulaire U de \bar{F} , saturé de feuilles de \mathcal{F} et de \mathcal{F} . La fibre en x de U est l'image \mathcal{D}_x par l'exponentielle du disque D_x de rayon ρ dans l'espace normal à \bar{F} en ce point. L'action naturelle de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ sur le fibré normal à \bar{F} définit un feuilletage « linéarisé » ;

l'inverse de l'exponentielle linéarise alors \mathcal{F} dans U , en ce sens qu'elle envoie chaque feuille de \mathcal{F} sur une feuille du feuilletage linéaire.

Ceci étant, le voisinage tubulaire U s'identifie au fibré associé à e_T^F de fibre-type le disque $D(0, \rho)$ dans \mathbf{R}^q . Si $\pi : e_T^F \times D(0, \rho) \rightarrow U$ est la projection déterminée par cette identification, le feuilletage sur $e_T^F \times D(0, \rho)$ produit de \mathcal{F}_T^F par le feuilletage par points se projette par π suivant le feuilletage \mathcal{F} . La description ainsi obtenue de (U, \mathcal{F}_U) est essentiellement équivalente à celle donnée par A. Haefliger [5].

Comme d'autre part chaque feuille de \mathcal{F}_T^F est dense dans e_T^F , le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$ sur U sera la projection par π du feuilletage sur $e_T^F \times D(0, \rho)$ défini par la seconde projection. Cette description de $(U, \bar{\mathcal{F}})$ est analogue à celle obtenue en 1.1 pour les orbites d'un groupe de Lie compact ; ici, c'est e_T^F qui joue le rôle de fibré principal d'holonomie.

Remarque. — Dans les deux cas étudiés en 1.1 et 1.2, on a affaire à un FRS linéarisable au voisinage de la feuille compacte considérée $[G.x$ ou $\bar{F}]$. En fait, nous ne connaissons pas de FRS qui ne soit pas linéarisable au voisinage d'une feuille compacte, ou plus généralement de l'adhérence d'une feuille. De toutes façons, au voisinage d'une feuille compacte [ou d'une adhérence de feuille], on peut toujours, voir [10], regarder le linéarisé du FRS comme un feuilletage plus fin que le feuilletage donné [l'exponentielle envoie les feuilles du linéarisé dans celles du feuilletage donné]. On pourra alors utiliser une construction du type précédent, en remplaçant la fibre-type $D(0, \rho)$ par \mathcal{D}_x munie du feuilletage singulier défini par les traces des feuilles.

1.3. *L'utilisation du faisceau commutant $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ du feuilletage riemannien (M, \mathcal{F}) permet de mieux comprendre les résultats ci-dessus. Conservons pour cela les notations de 1.2.*

Soit \mathcal{I}_x l'image par l'exponentielle en x du disque de rayon ρ dans l'espace normal à la feuille F . Sur la transversale à \mathcal{F} ainsi obtenue, $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ définit une algèbre de Lie \mathfrak{g} de champs de Killing [pour la métrique transverse] isomorphe à la fibre-type du faisceau. Les composantes connexes des traces sur \mathcal{I}_x des adhérences des feuilles sont les orbites de \mathfrak{g} . Notons \mathfrak{h}' l'isotropie de \mathfrak{g} en x . L'exponentielle en x permet de linéariser \mathfrak{h}' , qui devient ainsi une algèbre de Lie de rotations dans D_x . Cette algèbre de Lie est opposée à l'algèbre de Lie du groupe H' introduit en 1.2.

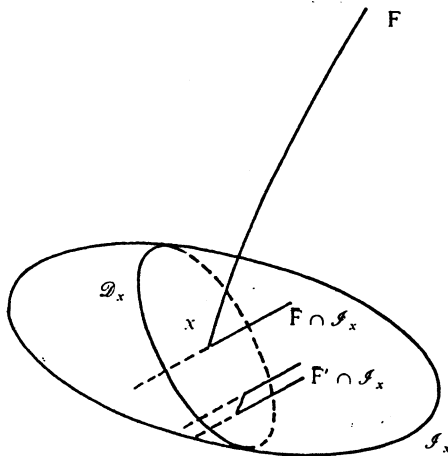


Figure 1.

Identifiant \mathcal{D}_x à D_x , on voit que les traces sur \mathcal{D}_x des adhérences des feuilles sont les orbites du groupe H' . Chaque adhérence \bar{F}' est déterminée par sa trace sur \mathcal{D}_x ; comme le groupe H' est compact, ses orbites ont un nombre fini de composantes connexes.

