ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Racines de polynômes de Bernstein

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 4 (1986), p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 4 (1986), 1-30.

RACINES DE POLYNÔMES DE BERNSTEIN

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Notons $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ l'anneau des séries convergentes à $n+1$ variables et $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires en $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ à coefficients dans $\mathcal{O}$. Bernstein ([2]) a montré que pour tout polynôme P, il existe $B \in \mathbf{C}[s]$, $B \neq 0$ et $D \in \mathcal{D}[s]$ tels que l'on ait

$$DP^{s+1} = BP^s.$$

Il est clair que l'ensemble des $B \in \mathbf{C}[s]$ tels qu'il existe $D \in \mathcal{D}[s]$ avec $DP^{s+1} = BP^s$ est un idéal de $\mathbf{C}[s]$; le générateur unitaire de cet idéal est noté b et est appelé « le polynôme de Bernstein-Sato de P ». Il est facile de voir que $b(s)$ est divisible par $s+1$. On note $\tilde{b}(s) = b(s)/(s+1)$. On sait, d'après Kashiwara ([4]) que b a des racines rationnelles négatives.

Nous étudions ici le cas $n = 1$.

Soit $P(X_1, X_2) \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$, $P(X_1, X_2) = \Sigma\, e_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$.

Nous notons

$$\operatorname{Supp} P = \{\alpha \in \mathbf{N}^2 / e_\alpha \neq 0\}$$

et nous supposons que $e_\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in \operatorname{Supp} P$.

Nous nous proposons de calculer des racines du polynôme de Bernstein-Sato de P.

Mots-clés : Singularités - Polynôme de Bernstein-Sato.

Ces résultats reposent sur l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2 - 1} \mathrm{P}(x_1, x_2)^s \, dx_1 \, dx_2$$

et de son prolongement sur $\mathbf{C}$.

Nous donnons des théorèmes généraux qui peuvent être complétés dans des cas particuliers en faisant des calculs explicites.

Nous utilisons les notations suivantes :

Soit $\mathrm{E}_0 = \{\alpha + \mathbf{R}_+^2\}_{\alpha \in \mathrm{Supp\,P}}$ et $\mathscr{E}_0$ l'enveloppe convexe de E_0, appelée le polygone de Newton de P. Soient A_1, A_2, $\ldots$, A_{r+1} les sommets de $\mathscr{E}_0$. Nous écrivons l'équation de la droite $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ sous la forme $f_i(x,y) = 1$ où $f_i(x,y) = x/a_i + y/b_i$.

Notons L_i le parallélogramme de sommets $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$. Soient enfin γ_0, γ_1, δ_0, δ_1 les degrés des termes de plus bas degré de $\mathrm{P(X,0)}$, $\mathrm{P(X,1)}$, $\mathrm{P(0,Y)}$, $\mathrm{P(1,Y)}$. Nous notons

$$\mathscr{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid \text{il existe } m \in \{\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1\} \text{ et } mq \in \mathbf{N}\}.$$

Théorème 1. — *Notons, pour* $i = \{1, \ldots, r\}$

$$\mathscr{B}_i = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \middle| (\beta_1, \beta_2) \in \mathrm{L}_i \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathscr{N}\right\}.$$

Alors si $q \in \mathscr{B}_i$, q *ou* $q + 1$ *est racine de* $\mathfrak{b}$.

Notons $\bar{\mathrm{E}}'_0$ l'ensemble maximal de la forme $\cup \{\alpha + \mathbf{R}_+^2\}_{\alpha \in \mathbf{N}^{*2}}$ qui ait pour enveloppe convexe $\mathscr{E}_0$ et

$$\mathrm{L}'_i = \complement_{\mathrm{L}_i} \mathrm{L}_i \cap \mathrm{E}'_0 .$$

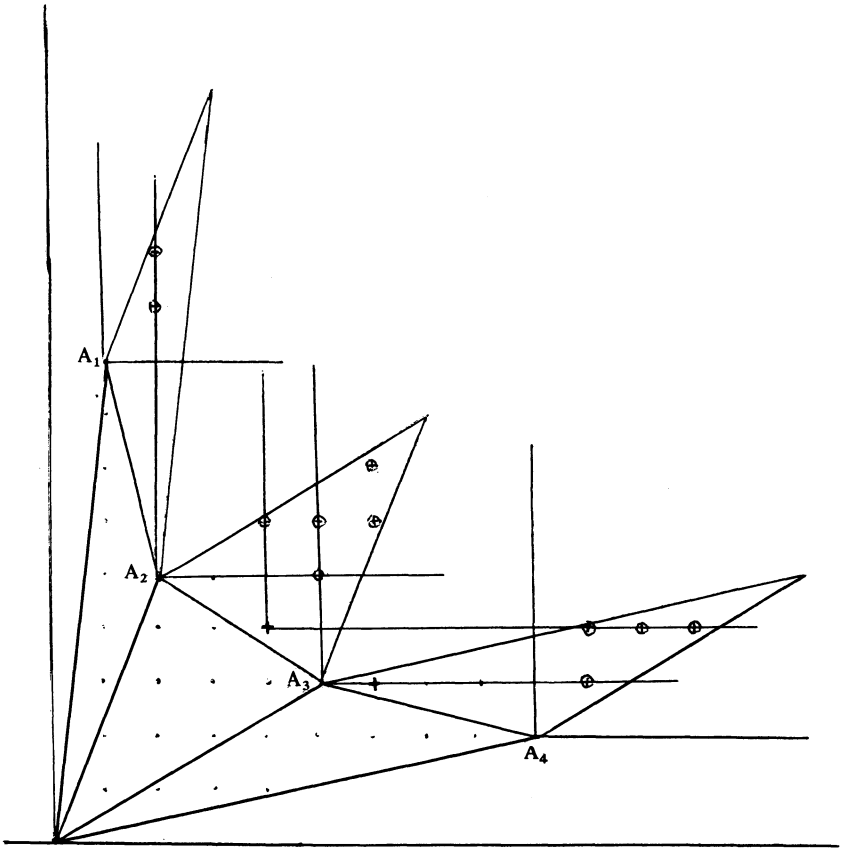
Théorème 2. — *Notons, pour* $i = \{1, \ldots, r\}$

$$\mathscr{B}_{i,1} = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \middle| (\beta_1, \beta_2) \in \mathrm{L}'_i \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathscr{N}\right\}.$$

Alors pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\mathscr{B}_{i,1}$ *est contenu dans l'ensemble des racines de* $\mathfrak{b}$.

