Annales de l'institut Fourier

Marcel Brelot

Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 121-156

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__121_0>

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER

par Marcel BRELOT

I. — INTRODUCTION

1. Dans l'espace à $\tau \geqslant 2$ dim. et au voisinage d'un point singulier à distance finie ou à l'infini, les développements classiques d'une fonction *harmonique* u montrent aisément, comme on sait, en notant $\mathfrak{M}_f^r(O)$ la moyenne d'une fonction f sur la circonférence ou sphère Σ_0^r de centre O et rayon r, que les limitations de croissance en *moyenne* du type : $r^\lambda \mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ borné ou tendant vers o quand $r \to 0$ (cas du point singulier O à distance finie et $\lambda > \tau - 2$) ou quand $r \to \infty$ (point singulier à l'infini, O quelconque à distance finie et $\lambda > 0$) entraînent au moins les mêmes limitations *vraies* pour $|u|$ par disparition des termes du développement correspondant à une croissance plus rapide.

D'autre part, *pour u sous-harmonique,* il m'a été facile autrefois, d'obtenir quelques résultats généraux sur son allure au voisinage du point singulier, grâce au fait que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est d'après F. Riesz fonction convexe de $h(r)$ avec

$$h(r) = \log 1/r \quad (\tau = 2) \qquad \text{ou} \qquad 1/r^{\tau-2} \quad (\tau > 2).$$

J'ai même approfondi le cas où u admet une *majorante harmonique* sur ce voisinage pointé, seul cas d'ailleurs où s'applique la représentation intégrale de F. Riesz à l'aide de la fonction de Green. On trouve alors, comme dans le cas harmonique, que des limitations de croissance en moyenne du type indiqué plus haut, sur la moyenne du u^+ entraînent les mêmes limitations vraies pour u^+ mais non plus pour $|u|$(¹) ; cela pose la question pour u sans majo-

(¹) Sur toute cette étude antérieure, dont on rappellera les premières notions aux rante harmonique et le présent mémoire va y répondre en faisant presque entièrement l'extension.

On sait jusqu'ici peu de chose de plus ; cependant, en vue de perfectionner un point de la théorie des fonctions entières, M. Heins [2] a récemment établi le théorème suivant :

Soit $u(z)$ réelle sous-harmonique dans tout le plan (fini), harmonique au voisinage de l'origine O et d'ordre < 1, c'est-à-dire telle que pour un certain nombre $\rho (0 < \rho < 1)$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\max._{|z|=r} u(z)}{r^{\rho}} < +\infty.$$

Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ dans le plan telle que :

$$(1) \qquad u(z) = u(0) + \lim_{r \to \infty} \int_{D_0^r} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_\zeta$$

(D_0^r domaine $|z| < r$).

Il n'est pas nécessaire, comme le fait remarquer l'auteur, que u soit harmonique au voisinage de l'origine ; un passage à la limite conserve la formule si l'on a seulement $u(0)$ fini.

De plus, comme je l'ai signalé dans une analyse de l'article de Heins (voir *Zentralblatt* 29, p. 298, 1948) la démonstration même de l'auteur, basée sur la représentation intégrale de F. Riesz permet d'améliorer l'énoncé. Ainsi, comme limitation de croissance de u, il suffit de supposer que $\mathcal{M}_{u^+}^r / r \to 0 \, (r \to \infty)$; si même on suppose un peu plus, à savoir que $\mathcal{M}_{u^+}^r / r^2$ est sommable en r au voisinage de l'infini [3], *ce qui a lieu dans le cas de Heins,* on peut remplacer dans (1) la limite de $\int_{D_0^r}$ par une vraie intégrale de Radon étendue à tout le plan ; car cette hypothèse entraîne la sommabilité en r [4] de $\mu(D_0^r)/r^2$, ce qui équivaut [5] à la sommabilité -μ de $1/|\zeta|$.

n^os^ 12 et 14, voir essentiellement un fascicule des *Actualités scientifiques et industrielles* n° 139 (1934) noté (FAS) et un mémoire, qui sera noté (AN), des *Annales de l'École Normale supérieure,* t. 61, p. 301 (1944). Voir des extensions au voisinage d'un point-frontière irrégulier dans un article des *Annales de l'Université de Grenoble, section Sciences math. et phys.*, 22 (1946) p. 205.

(2) M. Heins, *Annals of Math.*, 49, p. 200 (1948).

(3) Cela entraîne bien que $\mathcal{M}_{u^+}^r / r \to 0$ à cause de la croissance de $\mathcal{M}_{u^+}^r$. Voir le lemme général 1 qui suit.

(4) En effet de (1), ou seulement de la représentation potentielle de toute fonction sous-harmonique, finie en O, dans $D_0^R (R > r)$ résulte :

$$\mathcal{M}_u^r - u(0) = \int_{D_0^r} \log \left| \frac{r}{\zeta} \right| d\mu_\zeta \geqslant \log 2 - \mu(D_0^{r/2})$$

(voir aussi le lemne 4' C qui suit).

(5) Par une intégration par parties (voir le lemne 2' C qui suit).

2. D'autre part on voit aisément que la démonstration de Heins et la formule (1) s'appliquent encore si u, sous-harmonique pour $|z|$ assez grand, n'est ailleurs, au voisinage de chaque point, que, soit sous-harmonique, soit surharmonique (6) ; alors μ est de signe quelconque, mais $\geqslant 0$ au voisinage de l'infini.

Cela permet une étude de u donnée seulement sous-harmonique à l'extérieur d'un cercle de centre O, car en la modifiant au voisinage de la circonférence, on peut la *prolonger* dans tout le plan en une fonction du type précédent (7). Il est alors immédiat que u, au voisinage de l'infini, est la somme d'une intégrale $\int \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu_\zeta$ étendue à l'extérieur d'un cercle (au sens d'une limite comme dans (1) ou au sens de Radon suivant les hypothèses de plus haut sur la restriction de croissance), d'un terme $K \log|z|$ et d'une fonction harmonique bornée au voisinage de l'infini. Une inversion donnerait dans le plan des résultats analogues au voisinage d'un point singulier. On songera alors à exploiter cette représentation intégrale. C'est ainsi que je montrerai, par exemple à l'infini, que l'hypothèse $\mathfrak{M}^r_{u^+}/r \to 0$ entraîne que $u^+(z)/|z| \to 0$ ($|z| \to \infty$), résultat partiel du type en vue.

3. En fait, poursuivant les études antérieures citées plus haut, nous allons aborder *directement*, sans artifice de prolongement de fonction, l'*étude locale la plus générale* ($\tau \geqslant 2$ et point singulier à distance finie ou à l'infini). Donnons une idée de la méthode, dans le cas de $\tau = 3$ et du voisinage de O singulier à distance finie ; rappelons que $\mathfrak{M}^r_u(O)$, $\mathfrak{M}^r_{u^+}$, $r\mathfrak{M}^r_u$, $r\mathfrak{M}^r_{u^+}$ ont des limites pour $r \to 0$, l'avant-dernière étant $> -\infty$; puis, que si $r\mathfrak{M}^r_{u^+}$ est borné ou tend vers 0, alors $OM \,.\, u^+(M)$ et respectivement $u^+(M)$ sont bornés.

(6) Ou même, dans ce voisinage, presque partout finie et égale, là où elle est finie, à la différence de deux fonctions sous-harmoniques. On sait d'ailleurs que cette dernière propriété locale, dans l'espace à $\tau \geqslant 2$ dim. (même dans $\overline{R}^\tau$ cité plus loin) entraîne la même propriété globale pour tout ouvert Ω où la fonction est donnée (à condition que $\Omega \neq \overline{R}^\tau$). Voir C. R., t. 226, p. 1499. On s'appuiera, pour justifier l'affirmation du texte sur ce que, dans D^r_O, u admet encore la décomposition précise de F. Riesz, le second terme étant l'intégrale de Poisson relative à la donnée-frontière.

(7) Il n'y a qu'à remplacer u dans une couronne par la solution généralisée du problème de Dirichlet correspondant à une donnée égale à u sur la plus grande circonférence, et, sur la petite, à une constante majorant u sur les deux. On prolonge par cette constante à l'intérieur. La fonction obtenue est sous-harmonique au voisinage de la grande circonférence, surharmonique au voisinage de la petite. Cela s'adapte à l'espace et au prolongement analogue à un point singulier (à distance finie ou non) d'une fonction sous-harmonique avec modification dans un voisinage arbitrairement petit.

Supposons maintenant pour $s > 0$ que $r^s \mathfrak{M}_{u^+}^r$ soit sommable en r (au voisinage de 0) ce qui est un peu plus fort que $r^{1+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r \to 0$ et soit p le premier entier $\geqslant 0$ majorant $s - 1$ (ou plus grand entier $< s$). Observons que $1/\mathrm{MP}$ se développe pour M fixé $\neq$ O selon $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}_n(\cos\gamma)\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}}$ $\left(\mathfrak{L}_n \text{ polynome de Legendre}, \quad \gamma = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})\right)$ avec convergence uniforme dans tout domaine sphérique de centre O et rayon $<$ OM.

Considérons, si μ est la mesure $\leqslant 0$ associée à u, l'intégrale de Radon :

$$v(\mathrm{M}) = \int \left[\frac{1}{\mathrm{MP}} - \sum_{n=0}^{p} \mathfrak{L}_n(\cos\gamma)\frac{\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}}\right] d\mu_{\mathrm{P}}$$

Grâce à une étude de l'allure de μ selon la croissance de u (voir lemmes 2 et 4) on verra que cette intégrale existe bien, que $\overline{\mathrm{OM}}^{1+s}v^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM et que $r^{1+s}\mathfrak{M}_{(u-v)^+}^r$ tend vers 0 avec r. De sorte que la fonction harmonique $u - v$ et même son module satisfont à la même limitation supérieure (le développement n'ayant que des termes satisfaisant à cette limitation de croissance). Grâce à *la représentation intégrale ainsi obtenue pour u et qui prolonge la représentation locale de Riesz, on pourra conclure que* $\overline{\mathrm{OM}}^{1+s}u^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM ; et on aura des résultats analogues pour le cas général $\tau \geqslant 2$ (non sans quelque difficulté supplémentaire dans le plan), puis, soit par inversion, soit par un raisonnement direct similaire, pour la singularité à l'infini.

D'où cet *énoncé simple*, pour $\tau \geqslant 2$ et la singularité O par exemple à distance finie, que si $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r(\mathrm{O})$ $(s > 0)$ est borné au voisinage de O, alors $\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+s+\varepsilon}u^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM ($\varepsilon > 0$ quelc.).

On peut même voir, en perfectionnant ce qui précède, que pour s *non entier* > 0, si $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ou tend vers 0, $\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+s}u^+(\mathrm{M})$ est respectivement borné ou tend vers 0 ; j'ai pu en faire l'extension au cas de $s = 1$ (on a déjà parlé plus haut du cas plan similaire à l'infini).

Ce résultat particulier plus précis pour $s = 1$ fera partie *d'une étude plus approfondie du cas simple* où $r^{\tau-1}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ou tend vers 0 avec r s'il s'agit du voisinage d'une singularité à distance finie, ou bien $\mathfrak{M}_{u^+}^r/r$ est borné ou tend vers 0 avec $1/r$ s'il agit de la singularité à l'infini. On donnera dans ce cas de limite nulle une représentation globale prolongeant celle de Riesz avec fonction de

Green et dont se déduiront aussitôt le théorème de Heins amélioré et ses analogues dans l'espace et pour un point singulier à distance finie. Pour y parvenir, nous passerons à la limite, comme Heins, sur la représentation-décomposition de Riesz dans un domaine diminué d'un voisinage infiniment petit du point singulier. Mais il faudra introduire la plus petite majorante harmonique, non plus dans un cercle comme Heins, ce que la formule de Poisson rendait bien commode, par explicitation du noyau, mais dans une couronne, ce qui nécessitera une propriété nouvelle sur la dérivée normale de la fonction de Green, cas particulier d'un lemme intéressant en soi (lemme 6). Nous rencontrerons auxiliairement, d'ailleurs, diverses questions dignes d'intérêt, comme un résultat partiel (lemme 12) d'une étude qui serait à approfondir sur la convergence possible de la solution H_F^ω du problème de Dirichlet quand on fait tendre en croissant le domaine ω vers Ω, F étant une fonction définie au voisinage de la frontière de Ω.

Naturellement tout cela s'applique dans le plan aux $\log|f(z)|$ où $f(z)$ est localemant holomorphe et de module uniforme, ce qui donne des résultats nouveaux que nous nous dispenserons d'expliciter.

4. Nous allons nous placer en toute généralité dans l'espace $\overline{R^\tau}$ rendu compact par adjonction à l'espace enclidien R^τ à $\tau \geqslant 2$ dim., d'un point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$ et nous utiliserons les notions d'harmonicité et sous-harmonicité au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, données dans (AN). Précisons des notations en partie utilisées dans (AN), outre les symboles o et O de Landau :

1) $\overline{E}$, $\overset{*}{E}$ désignent l'*adhérence et la frontière de l'ensemble* E *dans* $\overline{R^\tau}$ et on notera de la même manière un point et l'ensemble qu'il forme.