En résumé, on a la description suivante :

PROPOSITION 1. — *Étant donné $x \in M$, F la feuille passant par ce point, \bar{F} son adhérence, \mathcal{D}_x la fibre en x d'un voisinage tubulaire U de \bar{F} , on munit \mathcal{D}_x de la métrique riemannienne transverse définie par g , et de l'algèbre de Lie \mathfrak{h}' de champs de Killing correspondant à l'isotropie en x du faisceau $\mathfrak{G}(M, \mathcal{F})$. Alors les traces sur \mathcal{D}_x des adhérences des feuilles sont les orbites d'un groupe de Lie compact H' d'isométries, ayant \mathfrak{h}' pour algèbre de Lie associée.*

2. Existence de sections transverses globales.

Avant de donner la démonstration de notre résultat principal, nous présenterons un théorème de J. Szenthe [18] relatif aux actions de groupes de Lie compacts; notre présentation est un peu différente de celle donnée par cet auteur, que nous complétons sur certains points. Voir également à ce sujet [19], [20].

2.1. *Transversales globales pour les actions de groupes de Lie compacts.*

La belle idée de J. Szenthe, prolongeant des travaux antérieurs de L. Conlon [3], est d'étendre sous certaines hypothèses à l'action d'un groupe de Lie compact d'isométries d'une variété riemannienne complète les propriétés classiques de la représentation adjointe [8].

Rappelons que si G est un groupe de Lie compact, \mathfrak{g} son algèbre de Lie, munie d'un produit scalaire invariant par la représentation adjointe, toutes les orbites de la représentation adjointe rencontrent orthogonalement l'algèbre de Lie \mathfrak{t} d'un tore maximal T . Plus précisément, si $N(T)$ est le normalisateur de T et W le groupe fini $N(T)/T$, la trace sur \mathfrak{t} d'une orbite de la représentation adjointe est une orbite du groupe de Weyl W opérant comme groupe d'isométries de \mathfrak{t} . Ce groupe de Weyl est engendré par les symétries par rapport à un certain nombre d'hyperplans de \mathfrak{t} , dont la réunion est la trace des orbites singulières. En d'autres termes, l'espace des orbites est paramétré par la variété de Satake \mathfrak{t}/W , obtenu par « pliage » de l'espace vectoriel \mathfrak{t} suivant les hyperplans définis par les orbites singulières.

Observons que dans cette situation, si $\lambda \in \mathfrak{g}$ est un point d'une orbite principale, l'isotropie G_λ correspondante est un tore maximal, et ne laisse donc aucun vecteur non nul invariant dans le tangent $T_\lambda(G \cdot \lambda)$ à l'orbite. C'est cette observation qui suggère l'hypothèse faite par la suite.

Passons au cas d'un groupe de Lie compact connexe G opérant comme groupe d'isométries sur une variété riemannienne connexe complète (M, g) . On fait l'hypothèse qu'en un point x d'une orbite principale le groupe d'isotropie G_x ne laisse invariant aucun vecteur non nul dans le tangent à l'orbite ; bien entendu, la propriété restera vraie dans l'ouvert dense connexe Ω , réunion des orbites principales. On en déduit immédiatement que, si $N(G_x)$ est le normalisateur de G_x dans G , le groupe quotient $N(G_x)/G_x$ est fini, ou encore que l'ensemble des points de l'orbite $G \cdot x$ où l'isotropie est égale à G_x est fini.

Soit \mathcal{X}^G l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants par l'action de G . Si $X \in \mathcal{X}(M)$ est un champ de vecteurs quelconque, son moyennisé X^G sous l'action de G appartient à \mathcal{X}^G . Comme les orbites principales sont les fibres d'une fibration $\Omega \rightarrow \Omega/G$, en chaque point x de Ω l'espace H_x engendré par \mathcal{X}^G est transverse [au sens large] à l'espace tangent à l'orbite. En fait, ces deux espaces sont orthogonaux car la moyennisation respecte le champ de sous-espaces tangent aux

orbites principales et son orthocomplément, et l'hypothèse faite entraîne que la composante de X^G le long d'une orbite principale est nulle.