Exemple I.

$$P(X_1, X_2) = X_1^9 X_2^2 + X_1^6 X_2^3 + X_1^5 X_2^3 + X_1^4 X_2^4 + X_1^2 X_2^5 + X_1 X_2^9$$



$$f_1(x,y) = \frac{4x}{13} + \frac{y}{13}; \quad f_2(x,y) = \frac{2x}{19} + \frac{3y}{19}; \quad f_3(x,y) = \frac{x}{17} + \frac{4y}{17}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 2q \in \mathbf{N}\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, on sait que

$$\mathscr{B}_{1,1} = \left\{ -\frac{7}{13}, -\frac{8}{13}, -\frac{9}{13}, -\frac{10}{13}, -\frac{11}{13}, -\frac{12}{13}, -\frac{14}{13}, -\frac{15}{13}, -\frac{16}{13}, -\frac{17}{13} \right\}$$

$$\mathscr{B}_{2,1} = \left\{-\frac{5}{19}, -\frac{8}{19}, -\frac{10}{19}, -\frac{12}{19}, -\frac{13}{19}, -\frac{15}{19}, -\frac{16}{19}, -\frac{17}{19}, -\frac{18}{19}, -\frac{20}{19}, -\frac{21}{19}, -\frac{22}{19}, -\frac{23}{19}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,1} = \left\{-\frac{6}{17}, -\frac{7}{17}, -\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, -\frac{13}{17}, -\frac{14}{17}, -\frac{15}{17}, -\frac{16}{17}, -\frac{18}{17}, -\frac{19}{17}, -\frac{20}{17}, -\frac{21}{17}\right\}$$

sont contenus dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et que si q appartient à

$$\mathscr{B}_{1,2} = \left\{-\frac{18}{13}, -\frac{19}{13}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{2,2} = \left\{-\frac{25}{19}, -\frac{26}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{30}{19}, -\frac{33}{19}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,2} = \left\{-\frac{22}{17}, -\frac{25}{17}, -\frac{26}{17}, -\frac{27}{17}\right\}$$

alors q ou $q + 1$ est racine de $\tilde{b}$.

On montrera par des calculs explicites que l'ensemble

$$\left\{-\frac{5}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{6}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{9}{19}, -\frac{11}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{5}{17}, -\frac{9}{17}, -\frac{10}{17}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

Les théorèmes 1 et 2 généralisent des résultats connus dans le cas où la singularité en 0 est isolée. En effet, si μ est le nombre de Milnor, on sait que l'on peut définir un ensemble de μ nombres rationnels positifs ℓ_k, $1 \leqslant k \leqslant \mu$ appelé le spectre de la singularité qui possède les propriétés suivantes :

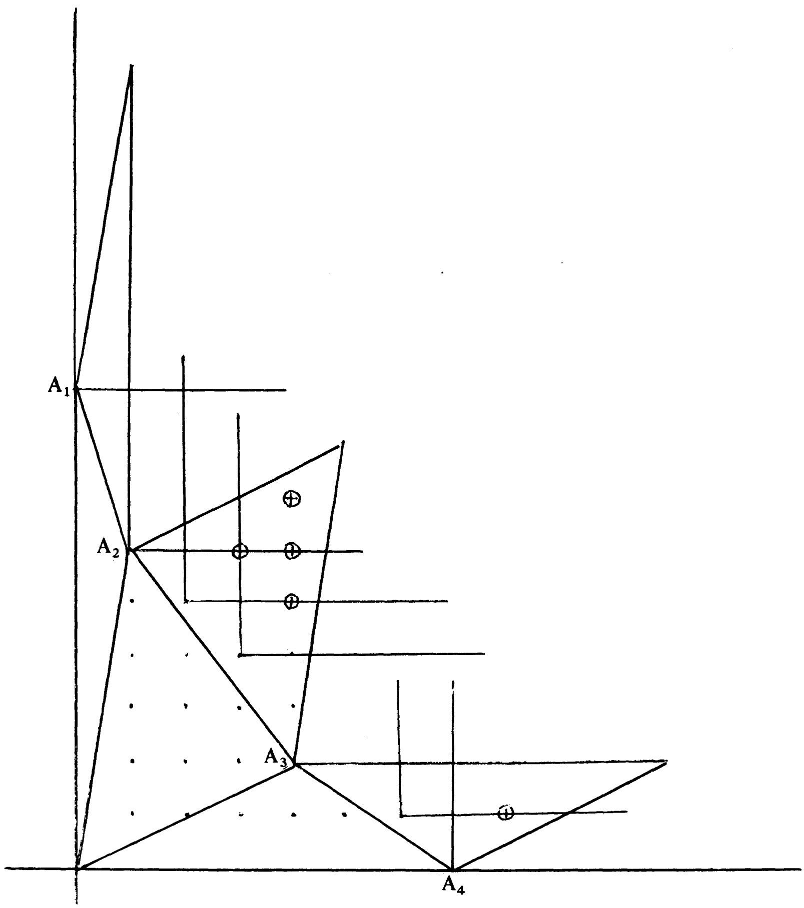
i) Étant donné ℓ_k, il existe une racine de $\tilde{b}$, ρ_k telle que $\ell_k + \rho_k$ soit un entier positif ou nul.

ii) Dans le cas où $n = 1$ et si P est générique pour son polygone de Newton [1] on sait calculer les ℓ_k : si les droites qui joignent l'origine O aux sommets A_i de $\mathscr{E}_0$ ne contiennent pas de points à coordonnées entières, le spectre de la singularité est égal à l'ensemble des $\dfrac{\beta_1}{a_i} + \dfrac{\beta_2}{b_i}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2}$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r$.

S'il existe des points à coordonnées entières (β_1, β_2) sur les droites OA_i on a les rationnels $\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}$ ainsi que $2 - \left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$.

Exemple II.

$$X_1^7 + X_1^4X_2^2 + X_1X_2^6 + X_2^9.$$



Le spectre de la singularité est

$$\left\{\frac{7}{22}, \frac{10}{22}, \frac{11}{22}, \frac{13}{22}, \frac{14}{22}, \frac{16}{22}, \frac{17}{22}, \frac{18}{22}, \frac{19}{22}, \frac{20}{22}, \frac{21}{22}, \frac{23}{22}, \frac{24}{22}, \frac{25}{22}, \frac{26}{22}, \frac{27}{22}, \right.$$
$$\left. \frac{28}{22}, \frac{30}{22}, \frac{31}{22}, \frac{33}{22}, \frac{34}{22}, \frac{37}{22}, \frac{7}{14}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14}, \frac{19}{14}\right\}.$$

On en déduit, d'après Ehlers-Lo ([8]), que l'ensemble

$$\left\{-\frac{7}{22}, -\frac{10}{22}, -\frac{11}{22}, -\frac{13}{22}, -\frac{14}{22}, -\frac{16}{22}, -\frac{17}{22}, -\frac{18}{22}, -\frac{19}{22}, -\frac{20}{22}, -\frac{21}{22}, -\frac{23}{22}, -\frac{24}{22}, -\frac{25}{22}, -\frac{26}{22}, -\frac{27}{22}, -\frac{28}{22}, -\frac{7}{14}, -\frac{9}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{13}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{17}{14}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et que si q appartient à l'ensemble

$$\left\{-\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{34}{22}, -\frac{37}{22}, -\frac{19}{14}\right\}$$

alors q ou $q+1$ appartient à l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

On peut montrer par des calculs explicites que l'ensemble

$$\left\{-\frac{12}{22}, -\frac{15}{22}, -\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{5}{14}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

On peut donner une interprétation du nombre $\sum_{k=1}^{\mu} \ell_k + \rho_k$.

