

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS NORGUET

## **Problèmes sur les formes différentielles et les courants**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 11 (1961), p. 1-82

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1961\\_\\_11\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PROBLÈMES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES ET LES COURANTS

par François NORGUET (Strasbourg)

---

Les méthodes que j'ai utilisées, dans un travail précédent [8] sur la caractérisation des domaines d'holomorphic par une propriété locale, ont attiré mon attention sur les formules de représentation intégrale pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, puis, plus généralement, sur l'utilisation des formes différentielles extérieures et des courants dans la théorie des variétés analytiques complexes.

Dans ce domaine, deux résultats importants d'analyse ont été obtenus respectivement par P. Lelong [3] et L. Schwartz [18], à savoir : d'une part, la possibilité d'intégrer une forme différentielle extérieure sur un ensemble analytique complexe, ce qui permet d'associer de façon naturelle un courant positif fermé à cet ensemble analytique; d'autre part, la possibilité de prolonger canoniquement par un courant certaines formes différentielles méromorphes. En outre, P. Lelong [2] et G. de Rham [15] ont apporté une contribution à l'étude algébrique des espaces de formes différentielles et de courants, étudiant respectivement la division de courants positifs par des formes différentielles positives, et la division de formes différentielles et de courants par une forme différentielle homogène de degré un; la division de formes différentielles par une forme de degré deux avait été précédemment étudiée par T. Lepage [4] et G. Papy [14]. D'autres résultats importants d'analyse et de topologie algébrique ont été obtenus dans ce même domaine par E. Dolbeault, K. Kodaira et D. C. Spencer. Enfin, tout

récemment, J. Leray [5] a développé sa théorie des résidus pour les formes différentielles semi-méromorphes.

Toutefois, j'ai été bien vite conduit, dès 1954, vers des problèmes (liés à la convolution des courants et à la multiplication extérieure des formes différentielles) qui se posent naturellement dans le cas des variétés différentiables à structure réelle; dans ce cadre se situent les trois premiers chapitres de ce travail. Seul le chapitre IV, consacré à la représentation intégrale des fonctions holomorphes de plusieurs variables, fait usage de la structure analytique complexe.

D'abord, il me semblait nécessaire de généraliser aux formes différentielles et aux courants certaines théories, classiques pour les fonctions et les distributions; en particulier, la notion de convolution me paraissait importante pour permettre l'écriture d'équations de convolution entre formes différentielles et courants, pour établir un lien entre certaines opérations d'analyse et des opérations topologiques correspondantes, pour rendre possibles l'écriture et la démonstration algorithmique de certaines formules intégrales; je lui consacre les chapitres I et II de ce travail. Le chapitre I est ainsi consacré à l'étude de la convolution des courants dans les variétés indéfiniment différentiables; deux notions de convolution, toutes deux naturelles, sont introduites, sous les hypothèses les plus générales; on établit plusieurs propriétés dont certaines résultent des définitions elles-mêmes, et d'autres, d'hypothèses supplémentaires, exprimées formellement afin d'axiomatiser une généralisation de la situation obtenue dans l'espace euclidien. Le chapitre II est consacré à l'étude détaillée de la convolution dans l'espace euclidien; celle-ci généralise la convolution classique des mesures relativement à la loi de groupe additif de cet espace, ainsi que la convolution des distributions, définie par L. Schwartz [17].

L'utilisation des formes différentielles et des courants nécessitait encore la solution de certains problèmes d'algèbre extérieure. Le chapitre III est consacré à l'un d'eux. Il comprend tout d'abord une partie algébrique: l'étude d'un certain groupe d'homologie associé à un complexe de modules muni de plusieurs dérivations. Effectuer cette étude dans son cadre naturel: celui d'une catégorie abélienne, telle qu'elle est définie par A. Grothendieck [1], ne présente pas de difficulté

supplémentaire essentielle, mais alourdit considérablement le formalisme; aussi, après l'énoncé du problème général dans une catégorie abélienne, on se restreint au cas des modules. Le théorème obtenu, appliqué aux formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable, fournit des conditions pour qu'une telle forme soit combinaison linéaire de formes différentielles linéaires données.

Enfin, malgré les résultats obtenus par F. Sommer [20], une méthode unifiée de démonstration pour les formules de représentation intégrale des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes restait à découvrir. Une telle méthode, généralisant l'idée de la démonstration donnée par J. Leray [5] pour la formule de Cauchy-Fantappiè, est exposée dans le chapitre iv, et appliquée au cas des formules intégrales de E. Martinelli [7] et de A. Weil [21].

La plupart des résultats exposés dans ce travail ont été annoncés dans [9], [10], [11], [13]. D'autres résultats, sur la théorie des résidus et sur les applications de la convolution, partiellement annoncés dans [10] et [12], n'ont pu trouver place dans ce mémoire et seront publiés ultérieurement.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M. P. Lelong, qui, ayant guidé mes premières recherches vers des problèmes fondamentaux relatifs aux domaines pseudoconvexes, n'a cessé, depuis lors, de s'intéresser à mes travaux et de les diriger. J'adresse mes remerciements à MM. M. Brelot et C. Ehresmann, qui ont accepté de se joindre à M. P. Lelong pour constituer le Jury de cette Thèse.



## CHAPITRE PREMIER

### GÉNÉRALITÉS SUR LA CONVOLUTION DES COURANTS

#### 1. Généralités sur les courants.

Dans les chapitres I et II, toutes les variétés considérées seront indéfiniment différentiables et orientées; le produit topologique  $X \times Y$  de deux variétés  $X$  et  $Y$  sera toujours muni de la structure indéfiniment différentiable et de l'orientation naturelles;  $P_{X \times Y}$  (resp.  $Q_{X \times Y}$ ) désignera la projection canonique de  $X \times Y$  sur  $X$  (resp.  $Y$ ); toute application d'une variété dans une autre sera supposée indéfiniment différentiable. Nous rappellerons d'abord, selon G. de Rham [16], quelques notions fondamentales relatives aux *courants*.

Soient  $X$  une variété de dimension  $m$ ,  $\mathcal{E}_X$  l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables et à valeurs complexes dans  $X$ ,  $\mathcal{D}_X$  le sous-espace de  $\mathcal{E}_X$  constitué par les formes à support compact. Soit  $1 = \sum_{i \in I} \psi_i$  une partition de l'unité dans  $X$ , localement finie et subordonnée à un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des domaines de coordonnées; pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{E}_X$ , soit  $l_{i,p}(\varphi)$  la borne supérieure du module des dérivées d'ordre  $\leq p$  des coefficients de la forme  $\psi_i \varphi$  représentée à l'aide des coordonnées dans  $U_i$ ; une partie  $B$  de  $\mathcal{E}_X$  est dite *bornée à l'ordre  $p$*  si  $l_{i,p}(\varphi)$  est borné, quel que soit  $i$  (la borne pouvant dépendre de  $i$ ) lorsque  $\varphi$  varie dans  $B$ ; une partie  $B$  de  $\mathcal{E}_X$  est dite *bornée*, si elle est bornée à l'ordre  $p$ , quel que soit  $p$ ; enfin, une partie  $B$  de  $\mathcal{D}_X$  est dite *bornée à l'ordre  $p$*  (resp. *bornée*) si elle l'est dans  $\mathcal{E}_X$  et si les formes différentielles qu'elle contient ont tous leurs supports dans un même compact. La définition des parties bornées dans  $\mathcal{E}_X$  et dans  $\mathcal{D}_X$  munit ces espaces vectoriels de

*topologies localement convexes*; l'espace vectoriel  $\mathcal{D}'_X$  des courants dans  $X$  est le dual topologique de  $\mathcal{D}_X$ ; le sous-espace  $\mathcal{E}'_X$  de  $\mathcal{D}'_X$ , constitué par les courants à support compact, est le dual topologique de  $\mathcal{E}_X$ ; un courant est dit *continu d'ordre  $p$*  si sa valeur reste bornée sur toute partie bornée à l'ordre  $p$  dans  $\mathcal{D}_X$ ; enfin  $\mathcal{D}'_X$  et  $\mathcal{E}'_X$  sont munis de *topologies* telles que: pour qu'une suite  $(T_i)_{i \leq i < +\infty}$  de courants converge vers zéro dans  $\mathcal{D}'_X$  (resp.  $\mathcal{E}'_X$ ), il faut et il suffit que  $\langle \varphi, T_i \rangle$  (valeur prise par le courant  $T_i$  sur la forme différentielle  $\varphi$ ) converge vers zéro, uniformément sur tout ensemble borné dans  $\mathcal{D}_X$  (resp.  $\mathcal{E}_X$ ).

La notion de courant généralise à la fois celles de forme différentielle extérieure et de chaîne singulière, grâce aux applications  $i_X$  et  $j_X$  définies comme suit: si  $\alpha$  est une forme différentielle, localement sommable, dans  $X$ , et  $\sigma$  une chaîne singulière, localement finie, on notera

$$\langle \varphi, i_X(\alpha) \rangle = \int_X \alpha \wedge \varphi \quad \text{et} \quad \langle \varphi, j_X(\sigma) \rangle = \int_\sigma \varphi$$

pour toute forme  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}_X$ ; de façon générale, on posera

$$\int_X T \wedge \varphi = \langle \varphi, T \rangle$$

pour tout courant  $T$  appartenant à  $\mathcal{D}'_X$  (resp.  $\mathcal{E}'_X$ ) et toute forme différentielle  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}_X$  (resp.  $\mathcal{E}_X$ ); comme les espaces de formes différentielles et de chaînes singulières, les espaces de courants sont *gradués* de façon naturelle:  $\mathcal{D}_{X,p}$  désignant le sous-espace de  $\mathcal{D}_X$  constitué par les formes homogènes de degré  $p$ , le dual  $\mathcal{D}'_{X,p}$  de  $\mathcal{D}_{X,p}$  est constitué par les courants homogènes de *dimension  $p$* , de *degré  $m - p$* ; si  $\alpha$  est une forme différentielle, localement sommable, homogène de degré  $p$ , et  $\sigma$  une chaîne localement finie de dimension  $q$ ,  $i_X(\alpha)$  et  $j_X(\sigma)$  sont des courants homogènes, le premier de degré  $p$ , le second de dimension  $q$ .

Le *produit extérieur* d'un courant  $T$  et d'une forme  $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{E}_X$  est défini par la relation

$$\langle \varphi, T \wedge \alpha \rangle = \langle \alpha \wedge \varphi, T \rangle$$

pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_X$  et par la relation

$$\alpha \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge \alpha$$

lorsque  $\alpha$  et  $T$  sont homogènes de degrés  $p$  et  $q$  respectivement; on a donc

$$i_x(\beta) \wedge \alpha = i_x(\beta \wedge \alpha) \quad \text{et} \quad \alpha \wedge i_x(\beta) = i_x(\alpha \wedge \beta).$$

Le *bord* et la *différentielle* d'un courant  $T$  sont définis respectivement par les relations

$$\langle \varphi, bT \rangle = \langle d\varphi, T \rangle, \quad dT = \omega bT$$

pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_X$ , l'opérateur linéaire  $\omega$  associant à un courant  $T$ , homogène de degré  $p$ , le courant  $(-1)^p T$ ; on a donc

$$di_x(\alpha) = i_x(d\alpha) \quad \text{et} \quad bj_x(\sigma) = j_x(b\sigma)$$

pour toute forme différentielle  $\alpha$  et pour toute chaîne  $\sigma$ , et  $d(T \wedge \alpha) = dT \wedge \alpha + \omega T \wedge d\alpha$ ,  $b(T \wedge \alpha) = bT \wedge \omega\alpha + T \wedge b\alpha$

pour tout courant  $T$  et toute forme  $\alpha \in \mathcal{E}_X$ . Enfin, si  $g$  est une application de  $X$  dans une variété  $Y$ , et si  $T$  est un courant dans  $X$ , de support  $\sigma(T)$ , tel que  $\sigma(T) \cap g^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ , on définit le courant *image*  $g(T)$  par la relation

$$\langle \varphi, g(T) \rangle = \langle g^*(\varphi), T \rangle$$

pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_Y$ ,  $g^*(\varphi)$  désignant l'image réciproque de  $\varphi$  par  $g$ .

Les formes différentielles considérées jusqu'à présent étaient supposées à coefficients complexes; plus généralement, on peut considérer des formes différentielles à coefficients dans un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes; ceci est utile pour introduire les *formes et courants doubles*, qui interviennent sur le produit de deux variétés, à côté des formes et courants ordinaires (cf. [16]).

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés, de dimensions respectives  $m$  et  $n$ ; l'espace vectoriel (sur le corps des nombres complexes) des formes différentielles dans  $X$  dont les coefficients sont des formes différentielles (à coefficients complexes) dans  $Y$ , canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des formes différentielles dans  $Y$  dont les coefficients sont des formes différentielles (à coefficients complexes) dans  $X$ , est l'espace des formes doubles dans  $X \times Y$ . On désignera par  $\mathcal{E}_{X, Y}$  (resp.  $\mathcal{D}_{X, Y}$ ) l'espace vectoriel des formes doubles indéfiniment diffé-



rentiables (resp. indéfiniment différentiables et à support compact) dans  $X \times Y$ ; ces espaces sont munis de topologies analogues à celles définies ci-dessus; leurs duaux topologiques sont l'espace  $\mathcal{E}'_{X, Y}$  des courants doubles à supports compacts et l'espace  $\mathcal{D}'_{X, Y}$  des courants doubles dans  $X \times Y$ ; tous ces espaces sont bigradués, une forme (resp. un courant) double homogène possédant un degré (resp. un degré et une dimension) relativement à  $X$  et relativement à  $Y$ . Les opérations définies pour les formes et les courants se définissent de manière analogue pour les formes et les courants doubles; toutefois il faut distinguer si le bord et la différentielle sont relatifs à  $X$  ou à  $Y$ ; en utilisant pour cela des indices, on obtient les opérateurs  $b_X, d_X, \omega_X, b_Y, d_Y, \omega_Y$ .

A toute forme différentielle  $\varphi$  dans  $X \times Y$  est canoniquement associée une forme double  $\mathcal{A}^*(\varphi)$ ; si  $\varphi$  est représentée, dans le produit  $U \times V$  d'un domaine de coordonnées de  $X$  et d'un domaine de coordonnées de  $Y$ , par une expression

$$\sum \varphi_{i_1 \dots i_{p_1} \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p_1}} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q},$$

$\mathcal{A}^*(\varphi)$  est représentée, dans  $U \times V$ , par l'expression

$$\sum \varphi_{i_1 \dots i_{p_1} \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p_1}} \cdot dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q},$$

c'est-à-dire que le produit extérieur d'un quelconque  $dx^i$  par un  $dy^j$  est remplacé par un produit commutatif. L'opérateur  $\mathcal{A}$ , transposé de  $\mathcal{A}^*$  par la dualité entre formes différentielles et courants, associe un courant à tout courant double; les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^*$  admettent des inverses  $\mathcal{A}^{-1}$  et  $\mathcal{A}^{*-1}$ ; les relations suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad \mathcal{A}^*(\varphi \wedge \varphi') = (-1)^{p'q} \mathcal{A}^*(\varphi) \wedge \mathcal{A}^*(\varphi')$$

si  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) est de degré  $q$  (resp.  $p'$ ) relativement à  $X$  (resp.  $Y$ );

$$(ii) \quad \mathcal{A}(T \wedge \alpha) = (-1)^{m-p'q} \mathcal{A}(T) \wedge \mathcal{A}^{*-1}(\alpha)$$

si  $\alpha$  est de degré  $p$  (resp.  $q$ ) relativement à  $X$  (resp.  $Y$ );

$$(iii) \quad \mathcal{A}^*(\varphi) = (-1)^{m-p'q} \mathcal{A}^{-1} i_{X \times Y}(\varphi)$$

si  $\mathcal{A}^*(\varphi)$  est de degré  $p$  (resp.  $q$ ) relativement à  $X$  (resp.  $Y$ );

$$(iv) \quad \mathcal{A}^*d = (d_X + \omega_X d_Y) \mathcal{A}^*;$$

$$(v) \quad b\mathcal{A} = \mathcal{A}(b_X + \omega_X^* b_Y),$$

l'opérateur  $\omega^*$ , transposé de  $\omega$  par la dualité entre formes

différentielles et courants, associant, à un courant  $T$  de dimension  $p$ , le courant  $(-1)^p T$ .

**2. Produits tensoriels de formes différentielles extérieures et de courants.**

Rappelons d'abord la définition du *produit tensoriel* selon G. de Rham [16]. Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés, de dimensions respectives  $m$  et  $n$ ; si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des formes différentielles extérieures dans  $X$  et  $Y$  respectivement, leur produit tensoriel  $\alpha \otimes \beta$  est une forme double dans  $X \times Y$ , dont l'expression dans le produit  $U \times V$  de deux domaines de coordonnées est le produit commutatif des expressions de  $\alpha$  et de  $\beta$  dans  $U$  et  $V$  respectivement. Tout courant simple  $S$  dans  $X$  définit une application linéaire continue de  $\mathcal{D}_{X,Y}$  dans  $\mathcal{D}_Y$ , faisant correspondre à toute forme double  $\varphi$  la forme différentielle  $\langle \varphi, S \rangle$ ; si  $\varphi$  reste dans une partie bornée de  $\mathcal{D}_{X,Y}$ ,  $\langle \varphi, S \rangle$  reste dans une partie bornée de  $\mathcal{D}_Y$ ; alors, si  $T$  est un courant dans  $Y$ , le produit tensoriel  $S \otimes T$  est le courant double dans  $X \times Y$ , défini par les relations

$$\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \langle \varphi, S \rangle, T \rangle = \langle \langle \varphi, T \rangle, S \rangle;$$

les produits tensoriels ainsi définis vérifient la relation

$$i_X(\alpha) \otimes i_Y(\beta) = i_{X,Y}(\alpha \otimes \beta).$$

Nous les utiliserons pour définir les applications

$$\bar{\otimes} : \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \rightarrow \mathcal{E}_{X \times Y}, \quad \bar{\otimes} : \mathcal{D}'_X \times \mathcal{D}'_Y \rightarrow \mathcal{D}'_{X \times Y}$$

à l'aide des relations

$$\alpha \bar{\otimes} \beta = \mathcal{A}^{*-1}(\alpha \otimes \beta), \quad S \bar{\otimes} T = (-1)^{n(n-q)} \mathcal{A}(S \otimes T)$$

lorsque  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ . La relation

$$i_X(\alpha) \bar{\otimes} i_Y(\beta) = i_{X \times Y}(\alpha \bar{\otimes} \beta)$$

nous permet d'énoncer et de démontrer les propriétés de l'opération  $\bar{\otimes}$  seulement pour les courants (et non pour les formes différentielles) <sup>(1)</sup>.

PROPRIÉTÉ 2. 1. —  $b(S \bar{\otimes} T) = bS \bar{\otimes} \omega T + S \bar{\otimes} bT$   
 et  $d(S \bar{\otimes} T) = dS \bar{\otimes} T + \omega S \bar{\otimes} dT.$

<sup>(1)</sup> C'est le courant  $S \bar{\otimes} T$  que nous avons appelé « produit tensoriel » des courants  $S$  et  $T$ , dans [9], en 1954; en 1955 est paru le livre de G. de Rham [16], dont nous adoptons maintenant les notations.

En effet, compte-tenu de la définition de l'opération  $\bar{\otimes}$  et de la relation (v) de 1, on a

$$\begin{aligned} b(S \bar{\otimes} T) &= (-1)^{p(n-q)} b_* b(S \otimes T) \\ &= (-1)^{p(n-q)} b_*(b_X + \omega_X^* b_Y)(S \otimes T) \\ &= (-1)^{p(n-q)} b_*(bS \otimes T + \omega^* S \otimes bT) \\ &= bS \bar{\otimes} \omega T + S \bar{\otimes} bT \end{aligned}$$

lorsque S et T ont les dimensions respectives p et q. La seconde relation se déduit de la première à l'aide de la relation  $d = \omega b$ .

PROPRIÉTÉ 2. 2. — Si  $\alpha$  et T sont homogènes de degrés respectifs p et q, on a

$$(S \wedge \alpha) \bar{\otimes} (T \wedge \beta) = (-1)^{pq} (S \bar{\otimes} T) \wedge (\alpha \bar{\otimes} \beta).$$

En effet, si S et  $\beta$  sont homogènes de degrés respectifs  $p'$  et  $q'$ , on obtient, compte-tenu des définitions de  $\otimes$  et  $\bar{\otimes}$ , et de la relation (ii) de 1,

$$\begin{aligned} (S \wedge \alpha) \bar{\otimes} (T \wedge \beta) &= (-1)^{(m-p-p')(q+q')} b_*((S \wedge \alpha) \otimes (T \wedge \beta)) \\ &= (-1)^{(m-p-p')(q+q')} b_*((S \otimes T) \wedge (\alpha \otimes \beta)) \\ &= (-1)^{(m-p-p')q} b_*(S \otimes T) \wedge b^{*-1}(\alpha \otimes \beta) \\ &= (-1)^{pq} (S \bar{\otimes} T) \wedge (\alpha \bar{\otimes} \beta). \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2. 3. — En désignant par  $P_{X \times Y}$  (resp.  $Q_{X \times Y}$ ) la projection canonique du produit  $X \times Y$  sur X (resp. Y), on a la relation

$$\alpha \bar{\otimes} \beta = P_{X \times Y}^*(\alpha) \wedge Q_{X \times Y}^*(\beta);$$

en particulier, en désignant par  $1_X$  (resp.  $1_Y$ ) la fonction égale à 1 dans X (resp. Y), on a

$$1_X \bar{\otimes} \beta = Q_{X \times Y}^*(\beta), \quad \alpha \bar{\otimes} 1_Y = P_{X \times Y}^*(\alpha).$$

Le premier cas particulier est démontré par G. de Rham ([16], p. 62) sous la forme

$$b^* Q_{X \times Y}^*(\beta) = 1_X \otimes \beta;$$

le second est analogue; enfin, la formule générale résulte de ces cas particuliers et de la propriété 2. 2; en effet on a

$$\begin{aligned} \alpha \bar{\otimes} \beta &= (\alpha \wedge 1_X) \bar{\otimes} (1_Y \wedge \beta) = (\alpha \bar{\otimes} 1_Y) \wedge (1_X \bar{\otimes} \beta) \\ &= P_{X \times Y}^*(\alpha) \wedge Q_{X \times Y}^*(\beta), \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si  $\varphi$  est une forme différentielle, appartenant à  $\mathcal{E}_{X, Y}$ , dont le support  $\sigma(\varphi)$  coupe le support  $\sigma(S \otimes T)$  de  $S \otimes T$  suivant un compact, nous définissons le symbole  $\langle \varphi, S \otimes T \rangle$  par la relation

$$\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \mathcal{A}^{*-1}(\varphi), \mathcal{A}(S \otimes T) \rangle;$$

cette définition est cohérente, se ramenant à celle donnée par G. de Rham lorsque  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{D}_{X, Y}$ ; en effet, on a alors

$$\langle \mathcal{A}^{*-1}(\varphi), \mathcal{A}(S \otimes T) \rangle = \langle \mathcal{A}^* \mathcal{A}^{*-1}(\varphi), S \otimes T \rangle = \langle \varphi, S \otimes T \rangle$$

en vertu de propriétés rappelées en 1; indiquons deux propriétés de  $\langle \varphi, S \otimes T \rangle$ .