Notons S_Ω une orbite de l'algèbre de Lie \mathcal{X}^G passant par $x \in \Omega$. Elle rencontre toutes les orbites principales, compte tenu de la connexité de la variété quotient Ω/G [on peut regarder S_Ω comme une nappe d'holonomie pour la connexion au sens d'Ehresmann définie par H pour la fibration $\Omega \rightarrow \Omega/G$]; le fait que $S_\Omega \subset \Omega$ résulte de ce que les groupes locaux à un paramètre des champs G -invariants envoient orbite principale sur orbite principale. De plus, l'isotropie en tout point de S_Ω reste égale à G_x ; il s'en suit que la trace sur S_Ω de toute orbite principale est finie.

Si l'on veut, S_Ω est une feuille du feuilletage \mathcal{S}_Ω de Ω orthogonal au feuilletage \mathcal{O}_Ω défini par les orbites principales; comme \mathcal{O}_Ω est riemannien, \mathcal{S}_Ω est totalement géodésique.

Soit S l'ensemble des points de M d'où est issu un arc de géodésique γ contenu, sauf peut-être à son origine, dans S_Ω . On a bien entendu $S_\Omega \subset S$.

Soit y' un point d'une orbite non principale. Dans un slice local $\mathcal{D}_{y'}$ en ce point, on peut tracer un arc de géodésique γ' issu de y' et contenu, sauf à son origine, dans Ω . Soit z' un point de cet arc, distinct de y' . Il existe $g \in G$ tel que $z = gz'$ soit dans S_Ω . L'arc de géodésique $g\gamma'$ sera alors, sauf à son origine, tracé dans S_Ω , d'où $y = gy' \in S$. Ceci signifie que S rencontre toutes les orbites.

Soit maintenant y un point de S appartenant à une orbite non principale. Il existe donc un arc de géodésique γ contenu, sauf à son origine y , dans S_Ω . En y comme aux autres points, γ sera perpendiculaire aux orbites. Donc il est [au voisinage de y] tracé dans un slice local \mathcal{D}_y en ce point. Par linéarisation de l'isotropie en y , on voit immédiatement que $S \cap \mathcal{D}_y$ est une sous-variété totalement géodésique, réunion des points de \mathcal{D}_y où l'isotropie est G_x . On en déduit facilement que S est une sous-variété fermée, totalement géodésique, de (M, g) , et qu'en fait c'est l'adhérence de S_Ω .

De cette manière, on a construit une famille \mathcal{S} de transversales globales aux orbites, qui sont des sous-variétés totalement géodésiques fermées, orthogonales aux orbites. Par chaque point d'une orbite régulière [i.e. de dimension maximale] passe une transversale unique. Par contre, aux points des orbites singulières, on a une infinité de transversales; si

l'on veut, la famille \mathcal{S} « pivote » autour des orbites singulières. On obtient ainsi, pour le FRS \mathcal{O} , la généralisation de la situation relative aux feuilletages riemanniens transversalement intégrables, voir R. Blumenthal-J. Hebda [1].

Revenons maintenant au point principal x , et posons $\Gamma_x = \{g \in G/gx \in S\}$. Ce groupe est contenu dans $N(G_x)$. Pour tout $g \in \Gamma_x$, $g.S_\Omega = S_\Omega$, donc $g.S = S$. Par suite, Γ_x opère comme un groupe d'isométries sur S . Sa restriction à la transversale est le groupe fini $W_S = \Gamma_x/G_x$, que l'on appellera *groupe de Weyl de la transversale S* .

Pour tout point principal de S , la trace de l'orbite correspondante de G sur S est une orbite de W_S . Par continuité, si y est un point non principal de S , on aura $W_S.y \subset S \cap (G.y)$. Montrons qu'en fait on a égalité : si $gy \in S$, g envoie un slice local \mathcal{D}_y en y sur slice local \mathcal{D}_{gy} en gy , et $S \cap \mathcal{D}_y$ sur la trace $S' \cap \mathcal{D}_{gy}$ d'une transversale globale S' . Il existe alors $g' \in G_{gy}$ tel que $g'S' = S$, d'où $g'gy = gy$ et $g'gS = S$, ce qui entraîne $gg' \in \Gamma_x$ et $gy \in W_S.y$. Ainsi, *les traces sur S des orbites de G sont les orbites de W_S , et par suite les orbites de G sont paramétrées par la variété de Satake S/W_S .*