Pour $1 \gg \varepsilon \gg \eta > 0$, notons

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbf{C}^2 \mid \|x\| < \varepsilon \quad |P(x)| < \eta\} \\ S &= \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \eta\} \\ X_t &= P^{-1}(t) \cap X . \end{aligned}$$

Soit Ω^n l'espace des n-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}$. On note

$$G = \Omega^{n+1} / df \wedge d\Omega^{n-1} .$$

On sait d'après Brieskorn et Sebastiani que G est un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang μ, muni d'une connexion ∂_t à singularité régulière

$$\partial_t : G \to G[t^{-1}] = G \otimes_{\mathbf{C}\{t\}} \mathbf{C}\{t\}[t^{-1}] .$$

On définit le saturé

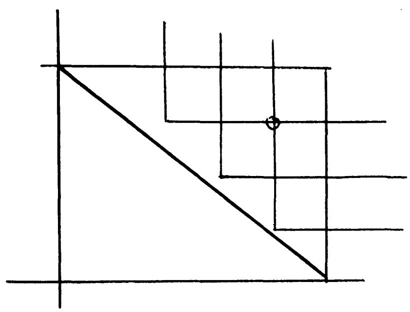
$$\tilde{G} = \sum_{i \geqslant 0} (\partial_t t)^i G \subset G[t^{-1}] .$$

On sait d'après Malgrange ([5]) que $\tilde{b}$ est le polynôme minimal de $\partial_t t$ sur $\tilde{G}/t\tilde{G}$. La dimension de $\tilde{G}/G$ est égale à $\sum_{k=1}^{\mu} \ell_k + \rho_k$ (où $\{\rho_k\}_{1\leqslant k\leqslant\mu}$ est l'ensemble des valeurs propres de $\partial_t t$ comme endomorphisme de $\tilde{G}/t\tilde{G}$). (M. Saïto : lettre à l'auteur).

Nous traitons quelques exemples qui montrent que l'on ne peut pas améliorer les théorèmes généraux.

Exemple III.

$$X_1^5 + a_1X_1^4X_2 + a_2X_1^3X_2^2 + a_3X_1^2X_2^3 + X_2^4 \quad a_1,\, a_2,\, a_3 \geqslant 0$$



Le spectre de la singularité est

$$\left\{\frac{9}{20}, \frac{13}{20}, \frac{14}{20}, \frac{17}{20}, \frac{18}{20}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{22}{20}, \frac{23}{20}, \frac{26}{20}, \frac{27}{20}, \frac{31}{20}\right\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, l'ensemble

$$\left\{-\frac{9}{20}, -\frac{13}{20}, -\frac{14}{20}, -\frac{17}{20}, -\frac{18}{20}, -\frac{19}{20}, -\frac{21}{20}, -\frac{22}{20}, -\frac{23}{20}, -\frac{26}{20}, -\frac{27}{20}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et $-\frac{31}{20}$ ou $-\frac{11}{20}$ est aussi racine de $\tilde{b}$.

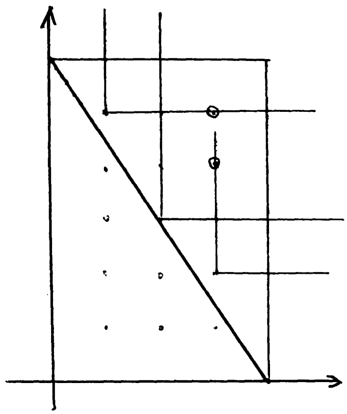
Des calculs explicites montrent que si

$$(a_1, a_2, a_3) \in \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x\geqslant 0,\, y\geqslant 0,\, z\geqslant 0 \text{ et } y^2 \neq \frac{5}{2}x\}$$

alors $-\frac{11}{20}$ est racine de $\tilde{b}$. Si a_1, a_2, a_3 sont des réels positifs ou nuls tels que $a_2^2 = \frac{5}{2} a_1$ alors $-\frac{31}{20}$ est racine de $\tilde{b}$. On en déduit qu'il existe $g_1 \in \mathbf{C}\{X_1, X_2\}$ et $g_2 \in \mathbf{C}\{X_1, X_2\}$ tel que $P = g_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + g_2 \frac{\partial P}{\partial X_2}$.

Exemple IV.

$$(X_1^2 + X_2^3)^2 + X_1 X_2^5$$



D'après les théorèmes 1 et 2, $-\frac{5}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{13}{12}$ sont racines de $\tilde{b}$.

On sait d'après Yano que les racines de $\tilde{b}$ sont les éléments de l'ensemble

$$\left\{-\frac{5}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{13}{12}, -\frac{11}{26}, -\frac{15}{26}, -\frac{17}{26}, -\frac{19}{26}, -\frac{21}{26}, -\frac{23}{26}, -\frac{25}{26}, -\frac{27}{26}, -\frac{29}{26}, -\frac{31}{26}, -\frac{33}{26}, -\frac{35}{26}, -\frac{37}{26}\right\}.$$

On voit donc que les théorèmes 1 et 2 donnent exactement les racines de $\tilde{b}$ qui sont de la forme $\frac{\beta_1}{4} + \frac{\beta_2}{6}$ mais par contre ne donnent pas les autres.

Dans beaucoup de cas particuliers on peut compléter les théorèmes 1 et 2 par des calculs explicites qui permettent de dire effectivement si q ou

$q+1$ est racine de $\tilde{b}$. Nous traitons d'autres exemples à la fin de cet article.

Tous les résultats proviennent du calcul explicite des pôles et des résidus de la fonction $I_0(P,\beta)(s)$, prolongement à $\mathbf{C}$ de l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 P(x_1,x_2)^s x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous écrivons $P(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} e_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$ et nous notons

$$\alpha_1^0 = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \alpha_1 \qquad \alpha_2^n = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \alpha_2 .$$

Posons $Q(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} e_\alpha X_1^{\alpha_1^0-\alpha_1} X_2^{\alpha_2^n-\alpha_2}$.

On note $I_\infty(Q,\beta)(s)$ le prolongement sur $\mathbf{C}$ de l'intégrale

$$\int_1^\infty \int_1^\infty Q(x_1,x_2)^{-s} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats sur $I_\infty(Q,\beta)(s)$ d'où l'on déduira les résultats pour $I_0(P,\beta)(s)$.