**PROPRIÉTÉ 2. 4.** — *Si le support  $\sigma(S \otimes T)$  possède un voisinage fermé  $E$  tel que  $E \cap \sigma(\varphi)$  soit compact, alors on a*

$$\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \langle \varphi, S \rangle, T \rangle = \langle \langle \varphi, T \rangle, S \rangle.$$

Soit  $\lambda$  une fonction indéfiniment différentiable dans  $X \times Y$ , égale à 1 au voisinage de  $\sigma(S \otimes T)$ , nulle à l'extérieur de  $E$ ; alors on a

$$\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \lambda \varphi, S \otimes T \rangle;$$

$\langle \varphi, S \rangle$  et  $\langle \lambda \varphi, S \rangle$  sont égaux au voisinage de  $\sigma(T)$ , donc on a

$$\langle \langle \varphi, S \rangle, T \rangle = \langle \langle \lambda \varphi, S \rangle, T \rangle$$

et de même

$$\langle \langle \varphi, T \rangle, S \rangle = \langle \langle \lambda \varphi, T \rangle, S \rangle;$$

comme  $\lambda \varphi$  est à support compact, on a

$$\langle \lambda \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \langle \lambda \varphi, S \rangle, T \rangle = \langle \langle \lambda \varphi, T \rangle, S \rangle$$

et on obtient la relation annoncée.

**PROPRIÉTÉ 2. 5.** — *Si  $\varphi$  est une forme différentielle, appartenant à  $\mathcal{E}_{X, Y}$ , telle que  $\sigma(\varphi) \cap \sigma(S \otimes T)$  soit compact, on a*

$$\langle d_X \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \varphi, bS \otimes T \rangle$$

et

$$\langle d_Y \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \varphi, S \otimes bT \rangle.$$

En effet, soit  $\lambda$  une fonction, égale à 1 au voisinage de  $\sigma(\varphi) \cap \sigma(S \otimes T)$ , et appartenant à  $\mathcal{D}_{X,Y}$ ; on a alors

$$\begin{aligned} \langle d_X \varphi, S \otimes T \rangle &= \langle \lambda d_X \varphi, S \otimes T \rangle = \langle d_X(\lambda \varphi), S \otimes T \rangle \\ &= \langle \langle d_X(\lambda \varphi), S \rangle, T \rangle = \langle \langle \lambda \varphi, bS \rangle, T \rangle \\ &= \langle \lambda \varphi, bS \otimes T \rangle = \langle \varphi, bS \otimes T \rangle; \end{aligned}$$

la seconde relation se démontre de manière analogue.

Introduisons maintenant quelques intégrales qui seront utilisées dans la suite de ce chapitre.

**DÉFINITION.** — Si  $T$  est un courant dans  $X \times Y$ , tel que  $\sigma(T) \cap (X \times K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ , nous définissons l'intégrale

$$\int_X T$$

par la relation

$$\int_X T = \int_X \mathcal{A}^{-1}(T).$$

**PROPRIÉTÉ 2. 6.** — Sous les hypothèses que l'on vient d'indiquer, on a la relation

$$\int T = Q_{X \times Y}(T).$$

En effet, cette relation équivaut à l'égalité, établie par G. de Rham ([16], p. 62):

$$\int_X \mathcal{A}^{-1}(T) = Q_{X \times Y}(T).$$

Si  $T$  est un courant appartenant à  $\mathcal{D}'_{X \times Y}$ , et  $\gamma$  une forme différentielle appartenant à  $\mathcal{E}_{X \times Y}$ , tels que

$$\sigma(T) \cap \sigma(\gamma) \cap (X \times K)$$

soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ , alors l'intégrale

$$\int_X T \wedge \gamma$$

est définie par ce qui précède. Plus généralement, soient  $U$  et  $V$  deux courants dans  $X \times Y$ , tels que  $\mathcal{A}^{-1}(U)$  (resp.  $\mathcal{A}^{-1}(V)$ ) soit une forme différentielle dans  $Y$  (resp.  $X$ ), à coefficients dans  $\mathcal{D}'_X$  (resp.  $\mathcal{D}'_Y$ ), et que  $\sigma(U) \cap \sigma(V) \cap (X \times K)$  soit compact

pour tout compact  $K$  de  $Y$ ; alors le produit  $U \wedge V$  est défini, et l'intégrale

$$\int_X U \wedge V$$

est définie par ce qui précède; considérons le cas où  $U = S \otimes 1_Y$ ,  $S$  appartenant à  $\mathcal{D}'_X$ .

**PROPRIÉTÉ 2. 7.** — Soient  $S$  un courant homogène de degré  $p$  dans  $X$ , et  $V$  un courant homogène de degré  $q$  dans  $X \times Y$ , tels que  $\mathcal{A}^{-1}(V)$  soit une forme différentielle dans  $X$ , à coefficients dans  $\mathcal{D}'_Y$ , et que  $(\sigma(S) \times K) \cap \sigma(V)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ . Alors on a la relation

$$\langle \varphi, \int_X (S \otimes 1_Y) \wedge V \rangle = (-1)^{pq} \langle S \otimes \varphi, V \rangle$$

pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}'_Y$ .

La définition de l'intégrale résulte de ce qui précède; alors on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \int_X (S \otimes 1_Y) \wedge V \rangle &= \langle \varphi, \int_X \mathcal{A}^{-1}((S \otimes 1_Y) \wedge V) \rangle \\ &= \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}((S \otimes 1_Y) \wedge V) \rangle \\ &= \langle 1_X \otimes \varphi, (-1)^{pq} \mathcal{A}^{-1}(V \wedge (S \otimes 1_Y)) \rangle. \end{aligned}$$

Compte-tenu des relations (i) et (iii) de 1, on obtient alors pour cette expression :

$$\begin{aligned} (-1)^{pq} \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \wedge \mathcal{A}^{-1}(S \otimes 1_Y) \rangle &= (-1)^{pq} \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \wedge (S \otimes 1_Y) \rangle \\ &= (-1)^{pq} \langle (1_X \otimes \varphi) \wedge (S \otimes 1_Y), \mathcal{A}^{-1}(V) \rangle \\ &= (-1)^{pq} \langle S \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \rangle \\ &= (-1)^{pq} \langle \mathcal{A}^{*-1}(S \otimes \varphi), V \rangle \\ &= (-1)^{pq} \langle S \otimes \varphi, V \rangle. \end{aligned}$$

*Convention.* — Sous les hypothèses de la propriété 2. 7, nous définirons le symbole  $\langle V, S \rangle$  par la relation

$$\langle V, S \rangle = \int_X (S \otimes 1_Y) \wedge V.$$

### 3. Généralités sur la convolution de première espèce.

Nous définirons une première notion de convolution pour les courants, généralisant une expression, indiquée par L. Schwartz ([17], tome II, p. 12), du produit de convolution des distributions. Dans l'énoncé des propriétés de la convolu-

tion, interviendront des courants particuliers que nous allons définir. Soit  $X$  une variété, de dimension  $m$ ; pour tout point  $x \in X$ , la relation

$$\langle \varphi, \delta_x \rangle = \varphi(x)$$

pour toute fonction continue  $\varphi$  dans  $X$ , définit un courant  $\delta_x$ , homogène de degré  $m$ , ayant le point  $x$  pour support. Plus généralement, si  $\nu$  est un élément de l'algèbre extérieure de l'espace des vecteurs tangents à  $X$  en  $x$ , la relation

$$\langle \varphi, \delta_\nu \rangle = \langle \nu, \varphi(x) \rangle$$

pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{E}_x$  définit un courant  $\delta_\nu$ ; dans cette relation,  $\varphi(x)$  désigne la valeur au point  $x$  de la forme différentielle  $\varphi$ , i.e. un élément de l'algèbre extérieure duale de la précédente, et la dualité exprimée au second membre est celle qui existe entre ces deux algèbres; si  $\nu$  est un  $p$ -vecteur,  $\delta_\nu$  est un courant homogène de dimension  $p$ , ayant pour support le point  $x$ . Enfin, si  $\nu$  est un vecteur tangent à  $X$  en  $x$ , la relation

$$\langle \varphi, \delta^{(\nu)} \rangle = \langle \varphi, \nu \rangle$$

pour toute fonction différentiable  $\varphi$  dans  $X$ , définit un courant  $\delta^{(\nu)}$ , homogène de degré  $m$ , ayant le point  $x$  pour support; dans cette relation,  $\langle \varphi, \nu \rangle$  désigne la valeur prise, sur le germe de fonction déterminé en  $x$  par  $\varphi$ , par la forme linéaire que définit le vecteur  $\nu$ <sup>(2)</sup>.

Jusqu'à la fin du chapitre I,  $X, Y, Z$  seront des variétés, de dimensions respectives  $m, n, l$ ;  $f$ , une application (indéfiniment différentiable, conformément à la convention faite au début du chapitre) de  $X \times Y$  dans  $Z$ ; pour tout  $x \in X$  (resp.  $y \in Y$ ),  $f_x$  (resp.  $f_y$ ) l'application de  $Y$  (resp.  $X$ ) dans  $Z$  définie par  $f_x(y) = f(x, y)$  (resp.  $f_y(x) = f(x, y)$ );  $g$ , l'application de  $X \times Y$  dans  $X \times Z$ , définie par  $g(x, y) = (x, f(x, y))$ ; on a donc

$$P_{X \times Z} \circ g = P_{X \times Y} \quad \text{et} \quad Q_{X \times Z} \circ g = f.$$

On désignera par  $\mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$  la partie de  $\mathcal{D}'_X \times \mathcal{D}'_Y$  constituée par les couples  $(S, T)$  tels que  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ .

<sup>(2)</sup>  $\delta^{(\nu)}$  est donc la dérivée de  $\delta_x$  relativement au vecteur  $\nu$ .

**DÉFINITION.** — On appellera *convolution de première espèce associée à  $f$* , l'application de  $\mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$  dans  $\mathcal{D}'_Z$ , définie par

$$(S, T) \rightarrow S \times_f T = f(S \otimes T).$$

L'indice  $f$  sera supprimé lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

**PROPRIÉTÉ 3. 1.** — Si  $S$  et  $T$  sont homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ ,  $S \times_f T$  est un courant homogène de dimension  $p + q$ .

**PROPRIÉTÉ 3. 2.** — Si  $x$  est un point de  $X$ , et si  $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors on a

$$\delta_x \times_f T = f_x(T).$$

En vertu de la définition de la convolution, on a en effet

$$\delta_x \times T = f(\delta_x \otimes T) = f(\mathcal{L}(\delta_x \otimes T));$$

il en résulte, pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ ,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \delta_x \times T \rangle &= \langle \mathcal{L}f^*(\varphi), \delta_x \otimes T \rangle = \langle \langle \mathcal{L}f^*(\varphi), \delta_x \rangle, T \rangle \\ &= \langle f_x^*(\varphi), T \rangle = \langle \varphi, f_x(T) \rangle. \end{aligned}$$

**PROPRIÉTÉ 3. 3.** — Si  $\nu$  est un vecteur tangent au point  $x_0$  de  $X$ , et si  $\sigma(T) \cap f_{x_0}^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors on a

$$\delta^{(\nu)} \times_f T = \langle f_x(T), \nu \rangle$$

où le second membre désigne la valeur prise par la forme linéaire que définit le vecteur  $\nu$ , sur la fonction  $f_x(T)$ , définie dans  $X$  au voisinage de  $x_0$ , et à valeurs dans  $\mathcal{D}'_Z$ .

Tout crochet dans lequel  $\nu$  opère conservant la signification qui vient d'être indiquée, et tout autre crochet exprimant la dualité entre formes différentielles et courants, on a, pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ ,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \delta^{(\nu)} \times T \rangle &= \langle \langle \mathcal{L}f^*(\varphi), T \rangle, \nu \rangle = \langle \langle f_x^*(\varphi), T \rangle, \nu \rangle \\ &= \langle \langle \varphi, f_x(T) \rangle, \nu \rangle = \langle \varphi, \langle f_x(T), \nu \rangle \rangle, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**PROPRIÉTÉ 3. 4.** — Si  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\begin{aligned} b(S \times T) &= bS \times \omega T + S \times bT \\ \text{et} \quad d(S \times T) &= (-1)^{m+n+1}(dS \times T + \omega S \times dT); \end{aligned}$$



si, en particulier,  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$  vérifiant  $p + q = l + 1$ , on a

$$bS \times \omega T = -S \times bT \quad \text{et} \quad dS \times T = -\omega S \times dT.$$

En effet, compte-tenu de la relation  $bf = fb$  et de la première relation de la propriété 2. 1, on a

$$\begin{aligned} b(S \times T) &= bf(S \otimes T) = fb(S \otimes T) \\ &= f(bS \otimes \omega T + S \otimes bT) = bS \times \omega T + S \times bT; \end{aligned}$$

la seconde relation se déduit de la première à l'aide de la relation  $d = \omega b$ ; la fin de la proposition résulte de ce que, si  $p + q = l + 1$ ,  $S \times T$  est nul, ayant une dimension plus grande que  $l$ .

REMARQUE. — Sous la forme

$$b(S \times T) - S \times bT = bS \times \omega T,$$

la première relation ci-dessus généralise la formule d'homotopie pour les courants ([16], relation (3), p. 68).

PROPRIÉTÉ 3. 5. — *La convolution de première espèce est une opération bilinéaire; si  $S, S'$  sont des courants dans  $X$  et  $T$  un courant dans  $Y$ , tels que  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  et  $\sigma(S' \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  soient compacts pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors, pour tous nombres complexes  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on a*

$$(\lambda S + \lambda' S') \times T = \lambda(S \times T) + \lambda'(S' \times T).$$

Les hypothèses entraînent l'existence de  $S \times T$  et de  $S' \times T$ ; de plus on a

$$\sigma((\lambda S + \lambda' S') \otimes T) \subset (\sigma(S) \cup \sigma(S')) \times \sigma(T) = \sigma(S \otimes T) \cup \sigma(S' \otimes T);$$

il en résulte que  $\sigma((\lambda S + \lambda' S') \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , et que  $(\lambda S + \lambda' S') \times T$  est défini; la propriété est alors immédiate.

PROPRIÉTÉ 3. 6. — *La convolution de première espèce est continue au sens suivant: si  $S_i$  (resp.  $T_i$ ) tend vers  $S$  (resp.  $T$ ) dans  $\mathcal{D}'_X$  (resp.  $\mathcal{D}'_Y$ ), les supports de  $S_i$  (resp.  $T_i$ ) et de  $S$  (resp.  $T$ ) étant contenus dans un ensemble fermé  $A$  (resp.  $B$ ) de  $X$  (resp.  $Y$ ), de telle sorte que  $(A \times B) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors  $S_i \times T_i$  tend vers  $S \times T$  dans  $\mathcal{D}'_Z$ .*

Cette propriété résulte immédiatement du lemme suivant :

LEMME 3. 1. — Soit  $h$  une application d'une variété  $X$  dans une variété  $Y$ ; si des courants  $T_i$  convergent vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'_X$ , les supports de  $T_i$  et de  $T$  étant contenus dans un ensemble fermé  $E$  tel que  $E \cap h^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ , alors  $h(T_i)$  converge vers  $h(T)$  dans  $\mathcal{D}'_Y$ .

Pour démontrer ce lemme, considérons une partie bornée  $B$  de  $\mathcal{D}_X$ ; c'est un ensemble de formes différentielles dont les supports sont contenus dans un compact  $K$ ; soit  $V$  un voisinage compact, dans  $X$ , du compact  $E \cap h^{-1}(K)$ ; soit  $\lambda$  une fonction indéfiniment différentiable dans  $X$ , égale à 1 au voisinage de  $E \cap h^{-1}(K)$ , nulle à l'extérieur de  $V$ ; soit  $\tilde{h}(B)$  l'ensemble des formes  $\tilde{h}(\varphi) = \lambda \cdot h^*(\varphi)$  lorsque  $\varphi$  décrit  $B$ ;  $\tilde{h}(B)$  est borné dans  $\mathcal{D}_X$ ; les hypothèses entraînent l'existence des images  $h(T_i)$ , et l'on a

$$\langle \varphi, h(T_i) \rangle = \langle h^*(\varphi), T_i \rangle = \langle \tilde{h}(\varphi), T_i \rangle$$

pour  $\varphi \in B$ ; si  $T_i$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'_X$ ,  $\langle \tilde{h}(\varphi), T_i \rangle$  tend vers  $\langle \tilde{h}(\varphi), T \rangle$  uniformément sur  $\tilde{h}(B)$ ; donc  $\langle \varphi, h(T_i) \rangle$  tend vers  $\langle \varphi, h(T) \rangle$  uniformément sur  $B$ , et  $h(T_i)$  converge vers  $h(T)$  dans  $\mathcal{D}'_Y$ , q.e.d.

Les énoncés suivants fourniront des *expressions intégrales de la convolution de première espèce*, utilisant les intégrales utilisées à la fin de 2.

PROPOSITION 3. 1. — Si  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ ,  $S \times_f T$  et  $S \times_g T$  sont définis; si, de plus, l'ensemble

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact dans  $X \times Z$  pour tout compact  $K$  de  $Z$  (ce qui est réalisé en particulier si  $\sigma(S)$  est compact), alors on a

$$S \times_f T = \int_X S \times_g T.$$

On sait que la première hypothèse de compacité assure la définition de  $S \times_f T$ ; pour que  $S \times_g T$  soit défini, il suffit que  $\sigma(S \otimes T) \cap g^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $X \times Z$ ; or, si  $A$  et  $B$  désignent les projections de ce compact

$K$  dans  $X$  et  $Z$  respectivement,  $A$  et  $B$  sont compacts et vérifient  $K \subset A \times B$ ; donc a on  $g^{-1}(K) \subset (A \times Y) \cap f^{-1}(B)$  et  $\sigma(S \otimes T) \cap g^{-1}(K) \subset (\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap (A \times Y) \cap f^{-1}(B)$   
 $= ((A \cap \sigma(S)) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$ ;

l'hypothèse faite assure la compacité de cet ensemble quels que soient  $A$  et  $B$  compacts dans  $X$  et  $Z$  respectivement, donc aussi la définition de  $S \times_g T$ .

Alors on a

$$\sigma(S \times_g T) = \sigma(g(S \otimes T)) \subset g(\sigma(S) \times \sigma(T)) = \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times f_x(\sigma(T))$$

et, pour tout compact  $K$  de  $Z$ ,

$$\sigma(S \times_g T) \cap (X \times K) \subset \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T))) \subset \sigma(S) \times K;$$

en vertu de la seconde hypothèse de compacité, l'image  $Q_{X \times Z}(S \times_g T)$  de  $S \times_g T$  par la projection  $Q_{X \times Z}$  de  $X \times Z$  sur  $Z$  est définie, et, compte-tenu de la définition d'intégrales à la fin de 2, on a

$$S \times_f T = f(S \otimes T) = Q_{X \times Z}(g(S \otimes T)) = Q_{X \times Z}(S \times_g T) = \int_X S \times_g T.$$

**THÉORÈME 3. 1.** — *Si  $(A \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$  est compact pour tous compacts  $A$  et  $B$  de  $X$  et  $Z$  respectivement,  $1_X \times_g T$  et  $S \times_g T$  sont définis, et l'on a*

$$S \times_g T = (\omega^{n+l} S \otimes 1_Z) \wedge (1_X \times_g T).$$

*Si, de plus,  $(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$  et  $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (B \cap f_x(\sigma(T)))$  sont compacts pour tout compact  $B$  de  $Z$  (ce qui est réalisé, en particulier, si  $\sigma(S)$  est compact), alors  $S \times_f T$  est défini, et l'on a*

$$S \times_f T = \int_X (\omega^{n+l} S \otimes 1_Z) \wedge (1_X \times_g T) = \langle 1_X \times_g T, \omega^{n+l} S \rangle.$$

On a vu, au cours de la démonstration de la proposition 3. 1, que  $S \times_g T$  est défini si  $((A \cap \sigma(S)) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$  est compact pour tous compacts  $A$  et  $B$  de  $X$  et  $Z$  respectivement; donc la première hypothèse de compacité assure la définition de  $1_X \times_g T$  et de  $S \times_g T$ . Supposons d'abord  $S = i_X(\alpha)$ ,  $\alpha$  étant une forme différentielle qui appartient à  $\mathcal{E}_X$ ; alors nous avons

$$i_X(\alpha) \otimes T = (\alpha \wedge 1_X) \otimes (1_Y \wedge T) = (\alpha \otimes 1_Y) \wedge (1_X \otimes T)$$

d'après la propriété 2. 2; or la propriété 2. 3 entraîne

$$\alpha \otimes 1_Y = P_{X \times Y}^*(\alpha) = g^*(P_{X \times Z}^*(\alpha)) = g^*(\alpha \otimes 1_Z);$$

nous avons donc

$$i_X(\alpha) \otimes T = g^*(\alpha \otimes 1_Z) \wedge (1_X \otimes T)$$

et, en vertu du lemme 3. 2 qui sera établi ci-dessous,

$$g(i_X(\alpha) \otimes T) = (\varpi^{n+l}(\alpha \otimes 1_Z)) \wedge g(1_X \otimes T).$$

Soit maintenant  $\alpha_i$  une suite de formes différentielles, appartenant à  $\mathcal{E}_X$ , telles que  $i_X(\alpha_i)$  converge vers  $S$  dans  $\mathcal{D}'_X$ ; les supports des courants  $S \otimes T$  et  $i_X(\alpha_i) \otimes T$  sont contenus dans  $X \times \sigma(T)$  et la première hypothèse de compacité entraîne que  $(X \times \sigma(T)) \cap g^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $X \times Z$ ; alors  $(\varpi^{n+l}(\alpha_i \otimes 1_Z)) \wedge g(1_X \otimes T)$  converge vers  $(\varpi^{n+l}(S \otimes 1_Z)) \wedge g(1_X \otimes T)$  dans  $\mathcal{D}'_Z$ , et, en vertu du lemme 3. 1,  $g(i_X(\alpha_i) \otimes T)$  converge vers  $g(S \otimes T)$  dans  $\mathcal{D}'_Z$ . On a donc

$$g(S \otimes T) = (\varpi^{n+l}(S \otimes 1_Z)) \wedge g(1_X \otimes T)$$

soit

$$S \times_g T = (\varpi^{n+l}S \otimes 1_Z) \wedge (1_X \times_g T).$$

La seconde hypothèse de compacité entraîne la définition de  $S \times_g T$ , et la seconde relation à démontrer résulte immédiatement de la première relation (qui vient d'être établie), de la proposition 3. 1 et de la propriété 2. 7, compte-tenu de la seconde hypothèse de compacité.

**LEMME 3. 2.** — *Soit  $h$  une application d'une variété  $X$  dans une variété  $Y$ ; si  $\alpha$  est une forme différentielle appartenant à  $\mathcal{E}_X$ , et si  $T$  est un courant dans  $X$  tel que  $\sigma(T) \cap h^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Y$ , on a*

$$g(T \wedge g^*(\alpha)) = g(T) \wedge \alpha,$$

ou encore

$$g(g^*(\alpha) \wedge T) = (\varpi^{m+n}\alpha) \wedge g(T),$$

$m$  et  $n$  étant les dimensions respectives de  $X$  et de  $Y$ .

En effet, pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}'_Y$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, g(T \wedge g^*(\alpha)) \rangle &= \langle g^*(\varphi), T \wedge g^*(\alpha) \rangle = \langle g^*(\alpha) \wedge g^*(\varphi), T \rangle \\ &= \langle g^*(\alpha \wedge \varphi), T \rangle = \langle \alpha \wedge \varphi, g(T) \rangle \\ &= \langle \varphi, g(T) \wedge \alpha \rangle; \end{aligned}$$

la seconde relation se déduit immédiatement de la première.