2) D_O^r, Δ_O^r seront les domaines de R^τ définis par $OM < r$, $OM > r$; $\Delta_O'^r$ sera $\Delta_O^r \cup \mathcal{R}_\tau$, $C_O^{r,R}$ la couronne $r < OM < R$, Σ_O^r le lieu $OM = r$, σ_τ sa longueur ou aire pour $r = 1$.

3) $h(r)$ sera, on l'a dit, la fonction harmonique fondamentale, φ_τ le flux de $h(OM)$ à travers Σ_O^r entrant dans D_O^r et qui vaut 2π si $\tau = 2$, $(\tau - 2)\sigma_\tau$ si $\tau > 2$; rappelons que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est la moyenne de u sur Σ_O^r, et $H_f^\Omega(M)$ la fonction de Wiener (solution du problème de Dirichlet généralisé) pour l'ouvert Ω et la donnée-frontière f.

II. QUELQUES LEMMES ET RÉSULTATS CONNEXES

5. Quelques propriétés des mesures de Radon au voisinage d'un point, ce point exclu.

Remarque préliminaire (Choquet). — Soit $\varphi(t)$ finie > 0 croissante ou décroissante dans l'intervalle I : $]0, t_0[$ et tendant vers 0 ou $+\infty$ quand $t \to 0$. Alors $\int_I \frac{d\varphi}{\varphi} = \pm\infty$. Même résultat en prenant pour I, $]t_0, +\infty[$, φ tendant vers 0 ou $+\infty$ quand $t \to +\infty$.

Prenons par exemple le 1^er^ cas avec φ croissante et $\to 0$ et introduisons en t les lim φ^+ et φ^- à droite et à gauche.

a) Si $\lim_{t\to 0}.\inf. \frac{\varphi^-(t)}{\varphi^+(t)} = 0$, soit t_n décroissante $\to 0$ telle que $\frac{\varphi^-(t_n)}{\varphi^+(t_n)} < \frac{1}{2}$; alors

$$\frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi(t_n)} \geqslant \frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi^+(t_n)} \geqslant \frac{1}{2}$$

d'où
$$\int_I \frac{d\varphi}{\varphi} \geqslant \sum_1^\infty \frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi(t_n)} = +\infty.$$

b) Sinon, dans un intervalle $]0, t_1[$, $\frac{\varphi^-}{\varphi^+} \geqslant \varepsilon > 0$. On construira facilement dans cet intervalle une fonction finie continue $\psi > 0$ même continuement dérivable, majorant φ et telle que $\frac{\psi}{\varphi} < \frac{K}{\varepsilon}$ $(K > 1)$.

Or
$$\int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{\varphi} \geqslant \int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{\psi} = \frac{\varphi^-(t_1)}{\psi(t_1)} - \frac{\varphi^+(t_1)}{\psi(t)} + \int_t^{t_1} \varphi \frac{\psi'}{\psi^2} dt$$

et la dernière intégrale majore $\frac{1}{K} \log \frac{\psi(t_1)}{\psi(t)}$ d'où le résultat.

Démonstrations analogues dans les autres cas.

Lemme 1. — *Soit dans l'intervalle* $]0, t_0]$ *noté* I, $f(t)$ *et* $\varphi(t)$ *finies, l'une quelconque continue, l'autre continue d'un côté ; chacune est* $\geqslant 0$ *ou* $\leqslant 0$, *croissante ou décroissante et quand* $t \to 0$, $|\varphi|$ *tend vers* 0 *ou* $+\infty$ *ou bien* $f \to 0$; *enfin* $\int_I f d\varphi$ *est supposée finie. Alors* $\int_I \varphi df$ *est finie et* $f\varphi \to 0$ *pour* $t \to 0$.

Même énoncé en prenant pour I *l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *et faisant tendre* t *vers* $+\infty$.

Dans le premier cas, par exemple, intégrons sur l'intervalle J égal $]t, t_0]$ ou $[t, t_0]$ selon qu'il y a pour les deux fonctions continuité à droite ou à gauche :

$$(2) \qquad \int_J f d\varphi + \int_J \varphi df = \int_J df\varphi = f(t_0)\varphi(t_0) - f(t)\varphi(t).$$

Supposons que $|\varphi|$ tende vers o ou $+\infty$. Voyons que $f\varphi$ reste borné. Sinon $\int_J \varphi df$ ne serait pas borné et tendrait vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par suite $|f\varphi| \to +\infty$ d'où pour $t < t_1$ convenable $|f| \geqslant \frac{K}{|\varphi|}$. Alors si par exemple φ est croissante

$$\left|\int_{]t, t_1[} f d\varphi\right| = \int_{]t, t_1[} |f| d\varphi \geqslant K \int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{|\varphi|} \quad \text{d'où} \quad \left|\int_J f d\varphi\right| \to +\infty$$

et de même si φ est décroissante.

On conclut que $f\varphi$ reste borné, donc aussi $\int_J \varphi df$ qui aura par suite une limite finie. Alors $f\varphi$ aura une limite finie, cette limite sera nulle, sinon $|f\varphi|$ majorerait pour t assez petit un nombre $K > o$ et le raisonnement précédent par contradiction s'appliquerait à nouveau.

Supposons maintenant que $f \to o$. Ou bien $|\varphi| \to +\infty$ et nous serons dans le cas précédent, ou bien $|\varphi|$ est borné et l'égalité (2) montre que $\int_I \varphi df$ est finie, puis, en appliquant la première partie avec f et φ permutés, que $f\varphi \to o$.

Raisonnement tout analogue pour le second énoncé.

LEMME 2. — *Soit dans* $R^\tau - O$ (O *point* $\neq \mathcal{R}_\tau$) *une mesure* $\mu \geqslant o$ *nulle hors d'un compact de* R^τ *puis* α *et* λ $C^{tes} > o$ *et* r *variable au voisinage de* o.

A) *Supposons que* $\mu(\Delta_O^r) = O(r^{-\alpha})$. *Alors* $\overline{OP}^{\alpha+\lambda}$ *est sommable* -μ_P et

$$\int_{D_O^r - O} \overline{OP}^{\alpha+\lambda} d\mu_P = O(r^\lambda), \qquad \int_{\Delta_O^r} \overline{OP}^{\alpha-\lambda} d\mu = O(r^{-\lambda}),$$
$$\int_{\Delta_O^r} \overline{OP}^{\alpha} d\mu = O(\log r),$$

enfin pour M *variable dans* $\Delta_O^{Kr}(K, C^{te} > o)$, $\int_{\Delta_O^r} \log \frac{MP}{MO} d\mu_P$ *est majoré par un* $O(r^{-\alpha})$ *indépendant de* M.

B) *Si* $\mu(\Delta_0^r) = o(r^{-\alpha})$ $(r \to 0)$ *les quatre derniers résultats s'étendent avec des* o *au lieu de* O.

C) *La sommabilité en* r *de* $r^{\alpha-1}\mu(\Delta_0^r)$ *entraîne l'hypothèse* B *et équivaut à la sommabilité* -μ_P *de* $\overline{OP}^\alpha$.

On passera des intégrales de fonctions de la distance à O à des intégrales de Stieltjes à une variable qui se prêteront à une intégration par parties. Ainsi C résultera du lemme précédent ; A et B se traiteront directement ; insistons sur leur dernière propriété. Rabattons autour de O le point P et la mesure μ sur la demi-droite issue de O opposée à celle qui contient M. On obtient ainsi P_1 et la mesure linéaire μ_1 et l'on voit que si $\varphi(x) = \mu_1(]x, +\infty[)$, d'ailleurs O ou o de x^{-s}, on a $MP \leqslant MP_1$,

$$\int_{\Delta_0^r} \log \frac{MP}{MO} d\mu_P \leqslant \int_{\Delta_0^r} \log \frac{MP_1}{MO} d\mu_1 \leqslant - \int_{]r,+\infty[} \log \frac{Kr + x}{Kr} d\varphi.$$

Cette dernière expression devient par intégration par parties

$$\log \frac{K+1}{K} \varphi(r) + \int_{]r,+\infty[} \frac{\varphi(x)}{Kr+x} dx$$

où cette intégrale, qui se majore en remplaçant $\frac{\varphi}{Kr+x}$ par $\frac{\varphi}{x}$ est bien, avec $\varphi(r)$, un O ou un o de r^{-s}.

Par inversion ou par des raisonnements directs analogues on obtient :

Lemme 2'. — *Soit dans* R^τ *une mesure* $\mu \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, O *point fixé,* $r > 0$ *variable.*

A) *Si* $\mu(D_0^r) = O(r^\alpha)(r \to \infty)$, $\overline{OP}^{-\alpha-\lambda}$ *est sommable*-μ_P *au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$ *et pour* $r \to \infty$

$$\int_{\Delta_0^r} \overline{OP}^{-\alpha-\lambda} d\mu = O(r^{-\lambda}), \quad \int_{D_0^r} \overline{OP}^{-\alpha+\lambda} d\mu = O(r^\lambda),$$

$$\int_{D_0^r} \overline{OM}^{-\alpha} d\mu = O(\log r),$$

enfin, pour M *variable dans* D_0^{Kr}, $\int_{D_0^r} \log \frac{MP}{MO} d\mu_P$ *est majoré par un* $O(r^\alpha)$ *indépendant de* M.

B) *Si* $\mu(D_0^r) = o(r^\alpha)$ $(r \to \infty)$ *ces quatre dernières propriétés sont valables avec des* o.

C) *La sommabilité de* $r^{-\alpha-1}\mu(D_0^r)$ *en* r *voisin de l'infini, entraîne l'hypothèse* B *et équivaut à la sommabilité*-μ *de* $\overline{OP}^\alpha$ *au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$.

D) *Les hypothèses* A, B, C *sont invariantes par rapport au point* O, ce qui résulte de

$$D_O^r \subset D_{O_1}^{r+OO_1} \subset D_O^{r+2OO_1}$$

et des inégalités correspondantes pour les mesures.

Lemme 3. — *Soit y convexe dans* $]t_0, +\infty[$.

A) *Si elle est décroissante pour t assez grand, y/t et $y'^{\pm}$ ont une même limite pour $t \to +\infty$ de sorte que $ye^{-Kt}(K>0)$, $yt^{-\alpha-1}(\alpha>0)$, $y'^{\pm}e^{-Kt}$ et $y'^{\pm}t^{-\alpha}$ tendent vers* o.

B) *Sinon elle est croissante et >0 pour t assez grand et ye^{-Kt}, $yt^{-\alpha-1}$ ont séparément une lim. sup. finie ou nulle en même temps respectivement que $y'^{\pm}e^{-Kt}$ ou $y'^{\pm}t^{-\alpha}$.*

Dans le cas B une hypothèse avec y' entraîne la propriété correspondant avec y de manière banale (type de la règle de l'Hospital). Pour conclure dans l'autre sens, on remarque que

$$y'^{\pm}(t) \leqslant \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \leqslant \frac{y(t+h)}{h} \quad (h>0)$$

d'où en faisant $h = C^{te}$ ou $h = t$, des inégalités fournissant les énoncés.

Lemme 3'. — *Soit y convexe dans* $]0, t_0[$.

A) *Si y est d'abord croissante, y et $y'^{\pm}$ ont des limites finies pour pour $t \to 0$ et yt^{α}, $y'^{\pm}t^{\alpha+1}(\alpha>0)$ tendent vers* o.

B) *Sinon y est d'abord décroissante, yt^{α} et $-y'^{\pm}t^{\alpha+1}$ ont des lim. inf. $\geqslant 0$ et ont des lim. sup. simultanément finies ou nulles.*

Démonstration analogue.

Applications. — Soit u sous-harmonique dans $C_O^{R_1, R_2}$. En prenant comme variable $t = h(r)$ posons $y(t) = \mathfrak{M}_u^r(O)(R_1 < r < R_2)$. On sait[8] que y est convexe et que si μ est la mesure $\leqslant 0$ associée à u

$$\mu(C_O^{r_1, r_2}) = y_t'^{-}(t_2) - y_t'^{+}(t_1).$$

[8] F. Riesz a défini à travers une surface (ou courbe) comme Σ_O^R, quatre flux généralisés selon le côté d'approximation et l'orientation de la normale. Ainsi le flux par l'intérieur avec l'orientation vers l'intérieur est la limite pour $r \to R(r < R)$ du flux de $H_u^\delta(M)$ (δ étant $C_O^{r,R}$) à travers $\Sigma_O^\rho(r < \rho < R)$ quand on oriente la normale vers o. La masse totale portée par le domaine entre deux telles surfaces par exemple entre Σ_O^R et $\Sigma_{O_1}^{R_1}(\bar{D}_{O_1}^{R_1} \subset D_O^R)$ vaut le quotient par φ_τ de la somme des flux précédents pris du côté du domaine avec orientation vers le domaine. D'autre part les $y_t'^{\pm}$ valent le quotient par φ_τ des flux à travers Σ_O^r pour l'orientation dans le sens de r décroissant (voir FAS).

Rappelons d'ailleurs ([9]) que pour toute mesure de Radon $\leqslant 0$ dans un ouvert Ω (même de $\overline{R}^\tau$ mais alors différent de $\overline{R}^\tau$), il existe une fonction sous-harmonique dans Ω dont la mesure associée est cette mesure.