Pour finir, appelons « sous-régulières » les orbites singulières de G au voisinage desquelles les orbites singulières ont toutes la même dimension que l'orbite considérée. Soit Σ la strate formée par toutes ces orbites, et Σ_0 l'une de ses composantes connexes. On considère $y \in \sigma_0 = S \cap \Sigma_0$. Soit \mathcal{D}_y un slice local en ce point. Par linéarisation de l'isotropie G_y , $\Sigma_0 \cap \mathcal{D}_y = \sigma_0 \cap \mathcal{D}_y$ devient la trace d'un sous-espace vectoriel e_y dans le disque D_y , et G_y un groupe de rotations autour de

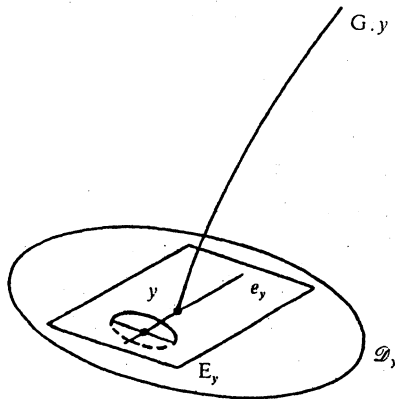


Figure 2.

ce sous-espace. De même, $S \cap \mathcal{D}_y$ devient la trace sur D_y d'un sous-espace E_y contenant e_y . Enfin, chaque orbite de G_y rencontre $E_y \cap D_y$ en un nombre fini de points. Il est facile de voir dans ces conditions que e_y est nécessairement de codimension 1 dans E_y , chaque orbite de G_y rencontrant $E_y \cap D_y$ en deux points symétriques par rapport au sous-espace e_y .

On aura donc localement un élément $g_S \in W_S$ qui opère comme symétrie orthogonale par rapport à une hypersurface. En fait, on aura alors $g_S^2 = \text{Id}_S$, et l'ensemble des points fixes de g_S sera une hypersurface fermée de S , g_S étant la symétrie orthogonale par rapport à cette hypersurface. On voit ainsi apparaître dans le groupe de Weyl W_S un certain nombre de symétries ; il faut observer toutefois qu'en général, contrairement au cas de la représentation adjointe, ces symétries n'engendrent pas W_S . Finalement, on observera que *la réunion des points fixes des symétries dans W_S est l'ensemble des points singuliers de S* , car tout point singulier est dans l'adhérence de la strate Σ .

On a obtenu ainsi le théorème de J. Szenthe suivant :

THÉORÈME [J. Szenthe [18]]. — *Soit G un groupe de Lie compact et connexe d'isométries de la variété riemannienne connexe et complète (M, g) . Si l'isotropie G_x en un point d'une orbite principale ne laisse aucun vecteur invariant dans l'espace tangent à l'orbite, alors :*

(i) *Par tout point de M passe une sous-variété [unique si le point appartient à une orbite principale] fermée totalement géodésique S de M rencontrant orthogonalement toutes les orbites.*

(ii) *Les traces sur S des orbites de G sont les orbites d'un groupe fini W_S d'isométries de S , munie de la métrique induite g_S .*

(iii) *Le groupe W_S contient les symétries orthogonales par rapport à un certain nombre d'hypersurfaces de S , dont la réunion est la trace des orbites singulières de G .*

Remarques. — 1) Dans [18], J. Szenthe donne une condition plus générale d'existence de transversales globales aux orbites. Toutefois cette condition fait intervenir les propriétés particulières de la métrique g utilisée, alors que l'hypothèse faite ici [celle du Corollaire 3 de [18]] ne dépend que de l'action de G . L'interprétation des transversales globales comme adhérences des orbites de l'algèbre de Lie \mathcal{X}^G , ne figure pas dans [18].

2) Comme il est indiqué dans [17], S n'est autre qu'une composante connexe de l'ensemble des points fixes de l'isotropie G_x en un point d'une orbite principale.

Si on ne fait plus aucune hypothèse sur G_x , et si S est une composante connexe de l'ensemble des points fixes de G_x , on sait que S est encore une sous-variété totalement géodésique rencontrant toutes les orbites [S. Kobayashi-K. Nomizu [7]]. Si $\Gamma \subset G$ est le sous-groupe qui laisse S globalement invariante, il est contenu dans le normalisateur $N(G_x)$, et les traces sur S des orbites de G sont encore les orbites de $W_S = \Gamma/G_x$. En général W_S n'est plus fini, mais ses isotopies principales sont finies, autrement dit il opère de façon localement libre sur ses orbites régulières.

