

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRALD TENENBAUM

## Sur un problème extrémal en arithmétique

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 2 (1987), p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR UN PROBLÈME EXTRÊMAL EN ARITHMÉTIQUE

par **Gérald TENENBAUM**

---

### 1. Présentation du problème et des résultats.

Presque toujours d'énoncés simples, les problèmes arithmétiques d'Erdős peuvent quelquefois sembler anecdotiques. C'est, à mon sens, une apparence trompeuse. A l'instar des énigmes anciennes, ces questions paradoxales proposent, sous une forme littéralement condensée, des conjectures profondes, riches d'implications, parfois, dans des branches variées des Mathématiques.

Un exemple édifiant parmi d'autres est la question du comportement asymptotique de la quantité

$$V_\gamma(n) = \sum_{1 \leq i < \varphi(n)} (a_{i+1} - a_i)^\gamma, \quad (\gamma > 0),$$

où  $a_1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)}$  désigne un système complet de résidus inversibles modulo  $n$ . La conjecture

$$V_\gamma(n) \ll_\gamma \varphi(n)(n/\varphi(n))^\gamma, \quad (\gamma > 0),$$

établie par Hooley pour  $\gamma < 2$ , vient d'être entièrement confirmée par Montgomery et Vaughan. Il est incontestable qu'un tel résultat, et surtout les idées impliquées dans sa démonstration, constitue une étape significative dans notre compréhension des nombres entiers.

L'objet du présent article est une autre conjecture d'Erdős, plus modeste, mais qui se présente en quelque sorte comme une forme duale de la précédente. Nous en donnerons une solution qui suggère une méthode générale féconde, que nous décrirons brièvement plus loin.

*Mots-clés* : Structure multiplicative des entiers - Fonctions arithmétiques - Intégrales de Fourier.

Soit  $n$  un nombre entier, et  $\tau = \tau(n)$  le nombre de ses diviseurs - désignés par

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n.$$

Erdős a défini la famille de fonctions arithmétiques

$$F_\alpha(n) = \sum_{1 \leq i < \tau(n)} \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} - 1 \right)^\alpha, \quad (\alpha > 0),$$

et conjecturé il y a quelques années [2] que

$$(1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} F_\alpha(n) < +\infty, \quad (\alpha > 1).$$

L'inégalité triviale  $(d_{i+1}/d_i) - 1 \geq \log(d_{i+1}/d_i)$  montre assez que la condition  $\alpha > 1$  ne peut être affaiblie. On en déduit aussi, par l'inégalité de Hölder

$$\log n = \sum_{1 \leq i < \tau(n)} \log(d_{i+1}/d_i) \leq (F_\alpha(n))^{1/\alpha} \tau(n)^{(\alpha-1)/\alpha},$$

ce qui implique que les candidats à (1) doivent satisfaire

$$\tau(n) \gg (\log n)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Il faut donc chercher des entiers  $n$  possédant beaucoup de diviseurs (on sait classiquement [4] que l'ordre normal de  $\tau(n)$  est  $(\log n)^{\log 2 + o(1)}$ ) avec des rapports  $d_{i+1}/d_i$  petits. Partant, Erdős a été naturellement conduit à la sur-conjecture selon laquelle les suites

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{F} = \{k! : k \geq 1\} \\ \mathcal{L} = \{[1, 2, \dots, k] : k \geq 1\} \\ \mathcal{R} = \{1\} \cup \{p_1 p_2 \dots p_k : k \geq 1\} \end{cases}$$

(où  $[1, 2, \dots, k]$  désigne le plus petit multiple commun aux entiers  $\leq k$ , et  $p_1 < p_2 < \dots$  dénote la suite croissante des nombres premiers) satisfont (1).

La conjecture (1) a été récemment établie par Vose [8] qui, par une ingénieuse construction, exhibe une suite infinie d'entiers  $N$  tels que

$$F_\alpha(N) = O_\alpha(1), \quad (\alpha > 1).$$

Sa méthode, cependant, ne permet pas de conclure dans le cas des suites (2).

Nous énonçons notre résultat concernant cette question dans le cadre sensiblement plus général des fonctions

$$F(N; h) = \sum_{1 \leq i < \tau(n)} h\left(\frac{d_{i+1}}{d_i} - 1\right)$$

où  $h$  appartient à la classe  $\mathcal{H}$  des applications continûment différentiables  $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , satisfaisant à  $h(0) = h'(0) = 0$ , et telles que  $(1+u)h'(u)$  soit dérivable et non décroissante pour  $u > 0$ .

THÉORÈME 1. — Soit  $h$  une fonction de  $\mathcal{H}$ . S'il existe un réel  $\beta$ ,  $0 < \beta < 3/2$ , tel que

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^n h'(\exp(-n^\beta)) < +\infty$$

alors on a

$$F(N; h) = O(1)$$

uniformément pour  $N \in \mathcal{F} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ .

Il sera patent dans la suite que notre méthode s'applique à de nombreuses autres suites. Nous n'avons pas cherché à caractériser lesquelles.