**COROLLAIRE 3. 1.** — *Sous les hypothèses de la seconde partie du théorème 3. 1, si S et T sont des courants homogènes, de dimensions respectives p et q, on a, pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ ,*

$$\langle \varphi, S \times_f T \rangle = (-1)^{(m-p)(n-q)} \langle S \otimes \varphi, 1_X \times_g T \rangle.$$

En effet, on déduit immédiatement, des propriétés 3. 8 et 2. 7,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \times_f T \rangle &= \left\langle \varphi, \int_X (-1)^{(n+l)(m-p)} (S \otimes 1_Z) \wedge (1_X \times_g T) \right\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(n-q)} \langle S \otimes \varphi, 1_X \times_g T \rangle. \end{aligned}$$

#### 4. Généralités sur la convolution de seconde espèce.

Un certain nombre de propriétés du produit de convolution des distributions n'ont pas été rencontrées au cours de l'étude de la convolution de première espèce des courants; en particulier, la forme linéaire définie par le courant  $S \times_f T$  n'a pu être explicitée de façon simple par le corollaire 3. 1; il est donc nécessaire de définir une *convolution de seconde espèce*, qui vérifiera les propriétés du produit de convolution des distributions, non satisfaites par la convolution de première espèce; notre définition sera posée formellement, à seule fin de permettre la démonstration de ces propriétés. Dans le chapitre II, nous montrerons que les conditions, permettant de poser cette définition, se réalisent de manière naturelle dans l'espace euclidien où l'on obtient alors une notion de convolution liée à la structure de groupe additif de cet espace; cette convolution sera étudiée en détails dans le chapitre II, où nous verrons qu'elle jouit de propriétés tout à fait naturelles.

*Convention.* — Si  $\varphi$  est une forme différentielle dans Z, l'image réciproque  $f_x^*(\varphi)$  (resp.  $f_y^*(\varphi)$ ) de  $\varphi$  par l'application  $f_x$  (resp.  $f_y$ ) de Y (resp. X) dans Z, sera considérée comme une forme double dans  $X \times Y$ , à savoir une fonction dans X (resp. Y) à valeurs dans l'espace des formes différentielles dans Y (resp. X).

**HYPOTHÈSE.** — *On suppose donnée sur  $X \times Y$  une forme double, de degré  $m + n + l$ ,  $\alpha = \sum_s \alpha_s$ , où  $\alpha_s$  est homogène de degré s en X, telle que:*

i.  $d_X \alpha = d_Y \alpha = 0$ ,

ii. Si  $\varphi$  est une forme quelconque, de degré  $p$ , dans  $Z$ , on a la relation

$$f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^s = (-1)^{p(s+p)} f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{s+p}.$$

DÉFINITION. — Alors, pour tout couple d'entiers  $(r, s)$  vérifiant la relation

$$p + r + s = m + n + l,$$

on définit la forme double  $\overset{r,s}{\varphi}$  dans  $X \times Y$ , par la relation

$$\overset{r,s}{\varphi} = f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^s = (-1)^{p(s+p)} f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{s+p}.$$

PROPRIÉTÉ 4. 1. — On a alors :

$$d\overset{r-1,s}{\varphi} = d_x \overset{r,s}{\varphi} = (-1)^{s+p+1} d_Y \overset{r-1,s+1}{\varphi}.$$

En effet, on a

$$\overset{r-1,s}{d\varphi} = f_y^*(d\varphi) \wedge \alpha^s = d_x f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^s = d_x (f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^s) = d_x \overset{r,s}{\varphi}$$

et

$$\begin{aligned} \overset{r-1,s}{d\varphi} &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} f_x^*(d\varphi) \wedge \alpha^{s+p+1} \\ &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} d_Y f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{s+p+1} \\ &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} d_Y (f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{s+p+1}) \\ &= (-1)^{s+p+1} d_Y \overset{r-1,s+1}{\varphi}. \end{aligned}$$

DÉFINITION. — On appellera convolution de seconde espèce, associée au couple  $(f, \alpha)$ , l'application de  $\mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$  dans  $\mathcal{D}'_Z$ ,

$$(S, T) \rightarrow S \widehat{\times}_{f, \alpha} T,$$

définie par la relation

$$\langle \varphi, S \widehat{\times}_{f, \alpha} T \rangle = (-1)^{(m-p)q} \left\langle \overset{n-l+p, m-l+q}{\varphi}, S \otimes T \right\rangle$$

lorsque  $\varphi$  est une forme différentielle appartenant à  $\mathcal{D}_Z$ ,  $S$  et  $T$  des courants homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ .

Les indices  $f$  et  $\alpha$  seront supprimés lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

PROPRIÉTÉ 4. 2. — Si  $S$  et  $T$  sont homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ ,  $S \widehat{\times} T$  est homogène de degré  $p + q$ .

**PROPRIÉTÉ 4. 3.** — Si  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\begin{aligned} b(S \widehat{\times} T) &= bS \widehat{\times} \omega T = S \widehat{\times} bT \\ \text{et} \quad d(S \widehat{\times} T) &= dS \widehat{\times} T = \omega S \widehat{\times} dT. \end{aligned}$$

En effet, si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ , on a, compte-tenu de la définition de  $S \widehat{\times} T$ , de celle de l'opérateur  $b$ , de la propriété 4. 1 et de la propriété 2. 5,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, b(S \widehat{\times} T) \rangle &= (-1)^{(m-p)q} \langle d\varphi, S \widehat{\times} T \rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q} \left\langle d\varphi^{n-l+p, m-l+q}, S \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q} \left\langle d_x^{n-l+p+1, m-l+q} \varphi, S \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q} \left\langle d_x^{n-l+p+1, m-l+q} \varphi, bS \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^q \langle \varphi, bS \widehat{\times} T \rangle \end{aligned}$$

pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ . De même on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, b(S \widehat{\times} T) \rangle &= (-1)^{q(m-p)} \left\langle d\varphi^{n-l+p, m-l+q}, S \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(q+1)} \left\langle d_x^{n-l+p, m-l+q+1} \varphi, S \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(q+1)} \left\langle d_x^{n-l+p, m-l+q+1} \varphi, S \otimes bT \right\rangle \\ &= \langle \varphi, S \widehat{\times} bT \rangle. \end{aligned}$$

pour toute forme  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ . Des relations obtenues, les deux autres se déduisent à l'aide de l'égalité  $d = \omega b$ .

**THÉORÈME 4. 1.** — Si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ , et si  $\sigma(S \otimes T)$  possède un voisinage fermé  $E$  tel que  $E \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= (-1)^{(l-p)(m+l)+q} \left\langle \left\langle \varphi, f_y \left( S \wedge \alpha^{m-l+q} \right) \right\rangle, T \right\rangle \\ &= (-1)^{(l-p)(m+n-l)} \left\langle \left\langle \varphi, f_x \left( \alpha^{m-p} \wedge T \right) \right\rangle, S \right\rangle \end{aligned}$$

pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ . Si, de plus, l'ensemble

$$\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times (K \cap f_y(\sigma(S))) \quad \left( \text{resp.} \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T))) \right)$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\begin{aligned} S \widehat{\times} T &= (-1)^{(l-p)(m+l)+q} \left\langle f_y \left( S \wedge \alpha^{m-l+q} \right), T \right\rangle \\ \left( \text{resp.} S \widehat{\times} T &= (-1)^{(l-p)(m+n-l)} \left\langle f_x \left( \alpha^{m-p} \wedge T \right), S \right\rangle \right). \end{aligned}$$

*Remarque.* — Avant d'aborder la démonstration de ces formules, précisons la signification des termes qu'elles contiennent; par exemple, celle du terme

$$\langle f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}), T \rangle;$$

$S$  étant un courant dans  $X$ ,  $S \wedge \alpha^{m-l+q}$  désigne le courant double  $(S \otimes 1_Y) \wedge \alpha^{m-l+q}$  dans  $X \times Y$ ; c'est donc une forme différentielle dans  $Y$ , à coefficients dans  $\mathcal{D}'_X$ ; par suite  $f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q})$  est une forme différentielle dans  $Y$ , à coefficients dans  $\mathcal{D}'_Z$ , définie au voisinage de  $\sigma(T)$ , et  $\langle f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}), T \rangle$  est un courant dans  $Z$ , compte tenu de la propriété 2. 7 et de la convention qui lui fait suite; le terme  $\langle f_x(\alpha^p \wedge T), S \rangle$  s'explique de manière analogue.

*Démonstration.* — Pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}_Z$ , on a, compte-tenu des définitions de  $S \widehat{\times} T$  et de  $S \otimes T$ ,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= (-1)^{q(m-p)} \langle \alpha^{n-l+p, m-l+q} \varphi, S \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{q(m-p)} \langle f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^{m-l+q}, S \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{q(m-p) + (l-p-q)(m-l+q)} \langle \alpha^{m-l+q} \wedge f_y^*(\varphi), S \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{(l-p)(m+l)+q} \langle \alpha^{m-l+q} \wedge f_y^*(\varphi), S \rangle, T \rangle. \end{aligned}$$

Or la définition de l'image d'un courant permet d'écrire

$$\langle \alpha^{m-l+q} \wedge f_y^*(\varphi), S \rangle = \langle f_y^*(\varphi), S \wedge \alpha^{m-l+q} \rangle = \langle \varphi, f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}) \rangle$$

quand  $y$  se trouve au voisinage de  $\sigma(T)$ ; on en déduit

$$\langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle = (-1)^{(l-p)(m+l)+q} \langle \langle \varphi, f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}) \rangle, T \rangle.$$

Si  $\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times (K \cap f_y(\sigma(S)))$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors

$$\langle f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}), T \rangle$$

est défini par la convention qui suit la propriété 2. 7, et l'on a

$$\langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle = (-1)^{(l-p)(m+l)+q} \langle \varphi, \langle f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}), T \rangle \rangle$$



soit

$$S \widehat{\times} T = \langle f_y(S \wedge \alpha^{m-l+q}), T \rangle.$$

De la même manière on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)\chi^{m-p}} \langle f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{m-p}, S \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)\chi^{m+n-l}} \langle \alpha^{m-p} \wedge f_x^*(\varphi), S \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)\chi^{m+n-l}} \langle \alpha^{m-p} \wedge f_x^*(\varphi), T \rangle, S \rangle, \end{aligned}$$

avec

$$\langle \alpha^{m-p} \wedge f_x^*(\varphi), T \rangle = \langle f_x^*(\varphi), T \wedge \alpha^{m-p} \rangle = \langle \varphi, f_x(T \wedge \alpha^{m-p}) \rangle$$

quand  $x$  est voisin de  $\sigma(S)$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)\chi^{m+n-l}} \langle \langle \varphi, f_x(T \wedge \alpha^{m-p}) \rangle, S \rangle \\ &= (-1)^{(l-p)\chi^{m+n-l}} \langle \langle \varphi, f_x(\alpha^{m-p} \wedge T) \rangle, S \rangle. \end{aligned}$$

Si

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle = (-1)^{(l-p)\chi^{m+n-l}} \langle \varphi, \langle f_x(\alpha^{m-p} \wedge T), S \rangle \rangle$$

soit

$$S \widehat{\times} T = (-1)^{(l-p)\chi^{m+n-l}} \langle f_x(\alpha^{m-p} \wedge T), S \rangle.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1

## CHAPITRE II

### CONVOLUTION DES COURANTS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

5. Convolution et convolution adjointe pour les variétés riemanniennes.

Lorsque les convolutions de première et de seconde espèce sont définies de telle sorte que certaines relations existent entre elles, chacune d'elles s'enrichit de propriétés nouvelles. Nous introduirons maintenant, par hypothèse, de telles relations dans le cas où les variétés considérées sont munies de métriques riemanniennes, et nous démontrerons les propriétés qui en résultent; dans les paragraphes suivants, nous montrerons que les hypothèses de ce paragraphe se réalisent de façon naturelle dans le cas de l'espace euclidien, et nous étudierons spécialement la convolution dans l'espace euclidien. Rappelons d'abord quelques notions relatives aux *variétés riemanniennes*.

Une variété  $X$ , de dimension  $m$ , est dite *riemannienne* si elle est munie d'un tenseur covariant symétrique indéfiniment différentiable  $g_{ij}$  tel que la forme quadratique

$$ds^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} g_{ij} dx^i dx^j$$

soit partout définie positive; on adoptera toujours (sauf indication du contraire) la convention habituelle de sommation par rapport aux indices répétés, ainsi que les conventions relatives à la montée ou à la descente des indices; par exemple

$$\begin{aligned} g^{ik} g_{kj} &= g^i_j, & a_{i_1 \dots i_p} &= g_{i_1 k_1} \dots g_{i_p k_p} a^{k_1 \dots k_p}, & a^{i_1 \dots i_p} &= g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} a_{k_1 \dots k_p}, \\ g_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p} &= \det (g_{i_\mu, j_\nu})_{\substack{1 \leq \mu \leq p \\ 1 \leq \nu \leq p}}, & g^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} &= g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} g_{k_1 \dots k_p}, & k_1 \dots k_p & \\ e_{1 \dots m} &= \sqrt{g_{1 \dots m, 1 \dots m}}, & e_{i_1 \dots i_m} &= g_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \cdot e_{1 \dots m}. \end{aligned}$$

A la forme différentielle extérieure

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

on associe la *forme adjointe*

$$*\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_{m-p}} (*\alpha)_{j_1 \dots j_{m-p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-p}}$$

$$\text{où } (*\alpha)_{j_1 \dots j_{m-p}} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} e_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{m-p}} \alpha^{i_1 \dots i_p};$$

l'adjoint  $*T$  d'un courant  $T$  est alors défini par la relation

$$\langle \varphi, *T \rangle = \langle \bar{\omega}(*\varphi), T \rangle \quad \text{avec} \quad \bar{\omega} = \omega^{m+1},$$

pour toute forme différentielle  $\varphi \in \mathcal{D}_X$ , de sorte que l'on a

$$*i_X(\alpha) = i_X(*\alpha)$$

pour toute forme différentielle localement sommable  $\alpha$ ; l'opération ainsi définie vérifie les *propriétés* suivantes :

- (i)  $** = \bar{\omega}$ ,  $*\bar{\omega} = \bar{\omega}*$ ,
- (ii)  $\omega^* = *\omega *^{-1} = *^{-1}\omega*$ ,  $\omega^{**} = *\omega$ ,  $*\omega^* = \omega*$ ,
- (iii) si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux formes différentielles dans  $X$ ,  $\alpha \wedge *\beta$  et  $\beta \wedge *\alpha$  ont la même composante homogène de degré  $m$ .

La notion d'adjoint permet de définir l'opérateur différentiel

$$\delta = *^{-1}d*\omega = \bar{\omega}*d*\omega$$

qui vérifie les relations

$$*\delta d = d\delta*, \quad \delta d* = *\delta d.$$

Nous introduirons maintenant les hypothèses supplémentaires annoncées, relativement à la définition des convolutions de première et de seconde espèce.

**HYPOTHÈSES.** — *Nous supposons que  $X, Y, Z$  sont des variétés riemanniennes, et que les données  $f$  et  $\alpha$ , qui permettent la définition des convolutions de première et de seconde espèce, sont telles que l'on ait les relations équivalentes :*

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad & *(S \times T) = (-1)^{p(n-q)} * S \bar{\times} * T, \\ \text{(v)} \quad & *(S \bar{\times} T) = (-1)^{q(m-p)} * S \times * T \end{aligned}$$

pour tous les courants  $S, T$ , homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ , vérifiant  $(S, T) \in \mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$ .

Ces hypothèses étant supposées réalisées, les convolutions de première et de seconde espèce seront appelées respectivement *convolution* et *convolution adjointe*. Nous démontrerons maintenant les propriétés suivantes, qui résultent des hypothèses ci-dessus.

a) *Propriétés de la convolution.*

PROPRIÉTÉ 5. 1. — Si  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\delta(S \times T) = (-1)^{m+n+l} \delta S \times T = (-1)^{m+n+l} \omega S \times \delta T$$

En effet, la relation (iv) inscrite dans les hypothèses ci-dessus s'écrit, si  $S$  et  $T$  sont homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ :

$$* \omega(S \times T) = (-1)^{m+n+l+p(n-q)} (* \omega S) \widehat{\times} (* \omega T);$$

calculons la différentielle extérieure de chaque membre, en utilisant la seconde relation de la propriété 4. 2 :

$$\begin{aligned} d * \omega(S \times T) &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)} (d * \omega S) \widehat{\times} (* \omega T) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)} (\omega * \omega S) \widehat{\times} (d * \omega T); \end{aligned}$$

prenons alors l'inverse de l'adjoint de chaque membre, en tenant compte des définitions et propriétés précédemment rappelées; nous obtenons :

$$\begin{aligned} *^{-1} d * \omega(S \times T) &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)} *^{-1} ((*^{-1} d * \omega S) \widehat{\times} (* \omega T)) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)} *^{-1} ((* \omega * \omega S) \widehat{\times} (*^{-1} d * \omega T)) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \delta(S \times T) &= (-1)^{m+n+l+(p-1)(n-q)} *^{-1} ((* \delta S) \widehat{\times} (* T)) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q+1)} *^{-1} ((* \omega S) \widehat{\times} (* \delta T)) \end{aligned}$$

soit enfin

$$\delta(S \times T) = (-1)^{m+n+l} \delta S \times T = (-1)^{m+n+l} \omega S \times \delta T.$$

PROPRIÉTÉ 5. 2. — Si  $x$  est un point de  $X$ , et si  $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\delta \delta_x \times T = (-1)^{m+n+l} \delta(\delta_x \times T) = (-1)^m \delta_x \times \delta T.$$

En effet, de la propriété 5. 1 résulte la relation

$$\delta \delta_x \times T = (-1)^{m+n+l} \delta(\delta_x \times T) = (-1)^m \delta_x \times \delta T;$$

la propriété 5. 2 résulte alors de la propriété 3. 2.

**THÉORÈME 5. 1.** — Soient  $S$  et  $T$  des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ ,  $\sigma(S \otimes T)$  possédant un voisinage fermé  $E$  tel que  $E \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ ; si

$$\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times (K \cap f_y(\sigma(S)))$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$* (S \times T) = (-1)^{(l-p)(m+l)+q+p(n-q)} \langle f_y (* S \wedge \alpha^{m-l+q}), * T \rangle;$$

si

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$* (S \times T) = (-1)^{(l-p)(m+n+l)+p(n-q)} \langle f_x (\alpha^{m-p} \wedge * T), * S \rangle.$$

Cette propriété résulte de la relation (iv) figurant dans les hypothèses, et du théorème 4. 1.

b) *Propriétés de la convolution adjointe.*

**PROPRIÉTÉ 5. 3.** — Si  $x$  est un point de  $X$ , et si  $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$* \delta_x \widehat{\times} T = *^{-1} f_x (* T).$$

En effet, la relation (v) figurant dans les hypothèses et la propriété 3. 2 entraînent

$$* \delta_x \widehat{\times} T = *^{-1} (** \delta_x \times * T) = *^{-1} (\delta_x \times * T) = *^{-1} f_x (* T).$$

**PROPRIÉTÉ 5. 4.** — Si  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$\delta(S \widehat{\times} T) = (-1)^{m+l} \delta S \widehat{\times} T + (-1)^{n+l} \omega S \widehat{\times} \delta T;$$

si, en particulier,  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes, de degrés respectifs  $p$  et  $q$ , vérifiant  $p + q = l + 1$ , on a

$$\delta S \widehat{\times} T = (-1)^{m+n+1} \omega S \widehat{\times} \delta T.$$

En effet, si  $S$  et  $T$  sont homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$ , la relation (v) s'écrit

$$* \omega(S \widehat{\times} T) = (-1)^{q(m-p)} (* \omega S) \times (* \omega T).$$

Calculons la différentielle extérieure de chaque membre, en utilisant la seconde relation de la propriété 3. 4 :

$$d * \omega(S \widehat{\times} T) = (-1)^{m+n+l+q(m-p)}((d * \omega S) \times (* \omega T)) + ((\omega * \omega S) \times (d * \omega T));$$

prenant alors l'inverse de l'adjoint de chaque membre, nous obtenons :

$$*^{-1} d * \omega(S \widehat{\times} T) = (-1)^{m+n+l+q(m-p)}(*^{-1}((**^{-1} d * \omega S) \times (* \omega T)) + *^{-1}((* \omega * \omega S) \times (**^{-1} d * \omega T)))$$

soit

$$\delta(S \widehat{\times} T) = (-1)^{m+l+q(m-p-l)}*^{-1}((* \delta S) \widehat{\times} T) + (-1)^{n+l+(m-p)(q+l)}*^{-1}((* \omega S) \times (* \delta T))$$

soit enfin

$$\delta(S \widehat{\times} T) = (-1)^{n+l} \delta S \widehat{\times} T + (-1)^{n+l} \omega S \widehat{\times} \delta T.$$

La seconde partie de la proposition se déduit de cette relation, car, sous les hypothèses indiquées,  $S \widehat{\times} T$  est nul, ayant le degré  $l + 1$ .

**PROPRIÉTÉ 5. 5.** — Si  $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$(d * \delta_x) \widehat{\times} T = d *^{-1} f_x(* T) = *^{-1} f_x(* dT).$$

En effet, la seconde relation de la propriété 4. 2 entraîne

$$(d * \delta_x) \widehat{\times} T = d(* \delta_x \widehat{\times} T) = * \delta_x \widehat{\times} dT;$$

la propriété 5. 5 résulte alors de la propriété 5. 3.

La suite du chapitre II sera consacrée à l'étude de la *convolution* et de la *convolution adjointe* dans l'espace euclidien.

### 6. Réalisation des hypothèses du paragraphe 5.

$X, Y, Z$  seront désormais identiques à l'espace euclidien à  $m$  dimensions réelles  $R^m$  muni de la métrique euclidienne habituelle; l'application  $f$ , définie par

$$f(x, y) = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

donne naissance à une convolution de première espèce;  $X, Y, Z$  seront munis de coordonnées cartésiennes

$$(x_i)_{i \leq i \leq m}, \quad (y_i)_{i \leq i \leq m}, \quad (z_i)_{i \leq i \leq m}$$

bien déterminées, de telle sorte que l'expression

$$\overset{s}{\alpha}(x, y) = \omega_X \otimes^* ((m!)^{-1} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots dx^{i_1} \dots dx^{i_s} dy^{i_{s+1}} \dots dy^{i_m})$$

définit une forme double sur  $X \times Y$ ; dans cette expression comme ultérieurement,  $\delta$  muni d'indices désigne le symbole de Kronecker habituel, la convention de sommation sur les indices répétés est respectée sauf indication du contraire, et le signe du produit extérieur est omis dans les produits de différentielles; enfin, ultérieurement, les factorielles figurant multiplicativement dans les calculs seront omises; la forme  $\alpha$  définie ci-dessus et l'application  $f$  déterminent une convolution de seconde espèce, en vertu de la proposition 6. 1 ci-dessous; de plus, en vertu du théorème 6. 3, les hypothèses du paragraphe 5 sont réalisées; les convolutions  $\ast_f$  et  $\overline{\ast}_f, \alpha$  seront appelées respectivement (conformément aux conventions introduites au paragraphe 5) *convolution* et *convolution adjointe*. Au cours des calculs qui suivent, on manipulera explicitement des formes simples et des formes doubles sur le produit de deux variétés; on ne précisera pas toujours explicitement si une expression donnée représente une forme simple ou une forme double, la confusion étant rarement à craindre; toutefois, il faut toujours prendre garde aux différences entre les règles de calcul relatives à ces différentes espèces de formes. Le rôle essentiel des énoncés ci-dessous est évidemment de prouver que les hypothèses du paragraphe 5 sont réalisées; toutefois, le théorème 6. 1 constitue une propriété importante de la convolution dans l'espace euclidien.