1. Rappels des résultats sur $I_\infty(Q,\beta)(s)$.

Nous écrivons $Q(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} Q} e'_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$.

Notons $E_\infty = \{\alpha + \mathbf{R}_-^2\}_{\alpha \in \operatorname{Supp} Q}$ et $\mathscr{E}_\infty$ l'enveloppe convexe de E_∞. On remarque que $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{E}_\infty$ sont symétriques par rapport au point A de coordonnées $(\alpha_1^0/2, \alpha_2^n/2)$. Notons $g_j(x,y) = 1$ où $g_j(x,y) = x/c_j + y/d_j$ les équations des faces de ${}^{\mathrm{l}}\mathscr{E}_\infty$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, indicées par pente décroissante de $-\infty$ à 0. Pour tout $\nu_Q = (\nu_\alpha)_{\alpha \in \operatorname{Supp} Q} \in \mathbf{N}^{|\operatorname{Supp} Q|}$ on définit

$$s_j(\beta,\nu_Q) = g_j(\beta_1,\beta_2) - \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} Q} \nu_\alpha (1 - g_j(\alpha_1,\alpha_2)) . \tag{2}$$

Nous notons $S_j(\beta,Q)$ l'ensemble des $s_j(\beta,\nu_Q)$ pour tout $\nu_Q \in \mathbf{N}^{|\operatorname{Supp} Q|}$.

Nous posons aussi

$$\text{(3)} \qquad F_j = \{\alpha \in \operatorname{Supp} Q \mid g_j(x_1, x_2) = 1\}$$

$$\text{(4)} \qquad F_j^- = \{\alpha \in \operatorname{Supp} Q \mid g_j(x_1, x_2) < 1\}$$

et

$$Q_j(X_1, X_2) = \sum_{\alpha \in F_j} e'_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}.$$

PROPOSITION 4. — *Les pôles de* $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *appartiennent à l'ensemble* $\bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta, Q)$.

PROPOSITION 5. — i) *La fonction* $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *est convergente pour* $\operatorname{Re}(s) > g_j(\beta_1, \beta_2)$ *où* $g_j(x, y) = 1$ *est l'équation d'une face de* $\mathscr{E}_\infty$ *coupée par la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1, β_2).

ii) *Si cette droite coupe* $\mathscr{E}_\infty$ *sur la seule face* F_j, *il y a un pôle simple pour* $s = g_j(\beta_1, \beta_2)$ *de résidu*

$$\Gamma(g_j(\beta_1, \beta_2))^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{\beta_1 - 1} t_2^{\beta_2 - 1} \exp(-Q_j(t_1, t_2))\, dt_1\, dt_2$$

si $i \neq 1$ *et* $i \neq j$. *Si* $j = 1$ *(resp.* $j = \ell$*) ce résidu est*

$$B_1 = \frac{1}{c_1} I_\infty(Q_1(1, X_2), \beta_2)(g_1(\beta_1, \beta_2))$$

$$\textit{(resp.}\ \ B_\ell = \frac{1}{d_\ell} I_\infty(Q_\ell(X_1, 1), \beta_1)(g_\ell(\beta_1, \beta_2)).$$

iii) *Si la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1, β_2) *coupe* $\mathscr{E}_\infty$ *sur l'intersection des faces* F_j *et* F_{j+1}, $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *a un pôle double pour*

$$s = g_j(\beta_1, \beta_2) = g_{j+1}(\beta_1, \beta_2).$$

Preuve. — Les points i) et ii)) sont démontrés dans [3], Théorème 10. Pour montrer le point iii), on remarque tout d'abord que $I_\infty(Q,\beta)(s) - I_\infty(Q_j, \beta)(s)$ se prolonge pour $\operatorname{Re}(s) > g_j(\beta_1, \beta_2) - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

En effet, on écrit :

$$Q = Q_j + Q_{j,1}$$

les monômes de $Q_{j,1}$, vérifiant $\dfrac{\alpha_1}{c_j} + \dfrac{\alpha_2}{d_j} < 1$

$$\begin{aligned}
&I_\infty(Q,\beta)(s) - I_\infty(Q_j,\beta)(s)\\
&= \int_1^\infty \int_1^\infty (Q(x_1,x_2)^{-s} - Q_j(x_1,x_2)^{-s}) x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2\\
&\quad = \int_1^\infty \int_1^\infty (Q_j(x_1,x_2)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{n} \left(\frac{Q_{j,1}(x_1,x_2)}{Q_j(x_1,x_2)}\right)^n x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2\\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{n} \int_1^\infty \int_1^\infty Q_j(x_1,x_2)^{-s-n}(Q_{j,1}(x_1,x_2)^n)\, x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} dx_1\, dx_2\,.
\end{aligned}$$

Chacune des intégrales est convergente pour $\operatorname{Re}(s) > g_j(\beta_1,\beta_2) - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et la série converge pour une telle valeur s.

On est donc ramené à montrer que $I_\infty(Q_j,\beta)(s)$ admet un pôle double pour $s = g_j(\beta_1,\beta_2)$. On a

$$I_\infty(Q_j,\beta)(s) = \int_1^\infty x^{\beta_2+(d_j/c_j)\beta_1-d_js-1}\, dx\,.\, I(s)$$

où

$$I(s) = \int_1^\infty v^{\beta_1} Q_j(v,1)^{-s}\, dv/v\,.$$

Or $I(s)$ admet un pôle simple pour $s = \dfrac{\beta_1}{c_j} + \dfrac{\beta_2}{d_j}$ lorsque (β_1,β_2) est aligné avec une des extrémités du support de Q_j.

PROPOSITION 6. — *Soit* $s_0 \in \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta,Q)$. *Si pour tout* j *et tout* ν_Q *tel que*

$s_j(\beta,\nu_Q) = s_0$, *on a* $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j+1}(\beta,\nu_Q)$ *et* $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$

alors le point $s = s_0$ *est un point régulier ou un pôle simple; si de plus* $-s_0 \in \mathbf{N}$ *alors c'est un point régulier . S'il existe* i *et* ν_Q *tel que* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_0$ *avec* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_{j+1}(\beta,\nu_Q)$ *ou* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$, *alors il peut y avoir un pôle double pour* $s = s_0$; *si de plus* $-s_0 \in \mathbf{N}$, *alors* $s = s_0$ *est soit un point régulier soit un pôle simple* [3, Théorème 12].

Nous appelons *cas* 1, le cas où pour tout j et tout ν_Q, tels que $s_j(\beta,\nu_Q) = s_0$, on a $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j+1}(\beta,\nu_Q)$ et $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$ et $-s_0 \notin \mathbf{N}$.