Pour tout  $\alpha > 1$ , la fonction  $h(u) = u^\alpha$  appartient à la classe  $\mathcal{H}$ . La série (3) converge alors pour tout  $\beta > 1$ , et l'on obtient la seconde partie de la conjecture d'Erdős, soit

$$F_\alpha(N) = O_\alpha(1), \quad (N \in \mathcal{F} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{R}).$$

On peut aussi choisir (au voisinage de  $u = 0$ )

$$h(u) = u \exp\{-|\log u|^\delta\}, \quad (0 < \delta < 1).$$

La condition (3) est alors réalisée si, et seulement si,  $\delta > 2/3$  — ce qui concrétise assez bien la limite de la méthode.

L'étape liminaire de la démonstration de Vose consiste à remarquer que l'on peut simplifier utilement le problème en restreignant l'étude aux suites  $\{N_k\}$  satisfaisant

$$(4) \quad N_1 = 1 \quad \text{et} \quad N_k | N_{k+1}, \quad (k=1, 2, \dots).$$

En effet, il suffit alors d'imposer une condition de proximité aux seuls diviseurs de  $N_k$  qui appartiennent à  $(\sqrt{N_{k-1}}, \sqrt{N_k}]$ : les intervalles

$(\sqrt{N_{j-1}}, \sqrt{N_j}]$ ,  $j < k$ , seront couverts par les diviseurs de  $N_j$  (qui sont donc *a fortiori* des diviseurs de  $N_k$ ) et l'intervalle  $(\sqrt{N_k}, N_k]$  par symétrie.

Étant donné une suite d'entiers  $\{N_k : k \geq 1\}$  satisfaisant (4), nous dirons qu'une suite  $\{\varepsilon_k : k \geq 1\}$  de réels positifs est *admissible* pour  $\{N_k\}$  si, pour chaque  $k \geq 2$  et chaque  $z$ ,  $\sqrt{N_{k-1}} < z \leq \sqrt{N_k}$ , l'intervalle  $(z, (1 + \varepsilon_k)z]$  contient au moins un diviseur de  $N_k$ .

Avec cette définition, on peut formaliser agréablement le principe de Vose dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2. — Soit  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\{N_k : k \geq 1\}$  une suite d'entiers satisfaisant (4) et  $\{\varepsilon_k : k \geq 1\}$  une suite de réels admissible pour  $\{N_k\}$ . Alors on a

$$F(N_k; h) \leq \sum_{j=2}^k (1 + \varepsilon_j) h'(\varepsilon_j) \log(N_j / N_{j-1}).$$

Compte tenu de l'hypothèse de croissance faite sur  $(1+u)h'(u)$ , le théorème 1 découle du théorème 2 si l'on peut montrer que, pour tout  $\beta$ ,  $0 < \beta < 3/2$ , la suite définie par

$$(5) \quad \varepsilon_k = \exp\{-(\log k)^\beta\}, \quad (k=1, 2, \dots),$$

est admissible pour chacune des suites (2).

Le problème se ramène donc à prouver l'existence de diviseurs d'un entier  $N$  dans de petits intervalles centrés au voisinage de  $\sqrt{N}$ . Nous utilisons à cette fin la méthode « naïve » consistant essentiellement à exprimer le nombre des diviseurs ayant la propriété souhaitée par une intégrale de Fourier portant sur la fonction

$$\tau(N, \theta) = \sum_{d|N} d^{i\theta}, \quad (\theta \in \mathbf{R}).$$

On a en effet

$$(6) \quad \begin{aligned} & \text{card} \{d : d|N, |\log(z/d)| \leq \eta/2\} \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(N, \theta) z^{-i\theta} \left( \frac{\sin(\eta\theta/2)}{(\eta\theta/2)} \right) d\theta. \end{aligned}$$

(Nous emploierons en fait dans la suite un noyau absolument intégrable fournissant une approximation du membre de gauche).

Lorsque  $|\theta|$  est assez petit, on a

$$(7) \quad \tau(N, \theta) = \tau(N)N^{\eta\theta/2} \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) \theta^2 S(N)^2 \right\}$$

où

$$(8) \quad S(N)^2 = \frac{1}{12} \sum_{p^v | N} v(v+2)(\log p)^2$$

est la variance de la variable aléatoire  $D_N$  prenant les valeurs  $\log d$ , lorsque  $d$  parcourt l'ensemble des diviseurs de  $N$ , avec probabilité uniforme  $1/\tau(N)$ . On a d'ailleurs

$$D_N = \sum_{p^v | N} D_{p^v}$$

où les  $D_{p^v}$  sont indépendantes, ce qui implique immédiatement (8).