PROPOSITION 6. 1. — Si  $\varphi$  est une forme différentielle, homogène de degré  $p$ , dans  $Z$ , on a

$$f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^{s(s+p)} f_x^*(\varphi) \wedge \overset{s+p}{\alpha}.$$

Démonstration. — En posant

$$\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_p}(z) dz^{i_1} \dots dz^{i_p},$$

on a

$$\begin{aligned} f_x^*(\varphi) &= \varphi_{i_1 \dots i_p}(x + y) dy^{i_1} \dots dy^{i_p}, \\ f_y^*(\varphi) &= \varphi_{i_1 \dots i_p}(x + y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \end{aligned}$$

et

$$f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^s \varphi_{i_1 \dots i_p}(x + y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \delta_{j_1 \dots j_m}^1 \dots dx^{j_1} \dots dx^{j_s} dy^{j_{s+1}} \dots dy^{j_m}$$

soit, en explicitant les sommations :

$$(-1)^s \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \sum_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^1 \dots dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dy^{j_{p+1}} \dots dy^{j_m} \right).$$

Si les indices  $i_1, \dots, i_p$  sont fixés, tout terme non nul de la parenthèse provient d'un terme de la seconde somme, pour lequel les  $i_1, \dots, i_p$  figurent parmi les  $j_{s+1}, \dots, j_m$ ; en effectuant au besoin une permutation sur ces derniers indices, on peut supposer  $i_1 = j_{s+1}, \dots, i_p = j_{s+p}$ ; alors le terme considéré dans la parenthèse s'écrit

$$\varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \sum_{j_1 \dots j_s, j_{s+p+1} \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_s, i_1 \dots i_p, j_{s+p+1} \dots j_m}^1 \dots dx^{j_1} \dots dx^{j_s} dy^{i_1} \dots dy^{i_p} dy^{j_{s+p+1}} \dots dy^{j_m},$$

ou encore

$$(-1)^{ps} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \wedge \sum_{i_{p+1} \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_{p+s}} dy^{i_{p+s+1}} \dots dy^{i_m}.$$

On a donc

$$f_y^*(\varphi) \wedge \alpha^s = (-1)^{s(p+1)} \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \wedge \sum_{i_{p+1} \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_{p+s}} dy^{i_{p+s+1}} \dots dy^{i_m} \right)$$

et, de même,

$$\begin{aligned} f_x^*(\varphi) \wedge \alpha^{s+p} &= (-1)^{s+p} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \delta_{j_1 \dots j_m}^1 \dots dx^{j_1} \dots dx^{j_s} dy^{j_{s+p+1}} \dots dy^{j_m} \\ &= (-1)^{s+p} \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \wedge \sum_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^1 \dots dx^{j_1} \dots dx^{j_s} dy^{j_{s+p+1}} \dots dy^{j_m} \right) \\ &= (-1)^{s+p} \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \delta_{i_1 \dots i_p, j_{p+1} \dots j_m}^1 \dots dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dx^{j_{p+1}} \dots dx^{j_{p+s}} dy^{j_{p+s+1}} \dots dy^{j_m} \right) \\ &= (-1)^{s+p} \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \varphi_{i_1 \dots i_p}(x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \wedge \sum_{i_{p+1} \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_{p+s}} dy^{i_{p+s+1}} \dots dy^{i_m} \right). \end{aligned}$$

On en déduit la relation annoncée.

PROPOSITION 6. 2. — Si  $T$  est un courant dans  $Y$ , le courant  $1_X \times_g T = g(1_X \otimes T)$  est défini dans  $X \times Z$ ; si  $T$  est homogène de dimension  $q$ , soit

$$T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}},$$



alors la composante, de degré  $p$  en  $X$ , de  $\mathbb{A}^{-1}g(1_X \otimes T)$ , est égale à  
 $(-1)^{m+q(m-p)}(f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}})) dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}$ ,  
 considérée comme forme différentielle dans  $X$ , à valeurs dans  $\mathcal{D}'_Z$ .

*Démonstration.* — Pour tous compacts  $A$  et  $B$  de  $X$  et  $Z$  respectivement,  $(A \times Y) \cap f^{-1}(B)$  est compact, donc *a fortiori*  $(A \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$  est compact, et  $1_X \times_g T$  est défini en vertu du théorème 3.1; si  $T$  est homogène de dimension  $q$ , soit  $\varphi$  une forme double appartenant à  $\mathcal{D}_{X,Z}$ , homogène, de degré total  $m+q$ , de degré  $m-p$  en  $X$ :

$$\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, z) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{p+q}}.$$

Compte-tenu de propriétés élémentaires des formes différentielles extérieures, et de la définition du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathbb{A}^{-1}g(1_X \otimes T) \rangle &= \langle g^*(\mathbb{A}^{*-1}\varphi), 1_X \otimes T \rangle \\ &= \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \\ &\quad \wedge (dx^{j_1} + dy^{j_1}) \dots (dx^{j_{p+q}} + dy^{j_{p+q}}), 1_X \otimes T \rangle \\ &= \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, x+y) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \delta_{r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}^{j_1 \dots j_{p+q}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\ &\quad \wedge dy^{s_1} \dots dy^{s_q}, 1_X \otimes T \rangle \\ &= (-1)^{m(m-q)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, x+y) dy^{s_1} \dots dy^{s_q}, T \rangle, \\ &\quad dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \rangle \\ &= (-1)^{m(m-q)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, x+y) dy^{s_1} \dots dy^{s_q}, \\ &\quad T_{k_1 \dots k_{m-q}} dy^{k_1} \dots dy^{k_{m-q}} \rangle, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \rangle \\ &= (-1)^{m(m-q)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, z) dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}} dz^{s_1} \dots dz^{s_q}, \\ &\quad f_x(T_{k_1 \dots k_{m-q}}) \rangle, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \rangle \\ &= (-1)^{m(m-q)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, z) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\ &\quad \wedge dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}} dz^{s_1} \dots dz^{s_q}, f_x(T_{k_1 \dots k_{m-q}}) \rangle. \end{aligned}$$

Dans un terme non nul de la somme, aucun des indices  $r_1, \dots, r_p$  ne figure parmi les  $s_1, \dots, s_q$ , donc tous figurent parmi les  $k_1, \dots, k_{m-q}$ , et, en effectuant au besoin une permutation de ces derniers, on peut supposer  $k_1 = r_1, \dots, k_p = r_p$ ; alors on obtient la somme :

$$\begin{aligned} &(-1)^{m(m-q)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} k_1 \dots k_p s_1 \dots s_q}(x, z) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\ &\quad \wedge dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}} dz^{s_1} \dots dz^{s_q}, f_x(T_{r_1 \dots r_p k_{p+1} \dots k_{m-q}}) \rangle \\ &= (-1)^{m+q(m-p)} \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} k_1 \dots k_p s_1 \dots s_q}(x, z) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dz^{k_1} \dots dz^{k_p} \\ &\quad \wedge dz^{s_1} \dots dz^{s_q}, (f_x(T_{r_1 \dots r_p k_{p+1} \dots k_{m-q}})) dx^{r_1} \dots dx^{r_p} dz^{k_{p+1}} \dots dz^{k_{m-q}} \rangle \\ &= (-1)^{m+q(m-p)} \langle \varphi, (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}})) dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}} \rangle. \end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée.

**THÉOREME 6. 1.** — Si  $S$  et  $T$  sont des courants (dans  $X$  et  $Y$  respectivement) tels que  $(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors  $S \times_f T$  est défini; si  $T$  est homogène de dimension  $q$ , soit

$$T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}},$$

et si  $S$  est homogène de dimension  $p$ , on a

$$S \times_f T = (-1)^p \langle (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}})) dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}, S \rangle$$

*Démonstration.* — L'hypothèse relative aux supports assure la définition de  $S \times_f T$ . Cette hypothèse exprime que l'ensemble  $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (\sigma(T) \cap (K - x))$  est compact dans  $X \times Y$  pour tout compact  $K$  de  $Y$ ; elle entraîne la compacité de l'ensemble  $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap (\sigma(T) + x))$  dans  $X \times Y$  pour tout compact  $K$  de  $Y$ , et ceci équivaut à la seconde hypothèse du théorème 3. 1; en vertu de ce théorème, on a donc

$$\begin{aligned} S \times_f T &= \int_X (S \otimes 1_Z) \wedge g(1_X \otimes T) = \int_X \cdot \mathbb{b}^{-1}((S \otimes 1_Z) \wedge g(1_Z \otimes T)) \\ &= (-1)^{(m-p)(m-p-q)} \int_X (S \otimes 1_Z) \wedge \cdot \mathbb{b}^{-1}g(1_X \otimes T) \\ &= (-1)^{(m-p)(m-p-q)} \langle \cdot \mathbb{b}^{-1}g(1_X \otimes T), S \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit alors de tenir compte de la proposition 6. 2 pour démontrer le théorème.

**PROPOSITION 6. 3.** — Si  $T$  est un courant homogène de dimension  $q$  dans  $Y$ , soit

$$T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}},$$

alors l'adjointe, relativement à  $Z$ , de la composante de  $\cdot \mathbb{b}^{-1}g(1_X \otimes T)$  de degré  $p$  en  $X$ , est égale à

$$(-1)^{m-p+m(p+q)} \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(*T).$$

*Démonstration.* — Compte-tenu de la proposition 6. 2, nous devons déterminer l'adjoint, relativement à  $Z$ , du courant double dans  $X \times Z$

$$\omega = (-1)^{m+q(m-p)} (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}})) dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}},$$

qui est une forme différentielle dans  $X$ , à coefficients dans  $\mathcal{D}'_Z$ ; posons

$$\omega = (-1)^{m+q(m-p)} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} \omega_{j_1 \dots j_p}$$

avec 
$$\omega_{j_1 \dots j_p} = (f_x(\mathbf{T}_{j_1 \dots j_{m-q}})) dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}.$$

Dans la suite de cette démonstration, toutes les sommations seront explicitement indiquées. En vertu de la définition de l'adjoint, nous avons :

$$\begin{aligned} * \omega_{j_1 \dots j_p} &= \sum_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} \delta_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}}^{i_1 \dots i_m} (f_x \mathbf{T}_{j_1 \dots j_{m-q}}) dz^{k_1} \dots dz^{k_{p+q}} \\ &= \sum_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} \delta_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}}^{i_1 \dots i_m} (f_x (\delta_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} (* \mathbf{T})_{j_{m-q+1} \dots j_m})) \\ &\hspace{15em} dz^{k_1} \dots dz^{k_{p+q}}. \end{aligned}$$

Tenant compte des relations

$$\delta_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}}^{i_1 \dots i_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = \delta_{j_{p+1} \dots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}}^{j_1 \dots j_m} = (-1)^{p(m-p-q)} \delta_{k_1 \dots k_{p+q}}^{j_{p+1} \dots j_{m-q+1} \dots j_m}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} * \omega_{j_1 \dots j_p} &= (-1)^{p(m-p-q)} \sum_{j_{p+1} \dots j_{m-q}} f_x ((* \mathbf{T})_{j_{m-q+1} \dots j_m}) dz^{j_1} \dots dz^{j_p} \\ &\hspace{15em} \wedge dz^{j_{m-q+1}} \dots dz^{j_m} \\ &= (-1)^{p(m-p-q)} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x (* \mathbf{T}) \end{aligned}$$

$$\text{et } *_2 \omega = (-1)^{m-p+m(p+q)} \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x (* \mathbf{T}).$$

**THÉORÈME 6. 2.** — Si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$  dans  $X$  et  $Y$ , et si

$$(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(K)$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$*(S \times T) = (-1)^{pq+m} \left\langle \alpha^{m-p}(x, z) \wedge f_x(*T), *S \right\rangle.$$

*Démonstration.* — Selon le théorème 6. 1, on a

$$S \times_f T = (-1)^p \langle (f_x(\mathbf{T}_{j_1 \dots j_{m-q}})) dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}, S \rangle$$

et, en vertu de la proposition 6. 3,

$$\begin{aligned} *(S \times T) &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(*T), S \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(*T), \right. \\ &\hspace{10em} \left. \sum_{i_1 \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} (*S)_{i_{m-p+1} \dots i_m} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dans un terme non nul de cette expression, l'ensemble des indices  $j_1, \dots, j_p$  est identique à celui des indices  $i_{m-p+1}, \dots, i_m$ ; donc on obtient

$$\begin{aligned} *(S \times_f T) &= (-1)^{p(m-q)} \sum_{i_1 \dots i_m} \langle \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} dx^{i_{m-p+1}} \dots dx^{i_m} dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} \\ &\quad \wedge f_x(*T), (*S)_{i_{m-p+1} \dots i_m} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \rangle \\ &= (-1)^{p(p+q)} \left\langle \sum_{i_1 \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} f_x(*T), *S \right\rangle \\ &= (-1)^{pq+m} \left\langle \alpha^{m-p}(x, z) \wedge f_x(*T), *S \right\rangle. \end{aligned}$$

**THÉOREME 6. 3.** — Si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$  dans  $X$  et  $Y$ , et si

$$(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(K)$$

est compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a

$$*(S \times_f T) = (-1)^{p(m-q)} *S \widehat{\times}_{f, \alpha} *T.$$

*Démonstration.* — Selon le théorème 4. 1, on a

$$\begin{aligned} *S \widehat{\times}_{f, \alpha} *T &= (-1)^{m(m-p)} \left\langle f_x \left( \alpha^{m-p}(x, y) \wedge *T \right), *S \right\rangle \\ &= (-1)^{m(m-p)} \left\langle \alpha^{m-p}(x, z) \wedge f_x(*T), *S \right\rangle. \end{aligned}$$

Compte-tenu du théorème 6. 2, on obtient la relation ci-dessus.

**7. Expression de la convolution et de la convolution adjointe à l'aide des différentielles des coordonnées de l'espace euclidien.**

**THÉOREME 7. 1.** — Soient  $S$  et  $T$  des courants homogènes de dimensions respectives  $p$  et  $q$  dans  $X$  et  $Y$ , tels que

$$\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$$

soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ :

$$S = S_{i_1 \dots i_{m-p}} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}, \quad T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}};$$

alors on a

$$S \widehat{\times} T = (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \widehat{\times} T_{j_1 \dots j_{m-q}}) dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}}$$

et

$$S \times T = (-1)^{p(m-q)} \delta_{1 \dots m}^{j_1 \dots j_m} (S_{j_1 \dots j_q k_{p+q+1} \dots k_m} \widehat{\times} T_{j_{q+1} \dots j_m}) dz^{k_{p+q+1}} \dots dz^{k_m}.$$

*Démonstration de la première relation.* — En vertu de la définition de  $S \widehat{\times} T$  dans le paragraphe 4, on a, pour toute forme  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}_z$ ,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix}, S \otimes T \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix}, (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \otimes T_{j_1 \dots j_{m-q}}) dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \right. \\ &\quad \left. \wedge dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix}, \right. \\ &\quad \left. S_{i_1 \dots i_{m-p}} \otimes T_{j_1 \dots j_{m-q}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Or, compte-tenu de la définition de  $\begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix} \\ &= (-1)^{m-q} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \\ &\quad \wedge f_y^*(\varphi) \delta_{k_1 \dots k_m}^{i_1 \dots i_m} dx^{k_1} \dots dx^{k_{m-q}} dy^{k_{m-q+1}} \dots dy^{k_m} \\ &= (-1)^{m-q} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \\ &\quad \wedge f_y^*(\varphi) \delta_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} dx^{j_1} \dots dx^{j_{m-q}} dy^{j_{m-q+1}} \dots dy^{j_m} \\ &= (-1)^{p(m-q)} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{j_1} \dots dx^{j_{m-q}} f_y^*(\varphi) dy^1 \dots dy^m \\ &= (-1)^{p(m-q)} f_y^*(dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi) dy^1 \dots dy^m \\ &\quad \text{0,0} \\ &= (-1)^{p(m-q)} \overline{(dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi)}. \end{aligned}$$

En substituant l'expression ainsi obtenue à

$$dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \begin{matrix} m-p, m-q \\ \varphi \end{matrix}$$

dans l'expression de  $\langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle$  au début de la démonstration, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \varphi, S \widehat{\times} T \rangle &= \langle dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi, S_{i_1 \dots i_{m-p}} \widehat{\times} T_{j_1 \dots j_{m-q}} \rangle \\ &= \langle \varphi, (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \widehat{\times} T_{j_1 \dots j_{m-q}}) dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \rangle. \end{aligned}$$

*Démonstration de la seconde relation.* — On déduira la seconde relation de la précédente grâce à la relation (iv) de l'hypothèse du paragraphe 5; d'abord on a

$$*S = \sum_{i_1 \dots i_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} S_{i_1 \dots i_{m-p}} dx^{i_{m-p+1}} \dots dx^{i_m}$$

et

$$*T = \sum_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{j_1 \dots j_m} T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_{m-q+1}} \dots dy^{j_m};$$

donc, en vertu de la relation précédemment démontrée, on obtient

$$*S \widehat{\times} *T = \sum_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots \delta_{j_1 \dots j_m}^m (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \widehat{\times} T_{j_1 \dots j_{m-q}}) dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} dz^{j_{m-q+1}} \dots dz^{j_m}$$

et

$$\begin{aligned} *(*S \widehat{\times} *T) &= \sum_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m k_1 \dots k_m} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots \delta_{j_1 \dots j_m}^m \delta_{k_1 \dots k_m}^m (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \widehat{\times} T_{j_1 \dots j_{m-q}}) dz^{k_{p+q+1}} \dots dz^{k_m} \\ &= (-1)^{p(m-p)} \sum_{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^1 \dots \delta_{k_1 \dots k_m}^m (S_{j_1 \dots j_{m-q}} \widehat{\times} T_{k_1 \dots k_{p+q+1}}) dz^{k_{p+q+1}} \dots dz^{k_m} \\ &= (-1)^{(m+1)(p+q)} \delta_{i_1 \dots i_m}^1 \dots \delta_{j_1 \dots j_m}^m (S_{j_1 \dots j_{m-q}} \widehat{\times} T_{k_1 \dots k_{p+q+1}}) dz^{k_{p+q+1}} \dots dz^{k_m} \end{aligned}$$

On obtient alors la relation annoncée en utilisant la relation (iv) de l'hypothèse du paragraphe 5.

### 8. L'algèbre de convolution et l'algèbre de convolution adjointe.

Les hypothèses du paragraphe 6 déterminent en particulier des isomorphismes entre X, Y et Z, grâce auxquels la convolution et la convolution adjointe définissent, dans l'espace des courants dans  $R^m$ , deux lois de composition (non partout définies). La loi de composition, définie par

$$(S, T) \rightarrow (-1)^{p(m-q)} S \times T = S \overline{\times} T$$

lorsque S et T sont des courants homogènes de dimensions respectives p et q, sera appelée *produit de convolution*, et la loi de composition

$$(S, T) \rightarrow S \widehat{\times} T$$

*produit de convolution adjoint*; alors, compte-tenu des relations (iv) et (v) dans les hypothèses du paragraphe 5, on a

$$(i) \quad *(S \widehat{\times} T) = *S \overline{\times} *T$$

et

$$(ii) \quad *(S \overline{\times} T) = *S \widehat{\times} *T;$$

si S et T sont des courants homogènes et si la somme de leurs degrés diffère de m, l'un des deux produits de convolution

$S \times T$  et  $S \hat{\times} T$  est nul; si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes et si la somme de leurs degrés égale  $m$ , on a la relation

$$(iii) \quad (-1)^p S \times T = S \times T = *(S \hat{\times} T),$$

$p$  désignant le degré de  $S$ ; en effet, cette relation résulte du théorème 7. 1. On appellera espace des distributions, l'espace des courants homogènes de degré zéro; cet espace est naturellement isomorphe à celui défini par L. Schwartz [17]; il est stable relativement au produit de convolution adjoint, qui correspond au produit de convolution des distributions, défini et étudié par L. Schwartz [17]. Pour simplifier les énoncés, on indiquera les propriétés du produit de convolution et du produit de convolution adjoint en les considérant comme définis sur l'espace des courants à supports compacts (car ils sont alors partout définis); sans adopter ces conventions, on obtiendrait des énoncés analogues à ceux de L. Schwartz ([17], chapitre VI, § 5).

*a. Propriétés du produit de convolution adjoint.*

PROPRIÉTÉ 8. 1. — *Le produit de convolution adjoint est anticommutatif: si  $S$  et  $T$  sont des courants à supports compacts, homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ , on a*

$$S \hat{\times} T = (-1)^{pq} T \hat{\times} S.$$

PROPRIÉTÉ 8. 2. — *Le produit de convolution adjoint est associatif: pour des courants à supports compacts, on a*

$$(S \hat{\times} T) \hat{\times} U = S \hat{\times} (T \hat{\times} U).$$

Ces deux propriétés se déduisent de la première relation du théorème 7. 1 et des propriétés analogues du produit de convolution des distributions, démontrées par L. Schwartz.

PROPRIÉTÉ 8. 3. — *La translation est une opération de convolution adjointe: on a*

$$*\delta_x \hat{\times} T = f_x(T)$$

et, en particulier

$$*\delta_0 \hat{\times} T = T.$$

Cette propriété se déduit de la propriété 5. 3. Résumons les propriétés ci-dessus dans un théorème.

**THÉORÈME 8. 1.** — *L'addition et le produit de convolution adjoint des courants munissent l'espace des courants à support compact dans  $R^m$  d'une structure d'algèbre associative, graduée par le degré des courants, anticommutative, pour laquelle  $*\delta_0$  est une unité.*

**PROPRIÉTÉ 8. 4.** — *La différentielle extérieure est une opération de convolution adjointe: on a*

$$(d*\delta_x)\overline{\times}T = df_x(T) = f_x(dT)$$

et, en particulier,

$$(d*\delta_0)\overline{\times}T = dT.$$

Ceci résulte de la propriété 5. 5.

**PROPRIÉTÉ 8. 5.** — *Toute dérivation partielle est une opération de convolution adjointe: on a*

$$\frac{\partial * \delta_0}{\partial x^k} \overline{\times} T = \frac{\partial T}{\partial x^k}.$$

Cette propriété résulte aisément de la première relation du théorème 7. 1 et de la propriété analogue pour les distributions.

b) *Propriétés du produit de convolution.*

**PROPRIÉTÉ 8. 6.** — *Le produit de convolution est anticommutatif: si S et T sont des courants à supports compacts, homogènes de dimensions respectives p et q, on a*

$$S\overline{\times}T = (-1)^{pq}T\overline{\times}S.$$

**PROPRIÉTÉ 8. 7.** — *Le produit de convolution est associatif: pour des courants à supports compacts, on a*

$$(S\overline{\times}T)\overline{\times}U = S\overline{\times}(T\overline{\times}U).$$

Ces deux propriétés résultent des propriétés 8. 1 et 8. 2 et de la relation (ii) entre les deux produits.

**PROPRIÉTÉ 8. 8.** — *La translation est une opération de convolution: on a*

$$\delta_x\overline{\times}T = f_x(T)$$

et en particulier

$$\delta_0\overline{\times}T = T.$$



Cela résulte de la propriété 3. 2.

**THÉORÈME 8. 2.** — *L'addition et le produit de convolution des courants munissent l'espace des courants à support compact dans  $R^m$  d'une structure d'algèbre associative, graduée par la dimension des courants, anticommutative, pour laquelle  $\delta_0$  est une unité.*

**PROPRIÉTÉ 8. 9.** — *La codifférentielle extérieure est une opération de convolution : si  $T$  est un courant homogène de dimension  $q$ , on a*

$$\delta\delta_x \times T = (-1)^q \delta f_x(T) = (-1)^q f_x(\delta T)$$

et, en particulier,

$$\delta\delta_0 \times T = (-1)^q \delta T.$$

Cela résulte des propriétés 5. 2 et 8. 8.