LEMME 4. — *Soit u harmonique dans* $D_O^{R_0} - O$, *de mesure associée* μ,

$$0 < r \text{ variable} < R \text{ fixé} < R_0, \qquad \alpha,\ C^{te} > 0.$$

A) $r^{\tau-2+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$, *toujours bornée inférieurement est bornée supérieurement si et seulement si* $r^\alpha\mu(C_O^{r,R})$ *est borné.*

B) $r^{\tau-2+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$ *toujours de lim. inf.* $\geqslant 0$ *pour* $r \to 0$, *tend vers* 0 *avec r si et seulement si* $r^\alpha\mu(C_O^{r,R}) \to 0$.

C) *La sommabilité en r de* $r^{\tau-3+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$, *qui entraîne l'hypothèse* B, *équivaut à celle de* $r^{\alpha-1}\mu(C_O^{r,R})$.

Il n'y a qu'à passer à la variable t et appliquer les lemmes 1 et 3.

Par inversion ([10]) ou par des raisonnements directs analogues on obtient :

LEMME 4'. — *Soit u sous-harmonique dans* $\Delta_O^{R_0}$, *de mesure associée* μ, *r variable* $>$ R *fixé* $>$ R_0, α $C^{te} > 0$.

A) $r^{-\alpha}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *toujours borné inférieurement est borné supérieurement si et seulement si* $r^{-(\tau-2+\alpha)}\mu(C_O^{R,r})$ *est borné.*

B) $r^{-\alpha}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *toujours de lim. inf.* $\geqslant 0$ *pour* $r \to \infty$, *tend vers* 0 *si et seulement si* $r^{-(\tau-2+\alpha)}\mu(C_O^{R,r}) \to 0$.

C) *La sommabilité en r au voisinage de l'infini de* $r^{-(1+\alpha)}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *qui entraîne l'hypothèse* B, *équivaut à la sommabilité de*

$$r^{-(\tau-1+\alpha)}\mu(C_O^{R,r}).$$

Ajoutons :

D) *Pour u sous-harmonique au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$, *ce point exclu, les propriétés* A, B, C *pour* $r \to \infty$ *sont invariantes en* O, *comme dans le lemme 2', par équivalence avec les propriétés correspondantes de* μ.

([9]) Voir la note aux C. R. déjà citée note ([6]).

([10]) Dans l'inversion $OM \cdot OM' = 1$, à $v(M)$ sous-harmonique de mesure associée μ correspond $w(M') = \dfrac{w(M)}{\overline{OM'}^{\tau-2}}$ sous-harmonique en M' et la mesure associée ν à w est telle que :

$$\nu(e') = \int_e \frac{d\mu_M}{\overline{OM}^{\tau-2}}, \qquad (e,\ e' \text{ inverses}).$$

7. Une propriété de la dérivée normale d'une fonction harmonique à la frontière.

LEMME 5. — *Soit dans le domaine* C_O^{r,r_0} $(0 < r \text{ variable} \leqslant \rho < r_0)$ *une fonction harmonique* u *venant s'annuler sur* Σ_O^r *et prenant sur* $\Sigma_O^{r_0}$ *des valeurs bornées en module par* K *et de moyenne nulle. Alors la dérivée normale* $\dfrac{du}{dn}$ *à* Σ_O^r *est en module bornée par une constante qui ne dépend que de* r_0, ρ *et* K (*pour* τ *fixé*).

En effet, si $1 < \alpha < \dfrac{r_0}{\rho}$ $\left(\text{par exemple } \alpha = \sqrt{\dfrac{r_0}{\rho}}\right)$ la fonction $v = H_u^{D_O^{r_0}}$ admet dans $\overline{D}_O^{\alpha\rho}$ un gradient borné indépendamment de u ([11]) et puisqu'elle s'annule en O, elle est sur $\Sigma_O^{r'}(r' \leqslant \alpha\rho)$ majorée en module par $\lambda_{r'}$ où λ ne dépend que de r_0, ρ, α et K.

Donc la solution w du problème de Dirichlet dans C_O^{r,r_0} pour une donnée, nulle sur $\Sigma_O^{r_0}$, égale à v sur Σ_O^r est majorée en module par λr sur $\Sigma_O^{\alpha r}$. Par suite $|u|$ égal à $|v - w|$ est majoré sur $\Sigma_O^{\alpha r}$ par $\lambda(1+\alpha)r$. Or u s'annulant sur Σ_O^r se prolonge harmoniquement au travers et devient une fonction harmonique dans la couronne $C_O^{r/\alpha,\alpha r}$; le prolongement, d'ailleurs, en M′ symétrique de M par rapport à $\Sigma_O^r(\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{OM}' = r^2)$ vaut $-u(\mathrm{M})\left(\dfrac{\mathrm{OM}}{r}\right)^{\tau-2}$ ([12]).

De sorte que la fonction obtenue dans $C_O^{r/\alpha,\alpha r}$ y est majorée en module par $\lambda(1+\alpha)r\alpha^{\tau-2}$. Sur Σ_O^r qui est à distance $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}r$ de la frontière de cette couronne, le gradient de u est donc majoré en module par $\lambda\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\alpha^{\tau-1}\tau$.

LEMME 5′. — *Soit dans* $C_O^{r_0,r}(r \geqslant \rho > r_0)$ *une fonction harmonique* u *venant s'annuler sur* Σ_O^r *et prenant sur* $\Sigma_O^{r_0}$ *des valeurs bornées en*

([11]) On sait que le gradient en O d'une fonction harmonique dans D_O^δ de R^τ, comprise entre A et B $(A \leqslant B)$ est en module majoré par $\dfrac{v_{\tau-1}}{v_\tau}\dfrac{B-A}{\delta}$ (v_τ étant le volume de D_O^1), où $\dfrac{v_{\tau-1}}{v_\tau}$ est $< \dfrac{\tau}{2}$.

([12]) On sait que le prolongement est possible puisque par transformation de KELVIN on se ramène localement au cas simple de la fonction s'annulant sur une portion de plan (droite). Il n'y a alors qu'à remarquer que $u(\mathrm{M})$ et $w(\mathrm{M}') = -u(\mathrm{M})\left(\dfrac{r}{\mathrm{OM}'}\right)^{\tau-2}$ ont même dérivée normale le long de Σ_O^r.

module par K *et de moyenne nulle. Alors la dérivée normale* $\frac{du}{dn}$ *à* Σ_0^r *est en module majorée par* $\lambda_0 r^{-\tau}$, *où la constante* λ_0 *ne dépend que de* $r_0\rho$ *et* K (*pour* τ *fixé*).

Cela résulte du lemme précédent par inversion.

Lemme 6. — *Soit dans* $C_0^{r, r_0}(r \leqslant \rho < r_0)$ *une fonction harmonique* u *bornée en module par* K *et venant s'annuler sur* Σ_0^r. *Alors la différence des dérivées normales* (*vers l'intérieur du domaine par exemple*) *en deux points quelconques de* Σ_0^r *est en module majorée par un nombre* λ_1 *qui ne dépend que de* $r_0\rho$ *et* K (τ *fixé*).

De même, pour u *harmonique dans* $C_0^{r_0, r}(r \geqslant \rho > r_0)$, *bornée en module par* K *et s'annulant sur* Σ_0^r, *la différence des dérivées normales* (*vers le domaine*) *en deux points quelconques de* Σ_0^r *est en module majorée par* $\lambda_2 r^{-\tau}$ *où la constante* λ_2 *ne dépend que de* $r_0\rho$ *et* K.

La première partie résulte du lemme 5 en considérant

$$C_0^{r, r'_0}(\rho < r'_0 < r_0)$$

et retranchant de u la fonction de Wiener pour cette couronne, une donnée nulle sur Σ_0^r et égale à $\mathfrak{M}_u^{r'_0}(O)$ sur $\Sigma_0^{r'_0}$. De même pour la seconde partie à partir du lemme 5′.

Cas particulier. Lemme 7. — *Soit* Ω *un domaine de complémentaire non polaire, c'est-à-dire admettant une fonction de Green* $G_\Omega(M, P)$[13]. *Otons-en le voisinage assez petit* $\overline{D}_0^r$ *d'un point* $O \neq \mathcal{R}_\tau (O \in \Omega)$. *Alors pour le nouveau domaine* ω, *la différence entre le maximum et le minimum* (*tous deux* > 0) *de* $\frac{dG_\omega}{dn}(M, P)$ (P *fixé dans* Ω, $P \neq O$, M *décrivant* Σ_0^r) *vers l'intérieur de* ω, *reste majorée en module par une constante* q *pour* r *variable assez petit.*

De même, si $\mathcal{R}_\tau \in \Omega$, *otons de* Ω *un* $\overline{\Delta}_0^r$, O *étant fixé quelconque. Pour le nouveau domaine* ω, *la différence entre le maximum et le minimum* (*tous deux* > 0) *de* $\frac{dG_\omega}{dn}(M, P)$ (P *fixé dans* Ω, $P \neq \mathcal{R}_\tau$,

[13] On sait qu'un ensemble est dit *polaire* s'il est, localement, contenu dans l'ensemble des points où une fonction sous-harmonique vaut $-\infty$. On peut montrer que la non polarité de $C\Omega$ (complémentaire dans $\overline{R}^\tau$) équivaut à l'*existence* de fonctions > 0 harmoniques dans $\Omega - P$ (P quelconque dans Ω), de flux φ_τ en P (c'est-à-dire à travers Σ_P^r vers P si $P \neq \mathcal{R}_\tau$, à travers Σ_0^r vers Δ_0^r si $P = \mathcal{R}_\tau$). Cette existence entraîne celle d'une *fonction* minima de ce type, alors identique à la fonction de Green de pôle P, définissable de diverses manières. Ces résultats faciles à déduire de (AX) ne semblent pas avoir été encore explicités.

M *décrivant* Σ_0^r) *vers l'intérieur de* ω, *reste majorée en module par* $q'r^{-\tau}$ ($q' = C^{te}$) *quand* r *variable est assez grand.*

APPLICATION. LEMME 8. — *Avec ces mêmes notations, soit sur* Σ_0^r *une fonction* f *sommable-*σ *donc telle* [14] *que la fonction* $(f, 0)$ *sur* $\overset{*}{\omega}$ (*égale à* f *sur* Σ_0^r, *à* 0 *ailleurs*) *soit résolutive pour* ω ; *alors* $|H^{\omega}_{(f,0)}(M) - H^{\omega}_{(\mathfrak{M}_f^r, 0)}(M)|$ *est majoré par* $K_1 r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{|f|}$ (1^{er} cas) *ou par* $\frac{K_2}{r}\mathfrak{M}^r_{|f|}$ (second cas) (K_1, K_2 *constantes*), *pour* r *assez petit ou assez grand, uniformément en* M *pris hors d'un voisinage de* O *ou respectivement de* $\mathcal{R}_\tau$.

En effet $H^{\omega}_{(f^+, 0)}(M)$ et $H^{\omega}_{(\mathfrak{M}_{f^+}^r, 0)}(M)$ sont compris entre les produits de $\frac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau} r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ par le min. et le max. de $\frac{dG_\omega}{dn_P}$ sur Σ_0^r, De sorte que la différence est en module majorée par $q\frac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau} r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ (1^{er} cas) ou $q'\frac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau}\frac{1}{r}\mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ (2^e cas).

Même résultat avec f^- d'où l'énoncé.

Remarque. Extension des lemmes 7 et 8. — Les résultats se conservent avec des constantes convenables si Ω est variable mais contenu dans un domaine fixe analogue et contenant un voisinage fixe de O (1^{er} cas) ou de $\mathcal{R}_\tau$ (2^e cas).

8. Le « centre harmonique » d'un ensemble borné fermé.

Beaucoup plus généralement qu'il ne serait utile pour la suite, considérons l'ensemble E borné fermé pour $\tau \geqslant 2$. On sait qu'il existe sur E une distribution unique $\geqslant 0$ de la masse 1 telle que le potentiel en $h(r)$ soit borné au voisinage de E et vaille sur E une certaine constante K quasi-partout (c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble polaire). Soit ν cette « distribution d'équilibre » et V son potentiel.

On appellera *centre harmonique* de E le centre de gravité de ν.

Prenons une origine O ; on connaît le développement classique :

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{OP}\left[1 + \frac{OM\cos(OM, OP)}{OP} + \cdots\right]$$

[14] Par exemple, parce que la mesure harmonique sur Σ_0^r relativement à ω est l'intégrale de $\frac{dG}{dn}$, comprise entre deux nombres > 0. Voir plus généralement le lemme 10.

en série entière en $\frac{1}{\mathrm{OP}}$ à coefficients fonctions de OM et du cos (OM, OP) avec convergence uniforme en M et P (OM borné, OP assez grand). De même ou à partir de là des séries connues analogues

$$\log\frac{1}{\mathrm{MP}} = \log\frac{1}{\mathrm{OP}} + \frac{\mathrm{OM}\cos(\mathrm{OM},\ \mathrm{OP})}{\mathrm{OP}} + \cdots$$

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^{\tau-2}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-2}} + \frac{(\tau-2)\mathrm{OM}\cos(\mathrm{OM},\ \mathrm{OP})}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1}} + \cdots \quad \tau > 2.$$

D'après cela, pour que $[\mathrm{V(P)} - h(\mathrm{OP})]\overline{\mathrm{OP}}^{\tau}$ soit borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau(\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau)$, il faut et il suffit que O soit le centre harmonique de E.