Pour exprimer les résidus aux pôles dans le cas 1 nous notons

$$(5)\quad \mathrm{B}_1(\beta,\nu_Q) = \Gamma(s_1(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_1^-} \nu_\alpha)$$
$$\mathrm{I}_\infty(Q_1(1,X_2),\beta_2 + \sum_{\alpha\in F_1^-} \alpha_2\nu_\alpha)(s_1(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_1^-} \nu_\alpha)$$

$$(6)\quad \mathrm{B}_\ell(\beta,\nu_Q) = \Gamma(s_\ell(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_\ell^-} \nu_\alpha)$$
$$\mathrm{I}_\infty(Q_\ell(X_1,1),\beta_1 + \sum_{\alpha\in F_\ell^-} \alpha_1\nu_\alpha)(s_\ell(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_\ell^-} \nu_\alpha).$$

Pour $1 < j < \ell$

$$(7)\qquad \mathrm{B}_j(\beta,\nu_Q) = \mathrm{G}_{Q_j}(\beta_1 + \sum_{\alpha\in F_j^-} \alpha_1\nu_\alpha,\ \beta_2 + \sum_{\alpha\in F_j^-} \alpha_2\nu_\alpha)$$

où $\mathrm{G}_{Q_j}(s_1,s_2)$ est le prolongement sur $\mathbf{C}^2$ de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s_1} t_2^{s_2} \exp(-Q_j(t_1,t_2)) \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$

$$c_j(Q,\nu_Q) = \prod_{\alpha\in F_j^-} \frac{(-1)^{\nu_\alpha}}{\nu_\alpha!}\, e_\alpha^{'\nu_\alpha}.$$

On remarque que, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, $s_j(\beta,\nu_Q)$, $\mathrm{B}_j(\beta,\nu_Q)$ et $c_j(\beta,\nu_Q)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence de ν_Q pour la relation $\nu_Q \sim_j \nu'_Q$ si et seulement si ils ont mêmes composantes pour $\alpha \in F_j$. On note $\bar\nu_Q$ un représentant quelconque dans cette classe.

Proposition 7. — *Pour tout* $s_0 \in \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta,Q)$ *satisfaisant le cas* 1

$$\Gamma(s_0) \operatorname*{Res}_{s=s_0} \mathrm{I}_\infty(Q,\beta)(s) = \sum_{j,\bar\nu_Q} c_j(Q,\bar\nu_Q)\, \mathrm{B}_j(\beta,\bar\nu_Q)$$

la sommation étant étendue à tous les j *et* $\bar\nu_Q$ *tels que* $s_j(\beta,\bar\nu_Q) = s_0$.

Voir [3, Théorème 13].

2. Étude de $I_0(P,\beta)(s)$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ et $I_\infty(P,\beta)(s)$ sont reliées par la proposition suivante :

PROPOSITION 8. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$

$$I_0(P,\beta)(s) = I_\infty(Q,-\alpha_1^0 s-\beta_1, -\alpha_2^n s-\beta_2)(-s). \tag{8}$$

Preuve. — On se place pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grand de telle sorte que l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 P(x_1,x_2)^s x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2$$

soit convergente et on fait dans cette intégrale le changement de variables $x_1 = y_1^{-1}$, $x_2 = y_2^{-1}$.

Notons $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ les faces de $\mathscr{E}_0$ qui ne sont pas parallèles aux axes et $\mathscr{D}_i^+ = \{\alpha \in \operatorname{Supp} P \mid f_i(\alpha_1,\alpha_2)>1\}$. Pour tout $\nu_P = (\nu_\alpha)_{\alpha\in \operatorname{Supp} P}$, on définit, pour tout $i \in I$

$$t_i(\beta,\nu_P) = -f_i(\beta_1,\beta_2) + \sum_{\alpha\in\operatorname{Supp} P} \nu_\alpha(1-f_i(\alpha_1,\alpha_2)) \tag{9}$$

et

$$T_i(\beta,P) = \{t_i(\beta,\nu_P) \mid \nu_\alpha \in \mathbf{N}^{|\operatorname{Supp} P|}\}.$$

THÉORÈME 9. — *L'ensemble des pôles de* $I_0(P,\beta)(s)$ *est contenu dans l'ensemble* $\bigcup_{i\in I} T_i(\beta,P)$.

Définissons :

$$B_1'(\beta\text{-},\nu_P) = \Gamma\Big(-t_1(\beta,\nu_P)+\sum_{\alpha\in\mathscr{D}_1^+}\nu_\alpha\Big)\, I_0\Big(P_1(1,X_2), \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_1^+}\alpha_2\nu_\alpha\Big)\Big(t_1(\beta,\nu_P)-\sum_{\alpha\in\mathscr{D}_1^+}\nu_\alpha\Big) \tag{10}$$

$$B_\ell'(\beta,\nu_P) = \Gamma\Big(-t_\ell(\beta,\nu_P)+\sum_{\alpha\in\mathscr{D}_\ell^+}\nu_\alpha\Big)\, I_0\Big(P_\ell(X_1,1), \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_\ell^+}\alpha_1\nu_\alpha\Big)\Big(t_\ell(\beta,\nu_P)-\sum_{\alpha\in\mathscr{D}_\ell^+}\nu_\alpha\Big) \tag{11}$$

si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_\ell$ ne sont pas des axes, et pour $1 < i < \ell$

$$\text{(12)} \qquad B'_i(\beta,\nu_P) = G_{P_i}\left(\beta_1 + \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+} \alpha_1\nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+} \alpha_2\nu_\alpha\right).$$

THÉORÈME 10. — i) *La fonction* $I_0(P,\beta)(s)$ *est convergente pour* $\mathrm{Re}(s) > -f_i(\beta_1,\beta_2)$ *où* $f_i(\beta_i,\beta_2) = 1$ *est l'équation d'une face de* $\mathscr{E}_0$ *coupée par la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1,β_2).

ii) *Si cette droite coupe* $\mathscr{E}_0$ *sur la seule face* $\mathscr{D}_i$, *il y a un pôle simple pour* $t = -f_i(\beta_1,\beta_2)$ *de résidu*

$$\Gamma(f_i(\beta_1,\beta_2))^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{\beta_1-1}t_2^{\beta_2-1}\exp(-Q_j(t_1,t_2))\,dt_1\,dt_2$$

si $\mathscr{D}_i$ *n'est pas parallèle aux axes, et*

$$I_0(P_1(1,X_2),\beta_2)(-f_1(\beta_1,\beta_2))$$

ou

$$I_0(P_\ell(X_1,1),\beta_1)(-f_\ell(\beta_1,\beta_2))$$

sinon.