3) On a remarqué que M/G s'identifie, sous les hypothèses précédentes, à la variété de Satake S/W_S . On a donc une projection canonique :

$$p : M \rightarrow S/W_S.$$

La description faite ci-dessus montre que p n'est pas un morphisme de variétés de Satake, mais un morphisme « avec pliage autour des strates singulières » de l'action, au sens défini en [9] : rappelons que le modèle local d'un tel pliage est la projection $\mathbf{R}^p \times D(0, \rho) \rightarrow \mathbf{R}^p \times [0, \rho[$ définie par $(x, y) \rightarrow (x, \|y\|)$, où $D(0, \rho)$ est le disque ouvert de rayon ρ dans \mathbf{R}^q . C'est bien en effet ce qui se passe au voisinage de la trace sur S de la réunion des orbites singulières.

2.2. Démonstration du résultat principal.

(M, \mathcal{F}, g) est un feuilletage riemannien de codimension q sur une n -variété compacte connexe, muni d'une métrique bundle-like g ; on note g_T la métrique transverse associée. $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ sera l'algèbre des champs feuilletés globaux, $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ l'algèbre des champs transverses, quotient de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ par l'idéal tangent aux feuilles. \mathcal{F} est le FRS des adhérences des feuilles, et $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ le faisceau commutant [9].

On appellera adhérences régulières les adhérences de feuilles de dimension maximale ; elles forment un feuilletage dans l'ouvert dense connexe réunion de toutes ces adhérences ; on appellera *adhérences principales* [ou génériques] les adhérences régulières sans holonomie. La réunion Ω de ces adhérences principales est un ouvert dense connexe de M , et les adhérences principales sont les fibres d'une fibration localement triviale $p : \Omega \rightarrow \Omega/\bar{\mathcal{F}}$, dont on notera (\bar{F}, \mathcal{F}) la fibre-type, munie du feuilletage induit.

Pour tout $x \in \Omega$, soit $H_x \subset T_x M$ le sous-espace engendré par l'espace $T_x F_x$ tangent à la feuille et par l'orthocomplément $T_x \bar{F}_x^\perp$ du tangent à l'adhérence. Dans l'espace transverse en x à la feuille, H_x correspond à l'orthocomplément [pour la métrique transverse] du tangent à l'adhérence.

LEMME 1. — Si $\ell(\bar{F}, \mathcal{F}) = 0$, le champ d'éléments de contact H dans Ω est complètement intégrable. Ses variétés intégrales maximales S_Ω sont des orbites de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$; elles sont denses dans Ω et rencontrent toutes les adhérences principales.

Preuve. — On sait [11] que les orbites de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ dans Ω sont denses et rencontrent transversalement toutes les orbites principales. Il suffit donc de vérifier qu'elles sont transversalement orthogonales à $\bar{\mathcal{F}}$. Or, si $\bar{X} \in \mathcal{L}(M, \mathcal{F})$, et si \bar{X}_Ω est sa restriction à Ω , on peut décomposer [à l'aide de la métrique transverse g_T] \bar{X}_Ω en une composante tangente à $\bar{\mathcal{F}}$ et une composante orthogonale, qui sont toutes les deux des champs transverses globaux dans Ω . L'hypothèse $\ell(\bar{F}, \mathcal{F}) = 0$ entraîne que la composante tangente à $\bar{\mathcal{F}}$ est nulle, d'où le résultat. \square

Les orbites de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ dans Ω définissent donc un feuilletage \mathcal{S}_Ω , tel que $\mathcal{S}_\Omega \cap \bar{\mathcal{F}}_\Omega = \mathcal{F}_\Omega$. Transversalement à \mathcal{F} , les feuilletages $\bar{\mathcal{F}}_\Omega$ et \mathcal{S}_Ω sont orthogonaux pour g_T ; le premier [formé des orbites de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$] est riemannien, et le second géodésique; on dira que \mathcal{S}_Ω est transversalement géodésique.

Soit maintenant x un point d'une adhérence singulière; notons F_x la feuille passant par ce point, de manière à distinguer son adhérence \bar{F}_x de l'adhérence principale type. On reprend la description faite en 1.2 et 1.3 d'un voisinage tubulaire (U, \mathcal{F}_U) de \bar{F}_x , muni du feuilletage induit. On a vu en particulier que (U, \mathcal{F}_U) s'identifie au fibre associé à $(e_T^{F_x}, \mathcal{F}_T^{F_x})$ de fibre-type $D(0, \rho)$ dans $\mathbb{R}^{\bar{q}}$, où \bar{q} est la codimension de \bar{F}_x , défini par l'action naturelle du groupe structural H' de $e_T^{F_x}$ sur $D(0, \rho)$. On a ainsi défini une projection

$$\pi : e_T^{F_x} \times D(0, \rho) \rightarrow U.$$

LEMME 2. — Si $\ell(\bar{F}, \mathcal{F}) = 0$, alors il n'existe pas dans $D(0, \rho)$ de champ de vecteurs non nul invariant par H' et tangent à ses orbites.