**9. Expression intégrale du produit de convolution adjoint dans un cas particulier.**

Devant utiliser des notions introduites par G. de Rham [16], nous les rappellerons d'abord. G. de Rham a montré que, dans toute variété  $X$ , on peut construire des opérateurs linéaires  $R$  et  $A$ , dépendant de paramètres positifs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  en nombre fini ou infini selon que  $X$  est compacte ou non, qui jouissent des propriétés suivantes :

(i) si  $T$  est un courant homogène de dimension  $p$  dans  $X$ ,  $RT$  et  $AT$  sont des courants homogènes de dimensions  $p$  et  $p + 1$  respectivement, vérifiant

$$RT - T = b(AT) - A(bT);$$

(ii) les supports de  $RT$  et de  $AT$  sont contenus dans un voisinage quelconque donné du support de  $T$  pourvu que les paramètres  $\varepsilon_i$  soient assez petits ;

(iii) pour tout courant  $T$ , il existe une forme différentielle  $\psi$  appartenant à  $\mathcal{E}_X$ , vérifiant  $RT = i_X(\psi)$  ; si  $\varphi$  est une forme  $r$  fois différentiable, il existe une forme  $\theta$ ,  $r$  fois différentiable, telle que l'on ait  $A(i_X(\varphi)) = i_X(\theta)$  ;

(iv) si  $\varphi$  varie dans un ensemble borné jusqu'à l'ordre  $q$  et si chaque  $\varepsilon_i$  varie en restant borné supérieurement,  $R(i_X(\varphi))$  et  $A(i_X(\varphi))$  restent dans un ensemble borné jusqu'à l'ordre  $q$  ;

(v) si chaque paramètre  $\varepsilon_i$  tend vers zéro,  $\langle \varphi, RT \rangle$  tend vers

$\langle \varphi, T \rangle$  et  $\langle \varphi, AT \rangle$  tend vers zéro, uniformément sur tout ensemble borné de formes  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}_X$ ; si  $T$  est continu d'ordre  $q$ , la convergence est uniforme sur tout ensemble de formes qui est borné jusqu'à l'ordre  $q + 1$ .

On appelle *régularisateur* tout opérateur  $R$  dépendant de paramètres positifs  $\varepsilon_i$ , auquel est associé un opérateur  $A$ , jouissant des propriétés (i) à (v) ci-dessus. Soient alors  $S$  et  $T$  deux courants dans  $X$ ; si, quels que soient les régularisateurs  $R$  et  $R'$ , l'intégrale

$$\int RS \wedge R'T$$

tend vers une limite lorsque les paramètres de  $R$  et de  $R'$  tendent vers zéro, on désigne cette limite par le symbole

$$\int_X S \wedge T.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(vi) si l'un des courants  $S$  et  $T$  a son support compact, et si l'on a de plus  $T = i_X(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_X$ , alors l'égalité

$$\int_X S \wedge i_X(\varphi) = \int_X S \langle \varphi$$

a lieu, le premier membre ayant la signification indiquée ci-dessus, et le second membre la signification qui lui a été donnée au paragraphe 1.

(vii) si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux chaînes, dont l'une au moins est finie, et dont aucune ne rencontre le bord de l'autre, l'intégrale

$$\int_X j_X(\sigma) \wedge j_X(\tau)$$

est définie, et égale au nombre algébrique d'intersections de ces deux chaînes.

Nous utiliserons ces notions pour obtenir une expression intégrale du produit de convolution adjoint; pour tout point  $z$  de  $Z$ , nous désignerons par  $\mathcal{C}_z$  l'application de  $X$  dans  $Y$ , telle que l'on ait  $f(x, \mathcal{C}_z(x)) = z$ , soit  $\mathcal{C}_z(x) = z - x$ ; nous établirons le théorème suivant :

**THÉORÈME 9. 1.** — *Si  $S$  et  $T$  sont des courants homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$  dans  $X$  et  $Y$ , tels que  $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , on a la relation*

$$S \times T = (-1)^q \int_Y \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(S) \wedge T$$

chaque fois que l'intégrale possède un sens; en particulier, si l'on a  $p + q = m$ , la relation devient

$$S \times T = \int \mathfrak{C}_z(S) \wedge T.$$

DÉMONSTRATION. — En vertu du théorème 4.1, on a

$$S \widehat{\times} T = (-1)^{m(m-p)} \left\langle \alpha^{m-p}(x, z) \wedge f_x(T), S \right\rangle.$$

Transformons d'abord cette expression en supposant  $T = i_Y(\psi)$ ,  $\psi \in \mathfrak{E}_Y$ ,

$$\psi = \psi_{j_1 \dots j_q}(y) dy^{j_1} \dots dy^{j_q};$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} S \widehat{\times} T &= (-1)^{(m+1)(m-p)} \langle \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} \\ &\quad \wedge \psi_{j_1 \dots j_q}(z-x) dz^{j_1} \dots dz^{j_q}, S \rangle \\ &= (-1)^{(m+1)(m-p)} \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \langle dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \psi_{j_1 \dots j_q}(z-x), S \rangle \\ &= (-1)^{m(m-p)} \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \langle \psi_{j_1 \dots j_q}(y) dy^{i_1} \dots dy^{i_{m-p}}, \mathfrak{C}_z(S) \rangle \\ &\quad dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} dz^{j_1} \dots dz^{j_q}. \end{aligned}$$

Or, pour un terme non nul de la somme, les indices  $j_1, \dots, j_q$  ne figurent pas parmi les indices  $i_{m-p+1}, \dots, i_m$ , mais figurent parmi les  $i_1, \dots, i_{m-p}$ , et on peut supposer  $j_1 = i_1, \dots, j_q = i_q$ ; alors on obtient :

$$\begin{aligned} S \widehat{\times} T &= (-1)^{m(m-p)} \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \langle \psi_{j_1 \dots j_q}(y) dy^{j_1} \dots dy^{j_q} dy^{i_{q+1}} \dots dy^{i_{m-p}}, \mathfrak{C}_z(S) \rangle \\ &\quad dz^{i_{m-p+1}} \dots dz^{i_m} dz^{i_1} \dots dz^{i_q} \\ &= (-1)^{p(m-q)+p+q} \left\langle \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge T, \mathfrak{C}_z(S) \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)+p+q} \int_Y \mathfrak{C}_z(S) \wedge \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge T \\ &= (-1)^q \int_Y \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge \mathfrak{C}_z(S) \wedge T. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $T$  est un courant tel que cette intégrale possède un sens; soit  $\alpha_i$  une suite de formes différentielles appartenant à  $\mathfrak{E}_Y$ , telle que  $i_Y(\alpha_i)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'_Y$ , et que  $i_Y(\alpha_i)$  soit obtenu à partir de  $T$  à l'aide d'un régularisateur; nous avons alors

$$S \widehat{\times} i_Y(\alpha_i) = (-1)^q \int_Y \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge \mathfrak{C}_z(S) \wedge i_Y(\alpha_i);$$

lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ , l'intégrale tend vers

$$\int_X \alpha^{m-p-q}(y, z) \wedge \bar{c}_z(S) \wedge T,$$

et  $S \widehat{\times} i_Y(\alpha_i)$  converge vers  $S \widehat{\times} T$  dans  $\mathcal{D}'_Z$  en vertu de la propriété 3. 6; la relation annoncée est donc démontrée.

Si l'on a  $p + q = m$ , cette relation s'écrit

$$S \widehat{\times} T = (-1)^q \left( \int_Y \bar{c}_z(S) \wedge T \right) dz^1 \dots dz^m;$$

compte-tenu de la relation (iii) du paragraphe 8, on obtient la relation :

$$S \times T = \int_Y \bar{c}_z(S) \wedge T.$$

**COROLLAIRE 9. 1.** — *Si  $\varphi$  est une forme différentielle localement sommable, homogène de degré  $p$  dans  $X$ , et  $\mu$  une chaîne localement finie, de dimension  $q$  dans  $Y$ , telles que  $(\sigma(\varphi) \times \sigma(\mu)) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors on a*

$$i_X(\varphi) \widehat{\times} j_Y(\mu) = (-1)^{(q+1)(m-q)} \int_\mu \alpha^{q-p}(y, z) \wedge \bar{c}_z(\varphi)$$

chaque fois que l'intégrale possède un sens; en particulier, si l'on a  $p = q$ , on obtient la relation

$$i_X(\varphi) \times j_Y(\mu) = (-1)^{R(m-p)} \int_\mu \bar{c}_z(\varphi).$$

**COROLLAIRE 9. 2.** — *Si  $\mu$  et  $\nu$  sont des chaînes localement finies, dans  $X$  et  $Y$  respectivement, dont la somme des dimensions est égale à  $m$ , et telles que  $\sigma(u \times v) \cap f^{-1}(K)$  soit compact pour tout compact  $K$  de  $Z$ , alors il existe une fonction  $\varphi$ , localement sommable, définie presque partout dans  $Z$ , telle que l'on ait*

$$i_X(\mu) \times i_Y(\nu) = i_Z(\varphi);$$

en tout point  $z$  où  $\varphi$  est définie,  $\varphi(z)$  est égal au nombre algébrique d'intersections des chaînes  $\bar{c}_z(\mu)$  et  $\nu$ .

Ceci résulte du théorème 9. 1, compte-tenu de la propriété (vii) rappelée au début de ce paragraphe.

Une généralisation du corollaire 9. 2 a été annoncée dans [10]; elle sera établie dans un travail ultérieur, où seront étudiées les relations entre la convolution des courants et certaines notions topologiques.

## CHAPITRE III

### HOMOLOGIE ASSOCIÉE A UNE FAMILLE DE DÉRIVATIONS. APPLICATION A L'ALGÈBRE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES SUR UNE VARIÉTÉ

#### 10. Énoncé du théorème fondamental <sup>(3)</sup>.

Dans une *catégorie abélienne*, soit  $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de morphismes tels que le produit  $d_i \cdot d_j$ , défini quels que soient  $i$  et  $j$ , vérifie  $d_i \cdot d_i = 0$  pour tout  $i$ , et  $d_i \cdot d_j + d_j \cdot d_i = 0$  pour  $i \neq j$ ; soit  $d = d_1 \cdot d_2 \dots d_p$ . Soient  $F$  l'unité commune, à gauche et à droite, des  $d_i$ ;  $F^p$  le produit direct (naturellement isomorphe à la somme directe) de  $p$  objets identiques à  $F$ ;  $p_i$  les projections canoniques de  $F^p$  sur  $F$ ;  $\delta = \sum_{1 \leq i \leq p} d_i \cdot p_i$  ( $\sum$  désignant l'addition, dans le groupe abélien des morphismes de  $F^p$  dans  $F$ ). Le couple  $(\delta, d)$  constitue un complexe dont l'homologie sera appelée homologie de la famille  $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ ; pour  $p = 1$ , on retrouve la définition habituelle de l'homologie d'un endomorphisme de carré nul. Notre but est d'indiquer une *condition suffisante* pour la nullité de cette homologie, en supposant  $F$  muni d'une graduation telle que  $(F, d_i)$  constitue un complexe (pour tout indice  $i$ ), et d'une seconde graduation, liée à une décomposition de chaque  $d_i$  en une somme de morphismes; toutefois, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous n'énoncerons cette condition que pour une *réalisation particulière* de cette structure.

<sup>(3)</sup> Bien que le problème qui fait l'objet de ce chapitre soit d'abord posé dans le cadre d'une catégorie abélienne (définie par A. Grothendieck [1]), la connaissance des notions relatives aux catégories abéliennes n'est nullement indispensable pour la compréhension de ce chapitre.

Soient  $A$  un anneau commutatif avec élément unité;  $M$ , un  $A$ -module unitaire;  $n$ , un nombre entier positif;  $A^n = \bigoplus^n A$ , la somme directe de  $n$  exemplaires du  $A$ -module  $A$ ;  $E$ , l'algèbre extérieure du  $A$ -module  $A^n$ , graduée par les sous-modules  ${}^q E = \bigwedge^q E$  de  $q$ -vecteurs,  $0 \leq q \leq n$ ;  $F$ , le produit tensoriel  $M \otimes_A E$  de  $A$ -modules, gradué par les sous-modules  ${}^q F = M \otimes {}^q E$ . L'ensemble  $F$ , muni naturellement d'une structure de  $E$ -module à gauche (si  $m \in M$  et  $e \in E$ , on a  $m \otimes e \in F$ ; si  $e' \in E$ , on pose  $e' \wedge (m \otimes e) = m \otimes (e' \wedge e)$ ), est un module gradué sur l'anneau gradué  $E$ .

Soit  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille d'éléments de  ${}^1 E$ ; on lui associe la famille  $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$  des applications de  $F$  en lui-même définies par

$$d_i(\alpha) = \omega_i \wedge \alpha;$$

$d$  est alors l'application de  $F$  en lui-même, vérifiant

$$d(\alpha) = \omega \wedge \alpha, \quad \omega = \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_i,$$

et applique en particulier  ${}^q F$  dans  ${}^{p+q} F$ ;  $\delta$  est l'application de  $\bigoplus^p F$  dans  $F$  vérifiant

$$\delta((\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}) = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_i \wedge \alpha_i,$$

et applique en particulier  $\bigoplus^p {}^q F$  dans  ${}^{q+1} F$ ; on a  $d \cdot \delta = 0$ .

Pour tout nombre entier  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ , définissons l'application  $\varphi_k$  de  $A^k$  dans  $A^n$  par la relation

$$\varphi_k(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$$

et posons  $A_{(k)}^n = \varphi_k(A^k)$ ; l'algèbre extérieure  $E_{(k)}$  de  $A_{(k)}^n$  est alors un facteur direct de  $E$ . Soient  $\omega_{i(k)}$  la projection de  $\omega_i$  dans  $E_{(k)}$ ;  $d_{(k)}$  l'application de  $F$  en lui-même, vérifiant

$$d_{(k)}(\alpha) = \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \right) \wedge \alpha;$$

$\delta_{(k)}$  l'application de  $\bigoplus^p F$  dans  $F$ , vérifiant

$$\delta_{(k)}((\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}) = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k-1)} \wedge \alpha_i.$$

Définissons de même l'application  $\varphi^k$  de  $A^{n-k}$  dans  $A^n$  par la relation

$$\varphi^k(a_1, a_2, \dots, a_{n-k}) = (0, \dots, 0, a_1, \dots, a_{n-k})$$

et posons

$$A^{n(k)} = \varphi^k(A^{n-k}), \quad E^{[k]} = E_{(k-1)} \wedge \left( \bigwedge^{n-k} A^{n(k)} \right), \quad E^{(k)} = \bigoplus_{1 \leq h \leq k} E^{[h]};$$

en particulier, nous aurons  $E^{(n)} = E$ ; posons enfin

$$F^{[k]} = M \otimes E^{[k]}, \quad F^{(k)} = M \otimes E^{(k)}, \quad {}^q F^{[k]} = {}^q F \cap F^{[k]}, \quad {}^q F^{(k)} = {}^q F \cap F^{(k)}.$$

Alors  $d_{(k)}$  applique en particulier  ${}^{n-p}F^{(k)}$  dans  ${}^n F$ , et  $\delta_{(k)}$  applique  $\bigoplus^p {}^{n-p-1}F^{[k]}$  dans  ${}^{n-p}F^{[k]}$ . Avec ces notations, nous pouvons énoncer le théorème fondamental :

**THÉORÈME 10. 1.** — *Pour que la suite*

$$\bigoplus^p F \xrightarrow{\delta} F \xrightarrow{d} F$$

*soit exacte, il suffit que la suite*

$$\bigoplus^p {}^{n-p-1}F^{[k]} \xrightarrow{\delta_{(k)}} {}^{n-p}F^{(k)} \xrightarrow{d_{(k)}} {}^n F$$

*vérifie, pour tout entier  $k$  tel que  $p \leq k \leq n$ , la condition suivante: la projection, sur  ${}^{n-p}F^{[k]}$ , du noyau de  $d_{(k)}$ , est l'image de  $\delta_{(k)}$ .*

Dans le cas  $p = 1$ , désignons par  $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$  les composantes de  $\omega$ ; le théorème 10. 1 s'écrit alors sous la forme équivalente :

*Si, pour tout nombre entier  $k$  vérifiant  $0 \leq k < n$ , et tout élément  $a$  de  $M$ , le fait que  $y_{k+1} a$  soit une combinaison linéaire de  $y_1, \dots, y_k$  à coefficients dans  $M$  entraîne que  $a$  est lui-même une telle combinaison, alors la relation  $\omega \wedge \alpha = 0$ , où  $\alpha \in {}^q F$ ,  $q < n$ , entraîne la divisibilité de  $\alpha$  par  $\omega$ .*

Ce cas particulier du théorème 10. 1 a été établi par G. de Rham [15].

La démonstration du théorème 10. 1 résultera de récurrences effectuées à partir de trois lemmes principaux, et utilisera des notations auxiliaires que nous introduirons tout d'abord. Si  $A$  et  $B$  sont deux propriétés,  $A \cap B$  désignera le réalisation simultanée de ces propriétés;  $A \implies B$  signifiera :  $A$  entraîne  $B$ ; enfin, nous définirons les propriétés suivantes :

Pour  $p \leq k \leq n$ ,  $P'(k)$  exprime que, dans la suite

$$\bigoplus^p {}^{n-p-1}F^{[k]} \xrightarrow{\delta_{(k)}} {}^{n-p}F^{(k)} \xrightarrow{d_{(k)}} {}^nF,$$

la projection, sur  ${}^{n-p}F^{(k)}$ , du noyau de  $d_{(k)}$ , est contenue dans l'image de  $\delta_{(k)}$ ; on pose  $P' = \bigcap_{p \leq k \leq n} P'(k)$ .

Pour  $p-1 \leq k \leq n$  et  $0 < q \leq n-p$ ,  ${}^qP^{(k)}$  et  ${}^qP_{(k)}$  expriment respectivement que les suites

$$\bigoplus^p {}^{q-1}F^{(k)} \xrightarrow{\delta_{(k+1)}} {}^qF^{(k)} \xrightarrow{d_{(k)}} {}^{p+q}F$$

et

$$\bigoplus^p {}^{q-1}F_{(k)} \xrightarrow{\delta_{(k+1)}} {}^qF_{(k)} \xrightarrow{d_{(k)}} {}^{p+q}F$$

sont exactes; on pose

$${}^qP = {}^qP^{(n)} = {}^qP_{(n)} \quad \text{et} \quad P = \bigcap_{0 < q \leq n-p} {}^qP.$$

Avec ces notations, le théorème 10. 1 s'écrit :  $P' \implies P$ .

De la nullité de  ${}^{n-p-1}F^{[p]}$ ,  ${}^{n-p}F^{(p-1)}$  et  ${}^{n-p-1}F^{(p)}$  résulte immédiatement :

LEMME 10. 1. —  $P'(p) = {}^{n-p}P^{(p)}$ .

### 11. Démonstration du théorème fondamental.

a) *Énoncé et démonstration des trois lemmes principaux.*

LEMME 11. 1. — Pour  $p \leq k < n$ ,

$$P'(k+1) \cap {}^{n-p}P^{(k)} \implies {}^{n-p}P^{(k+1)}.$$

LEMME 11. 2. — Pour  $p \leq k < n$  et  $1 < q \leq n-p$ ,

$${}^qP_{(k)} \cap {}^{q-1}P_{(k)} \implies {}^qP_{(k+1)}.$$

LEMME 11. 3. — Pour  $p \leq k < n$ ,

$$P'(p) \cap {}^1P_{(k)} \implies {}^1P_{(k+1)}.$$

Avant de démontrer ces lemmes, notons que, définissant  $\omega_{i[k+1]}$  par la relation

$$\omega_{i(k+1)} = \omega_{i(k)} + \omega_{i[k+1]},$$

nous aurons

$$\omega_{(k+1)} = \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} = \bigwedge_{1 \leq i \leq p} (\omega_{i(k)} + \omega_{i[k+1]}),$$



soit

$$(1) \quad \omega_{(k+1)} = \omega_{(k)} + (p!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \dots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta_{i_1 \dots i_p}^{r_1 \dots r_p} \left( \bigwedge_{1 \leq i < p} \omega_{r_i(k)} \right) \wedge \omega_{r_p[k+1]}.$$

*Démonstration du lemme 11. 1.*

Soit  $\alpha \in {}^{n-p}\mathbf{F}$ , vérifiant  $\omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} = 0$ . En vertu de la relation (1), on a :

$$\begin{aligned} \omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} &= \omega_{(k)} \wedge \alpha^{(k+1)} \\ &+ (p!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \dots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta_{i_1 \dots i_p}^{r_1 \dots r_p} \left( \bigwedge_{1 \leq i < p} \omega_{r_i(k)} \right) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Or, en vertu de l'hypothèse  $P'(k+1)$ , il existe une famille

$$(\beta_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{n-p-1}\mathbf{F}$$

telle que l'on ait

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]}.$$

Comme  $\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k)} = 0$  en vertu de la définition des degrés, on a

$$\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k+1)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{r_p[k+1]} \wedge \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} &= \omega_{(k)} \wedge \alpha^{(k)} - \omega_{(k)} \wedge \left( \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} \right) \\ &= \omega_{(k)} \wedge \left( \alpha^{(k)} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} \right) = 0. \end{aligned}$$

Comme l'expression entre parenthèses désigne un élément appartenant à  ${}^{n-p}\mathbf{F}^{(k)}$ , il existe, en vertu de l'hypothèse  ${}^{n-p}\mathbf{P}^{(k)}$ , une famille

$$(\gamma_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{n-p-1}\mathbf{F}^{(k)}$$

telle que l'on ait

$$\alpha^{(k)} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{(k)};$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \alpha^{(k+1)} &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} + \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{(k)} + \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_i^{[k+1]} + \omega_{i(k)} \wedge \gamma_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Comme  $\omega_{i[k+1]} \wedge \gamma_i^{(k)} = 0$  en vertu de la définition des degrés, on a

$$\alpha^{(k+1)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge (\beta_i^{[k+1]} + \gamma_i^{(k)}).$$

Comme l'expression entre parenthèses représente un élément appartenant à  ${}^{n-p-1}\mathbb{F}^{(k+1)}$ , la propriété  ${}^{n-p}\mathbb{P}^{(k+1)}$  est vérifiée.

*Partie commune à la démonstration des lemmes 11. 2 et 11. 3.*

Si on pose

$$\alpha_{(k+1)} = \alpha_{(k)} + \alpha_{[k+1]},$$

on obtient, compte-tenu de (1) et de  $\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{[k+1]} = 0$ , la relation

$$\begin{aligned} \omega_{(k+1)} \wedge \alpha_{(k+1)} &= \omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)} + \omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} \\ &+ (p!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \dots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta_{1 \dots p}^{r_1 \dots r_p} \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{r_i(k)} \right) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{(k)}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \in {}^q\mathbb{F}$ , le terme  $\omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)}$  appartient à  ${}^{p+q}\mathbb{F}_{(k)}$ , et tous les termes qui suivent appartiennent à  ${}^{p+q}\mathbb{F}_{[k+1]}$ ; donc la relation

$$\omega_{(k+1)} \wedge \alpha_{(k+1)} = 0$$

entraîne

$$(2) \quad \omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)} = 0$$

et

$$(3)$$

$$\omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} + (p!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \dots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta_{1 \dots p}^{r_1 \dots r_p} \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{r_i(k)} \right) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{(k)} = 0.$$

En vertu de l'hypothèse  ${}^q\mathbb{P}_{(k)}$  (pour le lemme 11. 3,  $q = 1$ ), la relation (2) entraîne l'existence d'une famille

$$(\beta_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{q-1}\mathbb{F}$$

telle que l'on ait

$$(4) \quad \alpha_{(k)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)}.$$

Alors, compte-tenu de la relation (3), on obtient

$$\omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} - \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \right) \wedge \left( \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} \right) = 0,$$

soit

$$(5) \quad \omega_{(k)} \wedge \left( \alpha_{[k+1]} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} \right) = 0.$$

Or on peut écrire

$$\alpha_{[k+1]} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} = \gamma \wedge \gamma_{(k)}$$

avec  $\gamma \in {}^{q-1}\mathbf{F}$ , de telle sorte que la relation (5) entraîne

$$(6) \quad \omega_{(k)} \wedge \gamma_{(k)} = 0.$$

*Fin de la démonstration du lemme 11. 2.*

En vertu de l'hypothèse  ${}^{q-1}\mathbf{P}_{(k)}$ , la relation (6) entraîne l'existence d'une famille

$$(\delta_i)_{1 \leq i \leq p} \in {}^{q-2}\mathbf{F}_{(k)}$$

telle que l'on ait

$$\gamma_{(k)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \delta_{i(k)},$$

soit

$$\alpha_{[k+1]} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} + \gamma \wedge \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \delta_{i(k)};$$

compte-tenu de (4) et de la relation

$$\omega_{i(k)} \wedge \gamma = \omega_{i(k+1)} \wedge \gamma,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{(k+1)} &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)} + \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} - \omega_{i(k)} \wedge \gamma \wedge \delta_{i(k)} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_{i(k)} - \omega_{i(k)} \wedge \gamma \wedge \delta_{i(k)} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge (\beta_{i(k)} - \gamma \wedge \delta_{i(k)}). \end{aligned}$$

Comme l'expression entre parenthèses représente un élément de  ${}^{q-1}\mathbf{F}_{(k+1)}$ , la condition  ${}^q\mathbf{P}_{(k+1)}$  est vérifiée.