Lemme 9. — *Soit dans* $\overline{\mathrm{R}}^{\tau}$, *un domaine* Ω ($\complement\Omega$ *non polaire*), *contenant* $\mathcal{R}_\tau$. *Si* G_Ω *est la fonction de Green et* O *un point fixé quelconque* $\neq \mathcal{R}_\tau$, $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau,\ \mathrm{P}) + h(\mathrm{OP})$ *est, pour* $\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau$, *voisin de* $\mathcal{R}_\tau$, *une fonction* $\varphi(\mathrm{P})$ *prolongeable en* $\mathcal{R}_\tau$ *de façon a être harmonique dans un voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$, *et* $\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathcal{R}_\tau) = \mathrm{O}(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1})$.

Pour que $\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathcal{R}_\tau)$ *soit un* $\mathrm{o}(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1})$ *ou, ce qui est équivalent, soit un* $\mathrm{O}(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau})$ *il faut et il suffit que* O *soit le centre harmonique de* $\complement\Omega$.

Cela résulte des propriétés de l'harmonicité à l'infini (voir AN)([15]) et de ce que $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau,\ \mathrm{P}) = \mathrm{K} - \mathrm{V(P)}$, V étant le potentiel d'équilibre de $\complement\Omega$ et K la constante d'équilibre, qui vaut, si $\tau < 2$, $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)$.

9. Une extension du problème de Dirichlet.

Soit dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$ un ouvert Ω de complémentaire non polaire et F(M) une fonction définie dans $\Omega - \mathrm{A}$, A étant un compact contenu dans Ω. Lorsque $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}^{\Omega_n}$ existe et converge uniformément localement sur Ω (c'est-à-dire uniformément sur tout compact de Ω) vers une même fonction harmonique indépendante de la suite, quand l'ouvert Ω_n tend en croissant vers $\Omega \supset \Omega_n$([16]), on notera $\mathcal{D}_{\mathrm{F}}^{\Omega}$ cette fonction

([15]) Rappelons qu'une fonction harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, ce point exclu, se développe selon :

$$\mathrm{K} + \alpha h(\mathrm{OM}) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{OM}}^n \mathrm{Y}_n(m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Y}_n^{(1)}(m)}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}}$$

(Y_n, $\mathrm{Y}_n^{(1)}$ fonctions de Laplace du point m correspondant sur Σ_0^1 à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).

L'harmonicité à l'infini se traduit par la nullité de α et du premier Σ.

([16]) Plus brièvement : si pour $\overline{\omega} \subset \Omega$ ($\omega \supset \mathrm{A}$), $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}^{\omega}$ converge uniformément localement selon l'ordonné filtrant des ω.

limite. Nous en donnerons un cas d'existence utile pour la suite. Auparavent explicitons deux lemmes sous des formes d'ailleurs plus générales qu'il ne serait nécessaire.

LEMME 10. — *Soient dans* $\overline{R}_\tau$ *deux compacts disjoints* A, B, A *étant non polaire et* f, g *deux fonctions sur* $\overset{*}{A}$, $\overset{*}{B}$, *telles que, pour le complémentaire de* $A \cup B$ *elles définissent une donnée-frontière résolutive. Alors* f *est résolutive pour* CA *et, complétée par* o *sur la frontière d'un compact* B_1 *quelconque disjoint de* A, *elle devient résolutive pour* $C(A \cup B_1)$. *Si* B_1 *contenant* B *décroît dans une suite et tend vers* B, *la fonction de Wiener pour* $C(A \cup B_1)$ *et la donnée-frontière égale à* f *sur* A, o *sur* $\overset{*}{B}_1$ *converge uniformément localement vers la fonction analogue pour* $C(A \cup B)$.

Notons (f, o) la fonction égale à f sur $\overset{*}{A}$, à o ailleurs. Si l'on sait que f est résolutive pour CA, il est aisé de voir que (f, o) l'est pour $C(A \cup B_1)$, vu l'interprétation de H_f^{CA} dans $C(A \cup B_1)$ comme fonction de Wiener dans cet ouvert plus petit; et on achève grâce à la propriété de croissance de la mesure harmonique relative à un ouvert qui s'agrandit.

Reste donc à voir la résolutivité de f pour CA; l'hypothèse montre aussitôt que (f, o) est résolutive pour $C(A \cup B)$, donc par la même idée précédente de diminution de l'ouvert, pour $C(A \cup B_1)$ où B_1 contiendrait B. *On se ramène* alors aisément au cas-type suivant: soit ω un domaine ($C\omega$ non polaire jouant le rôle de A) contenant le compact α (qui remplace B), de telle sorte que $\omega - \alpha$ soit constitué de p domaines dont chacun admet à sa frontière un point-frontière régulier de ω; et notons (φ, ψ) la fonction égale à φ sur $\overset{*}{\omega}$, à ψ sur $\overset{*}{\alpha}$. On donne sur $\overset{*}{\omega}$ une fonction f telle que (f, o) est résolutive pour $\omega - \alpha$; on va montrer que f est résolutive pour ω. On supposera α non polaire, sinon ce serait immédiat.

Considérons pour cela sur $\overset{*}{\omega}$ deux fonctions encadrant f, $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ (f_1 bornée supérieurement et semie-continue supérieurement, f_2 bornée inférieurement et semi-continue inférieurement) pour lesquelles existe $u = H_{(f_1, o)}^{\omega - \alpha}$ et $v = H_{(f_2, o)}^{\omega - \alpha}$ encadrant $H_{(f, o)}^{\omega - \alpha}$; on sait faire en sorte que la différence soit arbitrairement petite sur un compact choisi à l'avance de $\omega - \alpha$.

Introduisons un domaine ω_1 contenant α tel que $\overline{\omega}_1 \subset \omega$ et appliquons la méthode alternée à $\omega - \alpha$ et ω_1 à partir de u et de v indépendamment. La convergence a lieu parce que le maximum sur

$\overset{*}{\omega}_1$ de $H^{\omega-\alpha}_{(0,1)}$ est un nombre $K < 1$. Si λ majore $|u|$ et $|v|$ sur $\overset{*}{\omega}_1$, les fonctions u_n et v_n obtenues à la n[e] opération [17] diffèrent des fonctions limites U et V d'au plus $\dfrac{\lambda K^n}{1-K}$. Il est d'autre part immédiat que si $|u-v| \leqslant \varepsilon$ sur $\overset{*}{\omega}_1$, $|u_n - v_n| \leqslant n\varepsilon$ sur $\overset{*}{\omega}_1$. On saura donc, en choisissant convenablement f_1 et f_2 faire en sorte que l'on ait sur $\overset{*}{\omega}_1$: $|U-V| < \rho$ arbitrairement donné > 0 à l'avance.

Or, dans $\omega - \alpha$, $U = u + \lim.(u_n - u)$ vaut $H^{\omega-\alpha}_{(0,U)}$. Donc U est bornée supérieurement et admet en tout point-frontière régulier de ω une lim. sup. $\leqslant f$. Propriété analogue pour V. D'où résulte bien que f est résolutive et même que H^{ω}_f serait obtenue par le procédé alterné précédent à partir de $H^{\omega-\alpha}_{(f,0)}$.

Remarque. — La propriété de résolutivité de f pour CA équivaut au théorème suivant :

Soit dans un domaine ω ($C\omega$ non polaire) un compact α tel que $\omega' = \omega - \alpha$ soit connexe, et A un point de ω_1. Il y a sur $\overset{*}{\omega}$ équivalence des mesurabilités harmoniques μ^{ω}_A et $\mu^{\omega'}_A$ (ce que l'on savait d'ailleurs dans un cas plus général [18]) et pour un ensemble e ainsi mesurable sur $\overset{*}{\omega}$,

$$\mu^{\omega}_A(e) \leqslant K\mu^{\omega'}_A(e) \qquad (K\ C^{te} > 0 \text{ indépendante de } e).$$

Cette inégalité seulement pour les boréliens [19] entraîne d'ailleurs, grâce à l'inégalité contraire évidente sans facteur K, l'équivalence des mesurabilités et équivaut au théorème de résolutivité précédent pour f borélien, théorème traitable très brièvement par le procédé alterné.

(17) La première opération à partir de u donne u_1 égale à u dans $\omega - \omega_1$ et à $H^{\omega_1}_u$ dans ω_1 ; la deuxième donne u_2 égale à $H^{\omega-\alpha}_{(f_1,u_1)}$ dans $\omega - \omega_1$ et à $H^{\omega_1}_{u_2}$ dans ω_1, etc.

(18) Voir AN, n° 13, b : soient deux ouverts (de complémentaires non polaires) ω et ω_1, et $E \subset \overset{*}{\omega}_1 \cap \overset{*}{\omega}_2$ non vide avec Δ ouvert $\supset E$ et $\Delta \cap \omega_1 = \Delta \cap \omega_2$. Alors les conditions que $e \subset E$ soit de mesure harmonique nulle sur chacun des composants de ω d'une part, de ω_1 d'autre part, sont équivalentes. D'où il suit que, relativement à un point $M \in \omega \cap \omega_1$, au moins si ω et ω_1 sont connexes (restriction oubliée dans AN), la mesurabilité des $e \subset E$ est la même pour ω et ω_1. Il n'y a qu'à adapter à $\overline{R}^{\tau}$ une des démonstrations données dans R^{τ} (*Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, 1939, p. 472 et *Bull. Sc. Math.*, t. 65, 1941, proposition 12).

(19) Une meilleure démonstration m'en a été communiquée ensuite par CHOQUET, qui montre même plus généralement, si α est non polaire, que si f est harmonique > 0 dans ω, $[f - H^{\omega'}_{(0,f)}]/f$ est, en chaque point A de ω', compris entre deux nombres > 0 et < 1 indépendants de f. On se ramène au cas de $f(A) = 1$. Si la proposition était fausse, on trouverait grâce à une suite convenable et à la limite, une fonction f telle que $f = H^{\omega}_{(0,f)}$ avec $H^{\omega'}_{(0,f)} = 0$ en A donc dans ω', ce qui est facilement incompatible avec $f > 0$.

LEMME 11. — *Reprenons dans* $\overline{R^\tau}$, Ω *ouvert de complémentaire non polaire, un compact* A *contenu et* F(M) *définie sur* Ω *au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$. *On notera* $[m, n]$ *la fonction égale à la fonction m au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *et à n sur* $\overset{*}{A}$. *Soit sur* $\overset{*}{A}$, *f telle que* $[o, f]$ *soit résolutive pour* $\Omega - A$ *et soit* Ω_n *ouvert tendant en croissant vers* $\Omega \supset \overline{\Omega}_n$, *Si* $H^{\Omega_n - A}_{[F, f]}$ *existe et converge uniformément localement vers une fonction (harmonique) il en est de même de* $H^{\Omega_n}_F$ *et si la première limite est indépendante de la suite* Ω_n, *alors* $\mathcal{D}^\Omega_F$ *existe.*

Si A est polaire le théorème est évident. On le supposera donc non polaire.

D'après le lemme précédent, $H^{\Omega_n - A}_{[o, f]}$ existe et converge uniformément localement sur $\Omega - A$ vers $H^{\Omega - A}_{[o, f]}$; puis $H^{\Omega_n - A}_{[F, o]}$ existe et converge uniformément localement ; on verra aisément que cela subsiste si on agrandit A ; enfin $H^{\Omega_n}_F$ existe et il s'agit de voir qu'elle converge aussi uniformément localement.

En considérant chaque domaine composant de Ω et nous débarrassant de la partie impropre, on se ramène au cas du domaine Ω et de $\Omega - A$ se décomposant en p domaines dont chacun admet à sa frontière un point-frontière régulier de Ω. Introduisons comme plus haut le domaine ω^1 contenant A avec $\overline{\omega}_1 \subset \Omega$ et considérons la méthode alternée qui fait passer de $H^{\Omega_n - A}_{[F, o]}$ à $H^{\Omega_n}_F$, en l'appliquant à $\Omega_n - A$ et ω_1 et à $H^{\Omega_n - A}_{[F, o]}$; elle réussit grâce au fait que le maximum sur $\overset{*}{\omega}_1$ de $H^{\Omega_n - A}_{[o, 1]}$ est majoré par celui de $H^{\Omega - A}_{[o, 1]}$, nombre fixe < 1. Comparant les opérations pour n et n', on verra, en raisonnant à peu près comme au lemme précédent, que $|H^{\Omega_n}_F - H^{\Omega_{n'}}_F|$ sera majoré par ε sur $\overset{*}{\omega}_1$ (donc dans ω_1) si $|H^{\Omega_n - A}_{[F, o]} - H^{\Omega_{n'} - A}_{[F, o]}|$ est suffisamment petit sur $\overset{*}{\omega}_1$, donc si n et n' sont assez grands.

D'où l'énoncé et l'existence de $\mathcal{D}^\Omega_F$, puisque ω_1 est arbitraire.

APPLICATION. LEMME 12. — *Soit avec le même* Ω, *une fonction sous-harmonique u dans* $\Omega - \alpha$ (α *étant un compact dans* Ω) *et y admettant une majorante harmonique v. Alors* $\mathcal{D}^\Omega_u$ *existe.*

Prenons dans Ω un compact A dont l'intérieur contienne α. On voit que $[o, v]$ est résolutive pour $\Omega - A$ et que $H^{\Omega_n - A}_{[u, v]}$ majoré par v est croissante et admet une limite indépendante de la suite Ω_n. D'où le résultat.