Preuve. — Soit ξ un champ de vecteurs sur $D(0, \rho)$ invariant par H' , c.à.d. un élément de $\mathcal{X}^{H'} \subset \mathcal{X}(D(0, \rho))$. Il définit sur $e^{F_x} \times D(0, \rho)$ un champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ invariant par l'action de H' sur les deux facteurs, et qui est feuilleté pour le feuilletage produit de $\mathcal{F}_T^{F_x}$ par les points. Par la projection π , on en déduit un champ feuilleté $\xi_U \in \mathcal{L}(U, \mathcal{F}_U)$.

Si ξ est tangent aux orbites de H' , ξ_U est tangent aux adhérences des feuilles. Au besoin en le multipliant par une fonction de la distance à \bar{F}_x nulle en dehors d'un voisinage de 0, on peut prolonger ξ_U à M en un champ feuilleté global. L'hypothèse faite entraîne que le champ transverse correspondant $\tilde{\xi}_U$ est nul sur les adhérences principales, donc identiquement nul, ce qui implique $\xi = 0$. \square

La correspondance $\xi \mapsto \tilde{\xi}_U$ définie dans la démonstration du lemme 2 fait correspondre aux champs de vecteurs H' -invariants sur $D(0, \rho)$ des champs transverses dans (U, \mathcal{F}_U) . Elle définit une application de l'espace tangent aux orbites de $\mathcal{X}^{H'}$ dans la trace, sur la fibre \mathcal{D}_x du voisinage tubulaire, de l'orbite des champs transverses. Le lemme 2 entraîne, d'après 2.1 [ici le groupe H' est compact mais non connexe, ce qui ne change pas le résultat] que les orbites de $\mathcal{X}^{H'}$ ont pour adhérences les traces de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\bar{r}}$ qui rencontrent chaque orbite de H' en un nombre fini de points. Ceci étant, les lemmes 1 et 2 entraînent que la dimension des orbites maximales de $\mathcal{X}^{H'}$ coïncide avec la dimension transverse des feuilles de \mathcal{S}_Ω . Autrement dit l'espace tangent aux orbites de $\mathcal{X}^{H'}$ en un point principal [pour l'action de H'] s'identifie à l'espace transverse [à \mathcal{F}] de la feuille correspondante de \mathcal{S}_Ω . Finalement, les composantes connexes des traces sur \mathcal{D}_x d'une feuille de \mathcal{S}_Ω ont pour adhérence des sous-variétés géodésiques de \mathcal{D}_x . En saturant ces sous-variétés par le feuilletage \mathcal{F} , on a prolongé dans U une feuille S_Ω de \mathcal{S}_Ω en une sous-variété immergée réunion de feuilles. Ce prolongement est canonique et peut donc être fait simultanément en tout point d'une adhérence singulière. On obtient ainsi à partir du feuilletage \mathcal{S}_Ω une famille \mathcal{S} de sous-variétés immergées $S \rightsquigarrow M$ réunions de feuilles et transversalement géodésiques. Si S a été obtenue par prolongement de la feuille S_Ω , comme celle-ci était dense dans Ω , S sera dense dans M . Comme S_Ω était transversalement orthogonale aux adhérences, S sera [par continuité] transversalement orthogonale à toutes les adhérences qu'elle rencontre.

Dans le voisinage tubulaire U , toutes les « sections transverses » obtenues par prolongement d'une feuille de S_Ω rencontrent toutes les

adhérences. Il en résulte que S rencontrera toutes les adhérences de feuilles. *Ceci achève de démontrer le point (iii) du Théorème.*

Démontrons le point (i) : il faut prouver que pour toute adhérence de feuille il existe un voisinage ouvert saturé (U, \mathcal{F}_U) de cette adhérence dans lequel U/\mathcal{F}_U admet une structure naturelle de variété de Satake telle que $U \rightarrow U/\mathcal{F}_U$ soit un morphisme avec pliage autour des adhérences singulières [l'unicité locale d'une telle structure assure alors l'existence globale].