iii) *Si la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1,β_2) *coupe* $\mathscr{E}_0$ *sur l'intersection des faces* $\mathscr{D}_i$ *et* $\mathscr{D}_{i+1}$, $I_0(P,\beta)(s)$ *a un pôle double pour*

$$s = -f_i(\beta_1,\beta_2) = -f_{i+1}(\beta_1,\beta_2).$$

THÉORÈME 11. — *Soit* $t_0 \in \bigcup_{i\in I} T_i(\beta,P)$. *Si pour tout* i *et tout* ν_P *tel que* $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$, *on a* $t_i(\beta,\nu_P) \neq t_{i-1}(\beta,\nu_P)$ *et* $t_i(\beta,\nu_P) \neq t_{i+1}(\beta,\nu_P)$, *alors le point* $s = t_0$ *est un point régulier ou un pôle simple. Dans ce cas, on a :*

$$\Gamma(-t_0)\operatorname*{Res}_{s=t_0} I_0(P,\beta)(s) = \sum_{i,\nu_P} c_i(P,\nu_P)B'_i(\beta,\nu_P)$$

lorsque c'est non nul, la sommation étant prise sur tous les i *et* ν_P *tels que* $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$ *où*

$$c_i(P,\nu_P) = \prod_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+}\frac{(-1)^{\nu_\alpha}}{(\nu_\alpha!)}e_\alpha.$$

Preuve. — Nous démontrons les théorèmes 9, 10 et 11.

Considérons une face F de $\mathscr{E}_\infty$ d'équation $g(x,y) = 1$ avec

$$g(x,y) = x/c + y/d$$

et la face $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}_0$ symétrique de F par rapport au point A d'équation $f(x,y) = 1$ avec $f(x,y) = x/a + y/b$. On a

$$(13) \qquad c = \frac{\alpha_1^0 b + \alpha_2^n a - ab}{b}, \qquad d = \frac{\alpha_1^0 b + \alpha_2^n a - ab}{a}.$$

Les singularités de $I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s - \beta_1, -\alpha_2^n s - \beta_2)(-s)$ vérifient

$$(14) \qquad -s = -\frac{\alpha_1^0 s + \beta_1}{c} - \frac{\alpha_2^n s + \beta_2}{d} - \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d}\right).$$

Considérons tout d'abord le cas où c et d sont tous deux finis. Alors (14) est équivalent à (15)

$$(15) \quad s\left(1 - \frac{\alpha_1^0}{c} - \frac{\alpha_n^\alpha}{d}\right) = \frac{\beta_1}{c} + \frac{\beta_2}{d} + \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d}\right).$$

On en déduit que les singularités de $I_0(P,\beta)(s)$ vérifient

$$(16) \qquad s = -\left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_2}{b}\right) + \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a} - \frac{\alpha_2}{b}\right).$$

Si maintenant c est infini, alors $b = \alpha_2^n - \alpha_1^n$. Si $\alpha_1^n = 0$, alors il n'y a pas de singularité correspondante pour $I_0(P,\beta)(s)$. Si $\alpha_1^n \neq 0$, alors (14) s'écrit

$$s = -\frac{\beta_2}{\alpha_1^n} - \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^n}\right).$$

Supposons maintenant que $I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s - \beta_1, -\alpha_2^n s - \beta_2)(s)$ ait un pôle double pour $s = s_0$, alors il existe j et ν_P tels que

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{\alpha_1^0 s_0 + \beta_1}{c_j} - \frac{\alpha_2^n s_0 + \beta_2}{d_j} - \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c_j} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d_j}\right) \\ &= -\frac{\alpha_1^0 s_0 + \beta_1}{c_{j-1}} - \frac{\alpha_2^n s_0 + \beta_2}{d_{j-1}} - \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c_{j-1}} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d_{j-1}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit, si $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_{i-1}$ sont les faces de $\mathscr{E}_0$ symétriques de F_j et F_{j-1} par rapport à A,

$$\begin{aligned} s_0 &= -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) + \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a_i} - \frac{\alpha_2}{b_i}\right) \\ &= -\left(\frac{\beta_1}{a_{i-1}} + \frac{\beta_2}{b_{i-1}}\right) + \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a_{i-1}} - \frac{\alpha_2}{b_{i-1}}\right). \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant les résidus. Soit $t_0 \in \bigcup_{i\in I} T_i(\beta,P)$

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{s=t_0} \Gamma(-s)I_0(P,\beta)(s)\\ &\qquad = \operatorname*{Res}_{s=t_0} \Gamma(-s)I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s-\beta_1, -\alpha_2^n s-\beta_2)(-s)\\ &\qquad = \Gamma(-t_0)\operatorname*{Res}_{s\to t_0} I_\infty(Q, -\alpha_1^0 t_0-\beta_1, -\alpha_2^n t_0-\beta_2)(-s).\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname*{Res}_{s\to t_0} \Gamma(-s)I_0(P,\beta)(s) = \sum_{j,\nu_Q} c_j(Q,\nu_Q)B_j(\beta',\nu_Q)$$

la sommation étant étendue à tous les j et ν_Q tels que $s_j(\beta',\nu_Q) = -t_0$ avec $\beta'_1 = -\alpha_1^0 t_0 - \beta_1$ et $\beta'_2 = -\alpha_2^n t_0 - \beta_2$, c'est-à-dire à tous les i et ν_P tels que $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$. Si $j \neq 1$ et ℓ

$$B_j(\beta',\nu_Q) = G_{Q_j}\left(\beta'_1 + \sum_{\alpha\in F_j^-} \alpha_1\nu_\alpha, \beta'_2 + \sum_{\alpha\in F_j^-} \alpha_2\nu_\alpha\right)$$

où $G_{Q_j}(s_1,s_2)$ est le prolongement sur $\mathbf{C}^2$ de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s_1} t_2^{s_2} \exp(-Q_j(t_1,t_2)) \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

On a encore

$$\begin{aligned}G_{Q_j}(s_1,s_2) = \Gamma\left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)&\int_0^1 v^{s_1}Q_j(\nu,1)^{-(s_1/c_j+s_2/d_j)}\frac{dv}{v}\\ &+\Gamma\left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\int_0^1 v^{s_2}Q_j(1,\nu)^{-(s_1/c_j+s_2/d_j)}\frac{dv}{v}.\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}s'_1 &= -s_1 + \left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\alpha_1^0\\ s'_2 &= -s_2 + \left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\alpha_2^n.\end{aligned}$$

On a

$$\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i} = \frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}G_{Q_j}(s_1,s_2) = \Gamma\left(\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i}\right)&\int_1^\infty v^{s'_1}P_i(\nu,1)^{-(s'_1/a_i+s'_2/b_i)}\frac{dv}{v}\\ &+\Gamma\left(\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i}\right)\int_1^\infty v^{s'_2}P_i(1,\nu)^{-(s'_1/a_i+s'_2/b_i)}\frac{dv}{v}.\end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que

$$G_{Q_j}(s_1, s_2) = G_{P_i}(s'_1, s'_2).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
G_{Q_j}\Big(\beta'_1 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_1 \nu_\alpha, \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_2 \nu_2\Big) \\
&= G_{P_i}\left(\beta_1 + \sum_{\alpha \in F_j^-} (\alpha_1^0 - \alpha_1)\nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha \in F_j^-} (\alpha_2^n - \alpha_2)\nu_\alpha\right) \\
&= G_{P_i}\left(\beta_1 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_i^+} \alpha_1 \nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_i^+} \alpha_2 \nu_\alpha\right).
\end{aligned}$$