Au vu de (7), on constate que si  $z$  est proche de  $\sqrt{N}$ , le point  $\theta = 0$  est proche d'un point-selle pour l'intégrale de (6), i.e. d'une racine de l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau(N, \theta) z^{\eta\theta} \left( \frac{\sin(\eta\theta/2)}{(\eta\theta/2)} \right) \right) = 0.$$

Dans ces circonstances, on peut s'attendre à ce que le membre de droite de (6) soit équivalent à

$$\frac{\eta\tau(N)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 \right\} d\theta = \frac{\eta\tau(N)}{\sqrt{2\pi} S(N)}.$$

Ce raisonnement heuristique peut être rendu effectif sous des hypothèses assez générales. Cela fournit un théorème d'existence de suites admissibles suffisant pour impliquer le théorème 1.

Avant d'énoncer le résultat obtenu, introduisons quelques notations et conventions supplémentaires.

On pose pour  $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \omega(N) &= \text{card} \{p : p|N\}, & P^+(N) &= \max \{p : p|N\}, \\ R(N) &= \max \{v \log p : p^v | N\}. \end{aligned}$$

La quantité  $S(N)$  étant définie par (8) pour  $N \geq 1$ , nous dirons qu'une suite d'entiers  $\mathcal{A}$  est de type  $W$  si les conditions asymptotiques suivantes

sont satisfaites, pour des constantes positives convenables  $c_1, c_2, \lambda$ , lorsque  $N \rightarrow \infty$  en restant dans  $\mathcal{A}$

$$(W1) \quad \omega(N) > P^+(N)(\log P^+(N))^{-c_1}$$

$$(W2) \quad R(N) = o(S(N))$$

$$(W3) \quad \log R(N) \leq (\log P^+(N))^{3/2-\lambda}$$

$$(W4) \quad S(N) \leq c_2 \min \left\{ \frac{1}{u} \sum_{\substack{p^{\eta} | N \\ p' \leq e^u}} (v \log p)^2 : \log P^+(N) \leq u < R(N) \right\}.$$

Ces conditions peuvent paraître techniques, mais elles sont facilement vérifiables dans la pratique. Par exemple, (W4) est vide si  $N$  est sans facteur carré.

Nous pouvons établir le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.** — Soit  $\beta$  un nombre réel,  $0 < \beta < 3/2$ ,  $\delta(N)$  une fonction tendant vers 0, et  $\mathcal{A}$  une suite de type W. Lorsque  $N$  tend vers l'infini en restant dans  $\mathcal{A}$ , et uniformément pour tous les couples  $(x, \eta)$  tels que

$$\exp \{ -(\log P^+(N))^\beta \} \leq \eta \leq 1,$$

$$|\log(x/\sqrt{N})| \leq \delta(N)S(N),$$

on a

$$(10) \quad \text{card} \{d : d|N, |\log(x/d)| \leq \eta/2\} = \frac{(1+o(1))\eta\tau(N)}{\sqrt{2\pi}S(N)}.$$

Dans le cas des suites  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  les conditions (W) sont facilement vérifiées. Cela implique l'admissibilité des suites (5), d'où, grâce au théorème 2, la conclusion correspondante du théorème 1.

Pour  $N = k!$ , on a  $S(N) \asymp k$  et  $R(N) \asymp k$ , donc la seconde des conditions (W) n'est pas réalisée. On vérifie aisément les trois autres conditions. Le théorème 1 découle alors d'une manipulation supplémentaire. Notant  $v_p$  la valuation  $p$ -adique, on décompose

$$k! = M_k N_k$$

avec

$$M_k = \prod_{p \leq \xi} p^{v_p(k!)}, \quad N_k = \prod_{p > \xi} p^{v_p(k!)},$$

où  $\xi = \xi(k)$  tend vers l'infini assez lentement. Les conditions (W) sont alors satisfaites pour  $N_k, k \rightarrow \infty$ . En particulier

$$R(N_k) \asymp k(\log \xi)/\xi, \quad S(N_k) \asymp k\sqrt{(\log \xi)/\xi}.$$

De plus le rapport de deux diviseurs consécutifs de  $M_k$  ne dépasse pas 2. On a en effet pour tout entier  $n$  ([3], p. 19)

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} d_{i+1}/d_i = \max_{p|n} p \left( \prod_{q < p} q^{v_q(n)} \right)^{-1}.$$

Lorsque  $n = M_k$ , le maximum du membre de droite est atteint pour  $p = 2$  et vaut 2. Cela implique l'existence d'un diviseur  $m_k$  de  $M_k$ ,  $\sqrt{M_k}/2 < m_k \leq \sqrt{M_k}$ . En appliquant le théorème 3 à  $N_k$  avec  $x = z/m_k$ , on obtient que, si  $\xi(k) \rightarrow \infty$  assez lentement, la suite (5) est également admissible pour  $\mathcal{F}$ . Dans ce contexte, nous énonçons le résultat suivant, qui peut être d'un intérêt indépendant :

**THÉORÈME 4.** — Soit  $\psi(k) \rightarrow \infty$ , et  $\beta$  un nombre réel,  $0 < \beta < 3/2$ . Il existe une constante positive  $C$  telle que, pour tout entier  $k$  assez grand et tout  $z$  satisfaisant à

$$(k!)^{1/2} \exp \{-k/\psi(k)\} \leq z \leq (k!)^{1/2} \exp \{k/\psi(k)\}$$

le nombre  $D(k,z)$  des diviseurs  $d$  de  $k!$  tels que

$$z(1 - \exp \{-(\log k)^\beta\}) < d < z(1 + \exp \{(\log k)^\beta\})$$

vérifie

$$D(k,z) \geq k^{-C} \exp \{-(\log k)^\beta\} \tau(k!).$$

On obtient ce résultat par la construction précédente, en choisissant  $\xi$  assez grand mais fixé. On peut encore appliquer le théorème 3 à  $N_k$  : dès que  $R(N)/S(N)$  est suffisamment petit, la quantité  $(1+o(1))$  dans (10) est  $\asymp 1$ .