*Fin de la démonstration du lemme 11. 3.*

Dans la partie commune aux démonstrations des lemmes 11. 2 et 11. 3, supposons  $q = 1$ ; alors  $\gamma_{(k)}$  est un élément  $m$  de  $\mathbf{M}$ , et la relation (6) s'écrit  $\omega_{(k)} \wedge m = 0$ .

Soit, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $X_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{i-1} \in \mathbf{A}^n$ ;

alors on peut prendre  $\chi = X_{i+1}$ , et la relation  $\omega_{(k)} \wedge m = 0$  entraîne  $\omega_{(k)} \wedge \varepsilon = 0$  où  $\varepsilon = m \wedge \left( \bigwedge_{p < i \leq n} X_i \right)$ , soit  $\omega_{(p)} \wedge \varepsilon = 0$ .

L'hypothèse  $P'(p)$  entraîne l'existence d'une famille

$$(\delta_i)_{i \leq i \leq p} \subset {}^{n-p-1}F$$

telle que l'on ait

$$\varepsilon = \varepsilon^{(p-1)} + \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(p-1)} \wedge \delta_i^{[p]}.$$

La relation  $\varepsilon^{(p-1)} = 0$  entraîne

$$\varepsilon = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(p-1)} \wedge \delta_i^{[p]};$$

de cette dernière relation résultent  $\delta_i^{[p]} = 0$  et  $\varepsilon = 0$ , soit  $m = 0$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \alpha_{(k+1)} &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)} + \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_{i(k)} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_{i(k)}, \end{aligned}$$

et la propriété  ${}^1P_{(k+1)}$  est vérifiée.

b) *Réurrences.*

En partant de l'hypothèse  $P' = \bigcap_{p \leq k \leq n} P'(k)$ , en tenant compte du lemme 10. 1 et en utilisant le lemme 11. 1 pour une récurrence sur l'indice  $k$  dans  ${}^{n-p}P^{(k)}$ , on obtient :

LEMME 11. 4. —  $P' \Rightarrow {}^{n-p}P$ .

En appliquant ce lemme à  $F_{(p+q)}$ , on obtient :

LEMME 11. 5. — Pour  $0 \leq q \leq n - p$ ,

$$\bigcap_{p \leq k \leq p+q} P'(k) \Rightarrow {}^qP_{(p+q)}.$$

De ce lemme, on déduit aussitôt :

LEMME 11. 6.

$$P' \Rightarrow \bigcap_{0 < q \leq n-p} {}^qP_{(p+q)}.$$

En effectuant une récurrence sur l'indice  $k$  de  ${}^qP_{(k)}$  à l'aide du lemme 11. 2, on obtient :

LEMME 11. 7. — Pour  $1 < q \leq n - p$ ,

$${}^qP_{(p+q)} \cap \left( \bigcap_{p+q \leq k \leq n} {}^{q-1}P_{(k)} \right) \Rightarrow \bigcap_{p+q \leq k \leq n} {}^qP_{(k)}.$$

Pour  $q = 1$ , le lemme 11. 5 s'écrit

$$P'(p) \cap P'(p + 1) \Rightarrow {}^1P_{(p+1)};$$

en utilisant ce résultat, et en raisonnant par récurrence, à l'aide du lemme 11. 3, sur l'indice  $k$  de  ${}^1P_{(k)}$ , on obtient :

LEMME 11. 8.

$$P'(p) \cap P'(p + 1) \Rightarrow \bigcap_{p < k \leq n} {}^1P_{(k)}.$$

Les résultats obtenus permettent maintenant de démontrer le théorème 10. 1, c'est-à-dire la relation

$$P' \Rightarrow P;$$

en effet, si  $P'$  est réalisée, la condition  $\bigcap_{0 < q \leq n-p} {}^qP_{(p+q)}$  est réalisée en vertu du lemme 11. 6, et aussi la condition  $\bigcap_{p < k \leq n} {}^1P_{(k)}$  en vertu du lemme 11. 8; il résulte alors du lemme 11. 7 que la condition  $\bigcap_{p+q \leq k \leq n} {}^qP_{(k)}$  et, en particulier, la condition  ${}^qP = {}^qP_{(n)}$ , sont réalisées, pour  $1 \leq q \leq n - p$ ; donc  $P = \bigcap_{1 \leq q \leq n-p} {}^qP$  est réalisée.

## 12. Un corollaire du théorème fondamental.

Nous établirons maintenant un corollaire du théorème fondamental, plus maniable que celui-ci; ce corollaire nous permettra d'appliquer notre résultat à l'algèbre des formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable; il fera intervenir certaines matrices, dont les éléments appartiennent à un anneau, et qui généralisent la notion de M-suite, considérée par J.-P. Serre [19]; définissons d'abord ces matrices et des propriétés qui les concernent.

Comme précédemment, nous supposons que  $A$  est un anneau commutatif avec élément unité, et que  $M$  est un

A-module unitaire; soient  $n$  et  $p$  deux nombres entiers vérifiant  $1 \leq p \leq n$ ; soit  $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice d'éléments de A; pour toute suite d'entiers  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ , on désignera par  $\Delta_{i_1, \dots, i_p}$  le déterminant de la matrice  $(\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ j = i_1, \dots, i_p}}$ ; pour tout entier  $k$  vérifiant  $p \leq k \leq n$ , on désignera par  $\Delta_{(k)}$  l'idéal de A engendré par les  $\Delta_{i_1, \dots, i_p}$  pour  $i_p < k$ ; pour toute suite  $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k \leq n$ , on désignera par  $\Omega_{i_1, \dots, i_{p-1}; k}$  l'idéal de A engendré par 0 et les éléments de la matrice

$$\omega_{(i_1, \dots, i_{p-1}; k)} = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p, j < k \\ j \neq i_1, \dots, i_{p-1}}}$$

DÉFINITIONS. — Soit  $k$  un entier vérifiant  $p \leq k \leq n$ . On dira que  $\omega$  satisfait :

a. La propriété  $P''(k)$  si la relation

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k} \Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} \in \Delta_{(k)} \cdot M, \quad \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} \in M$$

entraîne

$$\varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} \in \Omega_{i_1, \dots, i_{p-1}; k} \cdot M;$$

b. La propriété  $Q(k)$  si, pour toute suite d'entiers

$$1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k,$$

$\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k}$  n'est pas diviseur de zéro dans le A-module

$$M/\Omega_{i_1, \dots, i_{p-1}; k} \cdot M;$$

c. La propriété  $P''$  (resp. Q) s'il satisfait la propriété  $P''(k)$  (resp.  $Q(k)$ ) pour tout entier  $k$  vérifiant  $p \leq k \leq n$ .

Cas particuliers. — a. Si  $p = 1$ , si A est un anneau semi-local et si les éléments de  $\omega$  appartiennent au radical de A, dire que  $\omega$  satisfait la condition Q est dire que  $\omega$  est une M-suite de A.

b. Si  $p = 2$ , si on pose  $\omega_1 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $\omega_2 = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ , les propriétés  $P''(k)$  et  $Q(k)$  s'explicitent respectivement comme suit :

i. La relation

$$\sum_{1 \leq j < k} (x_j y_k - x_k y_j) \cdot \varphi_j = \sum_{1 \leq i < j < k} (x_i y_j - x_j y_i) \cdot \psi_{ij}$$

avec  $\varphi_i \in M$  et  $\psi_{ij} \in M$ , entraîne des relations

$$\varphi_i = \sum_{1 \leq j < k, j \neq i} x_j \theta_j + y_j \sigma_j,$$

avec  $\theta_j \in M$  et  $\sigma_j \in M$ , pour les entiers  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq k$ .

ii. Pour tout entier  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq k$ ,  $x_i y_k - x_k y_i$  n'est pas diviseur de zéro dans le  $A$ -module

$$M/(0, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{k-1}).M$$

(où  $M$  est multiplié, au dénominateur, par l'idéal de  $A$  engendré par les éléments qui figurent entre parenthèses, l'accent surmontant un élément signifiant que cet élément est omis).

Les notations que nous venons d'introduire permettent d'énoncer le résultat qui est l'objet de ce paragraphe :

**THÉORÈME 12. 1.** — Soit  $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice vérifiant la condition  $Q$ , et soit  $\omega_i = (\omega_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in {}^1E$ , pour  $1 \leq i \leq p$ ; alors la relation

$$\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_i \right) \wedge \alpha = 0$$

où  $\alpha \in {}^qF$ ,  $1 \leq q \leq n - p$ , entraîne l'existence d'une famille

$$(\beta_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{q-1}F$$

telle que l'on ait

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_i \wedge \beta_i.$$

Ce théorème résulte du théorème 10. 1 et de la comparaison des conditions  $Q(k)$ ,  $P''(k)$  et  $P'(k)$ ; cette comparaison est l'objet des propositions ci-dessous.

**PROPOSITION 12. 1.** —  $Q(k) \implies P''(k)$ .

*Démonstration.* — La condition  $P''(k)$  exprime que la relation

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k} \Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p < k} \Delta_{i_1, \dots, i_p} \cdot \theta_{i_1, \dots, i_p}$$

entraîne des relations

$$(2) \quad \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p, 1 \leq j < k \\ j \neq i_1, \dots, i_{p-1}}} \omega_{i, j} \cdot \psi_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}}$$

où  $\varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}}, \theta_{i_1, \dots, i_p}, \psi_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}}$  sont des éléments de  $M$ . Si on particularise une certaine permutation  $i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ , la relation (1) s'écrit :

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} + \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{p-1} < k \\ (j_1, \dots, j_{p-1}) \neq (i_1, \dots, i_{p-1})}} \Delta_{j_1, \dots, j_{p-1}, k} \varphi_{j_1, \dots, j_{p-1}} = \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_p < k} \Delta_{r_1, \dots, r_p} \theta_{r_1, \dots, r_p}.$$

Dans chaque suite  $1 \leq r_1 < \dots < r_p \leq k$ , il y a au moins un indice qui ne figure pas dans la suite  $i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ ; donc cette relation entraîne

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p, j < k \\ j \neq i_1, \dots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \alpha_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}}$$

et, compte-tenu de cette dernière relation,  $Q(k)$  entraîne (2), q.e.d.

Si nous associons à la matrice  $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la famille  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^1E$  où  $\omega_i = (\omega_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , la comparaison de  $P''(k)$  et de  $P'(k)$  est possible et donne lieu à la proposition suivante :

**PROPOSITION 12. 2.** —  $P''(k) \implies P'(k)$ .

*Démonstration.* — On exprimera à l'aide de la base  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $A^n$ , introduite à la fin de la démonstration du lemme 11. 3, les éléments de  $F$  qui interviennent dans l'expression de  $P'(k)$ , afin d'exprimer  $P'(k)$  à l'aide de conditions relatives à la matrice  $\omega$ .

*i.* Expression de  $\omega_{(k)}$ , de  $\varphi \in {}^{n-p}F^{(k)}$ , et de la condition  $d_{(k)}\varphi = 0$ .  
On a d'abord

$$\omega_{(k)} = \sum_{1 \leq j \leq k} \omega_{i,j} \cdot X_j$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \omega_{(k)} &= \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} = \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq k \\ \dots \\ 1 \leq j_p \leq k}} \omega_{1, j_1} \omega_{2, j_2} \dots \omega_{p, j_p} X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_p} \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k} \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \omega_{1, j_1} \dots \omega_{p, j_p} X_{i_1} \dots X_{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p \leq k} \Delta_{i_1, \dots, i_p} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}. \end{aligned}$$



On définit  $*(X_{i_1} \dots X_{i_p})$ , pour  $i_1 < \dots < i_p \leq k$ , de telle sorte que l'on ait

$$X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p} *(X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}) = (-1)^{i_1 + \dots + i_p + p(p+1)/2} X_1 \dots X_n.$$

Alors un élément  $\varphi$  appartenant à  ${}^{n-p}\mathbb{F}^{(k)}$  s'écrit

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p \leq k} \varphi_{i_1, \dots, i_p} *(X_{i_1} \dots X_{i_p}) \quad \text{avec} \quad \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_p} \in \mathbb{M}$$

et l'on a

$$\omega_{(k)} \wedge \varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p \leq k} (-1)^{i_1 + \dots + i_p + p(p+1)/2} \Delta_{i_1, \dots, i_p} \varphi_{i_1, \dots, i_p} X_1 \dots X_n.$$

La condition  $d_{(k)}\varphi = 0$  s'écrit donc

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p < k} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} \Delta_{i_1, \dots, i_p} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_p} = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 < \dots < i_p < k} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} \Delta_{i_1, \dots, i_p} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_p} \\ & + \sum_{i_1 < \dots < i_{p-1} < k} (-1)^{i_1 + \dots + i_{p-1} + k} \Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} = 0. \end{aligned}$$

Elle entraîne la relation

$$\sum_{i_1 < \dots < i_{p-1} < k} (-1)^{i_1 + \dots + i_{p-1}} \Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \in \Delta_{(k)} \cdot \mathbb{M}$$

ii. *Expression de la condition:  $\varphi$  appartient à  ${}^{n-p}\mathbb{F}^{(k)}$  et sa projection, sur  ${}^{n-p}\mathbb{F}^{[k]}$ , est dans l'image de  $\bigoplus_p {}^{n-p-1}\mathbb{F}^{[k]}$  par  $\delta_{(k)}$ .*

Si  $\psi_i$  appartient à  ${}^{n-p-1}\mathbb{F}^{[k]}$ , on a

$$\psi_i = \sum_{i_1 < \dots < i_p < k} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_p, k} *(X_{i_1} \dots X_{i_p} X_k);$$

compte-tenu de la relation

$$\omega_{i(k-1)} = \sum_{j < k-1} \omega_{i,j} X_j,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \omega_{i(k-1)} \wedge \psi_i &= \sum_{i_1 < \dots < i_p < k} \left( \sum_{1 \leq q \leq p} \omega_{i, i_q} \psi_{i_1, \dots, i_p, k} X_{i_q} *(X_{i_1} \dots X_{i_p} X_k) \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p < k} \left( \sum_{1 \leq q \leq p} (-1)^{i_q - q} \omega_{i, i_q} \cdot \psi_{i_1, \dots, i_p, k} \right. \\ & \quad \left. * (X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_q} \dots X_{i_p} X_k) \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{p-1} < k \\ j < k}} (-1)^{j-1} \omega_{i,j} \psi_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}, k} *(X_{i_1} \dots X_{i_{p-1}} X_k). \end{aligned}$$

La projection de  $\varphi$  dans  ${}^{n-p}F^{[k]}$  étant égale à

$$\varphi^{[k]} = \sum_{i_1 < \dots < i_{p-1} < k} \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}, k}^* (X_{i_1} \dots X_{i_{p-1}} X_k),$$

la condition considérée est l'existence d'éléments  $\psi_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}, k}$  de  $M$ , pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ ,  $1 \leq j < k$ ,  $j \neq i_1, \dots, i_{p-1}$ , tels que l'on ait

$$\varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j < k}} (-1)^{j-1} \omega_{i, j} \cdot \psi_{i, j, i_1, \dots, i_{p-1}, k};$$

cette condition s'écrit alors :

$$\varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \in \Omega_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot M.$$

Terminons la démonstration de la proposition 12. 2; si  $P''(k)$  est réalisée, la relation obtenue à la fin de  $i$  entraîne la relation obtenue à la fin de  $ii$ , donc la condition exprimée en  $i$  entraîne la condition exprimée en  $ii$ , et  $P'(k)$  est réalisée, q.e.d.

Les propositions 12. 1 et 12. 2 et le théorème 10. 1 fournissent les relations

$$Q \implies P'' \implies P' \implies P$$

d'où résulte  $Q \implies P$ ; cette dernière relation équivaut au théorème 12. 1, qui se trouve donc démontré.

### 13. Application à l'algèbre des formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable.

Afin d'appliquer les résultats qui précèdent aux formes différentielles extérieures sur une variété différentiable, nous devons introduire quelques définitions. Soit  $A$  l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables dans l'espace euclidien  $R^n$ , et soit  $M$  le  $A$ -module  $A$  ou le  $A$ -module des fonctions indéfiniment différentiables à support compact; nous conserverons les notations introduites au début du paragraphe 12.

**DÉFINITION.** — Nous dirons que la matrice  $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  vérifie la propriété  $R$  si :

- a.  $\Delta_{i_1, \dots, p}$  ne s'annule identiquement dans aucun ouvert;
- b. Pour tout entier  $k$  vérifiant  $p \leq p(k-p) \leq n-1$ , et toute suite d'entiers  $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ ,  $\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k}$  et les éléments de la matrice  $\omega_{(i_1, \dots, i_{p-1}, k)}$  sont  $p(k-p) + 1$  fonctions

appartenant à un système de coordonnées de  $R^n$  (ne s'annulant qu'en  $O$ );

c. Pour tout entier  $k$  vérifiant  $n-1 < p(k-p) \leq p(n-p)$  et toute suite d'entiers  $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ ,  $\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k}$  et les éléments de la matrice  $\omega_{(i_1, \dots, i_{p-1}, k)}$  ne s'annulent pas simultanément.

Cette définition permet d'énoncer notre résultat relatif aux formes différentielles extérieures.

**THÉORÈME 13. 1.** — Soit  $V$  une variété indéfiniment différentiable, de dimension  $n$ , et soit  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq p}$ ,  $p < n$ , une famille de formes différentielles indéfiniment différentiables, homogènes de degré un, vérifiant la condition suivante: pour tout point  $O$  de  $V$ , il existe un voisinage  $U$  de  $O$  et un système  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  de coordonnées locales dans  $U$ , de telle sorte que, si on pose

$$\omega_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \omega_{ij} d\xi_j, \quad 1 \leq i \leq p$$

dans  $U$ , la matrice  $\omega = (\omega_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$  vérifie la condition R. Soit  $\alpha$  une forme différentielle, indéfiniment différentiable, homogène, de degré  $q$ ,  $1 \leq q \leq n-p$ , dans  $V$ , vérifiant la relation

$$\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \omega_i \right) \wedge \alpha = 0$$

dans  $V$ ; alors il existe une famille  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$  de formes indéfiniment différentiables, homogènes, de degré  $q-1$ , dans  $V$ , telles que l'on ait

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_i \wedge \beta_i$$

dans  $V$ . Si  $\alpha$  est à support compact, les formes  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , peuvent être choisies à support compact.

Ce théorème résulte du théorème 12. 1 et de la comparaison des conditions Q et R, réalisée par la Proposition suivante.

**PROPOSITION 13. 1.** —  $R \Rightarrow Q$ .

*Démonstration.* — Il s'agit de montrer que, si la condition R est réalisée, alors, pour tout entier  $k$  vérifiant  $p \leq k \leq n$ , et toute suite d'entiers  $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} < k$ , les relations

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p, j < k \\ j \neq i_1, \dots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \alpha_{i,j, i_1, \dots, i_{p-1}}$$

entraînent des relations

$$\varphi_{i_1, \dots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p, j < k \\ j \neq i_1, \dots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \psi_{i,j,i_1, \dots, i_{p-1}}.$$

Or, le problème a été résolu, dans le cas  $p = 1$ , par G. de Rham [15], qui a obtenu le résultat suivant :

Si l'on a  $\omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ , les  $\omega_i$  formant un système de coordonnées dans  $R^n$  et ne s'annulant simultanément qu'au point O, alors la condition Q est réalisée pour la famille réduite à la forme différentielle  $\omega$ .

Compte-tenu de la condition R, ce résultat de G. de Rham permet de résoudre le système d'équations ci-dessus de la manière désirée.

*Remarques.* — a) Dans le cas  $p = 1$ , le théorème 13. 1 est un résultat connu de G. de Rham [15].

b) Dans le cas général, pour appliquer ce théorème, il faut vérifier qu'une certaine matrice de fonctions vérifie la propriété R; la partie essentielle de cette vérification consiste à prouver la condition b) de la définition ci-dessus, c'est-à-dire à prouver que la matrice jacobienne de  $\Delta_{i_1, \dots, i_{p-1}, k}$  et des éléments de  $\omega_{(i_1, \dots, i_{p-1}, k)}$  est de rang maximum (c'est-à-dire  $p(k - p) + 1$ ) en O si ces fonctions s'annulent simultanément en O.

Si l'on a  $p = 2$  et  $n = 3$ , alors on a aussi  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  avec  $\omega_1 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $\omega_2 = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ; si  $x_1, x_2, y_1$  et  $y_2$  s'annulent simultanément en O, la condition R exprime que les fonctions

$$y_3 \frac{D(x_1, y_1, x_2)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} - x_3 \frac{D(x_1, y_1, y_2)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

et

$$y_3 \frac{D(x_2, y_2, x_1)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} - x_3 \frac{D(x_2, y_2, y_1)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

ne s'annulent pas en O, et que  $x_1 y_2 - x_2 y_1$  ne s'annule pas identiquement dans un ouvert.

La condition R est réalisée pour l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} s_1 &= (\xi_1 + \xi_2) \cdot \xi_3 + (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2, & s_2 &= \xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_3, \\ \omega_1 = ds_1 &= (2\xi_1 + \xi_3) d\xi_1 + (2\xi_2 + \xi_3) d\xi_2 + (\xi_1 + \xi_2) d\xi_3, \\ \omega_2 = ds_2 &= \xi_2 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_2 + d\xi_3. \end{aligned}$$

## CHAPITRE IV

### REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXÉS.

#### 14. La formule de Cauchy-Fantappiè.

Nous montrerons, dans ce chapitre, que les formules intégrales de E. Martinelli [7] et de A. Weil [21] sont des conséquences de la formule de Cauchy-Fantappiè utilisée par J. Leray [5]. Pour cela, nous déduirons, de la formule de Cauchy-Fantappiè, une formule intégrale très générale (A) permettant d'exprimer la valeur d'une fonction holomorphe en un point quelconque d'un domaine, à l'aide des valeurs prises par cette fonction sur la frontière du domaine; nous montrerons ensuite que la formule (A) admet comme cas particuliers les formules intégrales de E. Martinelli et de A. Weil; plus précisément, au cours des calculs conduisant à la formule de A. Weil, nous obtiendrons une formule (B) plus générale que celle de A. Weil, mais dont le noyau présente le même caractère de simplicité. La principale difficulté rencontrée dans ce chapitre réside dans les calculs permettant de particulariser la formule (A) afin d'obtenir les intégrales de E. Martinelli et de A. Weil. La formule (A) admet d'autres cas particuliers intéressants, qui seront exposés ailleurs. Dans ce premier paragraphe, nous rappellerons l'expression et la démonstration de la formule de Cauchy-Fantappiè.