Si $j = 1$ ou ℓ

$$B_1(\beta', \nu_Q) = \Gamma\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right)$$

$$I_\infty\left(Q_1(1, X_2), \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right)$$

$$s_1(\beta', \nu_Q) - \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha = -t_0 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha = f_1(\beta_1, \beta_2) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha f_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\begin{aligned}
I_\infty\left(Q_1(1, X_2), \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right) \\
= I_0\left(P_1(1, X_2), \beta_2 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(t_0 - \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \nu_\alpha\right).
\end{aligned}$$

Les théorèmes sont donc démontrés.

3. Lien avec les polynômes de Bernstein.

Notons $\mathscr{O} = \mathbf{R}\{x_1, x_2\}$ l'anneau des séries convergentes à deux variables et $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires en $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ à coefficients dans $\mathscr{O}$.

Bernstein ([2]) a montré que pour tout polynôme P, il existe $B \in \mathbf{R}[s]$, $B \neq 0$ et $D \in \mathscr{D}[s]$ tels que l'on ait

$$DP^{s+1} = BP^s.$$

Il est clair que l'ensemble des $B \in \mathbf{R}[s]$ tels qu'il existe $D \in \mathscr{D}[s]$ avec $DP^{s+1} = BP^s$ est un idéal de $\mathbf{C}[s]$; le générateur unitaire de cet idéal est noté b et est appelé le « polynôme de Bernstein » de P.

Nous avons donc :

$$I_0(P,\beta)(s) = \frac{1}{b(s)} \int_0^1 \int_0^1 D[P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} \, dx_1 \, dx_2 .$$

Nous connaissons les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ et nous étudions les pôles de

$$\int_0^1 \int_0^1 D[P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} \, dx_1 \, dx_2 .$$

Nous écrivons D sous la forme

$$D = \sum_{j=1}^{N} D_j s^j \qquad \text{avec} \qquad D_j \in \mathscr{D} .$$

On définit $\operatorname{ord}^T D = \max \{\operatorname{ord} D_j + j\}$ et on peut montrer ([7]) qu'i existe D tel que

$$\operatorname{ord}^T D = \deg b(s) .$$

Donc on peut écrire :

$$D_j = \sum_{i_1, i_2} a_{j,i_1,i_2}(x_1,x_2) \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}}$$

avec $a_{j,i_1,i_2}(x_1,x_2) \in \mathcal{O}$ et $i_1 + i_2 \leqslant M$, M fixé.

Nous sommes donc ramenés à étudier un nombre fini d'intégrales de forme

$$I_{j,i}(s) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2) \, dx_1 \, dx_2$$

avec $a_{j,i}(x_1,x_2) \in \mathcal{O}$.

Par intégration par parties, nous obtenons $I_{j,i}(s) = A_{j,i}(s) - B_{j,i}(s)$ av

$$A_{j,i}(s) = \left[\int_0^1 \frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x_1^{i_1-1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2) \, dx_2 \right]_{x_1=0}^{x_1=1}$$

$$B_{j,i}(s) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x_1^{i_1-1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2)] \, dx_1 \, dx_2$$

En recommençant l'intégration par parties un nombre suffisant de fois, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{j,i}(s) = \sum_k \int_0^1 \mathrm{P}(1,x_2)^{s+1-k} e_k(x_2)\, dx_2 \\ + \sum_{k'} \int_0^1 \mathrm{P}(x_1,1)^{s+1-k'} e_{k'}(x_1)\, dx_1 \\ + \sum_{\ell} \int_0^1 \mathrm{P}(0,x_2)^{s+1-\ell} e_\ell(x_2)\, dx_2 \\ + \sum_{\ell'} \int_0^1 \mathrm{P}(x_1,0)^{s+1-\ell'} e_{\ell'}(x_1)\, dx_1 \\ + \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{P}(x_1,x_2)^{s+1} e_{j,i}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2\end{aligned}$$

où e_k et e_ℓ sont des éléments de $\mathbf{R}\{x_2\}$, $e_{k'}$ et $e_{\ell'}$ des éléments de $\mathbf{R}\{x_1\}$ et $e_{j,i} \in \mathbf{R}\{x_1,x_2\}$. Toutes ces sommes sont finies.

Ceci permet, connaissant les pôles de $\mathrm{I}_0(\mathrm{P},\beta)(s)$ et les pôles des différentes fonctions qui apparaissent ici, d'en déduire des résultats sur $b(s)$.

Notons $\mathrm{Z} = \operatorname*{Inf}_{(m_1,m_2) \in \mathbf{N}^{*2}} \{f_i(m_1,m_2) \mid i \in \mathrm{I}\}$.

THÉORÈME 12. — *Soit* $q \in \bigcup_{\beta \in \mathbf{N}^{*2}} \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{T}_i(\beta,\mathrm{P})$. *S'il existe* β *tel que* q *soit effectivement un pôle de* $\mathrm{I}_0(\mathrm{P},\beta)(s)$ *et si* $q \notin \mathcal{N}$, *alors* q *est racine de* b *si* $q > -\mathrm{Z} - 1$ *ou si* $q + 1$ *n'est pas un pôle de* $\mathrm{I}_0(\mathrm{P},\beta')(s)$ *quel que soit* β'.

4. Démonstration des théorèmes. Étude des exemples.

Nous allons tout d'abord montrer

THÉORÈME 1. — *Notons, pour* $i = \{1,\ldots,r\}$

$$\mathscr{B}_i = \left\{ q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \mid (\beta_1,\beta_2) \in \mathrm{L}_i \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathcal{N} \right\}.$$

Alors si $q \in \mathscr{B}_i$, q *ou* $q + 1$ *est racine de* $\tilde{b}$.

Preuve. — Soit $(\beta_1,\beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2}$, posons

$$q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right).$$

Supposons tout d'abord que (β_1,β_2) n'appartienne pas au bord de L_i. Considérons $I_0(P,\beta)(s)$. Puisque la droite passant par l'origine et le point (β_1,β_2) coupe $\mathscr{E}_0(P)$ en $\mathscr{D}_i$, $I_0(P,\beta)(s)$ a effectivement un pôle pour $q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$. Si $q > -Z-1$ ou si $q+1$ n'est pas un pôle de $I_0(P,\beta')(s)$ pour tout β', alors q est racine de $\tilde{b}$. Si $q+1$ est un pôle de $I_0(P,\beta')(s)$ pour un β', $q+1 > -Z-1$ et donc $q+1$ est racine de $\tilde{b}$. Le théorème est démontré dans ce cas. Si (β_1,β_2) appartient au bord de L_i et $\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) < 1$, alors $I_0(P,\beta)(s)$ a un pôle double pour $s = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$ et donc $-\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$ est racine double de $\tilde{b}$.