Une des conséquences du théorème 4 est l'existence d'entiers sans grand facteur premier dans de petits intervalles. Dans un travail récent en collaboration avec A. Hildebrand, nous avons traité spécifiquement ce problème. Nous aurions pu employer la méthode décrite précédemment en évaluant

$$\psi(x,y) = \text{card} \{n \leq x : P^+(n) \leq y\}$$



par une intégrale du type (6) avec

$$N = \prod_{p \leq y} p^{\lfloor \log x / \log p \rfloor}.$$

Cela conduirait à des calculs difficiles car, en l'absence d'une relation particulière entre  $x$  et  $y$ , le point  $\theta = 0$  n'est pas une approximation de la racine de (9). Nous avons préféré utiliser la formule de Perron

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1} \frac{x^s}{s} ds$$

qui permet de choisir l'abscisse d'intégration  $k$  en fonction de  $x$  et  $y$  de manière à ce que  $s = k$  soit un point-selle de l'intégrande. Cette altération ne modifie pas l'aspect fondamental de la méthode. Dans le cas considéré cette approche s'est révélée étonnamment fructueuse. Elle fournit en particulier un équivalent asymptotique de  $\psi(x, y)$  dès que  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini, et, des résultats sur les petits intervalles de qualité similaire à ceux des théorèmes 3 et 4. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [5].

Il m'est agréable d'achever cette section en remerciant B. Saffari et M. Vose. Le second pour m'avoir aimablement donné accès à son manuscrit avant publication. Le premier pour une intéressante conversation épistolaire concernant les dérivées des polynômes de Tchebychev – cf. Lemme 1.

## 2. Démonstration du théorème 2.

Posons  $\varphi(u) = uh'(u-1)$ , ( $u \geq 1$ ), et

$$\chi(n; u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } d|n \Rightarrow d \notin (u, v] \\ 0 & \text{si } \exists d|n, u < d \leq v \end{cases} \quad (1 \leq u \leq v).$$

Notant toujours  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_r = n$  la suite des diviseurs de  $n$ , on a pour  $1 \leq r \leq \tau(n)$

$$\begin{aligned} (11) \quad \int_1^{d_r} \int_1^v \varphi\left(\frac{v}{u}\right) \chi(n; u, v) \frac{du dv}{u^2} &= \sum_{j=1}^{r-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \int_{d_j}^v \varphi\left(\frac{v}{u}\right) \frac{du}{u^2} dv \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{v}{d_j} h'\left(\frac{v}{d_j} - 1\right) \frac{dv}{v} \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} h\left(\frac{d_{j+1}}{d_j} - 1\right). \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à la symétrie  $d_{j+1}/d_j = d_{\tau-j+1}/d_{\tau-j}$ ,  $1 \leq j \leq \tau(n) - 1$ , on peut écrire pour  $r = [\tau(n)/2]$

$$F(n; h) = 2 \left( \sum_{j=1}^{r-1} h \left( \frac{d_{j+1}}{d_j} - 1 \right) + h \left( \frac{\sqrt{n}}{d_r} \right)^* \right)$$

où l'étoile signifie que le terme ainsi désigné doit être pris égal à 0 si  $\sqrt{n}$  n'est pas un entier. Comme  $h \in \mathcal{H}$ , on a  $h(u) \geq 0$  pour tout  $u$ , donc  $h(u)^* \leq h(u)$ . Compte tenu de (11), il vient

$$(12) \quad F(n; h) \leq 2 \int_1^{\sqrt{n}} \int_1^v \varphi' \left( \frac{v}{u} \right) \chi(n; u, v) \frac{du dv}{u^2}.$$

Appliquons cette inégalité avec  $n = N_k$  en remarquant que, puisque  $N_j | N_k$ ,  $1 \leq j \leq k$ , on a

$$\chi(N_k; u, v) \leq \chi(N_j; u, v), \quad (1 \leq u \leq v).$$

En permutant les sommations et en scindant la somme externe, on obtient

$$(13) \quad F(N_k; h) \leq 2 \sum_{j=2}^k \int_{\sqrt{N_{j-1}}}^{\sqrt{N_j}} \frac{du}{u} \left( \int_u^\infty \varphi' \left( \frac{v}{u} \right) \chi(N_j; u, v) \frac{dv}{u} \right).$$

L'hypothèse d'admissibilité de la suite  $\{\varepsilon_k : k \geq 1\}$  implique que  $\chi(N_j; u, v) = 0$  pour  $\sqrt{N_{j-1}} < u \leq \sqrt{N_j}$ ,  $v > (1 + \varepsilon_j)u$ . L'intégrale en  $v$  ne dépasse donc pas

$$\int_u^{(1+\varepsilon_j)u} \varphi' \left( \frac{v}{u} \right) \frac{dv}{u} = \varphi(1 + \varepsilon_j) = (1 + \varepsilon_j)h'(\varepsilon_j).$$

En reportant dans (13), on obtient la conclusion annoncée.