Remarque. — On montre aisément que, pour Ω connexe, l'existence d'une majorante harmonique au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ équivaut à la sommabilité de la fonction de Green (pour une position quelconque du pôle) par rapport à la mesure associée de u prise dans un voisinage de $\overset{*}{\Omega}$.

III. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE ET LA CROISSANCE

10. Faisons d'abord l'étude au voisinage de $O \neq \mathcal{R}_\tau$; $h(\mathrm{MP})$ étant pour M fixé $\neq O$, harmonique en P dans D_O^{OM} se développe sur chaque droite issue de O selon une série entière unique en OP

$$h(\mathrm{MP}) = h(\mathrm{MO}) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{\mathrm{M}}(p)\overline{\mathrm{OP}}^n \tag{3}$$

($Y_n^{(\mathrm{M})}(p)$ fonction de Laplace d'ordre n sur Σ_O^1 de R^τ, p correspondant à la direction $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) et, comme on le sait, avec convergence uniforme dans tout D_O^r $(r < \mathrm{OM})$.

Mais, soit à partir du développement élémentaire classique pour OP assez petit :

$$\frac{1}{\mathrm{MP}} = \frac{1}{\mathrm{MO}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{L}_n(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}} \tag{4}$$

($\mathfrak{L}_n$ polynome de Legendre de degré n, $\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}$ angle $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}})$) et par un calcul de substitution de séries pour passer à $h(\mathrm{MP})$, soit par un développement analogue direct de $h(\mathrm{MP})$, on voit que le $Y_n^{\mathrm{M}}(p)$ de (3) est de la forme $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})/\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}$ où $Z_n^{(\tau)}$ est un polynome de degré n à coefficients numériques, indépendants de M et P (cas particulier de ceux de Gegenbauer obtenus en développant $\overline{\mathrm{MP}}^{-\alpha}$ ou $\log \mathrm{MP}$), d'ailleurs différent de 0 pour la valeur 1 de la variable, puisque valant alors le coefficient de x^n dans le développement en série entière de $h(1-x)$.

Nous partirons donc du développement :

$$h(\mathrm{MP}) = h(\mathrm{MO}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}} \tag{5}$$

où $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n$ est, relativement à l'origine O des coordonnées, un polynome harmonique homogène de degré n, de révolution autour de OM. On sait d'ailleurs qu'un tel polynome est unique à un facteur près (ce qui suffit donc à déterminer $Z_n^{(\tau)}(x)$ à partir de sa valeur indiquée plus haut pour $x = 1$).

Noter que $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)$ étant harmonique de M dans R^τ il en est de même dans $R^\tau - O$ pour la transformée de Kelvin

$$Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)/\overline{OM}^{\tau-2+n}.$$

Nous poserons pour p entier $\geqslant 0$

$$(6)\qquad \mathcal{H}_p^0(M, P) = h(MP) - h(MO) - \sum_{n=1}^{p} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{OP}^n}{\overline{OM}^{\tau-2+n}}$$

en convenant que $\sum_{n=1}^{0} = 0$.

On remarquera essentiellement que dans $D_0^{\lambda OM}$ ($0 < \lambda$ fixé < 1)

$$(7)\qquad |\mathcal{H}_p^0(M, P)| \leqslant K_{p+1}\frac{\overline{OP}^{p+1}}{\overline{OM}^{\tau-2+p+1}}$$

(K_{p+1}, C^{te} indépendante de M et P)

On peut le voir sans étudier la série ni les Z_n en remarquant que le reste de la série commençant au terme en $\overline{OP}^n$ est, d'après la formule de Taylor à une variable, majorée en module par $\frac{\delta_n}{n!}\overline{OP}^n$ où δ_n majore en module les dérivées n^e, pour tout système d'axes, de $h(MP)$ (M fixé, $P \in D_0^{\lambda OM}$) et il n'y a qu'à chercher un tel δ_n de proche en proche [20].

11. Une mesure de Radon $\mu \leqslant 0$ étant donnée dans Ω ouvert $\neq \overline{R}^\tau$, on a déjà rappelé au n° 6 qu'il existe dans Ω une fonction sous-harmonique associée. Lorsque Ω est un $D_0^R - O$, *si la mesure totale est finie,* le potentiel $\int h(MP)d\mu_P$ est bien une telle fonction, sous-harmonique même dans R^τ.

Examinons le cas où au voisinage de O, cette masse totale n'est plus finie et où la distribution des masses a une croissance plus ou moins rapide.

THÉORÈME 1. — *Soit dans* $R^\tau - O$ *une mesure de Radon* $\mu \leqslant 0$, *nulle hors d'un compact,* $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$.

(20) On introduit les $\Sigma_O^{\rho_l}\left[\rho_l = OM\left(1 - \frac{(1-\lambda)l}{n}\right)\right]$, $l = 1, 2 \dots n$ et on part d'un majoration des dérivées premières sur $\Sigma_O^{\rho_1}$ soit

$$n/(1-\lambda)OM \quad (\tau = 2) \qquad \text{ou} \qquad (\tau - 2)[n/(1-\lambda)OM]^{\tau-1} \quad (\tau > 2),$$

immédiate en observant que ces dérivées sont en P majorées en module par la dirivée dans la direction PO. On passera à une majoration des dérivées secondes sur $\Sigma_O^{\rho_2}$ par la formule rappelée note 11 etc. jusqu'à une majoration des dérivées sur $\Sigma_O^{\lambda OM}$.

α) *Supposons* $\overline{\mathrm{OP}}^s$ *sommable*-μ_{P}, *ce qui équivaut à une sommabilité en* r *de* $r^{s-1}\mu(\Delta_{\mathrm{O}}^r)$; *alors* $\int \mathcal{H}_{p_s}^{\mathrm{O}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est une intégrale de Radon* ($\mathrm{M}\in\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$) *et représente une fonction sous-harmonique* $v(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ (21), *associée à* μ *et telle que :*

$$(8) \qquad v^+(\mathrm{M}) = \mathrm{o}\left(\overline{\mathrm{OM}}^{-(\tau-2+s)}\right) \quad (\mathrm{M} \to \mathrm{O}).$$

β) *Supposons* $\mu(\Delta_{\mathrm{O}}^r) = \mathrm{o}(r^{-s})(r \to \mathrm{o})$, *ce qu'entraînerait* ($\alpha$) *par le lemme* 2C.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}_{p_s}^{\mathrm{O}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est encore intégrale de Radon, sous-harmonique associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$, *satisfaisant à* (8),

Si s *est entier et si* $\int_{\mathrm{C}_{\mathrm{O}}^{\rho, r}} \mathrm{Z}_s^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^s d\mu_{\mathrm{P}} \to \mathrm{o}$ *avec* r *uniformément par rapport à* $\rho < r$ *et à la direction* OM, *alors* $\lim_{r\to\mathrm{o}} \int_{\Delta_{\mathrm{O}}^r} \mathcal{H}_{p_s}^{\mathrm{O}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *existe et représente une fonction sous-harmonique associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ et *satisfaisant à* (8).

γ) *Supposons* $\mu(\Delta_{\mathrm{O}}^r) = \mathrm{O}(r^{-s})$.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est encore intégrale de Radon, sous-harmonique* v *associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ *et satisfait à*

$$(9) \qquad v^+(\mathrm{M}) = \mathrm{O}\left(\overline{\mathrm{OM}}^{-(\tau-2+s)}\right) \quad (\mathrm{M} \to \mathrm{O}).$$

Si s *est entier et si* $\int_{\Delta_{\mathrm{O}}^r} \mathrm{Z}_s^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^s d\mu_{\mathrm{P}}$ *est borné uniformément en* r (22) *et* M, *alors pour une suite* r_k *convenable* $\to \mathrm{o}$, $\lim_{k\to\infty} \int_{\Delta_{\mathrm{O}}^{r_k}} \mathcal{H}_{p_s}^{\mathrm{O}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *existe et représente une fonction sous-harmonique* $v(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ *associée à* μ, *satisfaisant à* (9). *Noter que dans* β *et* γ, *la condition supplémentaire sur* μ *équivaut* (23) (*en lui adjoignant l'autre*) *à ce que pour tous les polynomes harmoniques homogènes d'ordre* s, *de coefficients bornés par un nombre fixe, ou seulement pour tous ceux déduits de l'un non nul par rotation autour*

(21) Et qui prolongée par o en $\mathcal{R}_\tau$ est même harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$; même remarque dans les cas β, γ qui suivent.

(22) Ou même seulement pour les valeurs d'une suite $\to$ o. On peut faire une amélioration analogue dans β.

(23) Car on sait que, comme polynomes harmoniques homogènes d'ordre n linéairement indépendants en nombre maximum, on peut prendre ceux déduits par des rotations convenables d'un seul non nul. (Voir à ce sujet un mémoire en collaboration avec G. Choquet, à paraître prochainement.)

de l'origine O, l'intégrale-$d\mu$ sur $C_O^{\rho, r}$ ou Δ_O^r tende uniformément vers o avec r ou respectivement soit uniformément bornée.

D'autre part, cette condition supplémentaire sur μ est satisfaite si μ est la somme d'une mesure invariante par rotation autour de O et d'une mesure par rapport au module (variation totale) de laquelle $\overline{\text{OP}}^s$ est sommable.

La majoration (7) de $\mathcal{H}$ fournira, grâce au lemme 2, tout ce qui concerne l'existence et le caractère sous-harmonique des intégrales de Radon ; de même pour les limites d'intégrales de β et γ en mettant $\mathcal{H}_{p_s}$ c'est-à-dire $\mathcal{H}'_{s-1}$ sous la forme $\dfrac{Z_s^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{\text{OP}}^s}{\overline{\text{OM}}^{\tau-2+s}} + \mathcal{H}_s$; dans ce cas de (γ), on suppose d'abord $\text{OM} > \rho$ fixé et on choisit r_n telle que $\int_{C_O^{r_n, \rho}} \mathcal{H}_{p_s}(\text{M}, \text{P})\,d\mu_\text{P}$ converge uniformément localement dans $\text{R}^\tau - \overline{\text{D}}_O^\rho$ vers une fonction harmonique en M ; on donne à ρ les valeurs d'une suite $\to$ o, en prenant à chaque fois pour r_n une suite extraite de la précédente. Le procédé diagonal fournira la solution.

Pour avoir les limitations de croissance, on décomposera les intégrales de Radon selon $\int_{\overline{\Delta}_O^r} + \int_{D_O^r - O}$ avec $r = \text{OM}/2$. Pour majorer la première partie on décompose le $\mathcal{H}$ et on remarque d'abord que l'intégrale de la somme des deux premiers termes est majorée par $o(r^{-(\tau-2+s)})$ dans les cas α, β et par $O(r^{-(\tau-2+s)})$ dans γ ; il suffit, d'après l'allure de μ, d'appliquer le lemme 2, en examinant séparément le cas $\tau \geq 3$ (où l'on considérera les intégrales respectives des deux termes) et le cas $\tau = 2$ (où l'on appliquera le dernier résultat des lemmes 2 A ou B) ; puis pour chaque terme suivant de $\mathcal{H}$, s'il y en a et où alors $1 \leq n < s$ on aura, toujours grâce au lemme 2, une limitation en o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$. D'où la première partie, ces mêmes types respectifs de majoration. La seconde partie se majore grâce à (7), ce qui par le lemme 2 donne encore un o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$.

Enfin, dans les cas β, γ avec s entier, on fera la décomposition $\int_{\overline{\Delta}_O^r} + \lim.\int_{C_O^{r_k, r}}$ et un raisonnement analogue en décomposant dans la seconde partie $\mathcal{H}'_{s-1}$ comme plus haut.

12. Rappelons d'après (FAS) que si u est sous-harmonique dans $\text{D}_O^{R_0} - \text{O}$, $\mathfrak{M}_u^r(\text{O})$ et $\mathfrak{M}_u^r/h(r)$ ont des limites pour $r \to$ o, la seconde, λ_m étant $> -\infty$; de même, puisque u^+ est sous-harmonique, pour $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ et $\mathfrak{M}_{u^+}^r/h(r)$.

On sait aussi que pour $r \to 0$,

α) si $\mathfrak{M}_{u^+}^r/h(r) \to 0$, u^+ est borné au voisinage de O et u se prolonge en O de façon à devenir sous-harmonique dans $D_O^{R_0}$,

β) si $\mathfrak{M}_{u^+}^r/h(r)$ est seulement borné, c'est-à-dire de limite finie, $u^+/h(OM)$ est borné au voisinage de O et u est de la forme $\lambda_m h(OM) + fct\ s\ h$ dans $D_O^{R_0}$ (cette fonction ayant même un λ_m nul).

Ce cas β rentre dans celui de λ_m *fini* qui caractérise *l'existence d'une majorante harmonique dans tout* $D_O^R - O(R < R_0)$ et équivaut aussi à ce que la masse totale associée à u dans $D_O^R - O$ soit finie, ou encore à la *validité de la représentation de F. Riesz* dans $D_O^R - O$ (avec la fonction de Green ou seulement avec $h(MP)$).

Nous irons maintenant plus loin en considérant des croissances plus rapides et en prolongeant la représentation de Riesz.