Ceci est évident au voisinage d'une adhérence régulière.

Au voisinage de l'adhérence singulière \bar{F}_x , d'après 1.2, U/\mathcal{F}_U s'identifie à l'espace $D(0, \rho)/H'$, où H' est un groupe compact de rotations. D'après le lemme 2, il existe une transversale globale s aux orbites de H' qui rencontre chaque orbite en un nombre fini de points. Si $y \in s$ est un point principal pour l'action de H' , et H'_y l'isotropie correspondante, le sous-groupe Γ'_y de H' qui respecte globalement s est contenu dans le normalisateur $N(H'_y)$ de H'_y dans H' . Ceci étant, $D(0, \rho)/H'$ s'identifie à l'espace d'orbites s/W'_s , où W'_s est le groupe fini Γ'_y/H'_y .

Localement [au voisinage de x], on peut définir une projection différentiable de U sur la fibre \mathcal{D}_x du voisinage tubulaire qui respecte l'appartenance aux adhérences. On obtient alors la projection $U \rightarrow U/\mathcal{F}_U$ en composant cette projection locale avec la projection de $\mathcal{D}_x \simeq D(0, \rho)$ sur s/W'_s qui est, d'après la remarque 3 de 2.1, un morphisme de variétés de Satake avec pliage autour des orbites singulières de H' . D'où le résultat.

Enfin, en ce qui concerne le point (ii), on remarquera que, en restriction à la sous-variété immergée $S \in \mathcal{S}$, le feuilletage \mathcal{F} est défini par la projection $S \rightarrow M/\mathcal{F}$ sur l'espace des adhérences des feuilles. Tout champ de vecteurs feuilleté $X \in \mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ induit un champ de vecteurs feuilleté X_S sur (S, \mathcal{F}_S) , et définit [via le groupe à un paramètre associé] un champ de vecteurs différentiable $\bar{X}_{M/\mathcal{F}}$ sur la variété de Satake M/\mathcal{F} .

$\bar{X}_{M/\mathcal{F}}$ est sans singularités si, et seulement si, le champ transverse \bar{X}_S est sans singularités.

Si le champ transverse $\bar{X} \in \mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ est sans singularités, il en est de même de \bar{X}_S , donc de $\bar{X}_{M/\mathcal{F}}$.

Réciproquement, soit $\bar{X}_{M/\mathcal{F}}$ un champ de vecteurs non singulier sur M/\mathcal{F} . Il définit un champ transverse \bar{X}_S sur (S, \mathcal{F}_S) , et ceci pour chacune des sous-variétés $S \in \mathcal{S}$. Dans l'ouvert Ω , où la projection $\Omega \rightarrow \Omega/\mathcal{F}_\Omega$ est une fibration, les champs transverse \bar{X}_S se raccordent en un champ transverse sur $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega)$. Compte tenu du modèle local obtenu, les champs transverse \bar{X}_S se raccordent en $\bar{X} \in \mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ qui est sans singularités sur chaque sous-variété S , donc partout.

Ceci achève la démonstration. □

On observera que la famille de sous-variétés \mathcal{S} est un invariant du feuilletage (M, \mathcal{F}) , c.à.d. ne dépend pas de la métrique utilisée. De même, le fait que chaque variété $S \in \mathcal{S}$ soit transversalement géodésique et transversalement orthogonale aux adhérences est vrai *pour toute métrique transverse*.

Terminons par la description d'un *exemple simple* : on considère la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ et le groupe $G = SO(3, \mathbb{R})$ opérant sur S^3 par rotations autour d'un axe AB . Soient Γ un sous-groupe dense de G , B une variété compacte et connexe munie d'un homomorphisme surjectif $h : \pi_1(B) \rightarrow \Gamma$. Par suspension de h , on construit un feuilletage riemannien (M, \mathcal{F}) , où M est un fibré en sphères sur B . Si $P : M \rightarrow B$ est la projection, et si on identifie la fibre $P^{-1}(y_0)$ à S^3 , les adhérences des feuilles recourent cette fibre suivant les sphères de dimension 2 d'axe AB . Chaque feuille recoupe la fibre suivant une orbite de Γ .