### 3. Lemmes.

Nous rassemblons dans cette section quelques résultats auxiliaires simples qui nous seront utiles au cours de la démonstration du théorème 3.

Nous commençons par une inégalité concernant les fonctions

$$g_v(x) = \frac{\sin(vx)}{v \sin x}, \quad (x \in \mathbf{R}, v \geq 2),$$

que nous énonçons sous une forme optimale due à Saffari [7].

LEMME 1. — Pour  $x$  réel et  $v$  entier  $\geq 2$ , on a

$$|g_v(x)| \leq 1 - \frac{2}{3} \min \left( 1, v^2 \left\| \frac{x}{\pi} \right\|^2 \right)$$

où  $\|u\|$  désigne la distance de  $u$  à l'ensemble des entiers.

*Démonstration.* — La fonction  $g_v(x)$  possède dans l'intervalle  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  des extrema locaux aux points  $x_1 < x_2 < \dots$ , racines de l'équation

$$\operatorname{tg} vx = v \operatorname{tg} x.$$

Posons  $m_k(v) = g_v(x_k)$ ,  $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(v-1) \right\rfloor$ . Il est bien connu que  $(m_k(v))$  est pour chaque  $v \geq 3$ , une suite décroissante en  $k$ : on a en fait

$$\begin{aligned} m_k(v)^2 &= \left( \frac{\sin vx_k}{v \sin x_k} \right)^2 = \left( \frac{\cos vx_k}{\cos x_k} \right)^2 = \frac{1}{(\cos x_k)^2 (1 + (\operatorname{tg} vx_k)^2)} \\ &= \frac{1}{1 + (v^2 - 1)(\sin x_k)^2}. \end{aligned}$$

On a  $x_1 < 3\pi/(2v)$ , donc

$$|g_v(x)| \leq M_1(v), \quad \left( v \geq 3, \left\| \frac{x}{\pi} \right\| > \frac{1}{v} \right),$$

avec

$$M_1(v) := \max_{\pi \leq y \leq 3\pi/2} \left| \frac{\sin y}{v \sin (y/v)} \right|.$$

Comme on a

$$(14) \quad \frac{d}{dv} \{v \sin (y/v)\} = \cos (y/v)(\operatorname{tg} (y/v) - (y/v)) \geq 0$$

pour  $(y/v) \in [0, \pi]$ , on voit que  $M_1(v)$  est une suite décroissante pour  $v \geq 3$ . D'où

$$(15) \quad g_v(x) \leq M_1(3) = \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} \min \left( 1, v^2 \left\| \frac{x}{\pi} \right\|^2 \right)$$

pour  $v \geq 3$  et  $\|x/\pi\| > 1/v$ .

Lorsque  $\|x/\pi\| \leq 1/v$ , on a

$$|g_v(x)| = \frac{\sin y}{v \sin (y/v)}$$

avec  $y = \pi v \|x/\pi\| \in [0, \pi]$ . L'inégalité (14) montre que l'on a dans cette circonstance

$$|g_v(x)| \leq |g_2(x)| = \cos (y/2) \leq 1 - y^2/\pi^2$$

soit

$$|g_v(x)| \leq 1 - v^2 \|x/\pi\|^2, \quad \left( v \geq 2, \left\| \frac{x}{\pi} \right\| \leq \frac{1}{v} \right).$$

Compte tenu de (15), cela implique bien le résultat annoncé.

Le lemme suivant peut être prouvé par la méthode classique d'intégration complexe, reposant sur la formule de Perron (cf. par exemple [6, Satz A31]), en utilisant la région sans zéro de Vinogradov pour la fonction zêta de Riemann (cf. [1, Théorème 11.2]). Nous omettons les détails.

LEMME 2. — Pour  $x \geq 2$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $|\theta| \leq \exp \{(\log x)^{3/2-\varepsilon}\}$ , on a

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) n^{i\theta} = \frac{x^{1+i\theta}}{1+i\theta} + O_\varepsilon(x \exp \{- (\log x)^{\varepsilon/2}\})$$

où  $\Lambda$  désigne la fonction de von Mangoldt.

Il est à noter que, sous l'hypothèse de Riemann, la borne  $\exp \{(\log x)^{3/2-\varepsilon}\}$  peut être remplacée par  $\exp \{x^{1/2-\varepsilon}\}$ . Le lecteur en déduira sans peine une amélioration conditionnelle du théorème 3.