THÉORÈME 2. — *Soit dans* $D_O^{R_0} - O$ *une fonction sous-harmonique de mesure associée* μ, $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$. *Alors avec* $0 < r$ *variable* $\leq R$ *fixé* $< R_0$,

A) *si* $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ *est sommable en* r (*ce qui entraîne* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$ $(r \to 0)$ *et les mêmes propriétés avec* u), *ou bien*

B) *si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r^{-(\tau-2+s)})$ (*ce qui entraîne la même propriété pour* u *et il en serait de même avec un* o) *et si en outre* s *n'est pas entier, alors on aura dans* $D_O^R - O$ *une représentation avec une intégrale de Radon :*

$$(10) \qquad u(M) = \int_{D_O^R - O} \mathcal{H}_{p_s}^O(M, P)\, d\mu_P + fct\ harm.\ w$$

où
$$w(M) = fct\ harm.\ dans\ D_O^R + \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} h(OM) + \sum_{n=1}^{p_s} \frac{Y_n(m)}{\overline{OM}^{\tau-2+n}}$$

avec : $Y_n(m)$ *fonction de Laplace d'ordre* n *sur* Σ_0^1 *de* R^τ, m *correspondant à* $\overrightarrow{OM}$,

$\Sigma_1^{p_s}$ *valant* 0 *pour* $p_s = 0$,

α_R *étant le flux de* u *à travers* Σ_O^R *pris du côté de* D_O^R *avec l'orientation vers* D_O^R (24).

Traitons (A). Comme $\mathfrak{M}_u^r/h(r)$ est borné inférieurement, $-\mathfrak{M}_u^r r^{\tau-3+s}$ sera majoré par une fonction sommable, et, d'après $\mathfrak{M}_{u^-}^r \leq \mathfrak{M}_{u^+}^r - \mathfrak{M}_u^r$, $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_{u^-}^r$ sera sommable donc aussi $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_u^r$.

Le lemme 4 C montre que $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r \to 0$ et que $r^{s-1}\mu(C_O^{r,R})$ est

(24) Voir la note 8.

sommable. Alors d'après le théorème 1, α, l'intégrale v de Radon de l'énoncé existe, est sous-harmonique et associée à μ dans $D_O^R - O$; elle satisfait à $v^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)})$ $(M \to O)$ d'où puisque $\mathfrak{M}_{v^-}^r = \mathfrak{M}_{v^+}^r - \mathfrak{M}_v^r$ et que $-\mathfrak{M}_v^r/h(r)$ est bornée supérieurement, $\mathfrak{M}_{v^-}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$.

Ainsi u est dans $D_O^R - O$ la somme de v et d'une fonction harmonique w, et comme $w^+ \leqslant u^+ + v^-$ on aura $\mathfrak{M}_{w^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$.

Donc dans le développement classique de w au voisinage de O, il n'y a pas de termes en $1/\overline{OM}^{\tau-2+n}$ pour $n \geqslant s$.

D'où la représentation (10). Démonstration analogue du cas B.

Il reste seulement à interpréter le coefficient de $h(OM)$ dans le développement de w. Cela vient de ce que le flux du type considéré pour l'intégrale v est nul, ce qui résulte par exemple de ce que, par intégration sous $\int$

$$\mathfrak{M}_v^r = \int_{C_O^{r,R}} h(OP)\,d\mu_P - h(r)\mu(C_O^{r,R})$$

d'où
$$\frac{\mathfrak{M}_v^r}{h(r)-h(R)} \to o(r \to R,\ r < R)$$

qui s'interprète en nullité du flux considéré.

Corollaire. — *Soit u sous-harmonique dans* $D_O^{R_0} - O$

$$0 < r < R \textit{ fixé } < R_0, \quad s > 0$$

a) *si* $r^{\tau-2+s-1}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ *est sommable en* r, *s quelconque ou si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)}$ $(r \to 0)$ *avec s non entier, alors*

$$(11)\qquad u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)})\ (M \to O)$$

b) *si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = O(r^{-(\tau-2+s)})$ *avec s non entier,*

$$(12)\qquad u^+(M) = O(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)})$$

et l'énoncé simple moins précis, pour s quelconque > 0 :

c) *si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = O(r^{-(\tau-2+s)})$, $u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s+\varepsilon)})$ *avec* $\varepsilon > 0$ *quelconque.*

Remarque complémentaire 1. — Si $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est un o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$, on a vu qu'il en est de même de $\mathfrak{M}_u^r$ et que par suite $\mu(C_O^{r,R})$ est o ou O respectivement de r^{-s} ; mais nous ne savons pas, *pour s entier,* si les conditions supplémentaires sur μ des cas β, γ du théorème 1 sont aussi respectivement satisfaites. Nous le démontrerons au chapitre suivant pour $s=1$; en tout cas *si elles sont satisfaites*, on aura des représentations analogues à (10), où l'intégrale sera remplacée par les limites d'intégrales des cas β ou γ (s entier, théorème 1) et l'on verra que le w de (10) sera de la même forme, avec la même interprétation de α_R mais où p_s devra être remplacé par s lorsque s est entier et que $\mathfrak{M}^r_{u^+}$ est seulement $O(r^{-(\tau-2+s)})$; il s'ensuivra les limitations (11) ou (12).

Remarque 2. — α_R peut encore s'interpréter comme suit : si on modifie u dans un $D^r_O (r < R)$ de façon à ce qu'elle devienne différence de deux fonctions sous-harmoniques dans D^R_O (voir la note 7), $\frac{\alpha_R}{\varphi_\tau}$ est la masse totale associée dans D^R_O (différence des masses totales associées).

13. **Passons à l'étude analogue au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.**

On peut procéder par inversion (voir note 10) à partir des résultats précédents, ce qui est particulièrement facile pour $\tau=2$ ou faire une étude directe analogue en s'appuyant sur les lemmes relatifs à $\mathcal{R}_\tau$.

Par inversion ou par simple permutation de M et P dans (5), on aura le développement de base, O étant fixé :

$$(5') \qquad h(MO) = h(OP) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{OM}^n}{\overline{OP}^{\tau-2+n}}$$

valable pour $OP > OM$ avec limitation en module $K_n \frac{\overline{OM}^n}{\overline{OP}^{\tau-2+n}}$ du reste commençant au n^e terme inclus, pour $OP > \frac{1}{\lambda} OM$ $(0 < \lambda < 1)$.

On posera :

$$(6') \quad \mathcal{H}'^{O}_p(M, P) = h(MP) - h(OP) - \sum_{n=1}^{p} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{OM}^n}{\overline{OP}^{\tau-2+n}}$$

en convenant que $\sum_{n=1}^{0} = 0$.

Soit la mesure $\mu \leqslant 0$ dans R^τ. *La condition* que $\int h(MP)d\mu_P$ soit finie quand on ôte les masses d'un D^r_M équivaut à cette condition pour *une* position O de M, et aussi, lorsque $\tau > 2$, à ce que $\mu(D^r_O)r^{-(\tau-1)}$ soit sommable en r au voisinage de l'infini ([25]) (ce qui entraîne

([25]) Évident par le lemme 4' C. Cela n'était pas indiqué dans (AN) par ailleurs plus complet.

$\mu(D_0^r) = o(r^{\tau-2}))$; lorsque $\tau = 2$, elle entraîne que la masse totale soit finie.

Sous la condition indiquée, $v(M) = \int h(MP)d\mu_P$ est sous-harmonique dans R^τ, associée à μ et

si $\quad \tau > 2, \quad v \leqslant 0 \quad$ et $\quad \lim_{M \to \mathcal{R}_\tau} \sup. v(M) = \lim_{r \to \infty} \mathfrak{M}_v^r(O) = 0$

si $\quad \tau = 2, \quad \lim_{M \to \mathcal{R}_\tau} \sup. \dfrac{v(M)}{\log OM} = \lim_{r \infty} \dfrac{\mathfrak{M}_v^r}{\log r} = -$ masse totale.

Examinons maintenant des croissances plus rapides de μ.

THÉORÈME 1'. — *Soit dans* R^τ *une mesure de Radon* $\mu \leqslant 0$, *nulle au voisinage d'un point* O, *puis* $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$.

α) *Supposons* $\overline{OP}^{-(\tau-2+s)}$ *sommable* $-\mu_P$, *ce qui équivaut à la sommabilité en* r *de* $r^{-(\tau-2+s-1)}\mu(D_0^r)$; *alors* $\int \mathcal{H}_{p_s}'^{O}(M, P)d\mu_P$ *est pour* $M \in R^\tau$ *une intégrale de Radon représentant une fonction sous-harmonique* $v(M)$ *dans* R^τ *associée à* μ, *telle que*

$$(8') \qquad v^+(M) = o(\overline{OM}^s) \quad (M \to \mathcal{R}_\tau)$$

β) *Supposons* $\mu(D_0^r) = o(r^{\tau-2+s})$, *ce qui entraînerait* (α).

Si s *n'est pas entier* $\int \mathcal{H}_{p_s}'^{O}(M, P)d\mu_P$ *est une intégrale de Radon, sous-harmonique, associée à* μ *dans* R^τ, *satisfaisant à* (8').

Si s *est entier et si* $\displaystyle\int_{C_0^{r,\rho}} \frac{Z_s^{(\tau)}(\cos \gamma_M^P)}{\overline{OP}^{\tau-2+s}} d\mu_P \to 0 \; (r \to \infty)$ *uniformément par rapport à* $\rho > r$ *et à la direction* OM, *alors* $\lim_{r \to \infty} \int_{D_0^r} \mathcal{H}_{p_s}'^{O}(M, P)d\mu_P$ *existe et représente une fonction sous-harmonique associée à* μ *dans* R^τ *satisfaisant à* (8').

γ) *Supposons* $\mu(D_0^r) = O(r^{\tau-2+s})$.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}_{p_s}'^{O}(M, P)d\mu_P$ *est encore une intégrale de Radon, sous-harmonique,* v *associée à* μ *dans* R^τ *et satisfait à*

$$(9') \qquad v^+(M) = O(\overline{OM}^s) \quad (M \to \mathcal{R}_\tau).$$

Si s *est entier et si* $\displaystyle\int_{D_0^r} \frac{Z_s^{(\tau)}(\cos \gamma_M^P)}{\overline{OP}^{\tau-2+s}} d\mu_P$ *est borné uniformément par rapport à la direction* OM, *alors, pour une suite* r_k *convenable* $\to \infty$. $\lim_{k \infty} \int_{D_0^{r_k}} \mathcal{H}_{p_s}'^{O}(M, P)d\mu_P$ *existe et représente une fonction sous-harmonique* $v(M)$ *dans* R^τ, *associée à* μ, *satisfaisant à* (9').

Dans β *ou* γ, *la condition supplémentaire sur* μ *équivaut* (*dans son association avec l'autre*) *à celle correspondante du théorème* 1 *pour la transformée de* μ (*voir note* 10) *ou directement à ce que pour tous les polynomes* X *harmoniques homogènes d'ordre* s, *à coefficicients bornés par un nombre fixe ou seulement pour ceux déduits de l'un d'eux non nul par rotation,* $\displaystyle\int \frac{X}{\overline{OP}^{\tau-2+2s}}\,d\mu$ *pris sur* $C_O^{r,\rho}$ *ou* D_O^r *tende uniformément vers* 0 *avec* $1/r$ *ou soit uniformément bornée. Cette condition supplémentaire est d'ailleurs satisfaite si* μ *est la somme d'une mesure invariante par rotation autour de* O *et d'une mesure par rapport au module de laquelle* $\overline{OP}^{-(\tau-2+s)}$ *est sommable.*

Enfin, pour une mesure de Radon $\leqslant 0$ *au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$, *ce point exclu, toutes les conditions précédentes sont bien invariantes en* O *dès qu'on ôte les masses d'un voisinage de* O.

14. Partons, pour le voisinage de $\mathcal{R}_\tau$. de résultats connus (qui sont d'ailleurs à peu près dans (AN) avec des compléments) correspondant par inversion à ceux qu'on a rappelés plus haut pour le voisinage de O (début n° 12).

Soit u sous-harmonique dans $\Delta_O^{R_0}$; $\mathfrak{M}_u^r(O)$ a une limite m_u (pour $r \to \infty$) d'ailleurs $> -\infty$ si $\tau > 2$; et si $\tau = 2$, $\dfrac{\mathfrak{M}_u^r}{\log r}$ a une limite $\lambda > -\infty$.

Si pour $\tau > 2$, $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ($r \to \infty$), u^+ est borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

Si pour $\tau = 2$, $\mathfrak{M}_{u^+}/\log r$ est borné, c'est-à-dire de limite λ finie, $u^+/\log \mathrm{OM}$ est borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$; et même u^+ l'est si $\lambda = 0$.

Ces cas rentrent dans celui où m_u (pour $\tau > 2$), resp. $\lambda_u (\tau = 2)$ sont finis, ce qui est équivalent à l'existence d'une majorante harmonique dans tout $\Delta_O^R (R > R_0)$, ou bien à ce que dans Δ_O^R : pour $\tau > 2$, $\overline{OP}^{-(\tau-2)}$ soit sommable-μ_P, pour $\tau = 2$, la masse totale soit finie ; ou bien encore à la validité de la représentation de Riesz dans Δ_O^R (avec la fonction de Green de ce domaine ou seulement avec $h(\mathrm{MP})$).

Examinons des croissances plus rapides de $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ et prolongeons la représentation intégrale.