Soient  $X$  un domaine convexe d'un espace affín complexe  $E$  de dimension complexe  $n$ ;  $\Xi$  l'espace vectoriel complexe (de dimension complexe  $n + 1$ ) des fonctions linéaires affines dans  $E$ , à valeurs complexes;  $\Xi^*$  l'espace projectif complexe (de dimension complexe  $n$ ) quotient de  $\Xi - \{0\}$  par le groupe

des homothéties de rapport non nul de  $\Xi$ . On désignera par  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ ) des coordonnées dans  $E$  (resp.  $\Xi$ ) telles que la valeur prise par la fonction linéaire  $\xi$  (appartenant à  $\Xi$ ) au point  $x$  de  $E$  soit égale à

$$\xi \cdot x = \xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i.$$

On définit les formes différentielles extérieures

$$\omega(x) = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i, \quad \omega'(\xi) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\xi_i;$$

ainsi

$$(\xi \cdot y)^{-n} \omega'(\xi)$$

est, pour tout  $y \in X$ , une forme différentielle extérieure dans  $\Xi$ , image réciproque d'une forme différentielle holomorphe dans  $\Xi^*$ , qui sera représentée par la même expression; nous appellerons noyau de Cauchy-Fantappiè la forme différentielle extérieure

$$\Phi(x, y) = (\xi \cdot y)^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

définie dans  $\Xi^* \times X$ .

Dans  $\Xi^* \times X$ , soit  $Q$  la quadrique d'équation  $\xi \cdot x = 0$ , et, pour tout  $y \in X$ , soit  $P(y)$  l'hyperplan d'équation  $\xi \cdot y = 0$ ; ainsi que l'a montré J. Leray [5], l'espace vectoriel  $H_c(Q - P(y) \cap Q)$  d'homologie, à supports compacts et à coefficients complexes, de  $Q - P(y) \cap Q$ , est engendré par deux classes d'homologie, de dimensions (réelles) respectives 0 et  $2n - 1$ ; le point  $(\xi^*, x)$  décrit un cycle appartenant à cette dernière classe quand  $x$  décrit la frontière  $K$  d'un domaine borné, contenant  $y$  et contenu dans  $X$ ,  $\xi^*$  variant continûment, en fonction de  $x$ , de sorte que l'on ait

$$\xi \cdot x = 0, \quad \xi \cdot y \neq 0;$$

considérons en particulier le cycle  $\beta$  défini par les relations

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 = \varepsilon^2, \quad \xi_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \xi \cdot x = 0$$

et orienté de telle sorte que l'on ait

$$(1) \quad \int_{\beta} (i(\xi \cdot y))^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x) > 0;$$

soit  $h(Q - P(y) \cap Q)$  la classe d'homologie compacte contenant le cycle  $\beta$ ; cette classe engendre le sous-groupe de

$$H_c(Q - P(y) \cap Q)$$

de dimension (réelle)  $2n - 1$ ; elle permet d'écrire la *formule de Cauchy-Fantappiè*

$$(2) \quad f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{h(Q-P(y) \cap Q)} f(x)(\xi \cdot y)^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $X$ .

Pour démontrer cette formule, J. Leray utilise une méthode, due à H. Lewy, qui consiste à intégrer explicitement sur le cycle  $\beta$ ; on est alors amené à établir la relation

$$(3) \quad f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \times \int_{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 = \varepsilon^2} \frac{f(x) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} (\bar{x}_k - \bar{y}_k) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\bar{x}_i \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 \right)^n},$$

la sphère de centre  $y$ , de rayon  $\varepsilon$ , étant orientée de manière convenable (c'est-à-dire telle que l'inégalité (1) soit réalisée); en considérant successivement le cas où  $f(x) = 1$  dans  $X$  et celui où  $f(y) = 0$ , on établit aisément ce résultat et on voit que l'orientation convenable de la sphère est son orientation naturelle (de l'intérieur vers l'extérieur) dans  $X$ . Il convient de noter que la relation (3) est la première formule intégrale de E. Martinelli [6]; grâce au choix d'un cycle particulier  $\beta$  dans la classe d'homologie  $h(Q - P(y) \cap Q)$ , la démonstration de cette formule se révèle équivalente à celle de la formule de Cauchy-Fantappiè; rappelons enfin, pour préciser le sens de la relation (3), que le noyau

$$K_0 = \frac{\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} (\bar{x}_k - \bar{y}_k) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\bar{x}_i \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 \right)^n}$$

est fermé, qu'il est la différentielle  $(1-n)^{-1} d'H_0$ , par rapport

aux variables complexes  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la forme différentielle extérieure

$$H_0 = \frac{\sum_{1 \leq k \leq n} \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} dx_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\bar{x}_i \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 \right)^n},$$

et que, considéré comme courant, il vérifie la relation

$$dK_0 = d^n K_0 = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \delta_y$$

(où  $\delta_y$  désigne un courant défini au début du paragraphe 3).

En remplaçant la sphère, qui a permis de construire le cycle  $\beta$ , par la frontière d'un domaine, supposée différentiable par morceaux, nous obtiendrons, au paragraphe 18, la formule générale (A), et les formules intégrales de E. Martinelli et de A. Weil; les calculs permettant de déduire les noyaux de ces formules du noyau de Cauchy-Fantappiè seront effectués dans les paragraphes 15, 16 et 17; la démonstration d'une identité utilisée, dans le paragraphe 16, pour le calcul du noyau de E. Martinelli, est rejetée à la fin du chapitre, dans le paragraphe 19.

**15. Noyau général, dans l'espace affín, déduit du noyau de Cauchy-Fantappiè.**

La diagonale du produit  $X \times X$  étant désignée par  $\Delta$ , soit  $(\psi^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$ ,  $r \leq n$ , une famille d'applications continues et dérivables de  $X \times X - \Delta$  dans  $\Xi$  telles que, pour tout

$$(x, y) \in X \times X - \Delta,$$

la famille de vecteurs  $(\psi^\alpha(x, y))_{1 \leq \alpha \leq r}$  soit libre sur le corps des nombres réels et vérifie les relations  $(\psi^\alpha(x, y)) \cdot x = 0$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ ; les coordonnées du vecteur  $\psi^\alpha(x, y)$  seront désignées par  $(\psi_j^\alpha)_{0 \leq j \leq n}$ . Soit  $t(x, y)$  l'ensemble engendré par les vecteurs

$$\xi(x, y, \lambda) = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi^\alpha(x, y)$$

lorsque les nombres réels  $\lambda_\alpha$  varient en vérifiant les relations

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq r, \quad \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha = 1;$$



soit  $T(y)$  la partie de  $\Xi \times X$  engendrée par l'ensemble  $t(x, y) \times \{x\}$  lorsque  $x$  décrit  $X - \{y\}$ ; la restriction  $p(y)$  à  $T(y)$  de la projection canonique de  $\Xi \times X$  sur  $X$  est une fibration de  $T(y)$  sur  $X - \{y\}$  par des simplexes de dimension réelle  $r - 1$ .

THÉORÈME 15.1. — *La composante homogène, de degré  $2n - r$ , de la forme différentielle obtenue en intégrant le noyau de Cauchy-Fantappiè sur les fibres de  $p(y)$ , est*

$$(4) \quad K(x, y) = \int_{\substack{\lambda_\alpha > 0 \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \lambda_\alpha (y_i - x_i) \psi_i^\alpha \right)^{-n} \Omega(x, y, \lambda)$$

où l'on a

$$\Omega(x, y, \lambda) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, 1 \leq \beta \leq r \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{n-r} \leq n}} (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha \right) \det M_{k\beta i_1 \dots i_{n-r}} \\ \times \left( \bigwedge_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq r} d\lambda_\alpha \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n-r} d\bar{x}_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right),$$

la matrice  $M_{k\beta i_1 \dots i_{n-r}}$  étant définie par

$$M_{k\beta i_1 \dots i_{n-r}} = \left( (\psi_j^\alpha)_{\substack{1 \leq \alpha \leq r, \alpha \neq \beta \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}}, \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{i_s}} \right)_{\substack{1 \leq s \leq n-r \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \right).$$

En effet, le noyau de Cauchy-Fantappiè a pour expression

$$\Phi(x, y) = (\xi \cdot y)^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

avec 
$$\omega'(\xi) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} d\xi_i \right)$$

et 
$$\omega(x) = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i.$$

Sur  $T(y)$ , on a 
$$\xi_i = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_i^\alpha$$

et

$$d\xi_i = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_\alpha \left( \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j \right)$$

Seule, ne sera pas annulée, au cours de la multiplication extérieure par  $\omega(x)$ , la partie de  $d\xi_i$  qui s'écrit

$$[d\xi_i] = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j;$$

donc, seule ne sera pas annulée, au cours de cette multiplication, la partie de  $\omega'(\xi)$  qui s'écrit

$$[\omega'(\xi)] = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha \right) \times \bigwedge_{1 \leq i \leq n}^{i \neq k} \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j \right);$$

la forme différentielle  $K(x, y)$  étant homogène de degré  $2n - r$ , est homogène de degré  $n$  par rapport aux  $dx_i$ , et de degré  $n - r$  par rapport aux  $d\bar{x}_j$ ; donc, la seule composante de  $[\omega'(\xi)]$ , qui intervient dans le calcul de  $K(x, y)$ , est homogène de degré  $n - r$  par rapport aux  $d\bar{x}_j$ , et de degré  $r - 1$  par rapport aux  $d\lambda_\alpha$ ; c'est donc

$$[[\omega'(\xi)]] = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha \right) \times \left( \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq r \\ 1 < l_1 < \dots < l_{n-r} \leq n}} \det. M_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}} \left( \bigwedge_{1 \leq \alpha \leq r}^{\alpha \neq \beta} d\lambda_\alpha \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq v \leq n-r} d\bar{x}_{l_v} \right) \right)$$

où  $M_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}}$  est la matrice définie dans l'énoncé du théorème 15. 1.

*Remarque.* — L'intégration qui apparaît dans l'expression de  $K(x, y)$  est celle d'une fraction rationnelle par rapport aux  $\lambda_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ ; cette intégration peut donc être effectuée explicitement; toutefois, nous ne ferons ici ce calcul que dans le cas particulier où il conduit aux noyaux de E. Martinelli (voir § 16). Si  $\psi^\alpha$  admet une expression de la forme

$$\psi^\alpha = \pm (\theta^\alpha \cdot y)^{-1} \theta^\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq r,$$

l'intégration devient celle d'un polynôme, ainsi qu'il résultera du théorème 15. 2 ci-dessous; le calcul sera effectué dans le cas particulier fournissant le noyau de A. Weil et un noyau analogue (voir § 17).

**THÉORÈME 15. 2.** — Soit  $(\theta^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$  une famille d'applications continues et dérivables de  $X \times X - \Delta$  dans  $\Xi$ , telle que l'on ait les relations

$$\psi^\alpha = \left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \right)^{-1} \theta^\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq r.$$

Alors on a

$$K(x, y) = (-1)^n \int_{\substack{\lambda_\alpha > 0 \\ \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha = 1}} \Omega'(x, y, \lambda)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega'(x, y, \lambda) = & \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, 1 \leq \beta \leq r \\ 1 \leq l_1 < \dots < l_{n-r} \leq n}} (-1)^{k-1} \\ & \times \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \frac{\lambda_\alpha \theta_k^\alpha}{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha} \right) \frac{\det N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}}}{\prod_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq r} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \right)} \\ & \times \left( \bigwedge_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq r} d\lambda_\alpha \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq v \leq n-r} d\bar{x}_{l_v} \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right), \end{aligned}$$

la matrice  $N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}}$  étant définie par

$$\begin{aligned} N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}} = & \begin{pmatrix} (\theta_j^\alpha)_{\substack{1 \leq \alpha \leq r, \alpha \neq \beta, \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \\ \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \lambda_\alpha \left( \theta_i^\alpha \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_v}} - \theta_j^\alpha \frac{\partial \theta_i^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_v}} \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \right)^2} \right)_{\substack{1 \leq v \leq n-r \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, compte-tenu des relations

$$\psi^\alpha = \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^\alpha \right)^{-1} \theta^\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq r,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \lambda_\alpha (y_i - x_i) \psi_i^\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \frac{\lambda_\alpha (y_i - x_i) \theta_i^\alpha}{\sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^\alpha} = - \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha = -1$$

et

$$\begin{aligned} M_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}} = & \left( \left( \frac{\theta_j^\alpha}{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq \alpha \leq r, \alpha \neq \beta \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \right), \\ & \left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \lambda_\alpha \left( \theta_i^\alpha \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_v}} - \theta_j^\alpha \frac{\partial \theta_i^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_v}} \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \right)^2} \right)_{\substack{1 \leq v \leq n-r \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\det M_{k\beta_1 \dots \iota_{n-r}} = \left( \prod_{1 \leq \alpha \leq r} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \right) \right)^{-1} \det N_{k\beta_1 \dots \iota_{n-r}};$$

En substituant les expressions obtenues à celles qui figurent dans l'énoncé du théorème 15. 1, on obtient le théorème 15. 2.

**16. Les noyaux de E. Martinelli.**

Effectuons l'intégration, qui figure dans l'expression de  $K(x, y)$  donnée au théorème 15. 1, pour un choix particulier des fonctions  $\psi^\alpha$ , conduisant aux noyaux de E. Martinelli; le résultat de ce calcul est exprimé par le théorème suivant :

**THÉORÈME 16. 1.** — *Si l'on a*

$$\psi_j^\alpha = \frac{\partial \rho_i^\alpha}{\partial x_j}, \quad 1 \leq \alpha \leq r, \quad 1 \leq r \leq n - p, \quad 1 \leq j \leq n$$

et

$$\rho_i^\alpha = \left( \sum_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j|^2 \right) + |x_i - y_i|^2, \quad p < i \leq n,$$

alors on a  $K(x, y) = 0$  pour  $r < n - p$ , et, pour  $r = n - p$ ,  $K(x, y)$  est la somme d'une forme différentielle qui s'annule sur la sous-variété de  $X - \{y\}$  où s'annulent simultanément les fonctions  $\rho_\alpha^2 - 1$ ,  $p < \alpha \leq n$ , et de la forme différentielle extérieure

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{(p-1)!}{(n-1)!} \left( \prod_{1 \leq i \leq n} (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \right) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \\ &\quad \wedge \sum_{p < i \leq n} \left[ \sum_{\substack{\beta_j \geq 0 \\ \sum_{j < p \leq n} \beta_j = p}} \beta_i \prod_{p < j \leq n} \rho_j^{-2(\beta_j + 1)} \right] \\ &\times \left[ \left( \bigwedge_{1 \leq h \leq p} \frac{d\bar{x}_h}{\bar{x}_h - \bar{y}_h} \right) - \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k-1} \frac{d\bar{x}_i}{\bar{x}_i - \bar{y}_i} \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq h \leq p, h \neq k} \frac{d\bar{x}_h}{\bar{x}_h - \bar{y}_h} \right) \right] \end{aligned}$$

que nous appellerons *noyau de E. Martinelli*.

Dans la démonstration de ce théorème, nous poserons  $\sigma_j = \bar{x}_j - \bar{y}_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ ; nous aurons alors

$$\psi_j^\alpha = \begin{cases} \sigma_j & \text{pour } 1 \leq j \leq p \quad \text{ou pour } j = i_\alpha, \\ 0 & \text{pour } p < j < i_\alpha \quad \text{ou pour } i_\alpha < j \leq n; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_j^\alpha &= \begin{cases} \sigma_j & \text{pour } i \leq j \leq p, \\ \lambda_j \sigma_j & \text{pour } j = i_\alpha, \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } j, \quad 1 \leq j \leq n; \end{cases} \\
 \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \bar{x}_l} &= \begin{cases} 1 & \text{pour } 1 \leq j = l \leq p, \\ \lambda_\alpha & \text{pour } j = l = i_\alpha, \\ 0 & \text{dans les autres cas;} \end{cases} \\
 \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \lambda_\alpha (y_j - x_j) \psi_j^\alpha \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq p} (y_j - x_j) (\bar{x}_j - \bar{y}_j) + \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha (y_{i_\alpha} - x_{i_\alpha}) (\bar{x}_{i_\alpha} - \bar{y}_{i_\alpha}).
 \end{aligned}$$

La matrice  $M_{k\beta i_1 \dots i_{n-r}}$  est obtenue en supprimant, de la matrice M écrite ci-dessous, la ligne d'indice  $k$  et la colonne d'indice  $\beta$ , et en ne conservant, parmi les colonnes d'indice  $> r$ , que celles d'indices  $n - p + l_1, \dots, n - p + l_{n-r}$ .

$$M = \begin{pmatrix}
 \sigma_1 & \dots & \sigma_1 & \dots & \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \sigma_2 & \dots & \sigma_2 & \dots & \sigma_2 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \sigma_p & \dots & \sigma_p & \dots & \sigma_p & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & \sigma_{i_\alpha} & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{i_r} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
 \end{pmatrix}$$

Pour que le déterminant de la matrice obtenue ne soit pas

nul, il est nécessaire que l'on ait  $p + r \geq n - 1$ ; mais, si l'on a  $p + r = n - 1$ , le terme

$$\sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha$$

qui multiplie le déterminant (dans l'expression de  $K(x, y)$  fournie par le théorème 15. 1) est nul (car on a  $k > p$  et  $k \neq i_\alpha$  pour  $1 \leq \alpha \leq r$ ); donc la forme différentielle  $K(x, y)$  est nulle pour  $r < n - p$ ; pour  $r = n - p$ , on a

$$K(x, y) = (-1)^n \int_{\substack{\lambda_j \geq 0 \\ \sum_{p < j \leq n} \lambda_j = 1}} \left( \sum_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j|^2 + \sum_{p < j \leq n} \lambda_j |x_j - y_j|^2 \right)^{-n} \Omega(x, y, \lambda);$$

la matrice écrite ci-dessus devient, pour  $p + r = n - 1$ ,

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & \vdots & \sigma_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \vdots & \sigma_2 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_p & \sigma_p & \vdots & \sigma_p & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{p+1} & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+1} & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_{p+2} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \sigma_n & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les seuls déterminants non trivialement nuls qui interviennent dans l'expression de  $\Omega(x, y, \lambda)$  sont (l'accent qui surmonte un indice signifiant que cet indice est omis) :

i) pour  $1 \leq k \leq p$ ,

$$(a) \det M_{k, \beta, i, \dots, k, \dots, p, p+\beta} = (-1)^{np+\beta-1} \lambda_{p+\beta} \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta}} \sigma_j$$

$$(b) \det M_{k, \beta, i, \dots, \hat{\alpha}, \dots, k, \dots, p, p+\gamma, p+\beta} \\ = (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta-1} \lambda_{p+\gamma} \lambda_{p+\beta} \sigma_\alpha \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta \\ j \neq p+\gamma}} \sigma_j$$

$$(c) \det M_{k, \beta, i, \dots, k, \dots, \hat{\alpha}, \dots, p, p+\gamma, p+\beta} \\ = (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta} \lambda_{p+\gamma} \lambda_{p+\beta} \sigma_\alpha \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\gamma \\ j \neq p+\beta}} \sigma_j$$

et les deux termes, analogues à (b) et (c), avec  $\beta < \gamma$ ;

ii. Pour  $p < k \leq n$ ,

$$(d) \det M_{p+\beta, \beta, i, \dots, p} = (-1)^{np} \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta}} \sigma_j$$

$$(e) \det M_{p+\beta, \beta, i, \dots, \hat{\alpha}, \dots, p, p+\gamma} \\ = (-1)^{(n-1)p+\alpha-1} \lambda_{p+\gamma} \sigma_\alpha \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta \\ j \neq p+\gamma}} \sigma_j \text{ pour } \gamma \neq \beta$$

$$(f) \det M_{p+\gamma, p+\beta, i, \dots, \hat{\alpha}, \dots, p, p+\beta} \\ = (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta+\gamma} \lambda_{p+\beta} \sigma_\alpha \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta \\ j \neq p+\gamma}} \sigma_j \text{ pour } \gamma \neq \beta$$

L'expression (a) fournit, dans  $\Omega(x, y, \lambda)$ , le terme

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \beta \leq n-p}} (-1)^{k+\beta} \lambda_{p+\beta} \sigma_k \left( \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta}} \sigma_j \right) \left( \bigwedge_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta}} d\lambda_j \right) \\ \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} d\bar{x}_i \right) \wedge d\bar{x}_{p+\beta};$$

les expressions (b) et (c), dans lesquelles  $\alpha$  et  $k$  jouent des rôles symétriques, fournissent des termes dont la somme est nulle; il en est de même pour leurs analogues avec  $\beta < \gamma$ ; l'expression (d) fournit le terme

$$\sum_{1 \leq \beta \leq n-p} (-1)^{p+\beta+1} \lambda_{p+\beta} \left( \prod_{p < j \leq n} \sigma_j \right) \left( \bigwedge_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta}} d\lambda_j \right) \\ \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq p} d\bar{x}_i \right);$$

enfin les expressions (e) et (f) fournissent le terme

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \beta < \gamma \leq n-p}} (-1)^{k+\beta+\gamma} \lambda_{p+\beta} \lambda_{p+\gamma} \sigma_k \left( \prod_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta \\ j \neq p+\gamma}} \sigma_j \right) (d\lambda_{p+\beta} + d\lambda_{p+\gamma}) \\ \wedge \left( \bigwedge_{\substack{p < j \leq n \\ j \neq p+\beta \\ j \neq p+\gamma}} d\lambda_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} d\bar{x}_i \right) \\ \wedge (\sigma_{p+\beta} d\bar{x}_{p+\gamma} - \sigma_{p+\gamma} d\bar{x}_{p+\beta}).$$

Considérons les sous-variétés de  $X - \{y\}$  sur lesquelles toutes les fonctions  $\rho_i$ ,  $p < i \leq n$ , sont constantes; sur une telle sous-variété, nous avons les relations

$$(x_{p+\beta} - y_{p+\beta}) \sigma_{p+\beta} - (x_{p+\gamma} - y_{p+\gamma}) \sigma_{p+\gamma} = 0$$

et

$$\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \left( (x_{p+\beta} - y_{p+\beta}) d\bar{x}_{p+\beta} - (x_{p+\gamma} - y_{p+\gamma}) d\bar{x}_{p+\gamma} \right) = 0;$$

il en résulte

$$\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge (\sigma_{p+\beta} d\bar{x}_{p+\gamma} - \sigma_{p+\gamma} d\bar{x}_{p+\beta}) = 0$$

et le terme fourni par (e) et (f) s'annule sur les sous-variétés considérées. Donc, pour  $r = n - p$ ,  $K(x, y)$  est la somme d'une forme différentielle qui s'annule sur ces sous-variétés, et de la forme différentielle

$$H(x, y) = (-1)^n \left( \prod_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \right) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \\ \wedge \sum_{p < i < n} (-1)^{i-1} \left[ \int_{\substack{\lambda_j > 0 \\ \sum_{p < j \leq n} \lambda_j = 1}} \frac{\lambda_i \left( \bigwedge_{p < j \leq n, j \neq i} d\lambda_j \right)}{\left( \sum_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j|^2 + \sum_{p < j \leq n} \lambda_j |x_j - y_j|^2 \right)^n} \right] \\ \times \left[ \left( \bigwedge_{1 \leq h \leq p} \frac{d\bar{x}_h}{\sigma_h} \right) - \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k-1} \frac{d\bar{x}_i}{\sigma_i} \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq h \leq p, h \neq k} \frac{d\bar{x}_h}{\sigma_h} \right) \right].$$

Le calcul de l'intégrale qui figure dans cette expression est l'objet du paragraphe 19, où le résultat est fourni par le théorème 19. 2; compte-tenu de ce résultat, on obtient le théorème 16. 1. Ce théorème nous fournit un résultat qui sera



utilisé, dans le paragraphe 18, pour établir les formules intégrales de E. Martinelli.

### 17. Le noyau de A. Weil.

Nous supposons maintenant que les fonctions  $\theta_j^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ ,  $1 \leq j \leq n$ , qui figurent dans l'énoncé du théorème 15. 2, sont holomorphes par rapport à  $x$ , et nous calculerons explicitement l'intégrale exprimant la forme différentielle  $K(x, y)$ ; nous obtiendrons ainsi le théorème suivant.

**THÉORÈME 17. 1.** — *Si les applications  $\theta_j^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ , vérifiant les hypothèses du théorème 15. 2, sont holomorphes par rapport à  $x$ , alors on a  $K(x, y) = 0$  pour  $r < n$ , tandis que, pour  $r = n$ , on a*

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i \right)^{-1} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j^i dx_j \right);$$

cette forme différentielle sera appelée *noyau de A. Weil généralisé*.