Le lemme 2 implique le résultat suivant qui nous servira à majorer la contribution des grandes valeurs du paramètre  $\theta$  à l'intégrale de Fourier du type (6) apparaissant dans la démonstration du théorème 3.

LEMME 3. — Pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , il existe un entier  $N_0(\varepsilon)$  tel que si  $N \geq N_0(\varepsilon)$  satisfait à

$$(16) \quad \omega(N) > P^+(N)(\log P^+(N))^{-c_1-1+\varepsilon}$$

alors on a

$$(17) \quad \sum_{p|N} \|\theta \log p\|^2 > \frac{\omega(N)}{4\pi^2}$$

uniformément pour

$$(\log P^+(N))^{c_1} \leq |\theta| \leq \exp \{(\log P^+(N))^{3/2-\epsilon}\}.$$

*Démonstration.* — On a pour tous  $\theta, p$ ,

$$1 - \cos(2\pi\theta \log p) \leq 2\pi^2 \|\theta \log p\|^2.$$

Si (17) n'est pas réalisée, on peut donc écrire

$$\sum_{p|N} (1 - \cos(2\pi\theta \log p)) \leq \frac{1}{2} \omega(N)$$

d'où en posant  $x = P^+(N)$

$$(18) \quad \sum_{p \leq x} (1 - \cos(2\pi\theta \log p)) \leq \pi(x) - \frac{1}{2} \omega(N).$$

Or, d'après le lemme 2, on a pour tout  $y, \sqrt{x} < y \leq x$ ,

$$S(y) := \sum_{p \leq y} (1 - \cos(2\pi\theta \log p)) \log p \geq y \left(1 - \frac{c}{(\log x)^{c_1}}\right)$$

si  $N_o(\epsilon)$ , et donc  $x$ , est assez grand (la contribution des puissances  $\geq 2$  de nombres premiers à la somme estimée au lemme 2 est en effet trivialement  $O(\sqrt{x})$ ). D'où

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} (1 - \cos(2\pi\theta \log p)) &\geq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dS(y)}{\log y} \\ &\geq \text{li}(x) \left(1 - \frac{c}{(\log x)^{c_1}}\right) + O(\text{li}(\sqrt{x})) \\ &= \pi(x) + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{c_1}}\right) \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de l'hypothèse (16), contredit (18) pour  $x$  assez grand.

#### 4. Démonstration du théorème 3.

Soit  $\mathcal{A}$  une suite de type W. Nous voulons montrer que, sous les conditions du théorème, on a

$$(19) \quad \text{card} \{d : d|N, |\log(x/d)| \leq \eta/2\} = \frac{(1+o(1))\eta\tau(N)}{\sqrt{2\pi} S(N)}$$

lorsque  $N$  tend vers l'infini en restant dans  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\varepsilon$  un réel positif fixé,  $0 < \varepsilon < 1$ , et  $\chi$  la fonction trapézoïdale définie par

$$\chi(u) = \begin{cases} 1 & , & (|u| \leq (1/2) - \varepsilon), \\ (1 - 2|u|)/(2\varepsilon) & , & ((1/2) - \varepsilon < |u| \leq 1/2), \\ 0 & , & (|u| > 1/2). \end{cases}$$

Posant

$$\hat{\chi}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta u} \chi(u) du = \frac{4}{\varepsilon\theta^2} \sin\left(\frac{\varepsilon\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-\varepsilon)\theta}{2}\right),$$

et

$$f(N, \theta) = \frac{\tau(N, \theta)}{\tau(N)} x^{-i\theta} \hat{\chi}(\eta\theta),$$

on voit que le membre de gauche de (19) est au moins égal à

$$(20) \quad \sum_{d|N} \chi\left(\frac{1}{\eta} \log(x/d)\right) = \frac{\eta\tau(N)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(N, \theta) d\theta.$$

Nous allons montrer que l'intégrale en  $\theta$  vaut

$$(1 - \varepsilon + o(1)) \frac{\sqrt{2\pi}}{S(N)}.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, cela fournira la minoration asymptotique contenue dans (19). Une altération convenable de la fonction  $\chi$  conduirait, par des calculs identiques, à la majoration.

Étant donné un réel  $\varepsilon_1$  satisfaisant à

$$\min(0, \frac{3}{2} - \beta - \lambda) < \varepsilon_1 < \frac{3}{2} - \beta$$

nous posons

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 1/(\delta(N)S(N)), \quad T_2 = \pi/R(N), \quad T_3 = \pi/\log P^+(N),$$

$$T_4 = (\log P^+(N))^{\varepsilon_1}, \quad T_5 = \exp\{(\log P^+(N))^{\beta + \varepsilon_1}\}, \quad T_6 = +\infty,$$

et désignons par  $I_j$  la contribution à l'intégrale (20) du domaine

$$(I_j) \quad T_j \leq |\theta| < T_{j+1}, \quad (0 \leq j \leq 5).$$

Nous allons prouver les relations asymptotiques

$$(21) \quad I_0 = \left(1 - \varepsilon + o(1)\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{S(N)}$$

$$(22) \quad I_j = o\left(\frac{1}{S(N)}\right), \quad (1 \leq j \leq 5),$$

qui suffiront donc à établir le théorème 3.