Les trajectoires orthogonales des traces des adhérences sont des cercles de diamètre AB . Les sections transverses globales s'obtiennent

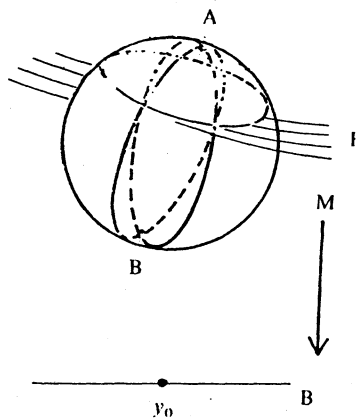


Fig. 3.

dans ce cas en saturant de feuilles l'un de ces cercles. Chacune de ces sous-variétés immergées S admet les deux feuilles compactes comme surfaces de self-intersection, et la famille \mathcal{L} toute entière est obtenue en faisant pivoter S autour de ces feuilles compactes. La variété de Satake M/\mathcal{F} s'identifie dans ce cas à un demi-cercle de diamètre AB .

Remarques. — 1) Sans faire l'hypothèse $\ell(\bar{F}, \mathcal{F}) = 0$ on peut, de manière analogue à ce qui est indiqué dans la remarque 2 de 2.1, considérer les orbites de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ contenues dans Ω et les prolonger en sous-variétés immergées $S \rightsquigarrow M$ réunions de feuilles, denses dans M et transversalement géodésiques. Ces sous-variétés rencontrent toutes les adhérences, et le faisceau commutant $\mathcal{C}(S, \mathcal{F}_s)$ a une isotropie infinitésimale nulle aux points génériques.

2) Le résultat obtenu est à rapprocher du résultat antérieur [9] suivant lequel, en codimension $q \leq 3$, M/\mathcal{F} est toujours une variété de Satake, et $M \rightarrow M/\mathcal{F}$ un morphisme avec pliage autour des adhérences singulières.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BLUMENTHAL, J. HEBDA, De Rham decomposition theorems for foliated manifolds, *Ann. Inst. Fourier*, 33-2 (1983), 183-198.
- [2] G. CAIRNS, A general description of totally geodesic foliations, *Tohoku Math. Jour.*, 38 (1986), 37-55.
- [3] L. CONLON, Variational completeness and K-transversal domains, *Jour. of Diff. geometry*, 5 (1971), 135-147.
- [4] P. DAZORD, Feuilletages à singularités, *Proc. Kon. Akad. van Wet*, 88 (1) (1985), 21-39.
- [5] A. HAEFLIGER, Leaf closures in riemannian foliations, preprint, 1986.
- [6] J. L. KOSZUL, Sur certains groupes de transformations de Lie, *Colloque de Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953.
- [7] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, I-II, Wiley, New-York, 1963-69.
- [8] O. LOOS, *Symmetric spaces*, I-II, Benjamin, New-York, 1969.
- [9] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, *Proc. Kon. Akad. van Wet*, 85 (1982), 45-76.
- [10] P. MOLINO, Feuilletages riemanniens réguliers et singuliers, preprint 1986.
- [11] M. PIERROT, Orbites des champs de vecteurs feuilletés pour un feuilletage riemannien sur une variété compacte, *C.R. Ac. Sci., Paris*, 301 (1985), 443-446.
- [12] J. PRADINES, How to define the differentiable graph of a singular foliation, *Cahiers de Top. et Geom. Diff.*, 26 (4) (1985), 339-380.

- [13] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 119-132.
- [14] I. SATAKE, The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds, *Journal Math. Soc. of Japan*, 9 (1957), 464-492.
- [15] P. STEFAN, Accessible sets, orbits, and foliations with singularities, *Proc. London Math. Soc.*, 29 (1974), 699-713.
- [16] H. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Am. Math. Soc.*, 180 (1973), 171-188.
- [17] J. SZENTHE, On the orbit structure of orthogonal actions with isotropy subgroups of maximal rank, *Acta Sci. Math (Szeged)*, 43 (1981), 353-367.
- [18] J. SZENTHE, Orthogonally transversal submanifolds and the generalization of the Weyl group, *Periodica Math. Hungarica*, 15 (4)(1984), 281-299.
- [19] D. LUNA, Adhérences d'orbites et invariants, *Inventiones Math.*, 29 (1975), 231-238.
- [20] G. W. SCHWARTZ, Lifting smooth homotopies of orbit spaces, *Publ. Inst. Hautes Et. Scient.*, 51 (1980), 37-136.

P. MOLINO & M. PIERROT,
Institut de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques
du Languedoc
Place E. Bataillon
34060 Montpellier (France).