La simplicité de cette expression est due à celle de la matrice  $N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}}$ , sous les hypothèses de ce théorème; on a en effet

$$N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}} = \left( (\theta_j^\alpha)_{\substack{1 \leq \alpha \leq r, \alpha \neq \beta \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \right) 0$$

où 0 désigne la matrice à  $n - 1$  lignes et  $n - r$  colonnes dont tous les éléments sont nuls; pour que le déterminant de la matrice  $N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}}$  ne soit pas nul, il faut que l'on ait  $r = n$ ; dans ce cas, on a

$$\det N_{k\beta} = \det \left( (\theta_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n, i \neq \beta \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \Omega'(x, y, \lambda) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \beta \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} (-1)^{k+i} \frac{\lambda_i \theta_k^i}{\sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i} \\ &\times \frac{\det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right)}{\prod_{\substack{1 \leq h \leq n \\ h \neq \beta}} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^h \right)} \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq \beta}} d\lambda_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq j \leq n} dx_j \right). \end{aligned}$$

On obtient alors la relation

$$K(x, y) = (-1)^n \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \beta \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(-1)^{k+i} \theta_k^i}{\sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i} \times \left[ \int_{\substack{\lambda_j > 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1}} \lambda_i \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq \beta}} d\lambda_j \right) \frac{\det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right)}{\prod_{\substack{1 \leq h \leq n \\ h \neq \beta}} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^h \right)} \left( \bigwedge_{1 \leq j \leq n} dx_j \right) \right].$$

Or on établit aisément la formule

$$\int_{\substack{\lambda_j > 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1}} \lambda_i \left( \bigwedge_{1 \leq j \leq n, j \neq \beta} d\lambda_j \right) = \frac{(-1)^{\beta-1}}{n!} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

On obtient donc

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \beta \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(-1)^{k+\beta} \theta_k^i \det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right) \left( \bigwedge_{1 \leq j \leq n} dx_j \right)}{\left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i \right) \prod_{\substack{1 \leq h \leq n \\ h \neq \beta}} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^h \right)}$$

En vertu des relations

$$\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+\beta} \theta_k^\beta \det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right) = \det \left( (\theta_l^h)_{1 \leq h \leq n, 1 \leq l \leq n} \right)$$

et  $\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+i} \theta_k^i \det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right) = 0, \quad i \neq \beta,$

on obtient enfin

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left( \prod_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i \right) \right)^{-1} \times \det \left( (\theta_l^h)_{\substack{1 \leq h \leq n, h \neq \beta \\ 1 \leq l \leq n, l \neq k}} \right) \cdot \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right)$$

d'où résulte l'expression indiquée dans le théorème 17.1.

En particulierisant les fonctions  $\theta_j^i(x, y)$  qui figurent dans ce théorème, on obtient les corollaires suivants :

**COROLLAIRE 17. 1.** — Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de fonctions holomorphes dans  $X$ , et soit

$$\theta_j^i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n;$$

on a alors

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{n!} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)^{-1} \cdot dX_i$$

**COROLLAIRE 17. 2.** — Soient  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de fonctions holomorphes dans  $X$ , et  $(P_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n}$  une famille de fonctions holomorphes dans  $X \times X$ , vérifiant les relations

$$X_i(x) - X_i(y) = \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) P_{ij}(x, y), \quad 1 \leq i \leq n;$$

soit enfin

$$\theta_j = P_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n;$$

on a alors

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (X_i(x) - X_i(y))^{-1} \cdot \left( \sum_{1 \leq j \leq n} P_{ij} dx_j \right)$$

Ce dernier noyau est celui qui figure effectivement dans la formule intégrale de A. Weil. C'est cette formule que nous allons maintenant déduire, ainsi que celles de E. Martinelli, de la formule de Cauchy-Fantappiè.

### 18. Démonstration de formules intégrales à l'aide de la formule de Cauchy-Fantappiè.

Les considérations des paragraphes 15, 16 et 17 ne nécessitaient aucune hypothèse sur le domaine  $X$ ; nous devons maintenant supposer  $X$  convexe, afin d'écrire la formule de Cauchy-Fantappiè; pour écrire cette formule, nous déterminerons un cycle particulier appartenant à  $h(Q - P(y) \cap Q)$ .

Supposons  $y$  fixé; soit alors  $K$  un domaine borné vérifiant  $y \in K \subset X$ ; supposons la frontière de  $K$  réunion finie

$$S = \bigcup_{1 \leq i \leq u} S_i$$

de parties d'hypersurfaces régulières (de dimension réelle  $2n - 1$ ) dont un nombre quelconque possèdent toujours une intersection régulière; soit  $\eta^i$  une application continue et dérivable d'un voisinage  $U_i$  de  $\bar{S}_i$  dans  $\bar{E}$ , vérifiant les conditions suivantes :

$$i. \eta^i \cdot x = \eta^i(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \eta_j^i(x) = 0 \text{ pour } x \in U_i;$$

ii. pour tout  $x \in S_{i_1 \dots i_r} = \bigcap_{1 \leq \alpha \leq r} S_{i_\alpha}$ , la famille de vecteurs

$$(\psi^\alpha(x))_{1 \leq \alpha \leq r} = (\eta^{i_\alpha}(x))_{1 \leq \alpha \leq r}$$

est libre sur le corps des nombres réels;

iii. pour tout  $x$  vérifiant

$$x \in S_{i_1 \dots i_r} \quad \text{et} \quad x \notin S_i \quad \text{pour} \quad i \neq i_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq r$$

et pour tous nombres réels  $\lambda_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ , vérifiant

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha = 1,$$

on a la relation

$$\left( \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi^\alpha \right) \cdot y \neq 0.$$

Ainsi, à chaque arête  $S_{i_1 \dots i_r}$  nous associons une famille  $(\psi^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$ ; puis, selon la construction effectuée en début du paragraphe 15, une partie  $T_{i_1 \dots i_r}$  de  $\mathbb{E} \times X$ , dont nous désignerons l'image dans  $\mathbb{E}^* \times X$  par  $T^*_{i_1 \dots i_r}$ ; enfin, conformément au théorème 15. 1, une forme différentielle  $K_{i_1 \dots i_r}(x, y)$ . Le cycle

$$T^* = \bigcup_{i_1 < \dots < i_r \leq p} T^*_{i_1 \dots i_r},$$

orienté de telle sorte que l'on ait

$$\int_{T^*} (i(\xi \cdot y))^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x) > 0,$$

peut être utilisé comme cycle d'intégration dans la formule de Cauchy-Fantappiè; on obtient alors le résultat suivant :

**THÉORÈME 18. 1.** — *Si  $f$  est une fonction holomorphe dans  $X$ , on a la relation*

$$(A) \quad f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}} (-1)^{n-r-1} \int_{S_{i_1 \dots i_r}} f(x) K_{i_1 \dots i_r}(x, y).$$

Dans cette relation, les arêtes  $S_{i_1 \dots i_r}$  sont orientées de manière naturelle, la partie régulière de la frontière de  $K$  étant orientée de l'intérieur vers l'extérieur; le signe qui précède l'intégrale est fixé par le choix de l'orientation de  $T^*$ ; on le

détermine en remarquant que la relation ci-dessus admet comme cas particulier la relation (3) du paragraphe 14.

Le cas particulier le plus simple du théorème 18. 1 est obtenu avec  $p = 1$ ; on obtient alors :

**THÉORÈME 18. 2.** — *Si l'on a  $p = 1$ , et si  $f$  est une fonction holomorphe dans  $X$ , on a la relation*

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \times \int_s f(x) \frac{\left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ \leq k \leq n}} (-1)^{k-1} \psi_k \det \left( \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}_i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n, i \neq h \\ 1 \leq j \leq n, j \neq k}} \right) \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} d\bar{x}_i \right)}{\left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \psi_i \right)^n}$$

Si l'on suppose que les  $\psi^\alpha$  vérifient toujours les conditions indiquées dans le théorème 15. 2, on peut évidemment effectuer le calcul des noyaux à l'aide du résultat de ce théorème; c'est ce que nous ferons pour établir la formule intégrale de A. Weil; cette dernière formule figure parmi les cas particuliers du théorème 18. 1, pour lesquels les intégrales sur les arêtes  $S_{i_1 \dots i_r}$  s'annulent sauf pour une valeur déterminée de  $r$ ; nous établirons d'abord les intégrales de E. Martinelli, ensuite une généralisation de l'intégrale de A. Weil.

**THÉORÈME 18. 3.** — *Si  $X$  est l'espace  $E$  entier, si  $K$  est défini par les inégalités*

$$\varphi_i = \left( \sum_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j|^2 \right) + |x_i - y_i|^2 - 1 < 0, \quad p < i \leq n,$$

alors on a, pour toute fonction  $f$  holomorphe au voisinage de  $\bar{K}$ , la relation

$$f(y) = (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{S'(y)} f(x) H(x, y)$$

où  $S'(y)$  est l'intersection des sous-variétés d'équations  $\varphi_i(x, y) = 0$ ,  $p < i \leq n$ , l'expression de la forme différentielle  $H(x, y)$  ayant été donnée par le théorème 16. 1.

Ceci résulte immédiatement du théorème 18. 1, si l'on tient compte de l'expression des noyaux  $K_{i_1 \dots i_r}(x, y)$ , donnée par le théorème 16. 1.

Le théorème 18. 3 fournit des formules intégrales que nous appellerons *formules de E. Martinelli*; toutefois, pour démontrer les formules générales établies par E. Martinelli dans [7], il est nécessaire de développer des considérations topologiques que l'on trouvera dans le mémoire de cet auteur. Nous nous intéresserons maintenant à l'intégrale de A. Weil.

**THÉORÈME 18. 4.** — *Si les hypothèses fondamentales de ce paragraphe sont réalisées avec*

$$\eta^i = \left( \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^i \right)^{-1} \theta^i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n \leq p,$$

*et si les fonctions  $\theta_j^i$  sont holomorphes par rapport à  $x$ , on a, pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $X$ , la relation*

$$(B) \quad f(y) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p} \int_{S_{i_1 \dots i_n}} f(x) \bigwedge_{1 \leq \alpha \leq n} \frac{\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j^{\alpha} dx_j}{\sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \theta_j^{\alpha}}$$

Cette formule, que nous appellerons *formule de A. Weil généralisée*, résulte du théorème 18. 1, si l'on exprime les noyaux  $K_{i_1 \dots i_n}(x, y)$  en tenant compte du théorème 17. 1. Aux corollaires 17. 1 et 17. 2 correspondent de même les résultats suivants :

**COROLLAIRE 18. 1.** — *Supposons que le domaine  $K$  est un polyèdre analytique défini dans  $X$  par les inégalités  $|X_i| < 1$ ,  $1 \leq i \leq p$ , les fonctions  $X_i$  étant holomorphes dans  $X$ ; si  $K$  est convexe, on a, pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $X$ , la relation*

$$f(y) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p} \int_{S_{i_1 \dots i_n}} f(x) \bigwedge_{1 \leq \alpha \leq n} \frac{dX_{i_\alpha}}{\sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \frac{\partial X_{i_\alpha}}{\partial x_j}}$$

**COROLLAIRE 18. 2.** — *Supposons que le domaine  $K$  est un polyèdre analytique défini dans  $X$  par les inégalités  $|X_i| < 1$ ,  $1 \leq i \leq p$ , les fonctions  $X_i$  étant holomorphes dans  $X$ ; soit  $(P_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n}$  une famille de fonctions, holomorphes dans  $X \times X$ , vérifiant les relations*

$$X_i(x) - X_i(y) = \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) P_{ij}(x, y), \quad 1 \leq i \leq n;$$

on a alors la formule intégrale de A. Weil

$$f(y) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{i_1 \leq i_2 < \dots < i_n \leq p} \int_{S_{i_1 \dots i_n}} f(x) \bigwedge_{i_1 \leq \alpha \leq n} \frac{\sum_{i_1 \leq j \leq n} P_{i_\alpha j}(x, y) dx_j}{X_{i_\alpha}(x) - X_{i_\alpha}(y)}.$$

Pour établir ce corollaire, il faut remarquer que l'hypothèse iii. écrite au début de ce paragraphe est réalisée en vertu de la relation ci-dessus entre les  $X_j$  et les  $P_{jk}$ . Si  $X$  est un domaine d'holomorphic, et si les fonctions  $X_i$  sont données, il existe toujours des fonctions  $P_{jk}$  vérifiant la condition ci-dessus.

19. Démonstration d'une identité utilisée dans le paragraphe 16.

Le résultat essentiel démontré dans ce paragraphe est exprimé par le théorème suivant :

THÉORÈME 19. 1. — On a les identités suivantes, pour  $h \leq n-2$ ;

$$\begin{aligned} & \int \sum_{\substack{u_i > 0 \\ 0 \leq i \leq h}} \frac{\bigwedge_{0 \leq i \leq h} du_i}{\left( A + \sum_{i \leq i \leq h} B_i u_i \right)^n} \\ &= (-1)^h \frac{(n-h-2)!}{(n-1)!} \sum_{i \leq q \leq n-h-1} \frac{1}{A^q} \left[ \frac{1}{\left( \prod_{i \leq j \leq h} B_j \right) A^{n-h-q}} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i \leq i \leq h} \frac{1}{B_i \left( \prod_{\substack{j \neq i \\ i \leq j \leq h}} (B_j - B_i) \right) (A + B_i)^{n-h-q}} \right] \\ &= (-1)^h \frac{(n-h-2)!}{(n-1)!} \sum_{\substack{\beta_j \geq 0 \\ \sum_{0 \leq j \leq h} \beta_j = n-h-1}} \beta_0 A^{-1-\beta_0} \left( \prod_{i \leq j \leq h} (A + B_j)^{-1-\beta_j} \right). \end{aligned}$$

De ce théorème, on déduit immédiatement l'identité utilisée dans le paragraphe 16, et exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME 19. 2. — On a l'identité

$$\begin{aligned} & \int \sum_{\substack{\lambda_j > 0 \\ p < j \leq n}} \frac{\lambda_{p+k} \left( \bigwedge_{\substack{j \neq p+k \\ p+1 \leq j \leq n}} d\lambda_j \right)}{\left( \sum_{i \leq j \leq p} x_j \bar{x}_j + \sum_{p < j \leq n} \lambda_j x_j \bar{x}_j \right)^n} = (-1)^{n-p+k} \frac{(p-1)!}{(n-1)!} \\ & \quad \times \sum_{\substack{\beta_j \geq 0 \\ \sum_{p < j \leq n} \beta_j = p}} \beta_{p+k} \left( \prod_{p < j \leq n} \left( \sum_{i \leq i \leq p} x_i \bar{x}_i + x_j \bar{x}_j \right)^{-1-\beta_j} \right) \end{aligned}$$

En effet, la relation

$$\lambda_{p+k} = 1 - \sum_{\substack{j \neq p+k \\ p < j \leq n}} \lambda_j$$

est vérifiée sur la variété où l'on intègre; on en déduit

$$\sum_{p < j \leq n} \lambda_j x_j \bar{x}_j = x_{p+k} \bar{x}_{p+k} + \sum_{\substack{j \neq p+k \\ p < j \leq n}} \lambda_j (x_j \bar{x}_j - x_{p+k} \bar{x}_{p+k}).$$

Donc, si l'on pose

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1 \leq j \leq p} x_j \bar{x}_j + x_{p+k} \bar{x}_{p+k}, \\ (B_i)_{1 \leq i \leq h} &= (x_j \bar{x}_j - x_{p+k} \bar{x}_{p+k})_{p < j \leq n, j \neq p+k}, \quad h = n - p - 1, \\ (u_i)_{1 \leq i \leq h} &= (\lambda_j)_{p < j \leq n, j \neq p+k} \end{aligned}$$

on est amené à calculer l'intégrale

$$\int_{\substack{u_i > 0 \\ 1 \leq i \leq h}}^{u_i < 1} (-1)^{k-1} \frac{\left(1 - \sum_{1 \leq i \leq h} u_i\right) \left(\prod_{1 \leq i \leq h} du_i\right)}{\left(A + \sum_{1 \leq i \leq h} B_i u_i\right)^n},$$

c'est-à-dire

$$\int_{\substack{u_i > 0 \\ 0 \leq i \leq h}}^{u_i < 1} \frac{(-1)^{k+1} \prod_{0 \leq i \leq h} du_i}{\left(A + \sum_{1 \leq i \leq h} B_i u_i\right)^n};$$

le résultat de ce calcul est fourni par le théorème 19. 1.

La première identité qui figure dans le théorème 19. 1 est obtenue aisément en intégrant successivement par rapport à chaque variable; la seconde résultera d'une suite d'identités que nous allons indiquer au préalable.

*Identité 19. 1.*

$$\prod_{1 \leq j < k \leq h} (x_k - x_j) = \sum_{1 \leq i \leq h} (-1)^{i-1} \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} x_j \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq h \\ j \neq i, k \neq i}} (x_k - x_j) \right).$$

La démonstration de cette identité est immédiate.



*Identité 19. 2.*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq h} (-1)^{i-1} \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq h \\ j \neq i, k \neq i}} (x_k - x_j) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} x_j^q \right) \\ = \left( \prod_{1 \leq j < k \leq h} (x_k - x_j) \right) \left( \sum_{\substack{\sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j \geq 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j = q-1}} \left( \prod_{1 \leq j \leq h} x_j^{q-\beta_j-1} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour démontrer cette identité, on remarque que l'expression, figurant au premier membre, s'annule pour  $x_j = x_k$ ,  $1 \leq j < k \leq h$ ; elle est donc divisible par  $x_k - x_j$ ; elle est par conséquent égale au produit de

$$\prod_{1 \leq j < k \leq h} (x_k - x_j)$$

par un polynôme, homogène de degré  $(h-1)(q-1)$ ,

$$P = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_j \leq q+h-2 \\ \sum_{1 \leq j \leq h} \alpha_j = (h-1)(q-1)}} \gamma_{(\alpha_j)} \prod_{1 \leq j \leq h} x_j^{\alpha_j};$$

compte-tenu de l'identité 19. 1, on obtient donc l'identité

$$\sum_{1 \leq i \leq h} (-1)^{i-1} \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq h \\ j \neq i, k \neq i}} (x_k - x_j) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} x_j \right) \left[ \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} x_j^{q-1} \right) - P \right] = 0,$$

d'où résultent l'inégalité  $\alpha_j \leq q-1$  et l'égalité des  $\gamma_{(\alpha_j)}$ ; en cherchant dans l'expression de P le terme avec  $\alpha_j = q-1$  pour  $j \neq i$  et  $\alpha_i = 0$ , on voit que tous les  $\gamma_{(\alpha_j)}$  sont égaux à 1; en posant  $\beta_j = q - \alpha_j - 1$ , on obtient l'expression qui figure au second membre de l'identité 19. 2.

De l'identité 19. 2 résultent immédiatement les deux suivantes :

*Identité 19. 3.*

$$\sum_{1 \leq i \leq h} \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} (x_j - x_i) \right)^{-1} x_i^{-q} = \sum_{\substack{\sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j \geq 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j = q-1}} \left( \prod_{1 \leq j \leq h} x_j^{-1-\beta_j} \right)$$

*Identité 19. 3'.*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq h} \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq h \\ j \neq i}} (B_j - B_i) \right)^{-1} (A + B_i)^{-q} \\ = \sum_{\substack{\sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j \geq 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq h} \beta_j = q-1}} \left( \prod_{1 \leq j \leq h} (A + B_j)^{-1-\beta_j} \right). \end{aligned}$$

Des identités 19. 1 et 19. 3' on déduit l'identité 19. 4.

*Identité 19. 4.*

$$\begin{aligned} \left(\prod_{1 \leq j \leq h} B_j\right)^{-1} A^{-q} &= \sum_{1 \leq i \leq h} B_i^{-1} \left(\prod_{1 \leq j \leq h, j \neq i} (B_j - B_i)\right)^{-1} (A + B_i)^{-q} \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \geq 0 \\ \sum_{0 \leq j \leq h} \beta_j = q-1}} A^{-1-\beta_0} \left(\prod_{1 \leq j \leq h} (A + B_j)^{-1-\beta_j}\right) \end{aligned}$$

En effet, si on réduit au même dénominateur les fractions qui figurent au premier membre de cette identité, si on tient compte de l'identité 19. 1 pour transformer le numérateur de la fraction obtenue et si on effectue des mises en facteurs évidentes, il ne reste qu'à tenir compte de l'identité 19. 3' pour obtenir le résultat annoncé. De l'identité 19. 4 résulte immédiatement l'identité 19. 5.

*Identité 19. 5.*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq q \leq n-h-1} A^{-q} &\left[ \left(\prod_{1 \leq j \leq h} B_j\right)^{-1} A^{q+h-n} \right. \\ &\left. - \sum_{1 \leq i \leq h} B_i^{-1} \left(\prod_{1 \leq j \leq h, j \neq i} (B_j - B_i)\right)^{-1} (A + B_i)^{q+h-n} \right] \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \geq 0 \\ \sum_{0 \leq j \leq h} \beta_j = n-h-1}} \beta_0 A^{-1-\beta_0} \left(\prod_{1 \leq j \leq h} (A + B_j)^{-1-\beta_j}\right). \end{aligned}$$

Cette relation établit la seconde identité du théorème 19. 1; la première identité de ce théorème se démontre aisément par récurrence en intégrant successivement par rapport aux variables  $u_1, \dots, u_n, u_0$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROTHENDIECK Alexandre, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9, 1957, 119-221.
- [2] LELONG Pierre, Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 43, 1957, 246-248.
- [3] LELONG Pierre, Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, 239-262.
- [4] LEPAGE Théophile, Sur certaines congruences de formes alternées, *Bull. Soc. Roy. Liège*, 1946, 21-31.

- [5] LERAY Jean, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. Math. France*, 87, 1959, 81-180.
  - [6] MARTINELLI ENZO, Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, *Mem. r. Accad. Ital.*, 9, 1938, 269-283.
  - [7] MARTINELLI ENZO, Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse, *Annali Mat. pura ed appl.*, Serie 4, t. 34, 1953, 277-347.
  - [8] NORGUET François, Sur les domaines d'holomorphic des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), *Bull. Soc. Math. France*, 82, 1954, 137-159.
  - [9] NORGUET François, Produit tensoriel et produit de composition des courants, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 239, 1954, 667-669.
  - [10] NORGUET François, Sur le produit de composition des courants et le nombre algébrique d'intersections de deux chaînes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 240, 1955, 830-832.
  - [11] NORGUET François, Sur l'homologie associée à une famille de dérivations, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 247, 1958, 1081-1083.
  - [12] NORGUET François, Sur la théorie des résidus, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 248, 1959, 2057-2059.
  - [13] NORGUET François, Représentations intégrales des fonctions de plusieurs variables complexes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 250, 1960.
  - [14] PAPY Georges, Sur l'arithmétique dans les algèbres de Grassmann, *Mém. Acad. Roy. Belgique*, Cl. des Sci., 26, 1952, 1-108.
  - [15] DE RHAM Georges, Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire, *Comment. Math. Helvet.*, 28, 1954, 346-352.
  - [16] DE RHAM Georges, Variétés différentiables; formes, courants, formes harmoniques, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 1222, Hermann, Paris, 1955.
  - [17] SCHWARTZ Laurent, Théorie des distributions, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 1091 et 1122, Hermann, Paris, 1950 et 1951.
  - [18] SCHWARTZ Laurent, Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, *Colloque international de Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953, pp. 185-195.
  - [19] SERRE Jean-Pierre, Algèbre locale, multiplicités, *Cours au Collège de France*, 1957-1958, multigraphié.
  - [20] SOMMER Friedrich, Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, *Math. Ann.*, 125, 1952, 172-182.
  - [21] WEIL André, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.*, 111, 1935, 178-182.
-