Pour  $\theta$  réel,  $p$  premier et  $v$  entier  $\geq 1$ , on a

$$\frac{1}{(v+1)} \sum_{m=0}^v p^{i\theta m} = 1 + \frac{i}{2} \theta v \log p - \frac{v(2v+1)}{12} (\theta \log p)^2 + O((\theta v \log p)^3).$$

Il existe donc une constante  $c_0$  telle que pour  $|\theta| \leq c_0/R(N)$  le membre de gauche soit de la forme  $1 + u$ , avec  $|u| \leq 1/2$ . La détermination principale de son logarithme vaut alors

$$\frac{i}{2} \theta v \log p - \frac{v(v+2)}{24} (\theta \log p)^2 + O((\theta v \log p)^3)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\tau(N, \theta)}{\tau(N)} &= \prod_{p^v | N} \left( \frac{1}{v+1} \sum_{m=0}^v p^{i\theta m} \right) \\ &= N^{i\theta/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 + O(\theta^3 V(N)) \right\} \end{aligned}$$

avec

$$V(N) := \sum_{p^v | N} (v \log p)^3 \ll R(N) S(N)^2.$$

Comme  $R(N) = o(S(N))$ , on a

$$T_1^3 V(N) = o(1), \quad (N \rightarrow \infty, N \in \mathcal{A}),$$

si  $\delta(N)$  tend vers 0 assez lentement. Sous les hypothèses du théorème, on a donc

$$\begin{aligned} f(N, \theta) &= \left( \frac{\sqrt{N}}{x} \right)^{i\theta} \hat{\chi}(v\theta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 + O(T_1^3 V(N)) \right\} \\ &= \left( \hat{\chi}(0) + o(1) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 \right\} \\ &= \left( 1 - \varepsilon + o(1) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 \right\} \end{aligned}$$

uniformément pour  $\theta \in (I_0)$ . Cela implique

$$I_0 = (1 - \varepsilon + o(1)) \int_{-T_1}^{T_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta^2 S(N)^2 \right\} d\theta,$$

d'où (21).

Pour montrer (22), nous écrivons

$$(23) \quad |f(N, \theta)| = |\hat{\chi}(\eta\theta)| \prod_{p^{v||N}} \left| g_{v+1} \left( \frac{\theta}{2} \log p \right) \right|$$

où  $g_v(u)$  est la fonction introduite au lemme 1. On a donc

$$(24) \quad |f(N, \theta)| \leq \exp \left\{ -\frac{2}{3} \varphi(N, \theta) \right\}$$

avec

$$\varphi(N, \theta) = \sum_{p^{v||N}} \min(1, (v+1)^2 \left\| \frac{\theta}{2\pi} \log p \right\|^2).$$

Pour  $\theta \in (I_1)$ , il vient

$$\varphi(N, \theta) \geq \sum_{p^{v||N}} \left( \frac{\theta v \log p}{2\pi} \right)^2 \geq \frac{\theta^2}{\pi^2} S(N)^2$$

d'où par (24)

$$|I_1| \leq 2 \int_{T_1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{2\theta^2}{3\pi^2} S(N)^2 \right\} d\theta = o\left( \frac{1}{S(N)} \right)$$

puisque  $T_1 S(N) \rightarrow \infty$ .

Lorsque  $\theta \in (I_2)$ , on a en utilisant l'hypothèse (W4) pour  $u = 2\pi/|\theta|$

$$\begin{aligned} \varphi(N, \theta) &\geq \sum_{p^{v||N}} \min \left( 1, \left( \frac{v\theta \log p}{2\pi} \right)^2 \right) \geq \left( \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \sum_{\substack{p^{v||N} \\ p^v \leq \exp(2\pi/|\theta|)}} (v \log p)^2 \\ &\geq \frac{|\theta|}{2\pi c_2} S(N) \end{aligned}$$

d'où

$$|I_2| \leq 2 \int_{T_2}^{\infty} \exp \{ -\theta S(N)/3\pi c_2 \} d\theta = o\left( \frac{1}{S(N)} \right).$$



Nous allons voir que l'on a uniformément pour  $\theta \in (I_3)$

$$(25) \quad \sum_{p|N} \left\| \frac{\theta}{2\pi} \log p \right\|^2 \geq c_4 \omega(N)^3 P^+(N)^{-2}.$$

Cela implique bien (22) pour  $j = 3$ . On déduit en effet de (25)

$$\varphi(N, \theta) \geq c_4 \omega(N)^3 P^+(N)^{-2},$$

d'où par (24) et (W1)

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq 2 (\log P^+(N))^{c_1} \exp \left\{ -\frac{2}{3} c_4 \omega(N)^3 P^+(N)^{-2} \right\} \\ &\ll \exp \left\{ -\frac{1}{2} c_4 \omega(N)^3 P^+(N)^{-2} \right\}. \end{aligned}$$