Théorème 2'. — *Soit dans* $\Delta_O^{R_0}$, u *sous-harmonique de mesure associée* μ, $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$. *Alors avec* r *variable, voisin de* $+\infty$:

A) *Si* $r^{-(s+1)}\mathfrak{M}^r_{u^+}(O)$ *est sommable en* r (*ce qui entraîne* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = o(r^s)$ *et les mêmes propriétés avec* u).

Ou bien

B) *Si* $\mathfrak{M}^r_{u^+}(O) = O(r^s)$ (*ce qui entraîne la même propriété pour* u *et il en serait de même avec un* o) *et si en outre* s *n'est pas entier*.

(*ces hypothèses étant d'ailleurs invariantes en* O *pour un* u *sous-harmonique au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$ *ce point exclu*),

alors on aura dans Δ_O^R(R *fixé* $>$ R_0) *la représentation par une intégrale de Radon*

$$(10') \qquad u(M) = \int_{\Delta_O^R} \mathcal{H}'^{O}_{p_s}(M, P)\, d\mu_P + fct\ harm.\ w$$

où $\quad w(M) = fct\ harm.\ dans\ \Delta_O'^R - \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} h(OM) + \sum_{n=1}^{p_s} Y_n(m)\overline{OM}^n$

avec : $Y_n(m)$ *fonction de Laplace d'ordre* n *sur* Σ_O^1 *de* R^τ, m *correspondant à* $\overrightarrow{OM}$, *le* Σ *valant* o *pour* $p_s = 0$.

α_R *étant le flux de* u *à travers* Σ_O^R *pris du côté de* Δ_O^R *avec l'orientation vers* Δ_O^R [26].

Corollaire. — *Pour* u *sous-harmonique dans* $\Delta_O^{R_0}$, $s > 0$,

a) *si* $r^{-s}\mathfrak{M}^r_{u^+}$ *est sommable en* r *au voisinage de l'infini et* s *quelconque ou si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = o(r^s)(r \to \infty)$ *avec* s *non entier, alors*

$$(11') \qquad u^+(M) = o(\overline{OM}^s) \qquad (M \to \mathcal{R}_\tau),$$

b) *si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$ *avec* s *non entier, alors*

$$(12') \qquad u^+(M) = O(\overline{OM}^s).$$

c) *si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$, $u^+(M) = o(\overline{OM}^{s+\varepsilon})(\varepsilon > 0)$.

Remarque. — Lorsque $\mathfrak{M}^r_{u^+}$ est un o ou O de r^s, s entier, si la condition supplémentaire dans β ou γ (théorème 1') est satisfaite, on aura une représentation analogue à (10') où l'intégrale sera remplacée par une limite d'intégrale (comme dans β ou γ, cas de s entier, théorème 1') et où l'on verra que le w de (10') sera de la même forme, avec le même α_R, à condition d'y remplacer p_s par s lorsque s est entier et que l'on a seulement $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$; et il s'ensuivra les limitations (11') ou (12').

(26) Dans la démonstration par inversion du théorème 2', on n'obtient pas pour $\tau > 2$ l'interprétation du coefficient de h(OM) ; mais il suffit de voir que l'intégrale de (10') est de flux nul.

Enfin $\frac{\alpha_R}{\varphi_\tau}$ vaut la masse totale dans $\Delta_O^{\prime R}$ associée à toute différence de deux fonctions sous-harmoniques dans $\Delta_O^{\prime R}$, égale à u (presque partout) au voisinage de Σ_O^R.

IV. ÉTUDE PLUS APPROFONDIE D'UN CAS PARTICULIER

15. Rassemblons dans un cas simple des résultats que nous allons pouvoir compléter.

Théorème 3. — I. *Soit d'abord u sous-harmonique dans $D_O^{R_0} - O$, μ la mesure $\leqslant 0$ associée ; et r variable* $(0 < r \leqslant R$ *fixé* $< R_0)$.

A) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r^{-(\tau-1)})\,(r \to 0)$, *alors* $\mu(C_O^{r,R}) = O(1/r)$, $\overline{OM}^{(1+\alpha)}(\alpha > 0)$ *est sommable-μ au voisinage de* O, *et pour toute fonction linéaire φ s'annulant en* O, $\int_{C_O^{r,R}} \varphi d\mu$ *est borné indépendamment de r ; cela permet la représentation intégrale signalée fin du n° 12 et donne*

$$u^+(M) = O(\overline{OM}^{-(\tau-1)}) \qquad (M \to O).$$

B) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = o(r^{-(\tau-1)})$, alors $\mu(C_O^{r,R}) = o(1/r)$ et $\int_{C_O^{\rho,r}} \varphi d\mu \to 0$ *avec r indépendamment de $\rho < r$, d'où la représentation intégrale signalée aussi fin n° 12 et*

$$u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-1)}) \qquad (M \to O).$$

C) *Si $r^{\tau-2}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est sommable en r, l'hypothèse* B *est satisfaite,* OP *est sommable -μ et on a la représentation avec intégrale de Radon du théorème 2.*

II. *Il est intéressant dans les cas* B *et* C *de préciser davantage comme suit la représentation intégrale :*

Soit maintenant dans $\overline{R}^\tau$ un domaine Ω (avec $C\Omega$ non polaire, et fonction de Green notée $G_\Omega(M, P)$ ou seulement G) ; O *un point de Ω différent de $\mathcal{R}_\tau$ et u sous-harmonique dans Ω-O, majorée au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ par une fonction harmonique et de mesure μ associée. Si $D_O^R \subset \Omega$, on a, avec la seule hypothèse* B, $\mathfrak{D}_u^\Omega$ *ayant été défini au n° 9, la représentation :*

$$(13)\quad u(M) = \mathfrak{D}_u^\Omega(M) + \int_{\Omega - D_O^R} G(M, P)d\mu_P$$
$$+ \lim_{r \to 0} \int_{C_O^{r,R}} [G(M, P) - G(M, O)]d\mu_P + \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} G(O, M)$$

α_R désigne le flux de u à travers Σ_O^R défini du côté de D_O^R et avec l'orientation vers D_O^R, ou encore, si on modifie u dans un $D_O^r(r < R)$ de façon à la rendre égale presque partout dans D_O^R à la différence de deux fonctions sous-harmoniques, α_R/φ_τ vaut la masse totale associée dans D_O^R à cette différence.

$\int_{C_{r,\rho}^{O}}[G(M, P) - G(M, O)]d\mu_P$ *et sa limite pour $r \to 0$ tendent vers o avec ρ uniformément en M hors d'un voisinage de O* (27).

Si la mesure μ d'un voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ est finie, on peut remplacer les deux intégrales par $\lim_{r\to 0}\int_{\Omega - D_O^r}[G(M, P) - G(M, O)]d\mu_P$ en prenant comme coefficient de G(O, M) la masse totale (28) *associée à la fonction u modifiée comme précédemment.*

Enfin si on remplace l'hypothèse B par C la limite d'intégrale est une intégrale de Radon sur $D_O^R - O$ ou $\Omega - O$.

Etablissons d'abord (13) dans l'hypothèse B. $\mathcal{D}_u^\Omega$ existe d'après le lemme 12. Notons (Ψ_1, Ψ_2) la fonction égale à Ψ_1 au voisinage de Ω et à Ψ_2 ailleurs et ω le domaine $\Omega - \overline{D}_O^r(r \leqslant R)$. Voyons que $v(M) = u(M) - \mathcal{D}_u^\Omega(M)$ admet dans ω une plus petite majorante harmonique égale à $H_{(0,v)}^\omega$. En effet, soit Ω_n croissant tendant vers $\Omega \supset \overline{\Omega}_n$ et $\omega_n = \Omega_n - \overline{D}_O^r$. La plus petite majorante harmonique considérée est la limite de $H_v^{\omega_n}$, égale à $H_{(0,v)}^{\omega_n} + H_{(v,0)}^{\omega_n}$. Le premier terme tend vers $H_{(0,v)}^\omega$ (voir lemme 10), le second vaut dans ω_n, $H_v^{\Omega_n} - H_{(0, H_v^{\Omega_n})}^{\omega_n}$; la première partie tend vers o, uniformément localement donc aussi la seconde, ce qui achève d'établir la propriété annoncée : alors

$$(14) \qquad v(M) = \int_\omega G_\omega(M, P)d\mu_P + H_{(0,v)}^\omega(M)$$

(G_ω fonction de Green de ω).

Fixons d'abord M pour simplifier et étudions le passage à la limite pour $r \to 0$.

Posons au voisinage de O : $G(O, P) = h(OP) - \gamma + \Theta(P)$ avec $|\Theta(P)| < \delta . OP$, γ et δ étant des constantes. Alors $v(P)$ et $\mathcal{M}_v^r \dfrac{G(OP)}{h(r) - \gamma}$ ont sur Σ_O^r la même moyenne $\mathcal{M}_v^r$ et les moyennes des

(27) Et en même temps, d'ailleurs, par rapport à Ω contenant au voisinage fixé de O et variant dans un Ω fixe du même type.

(28) Ou encore α/φ_τ où α est un flux convenablement défini à la frontière.

modules sont $\mathfrak{M}^r_{|v|}$ et $|\mathfrak{M}^r_v|$ Comme $r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{|v|} \to 0$ de même que $r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{|u|}$, le lemme 8 donne

$$H^{\omega}_{(0,\,v)}(M) = \frac{\mathfrak{M}^r_v}{h(r)-\gamma} G(O,\ M) + o(1).$$

D'autre part :

$$\int_{\omega} G_{\omega}(M,\ P)d\mu_P = \int_{\Omega - D_O^R} G_{\omega}(M,\ P)d\mu_P + \int_{C_O^{r,\,R}} G(M,\ P)d\mu_P - \int_{C_O^{r,\,R}} H^{\omega}_{(0,\,G(M,\,Q))}(P)d\mu_P.$$

Le premier terme à droite tend vers $\int_{\Omega - D_O^R} G(M,\ P)d\mu_P$ (29).

Puis on voit aisément que $G(M,\ P)$ et $\dfrac{G(M,\,O)}{h(r)-\gamma}G(O,\ P)$ diffèrent sur Σ_O^r d'un $O(r)$, donc aussi $H^{\omega}_{(0,\,G(M,\,Q))}(P)$ et $\dfrac{G(M,\ O)}{h(r)-\gamma}G(O,\ P)$ dans ω ; et les intégrales $-d\mu_P$ de ces dernières fonctions dans $C_O^{r,\,R}$ différeront d'un $o(1)$ puisque $r\mu(C_O^{r,\,R}) \to 0$. Ainsi :

$$(15) \qquad v(M) = \int_{\Omega - D_O^R} G(M, P)d\mu_P + \int_{C_O^{r,\,R}} G(M, P)d\mu_P + \frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\left[\mathfrak{M}^r_v - \int_{C_O^{r,\,R}} G(O, P)d\mu_P\right] + o(1).$$

Comme $\left|\int_{C_O^{r,\,R}} \Theta(P)d\mu_P\right| \leqslant \delta \int_{C_O^{r,\,R}} OP d\mu_P$, on aura par les lemmes 4 B et 2 B

$$\frac{1}{h(r)-\gamma}\int_{C_O^{r,\,R}} \Theta(P)d\mu_P \to 0$$

donc

$$\frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\int_{C_O^{r,\,R}} G(O, P)d\mu_P = G(M, O)\int_{C_O^{r,\,R}} d\mu_P + \frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\int_{C_O^{r,\,R}} [h(OP)-h(r)]d\mu_P + o(1).$$

(29) Car G_{ω} tend en croissant vers G qui est comme G_{ω} sommable $-\mu_P$ sur $\Omega - D_O^R$ parce que G/G_{ω} est borné au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ (puisqu'il l'est sur Σ_O^R).

Or en introduisant la variable t ou $t_\rho = h(\rho)$ et $\mathfrak{M}_v^\rho = y(t)$

$$\int_{C_O^{r,R}} [h(OP) - h(r)] d\mu_P = \int_{]r,R[} [h(\rho) - h(r)]\, d\mu(C_O^{r,\rho})$$
$$= - \int_{]t_R, t_r[} (t - t_r) dy_t'^{-} = (t_R - t_r) y_t'^{+}(t_R) + \mathfrak{M}_v^r - \mathfrak{M}_v^R.$$

Finalement :

(16)
$$v(M) - \int_{\Omega - D_O^R} G(M, P) d\mu_P - \int_{C_O^{r,R}} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P$$
$$= \frac{G(O, M)}{h(r) - \gamma} \Big[\big(h(r) - h(R)\big) y_t'^{+}(t_R) + \mathfrak{M}_v^R \Big] + o(1)$$

d'où le résultat (13) grâce à l'interprétation de $y_t'^{+}$.

L'examen des diverses approximations montre que les $o(1)$ introduits sont majorés en module par des $o(1)$ indépendants de M hors d'un voisinage fixé de O (et même aussi de Ω variant comme dans la note 27).

D'où la convergence annoncée de $\int_{C_O^{r,\rho}} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P$ en commençant par écarter les points où u est infini et complétant par continuité.

Si maintenant on prend pour Ω un $D_O^{R_0}$, on voit que la fonction de P, $G(M, P)$ pour M fixé $\neq O$ admet en O un gradient non nul de direction OM, ce qui permet de réaliser au voisinage de O, avec $G(M, P) - G(M, O)$, à un facteur constant près, et à la différence près d'un $O(\overline{OP}^2)$, toute fonction linéaire $\varphi(P)$ nulle en O. D'où la propriété de $\int_{C_O^{r,\rho}}$ qui restait à établir dans le paragraphe B après le chapitre précédent.