Comme, par la majoration triviale

$$S(N)^2 \leq R(N)^2 \omega(N),$$

on déduit de (W1) et (W3)

$$(26) \quad \log S(N) \leq \log R(N) + \frac{1}{2} \log \omega(N) = o(\omega(N)^3 P^+(N)^{-2}),$$

il suit

$$I_3 = o\left(\frac{1}{S(N)}\right).$$

Pour établir (25), nous fixons un  $\theta$  dans  $(I_3)$  et posons pour chaque  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$A(\alpha) = \text{card} \left\{ p : p|N, \left\| \frac{\theta}{2\pi} \log p \right\| < \alpha \right\}.$$

Nous allons voir qu'il existe une constante  $c_5$  telle que

$$(27) \quad A(\alpha) \leq \frac{1}{2} \omega(N)$$

pour tout  $\alpha$  satisfaisant à

$$0 \leq \alpha \leq c_5 \frac{\omega(N)}{P^+(N)},$$

ce qui implique (25) sous la forme

$$\sum_{p|N} \left\| \frac{\theta}{2\pi} \log p \right\|^2 \geq \left( c_5 \frac{\omega(N)}{P^+(N)} \right)^2 \frac{1}{2} \omega(N).$$

Par raison de symétrie, nous pouvons supposer  $\theta > 0$ . On a

$$A(\alpha) \leq \sum_{k \leq \frac{\theta}{2\pi} \log P^+(N) + \alpha} (\pi(e^{2\pi(k+\alpha)/\theta}) - \pi(e^{2\pi(k-\alpha)/\theta})).$$

En utilisant le résultat classique de Hardy et Littlewood

$$\pi(x+y) - \pi(x) \ll \pi(y) + 1, \quad (1 \leq y \leq x),$$

il vient

$$(28) \quad A(\alpha) \ll \left( \theta \log P^+(N) + \alpha \right) \left( \pi \left( P^+(N) (e^{4\pi\alpha/\theta} - 1) \right) + 1 \right).$$

Pour  $\alpha = c_5 \omega(N)/P^+(N)$  et  $\theta \in (I_3)$  on a par (W1)

$$P^+(N)^{-1/2} \ll \alpha/\theta \ll 1$$

d'où par (28)

$$A(\alpha) \ll \theta \log P^+(N) \frac{P^+(N)\alpha/\theta}{\log P^+(N)} = \alpha P^+(N) = c_5 \omega(N).$$

On a donc (27) pour  $c_5$  assez petite.

L'intégrale  $I_4$  est traitée en faisant appel au lemme 3. En effet on a d'après ce résultat

$$\varphi(N, \theta) \geq \sum_{p|N} \left\| \frac{\theta}{2\pi} \log p \right\|^2 \geq \frac{\omega(N)}{4\pi^2}$$

pour tout  $N \geq N_1(\varepsilon_1)$  dans  $\mathcal{A}$  et tout  $\theta$  de  $(I_4)$ , d'où

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2 \exp \left\{ (\log P^+(N))^{\beta+\varepsilon_1} - \frac{1}{6\pi^2} \omega(N) \right\} \\ &\ll \exp \{ -c_6 \omega(N) \} = o\left( \frac{1}{S(N)} \right), \end{aligned}$$

où la seconde majoration provient de (W1) et la dernière découle de (26) en remarquant que  $P^+(N) \geq \omega(N)$ .

Enfin, nous estimons  $I_5$  en utilisant (23) sous la forme

$$|f(N, \theta)| \leq |\hat{\chi}(\eta\theta)| \ll_\varepsilon \eta^{-2}\theta^{-2}$$

d'où

$$|I_5| \ll_\varepsilon \eta^{-2} \int_{T_5}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2} = \eta^{-2} T_5^{-1} = o\left(\frac{1}{S(N)}\right),$$

d'après (W3) et le choix de  $\varepsilon_1$  puisque

$$S(N) \leq R(N)\omega(N)^{1/2} \leq R(N)P^+(N).$$

Cela achève la preuve de (22) et la démonstration du théorème 3.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. ELLISON et M. MENDES FRANCE, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris (1975).
- [2] P. ERDÖS, Some problems and results on additive and multiplicative number theory, *Analytic Number Theory* (Philadelphia, 1980), *Lecture Notes* 899 (1981), 171-182.
- [3] P. ERDÖS et G. TENENBAUM, Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier*, 31-1 (1981), 17-37.
- [4] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, 5<sup>e</sup> éd., Oxford at the Clarendon Press (1979).
- [5] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296 (1986), 265-290.
- [6] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Springer, Berlin (1957).
- [7] B. SAFFARI, Majoration des dérivées des polynômes de Tchebychev, *Communication privée* (janvier 1983).
- [8] M. VOSE, Integers with consecutive divisors in small ratio, *J. Number Theory*, 19 (1984), 233-238.

Manuscrit reçu le 15 mai 1986  
révisé le 13 juin 1986.

Gérald TENENBAUM,  
Université de Nancy I  
Département de Mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandœuvre Cedex (France).