La propriété analogue dans A s'obtiendra en reprenant tout le raisonnement à partir de l'hypothèse A, et remplaçant les $o(1)$ par des $O(1)$.

THÉORÈME 3'. — I. *Soit u sous-harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ point exclu, μ la mesure $\leqslant 0$ associée, et r variable.*

A) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r)\,(r \to \infty)$, *ce qui est indépendant du point* O, *alors* $\mu(C_O^{R,r}) = O(r^{\tau-1})$. $\overline{OM}^{-(\tau-1+\alpha)}\,(\alpha > 0)$ *est sommable -μ au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ et pour toute fonction linéaire φ,* $\int_{C_O^{R,r}} \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^\tau} d\mu$ *pour* R *fixé assez grand est borné indépendamment de r (et même de* O *variant* *dans un ensemble borné, et aussi de φ à coefficients bornés) ; cela permet la représentation intégrale signalée fin n° 14 et donne*

$$u^{+}(M) = O(OM).$$

B) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = o(r)\,(r \to \infty)$ *ce qui est indépendant de* O, *alors* $\mu(C_O^{R,r}) = o(r^{\tau-1})$ et $\int_{C_O^{r,\rho}} \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^{\tau}} d\mu_P \to 0$ *avec* $1/r$ *uniformément en* $\rho > r$ (*et par rapport à* O *et* φ *comme plus haut*), *d'où la représentation intégrale indiquée fin n° 14 et*

$$u^{+}(M) = o(OM).$$

Si $\frac{1}{r^2}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ *est sommable en* r *au voisinage de l'infini* (*ce qui est indépendant de* O) *l'hypothèse* B *est satisfaite,* $\overline{OP}^{-(\tau-1)}$ *est sommable -*μ *à l'infini et on a la représentation avec intégrale de Radon du théorème 2'.*

II. *On précisera comme suit la représentation intégrale des cas* B *et* C :

Soit dans $\overline{R}^{\tau}$ *un domaine* Ω ($C\Omega$ *non polaire et fonction de Green* $G_\Omega(M, P)$ *ou seulement* G) *contenant* $\mathcal{R}_\tau$. u *sous-harmonique dans* $\Omega - \mathcal{R}_\tau$, *majorable au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *par une fonction harmonique, enfin de mesure associée* μ. O *étant fixé avec* $\overline{\Delta}_O^R \subset \Omega$, *on a dans l'hypothèse* B :

$$(13') \quad u(M) = \mathfrak{D}_u^{\Omega}(M) + \int_{\Omega - \Delta_O'^R} G(M, P)\, d\mu_P + \lim_{r \to \infty} \int_{C_O^{R,r}} [G(M, P) - G(M, \mathcal{R}_\tau)]\, d\mu_P + \frac{\alpha'_R}{\varphi_\tau} G(\mathcal{R}_\tau, M).$$

α'_R *y désigne le flux de* u *à travers* Σ_O^R, *défini du côté de* Δ_O^R *avec orientation vers* Δ_O^R, *ou encore, si on modifie* u *dans un* $\Delta_O'^r\,(r > R)$ *de façon à le rendre égal presque partout dans* Δ_O^R *à la différence de deux fonctions sous-harmoniques dans* $\Delta_O'^R$, $\frac{\alpha'_R}{\varphi_\tau}$ *vaut la masse totale associée dans* $\Delta_O'^R$ *à cette différence.*

De plus $$\int_{C_O^{\rho,r}} [G(M, P) - G(M, \mathcal{R}_\tau)]\, d\mu_P$$

et sa limite pour $r \to \infty$ *tendant vers* 0 *avec* $1/\rho$ *uniformément en* M *et* O *sur des ensembles bornés* ([30]).

([30]) Et en même temps par rapport à $\overset{*}{\Omega}$, contenant un voisinage fixe de $\mathcal{R}_\tau$ et variant dans un Ω fixé du même type.

Si la mesure μ d'un voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ est finie, on peut remplacer les deux intégrales par

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\Omega - \Delta_O'^r} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P,$$

en prenant comme coefficient de $G(\mathcal{R}_\tau, M)$ *la masse totale associée à u modifiée comme précédemment.*

Enfin, si on remplace l'hypothèse B *par* C, *la limite d'intégrale est une intégrale de Radon sur* Δ_O^R *ou* $\Omega - \mathcal{R}_\tau$.

A partir des énoncés A, B, C du théorème 3, on obtient aussitôt par *inversion* les énoncés correspondants du théorème 3', l'invariance en O venant du lemme 4' D ; le passage de (13) à (13') est immédiat aussi pour $\tau = 2$ mais présente des difficultés pour le cas de $\tau > 2$ que nous allons examiner.

Prenons d'abord O extérieur à Ω ou sur sa frontière : soit Ω' l'inverse de Ω et passons de u donnée à sa transformée

$$v(M') = u(M)/\overline{OM'}^{\tau-2} ;$$

on appliquera à $v(M')$ la représentation (13) et on formera la transformée de Kelvin des divers termes. Pour cela on remarquera que :

$$\frac{G_{\Omega'}(O, M')}{\overline{OM}^{\tau-2}} = \frac{G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau)}{G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)},$$

$$\frac{G_{\Omega'}(M', P')}{\overline{OM}^{\tau-2}\,\overline{OP}^{\tau-2}} = G_\Omega(M, P) - G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, P)\frac{G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau)}{G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)},$$

$$\frac{G_{\Omega'}(M', P') - G_{\Omega'}(M', O)}{\overline{OM}^{\tau-2}\,\overline{OP}^{\tau-2}} = G_\Omega(M, P) - G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau) + \frac{G(M, \mathcal{R}_\tau)}{G(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)}\left[G(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau) - G(\mathcal{R}_\tau, P) - \frac{1}{\overline{OP}^{\tau-2}}\right].$$

On en déduira que les transformées de Kelvin des termes du développement de $v(M')$ sont justement les termes de droite de (13'), à des facteurs additifs près proportionnels à $G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, M)$.

Nous obtenons donc bien le développement (13') à cela près que le coefficient du dernier terme n'est pas précisé, et le plus simple pour achever consiste à montrer que le flux (du type précisé dans l'énoncé) à travers Σ_O^R est nul pour chacun des trois premiers termes.

Si l'on veut enfin la même formule (13) pour O intérieur à Ω, il n'y a qu'à ôter de Ω un D_O^ρ, appliquer la formule pour $\Omega - \overline{D_O^\rho}$ et passer à la limite pour $\rho \to 0$; cela suppose $M \neq O$ mais il sera facile d'en déduire la validité pour M en O.

Si tout cela présente bien des petites difficultés à examiner, la méthode *directe* adaptée de la démonstration du théorème 3, facile à calquer pas à pas pour $\tau = 2$, présente aussi des difficultés variées pour $\tau > 2$. Si l'on dispose des résultats de I, l'adaptation pourra se faire, non sans quelques complications, pour obtenir (13′) sans donner toutefois directement la valeur du coefficient du dernier terme ; on la trouvera en remarquant comme plus haut que les flux en question des autres termes sont nuls. Sinon, si l'on n'a pas les résultats nouveaux de I (portant sur les fonctions linéaires φ), on supposera d'abord que O est centre harmonique de $C\Omega$, car alors $G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, P)$ sera de la forme

$$\gamma - h(OP) + \Theta(P) \qquad \left(\gamma = C^{te}, \Theta(P) = O\left(\overline{OP}^{-\tau}\right)\right)$$

donc sommable-μ_P à l'infini (voir les lemmes 9, 4′ et 2′) ; on pourra adapter le raisonnement puis compléter grâce à cela les résultats de I évidemment indépendants de O ; il n'y aura plus qu'à reprendre avec O quelconque, le premier raisonnement.

16. **Application : théorème de Heins** amélioré et ses analogues.

Pour généraliser $h(MP)$, on a introduit (voir AN) la fonction symétrique en M et P, $h_Q(M, P)$ définie pour M et P différents de Q selon les conventions :

$$h_{\mathcal{R}_\tau}(M, P) = h(MP) \quad \text{puis, pour} \quad Q \neq \mathcal{R}_\tau :$$
$$h_Q(M, P) = h(MP) - h(QM) - h(QP) (M \text{ et } P \text{ différents de } Q),$$
$$h_Q(M, \mathcal{R}_\tau) = -h(QM).$$

Cette fonction est harmonique en M dans $\overline{R}^\tau$ hors P et Q et il est immédiat que :

$$(17) \qquad h_Q(M, P) - h_Q(M, S) = h_S(M, P) - h_S(Q, P).$$

Si Ω est un domaine de $\overline{R}^\tau$ (de complémentaire non polaire) on sait que si Q est extérieur (ou encore point-frontière régulier)

$$G_\Omega(M, P) = h_Q(M, P) - \Phi_Q^\Omega(M, P)$$

où

$$\Phi_Q^\Omega(M, P) = H^\Omega_{h_Q(M, I)}(P) = H^\Omega_{h_Q(P, I)}(M)$$

(I étant le point courant sur la frontière $\overset{*}{\Omega}$).

Corollaire *des théorèmes* 3 et 3′. — On appellera S le point singulier à distance finie ou à l'infini.

Soit u sous-harmonique dans $\overline{R^\tau} - S$, *de mesure associée* μ *et satisfaisant à la condition* α *ou* β :

α) Si $S \neq \mathcal{R}_\tau$, $\mathfrak{M}_{u^+}^r(S) = o(r^{-(\tau-1)})$, $r \to 0$

β) Si $S = \mathcal{R}_\tau$, $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = o(r)$, O quelc., $r \to \infty$.

Alors si u est finie en $Q \neq S$ [31]

$$u(M) = u(Q) + \lim_{r \to 0} \int_{\overline{R^\tau} - D_S^r} [h_S(M, P) - h_S(Q, P)] d\mu_P \text{ si } S \neq \mathcal{R}_\tau$$

$$u(M) = u(Q) + \lim_{r \to \infty} \int_{D_O^r} [h(MP) - h(QP)] d\mu_P \text{ si } S = \mathcal{R}_\tau, \text{ O quelc.}$$

où les crochets peuvent se transformer par (17).

Supposons Q et S distincts de $\mathcal{R}_\tau$. Isolons Q par D_Q^ρ et soit $\omega_\rho = \overline{R^\tau} - \overline{D_Q^\rho}$.

Si M est distinct de Q et S, on aura pour ρ assez petit :

$$u(M) = \mathfrak{D}_u^{\omega_\rho}(M)$$
$$+ \lim_{r \to 0} \int_{\omega_\rho - D_S} [G_{\omega_\rho}(M, P) - G_{\omega_\rho}(M, S)] d\mu_P + \frac{\alpha_\rho}{\varphi_\tau} G_{\omega_\rho}(S, M)$$

(α_ρ flux à travers Σ_Q^ρ du côté de Δ_Q^ρ avec orientation vers Δ_Q^ρ).

On verra d'abord que $\mathfrak{D}_u^{\omega_\rho}(M) \to u(Q)$ (pour $\rho \to 0$), par exemple en utilisant l'analogue de l'intégrale de Poisson pour $\Delta_Q'^\rho$ (Voir AN formule 6) et le fait que $\mathfrak{M}_u^\rho(Q) \to u(Q)$.

Puis on verra facilement que, pour $\rho \to 0$, $G_{\omega_\rho}(S, M) = h(\rho) + O(\rho)$ de sorte que, grâce aux propriétés du flux α_ρ (voir FAS p. 27), $\alpha_\rho G_{\omega_\rho}(S, M) \to 0$. Enfin

$$G_{\omega_\rho}(M, P) - G_{\omega_\rho}(M, S)$$
$$= h_Q(M, P) - h_Q(M, S) - \Phi_Q^{\omega_\rho}(M, P) + \Phi_Q^{\omega_\rho}(M, S)$$

et tout revient à voir que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\omega_\rho - D_S^r} [\Phi_Q^{\omega_\rho}(M, P) - \Phi_Q^{\omega_\rho}(M, S)] d\mu_P \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \rho.$$

Or ce nouveau crochet vaut o si M est en $\mathcal{R}_\tau$, sinon vaut la différence en P et S des valeurs de la fonction de N, $H_{h(M I)}^{\omega_\rho}(N)$ (I point

[31] Cela implique que Q ne porte pas de masse s'il est $\neq \mathcal{R}_\tau$ ou si $\tau = 2$, ce qui permet alors d'ôter Q du champ d'intégration. Si Q est en $\mathcal{R}_\tau$ ($\tau > 2$), le théorème subsiste avec une variante de démonstration, la formule (17) se prolongeant d'ailleurs alors conventionnellement facilement pour P, Q (et même M) en $\mathcal{R}_\tau$.

courant sur Σ_Q^ρ), ce qui est un $o(\rho)$ indépendant de P. On achèvera en décomposant notre limite d'intégrale en $\int_{\omega_\rho - D_S^{r_0}} + \lim_{r \to 0} \int_{C_S^{r, r_0}}$; le second terme est un $o(r_0)$ indépendant de ρ parce que les dérivées premières et secondes de $H_{h(M1)}^{\omega_\rho}(N)$ sont des $O(\rho)$ $\big($et même $o(\rho)\big)$, au voisinage de S.

Démonstration analogue dans les autres cas.

(Manuscrit reçu en janvier 1950.)