THÉORÈME 2. — *Notons pour* $i \in \{1,\dots,r\}$

$$\mathscr{B}_{i,1} = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \mid (\beta_1,\beta_2) \in L'_i \cap \mathbf{N}^{*2},\ q \in \mathscr{N}\right\}.$$

Alors pour tout $i = 1,\dots,r$, $\mathscr{B}_{i,1}$ *est contenu dans l'ensemble des racines de* $\tilde{b}$.

Preuve. — Il suffit de remarquer que si $q \in \mathscr{B}_{i,1}$ alors $q > -Z-1$.

Nous traitons maintenant des exemples et tout d'abord ceux de l'introduction.

Exemple I.

$$P(X_1,X_2) = X_1^9X_2^2 + X_1^6X_2^3 + X_1^5X_2^3 + X_1^4X_2^4 + X_1^2X_2^5 + X_1X_2^9.$$

Après avoir appliqué les théorèmes 1 et 2, il reste à voir si q appartient à

$$\mathscr{B}_{1,2} = \left\{-\frac{18}{13}, -\frac{19}{13}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{2,2} = \left\{-\frac{25}{19}, -\frac{26}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{30}{19}, -\frac{33}{19}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,2} = \left\{-\frac{22}{17}, -\frac{25}{17}, -\frac{26}{17}, -\frac{27}{17}\right\}$$

si q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

Dans le tableau suivant on indique les racines q et $\tilde{b}$ telles que $q+1 \in \mathcal{B}_{i,r}$ avec $i = 1, 2, 3$ en donnant une fonction $I_0(P,\beta)(s)$ pour laquelle q est un pôle, avec le résidu correspondant

$-\frac{5}{13}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{13}\Gamma\left(\frac{8}{13}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{13}\right)\Gamma\left(\frac{5}{13}\right)^{-1}$
$-\frac{6}{13}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{13}\Gamma\left(\frac{7}{13}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{13}\right)\Gamma\left(\frac{6}{13}\right)^{-1}$
$-\frac{6}{19}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\frac{6}{19}\Gamma\left(\frac{15}{19}\right)\Gamma\left(\frac{10}{19}\right)\Gamma\left(\frac{6}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{7}{19}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{8}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{19}\right)\Gamma\left(\frac{7}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{9}{19}$	$I_0(P,(3,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{13}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{4}{19}\right)\Gamma\left(\frac{9}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{11}{19}$	$I_0(P,(4,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{18}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{7}{19}\right)\Gamma\left(\frac{11}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{14}{19}$	$I_0(P,(4,2))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{16}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{19}\right)\Gamma\left(\frac{14}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{5}{17}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{2}{17}\right)\Gamma\left(\frac{7}{17}\right)\Gamma\left(\frac{5}{17}\right)^{-1}$
$-\frac{9}{17}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{7}{17}\right)\Gamma\left(\frac{16}{17}\right)\Gamma\left(\frac{9}{17}\right)^{-1}$
$-\frac{10}{17}$	$I_0(P,(2,2))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{4}{17}\right)\Gamma\left(\frac{14}{17}\right)\Gamma\left(\frac{10}{17}\right)^{-1}$

Exemple II :

$$P(X_1,X_2) = X_1^7 + X_1^4X_2^2 + X_1X_2^6 + X_2^9$$

$$f_1(x,y) = \frac{3x}{9} + \frac{y}{9}; \qquad f_2(x,y) = \frac{4x}{22} + \frac{3y}{22}; \qquad f_3(x,y) = \frac{2x}{14} + \frac{3y}{14}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 7q \in \mathbf{N} \text{ ou } 9q \in \mathbf{N}\}.$$

Après application des théorèmes 1 et 2, il reste à voir, si q appartient à l'ensemble $\left\{-\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{34}{22}, -\frac{37}{22}, -\frac{19}{14}\right\}$, si q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

Dans le tableau suivant on indique les racines de b :

$-\frac{5}{14}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{14}\Gamma\left(\frac{7}{14}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{14}\right)\Gamma\left(\frac{5}{14}\right)^{-1}$
$-\frac{12}{22}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\frac{1}{22}\Gamma\left(-\frac{4}{22}\right)\Gamma\left(\frac{38}{22}\right)\Gamma\left(\frac{12}{22}\right)^{-1}$
$-\frac{15}{22}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{22}\Gamma\left(-\frac{5}{22}\right)\Gamma\left(\frac{42}{22}\right)\Gamma\left(\frac{15}{22}\right)^{-1}$

Exemple III :

$$P(X_1,X_2) = X_1^5 + a_1X_1^4X_2 + a_2X_1^3X_2^2 + a_3X_1^2X_2^3 + X_2^4$$
$$f(x,y) = \frac{x}{5} + \frac{y}{4}$$
$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 4q \in \mathbf{N} \text{ ou } 5q \in \mathbf{N}\}.$$

Il reste à savoir si c'est $-\frac{11}{20}$ ou $-\frac{31}{20}$ qui est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, aucune fonction $I_0(P,(\beta)(s))$ n'admet de pôles pour $s = -\frac{11}{20}\cdot$ Donc $-\frac{31}{20}$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_1 = 0 = a_2$, il en est de même. En effet, les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{N}$ sont

$$-\left(\frac{\beta_1}{5} + \frac{\beta_2}{4}\right) - \frac{3\nu}{20}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

et donc aucune fonction $I_0(P,\beta)(s)$ n'admet de pôle pour $s = -\frac{11}{10}\cdot$ (On retrouve le fait que dans ce cas P est quasi-homogène déjà montré par Yano ([6]).)

Si $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$:

Alors $I_0(P,\beta)(s)$ peut avoir des pôles pour

$$-\left(\frac{\beta_1}{5}+\frac{\beta_2}{4}\right)-\frac{\nu_1}{20}-\frac{2\nu_2}{20}, \qquad (\nu_1,\nu_2)\in \mathbf{N}^2 .$$

Donc $I_0(P,(1,1))(s)$ peut avoir un pôle pour $s = -\frac{11}{20}$; les autres fonctions $I_0(P,(\beta_1,\beta_2))(s)$ ne peuvent pas avoir de pôles pour $s = -\frac{11}{20}\cdot$ La fonction $I_0(P,(1,1))(s)$ a effectivement un pôle pour $s = -\frac{11}{20}$ si

$$+\frac{1}{2.20}a_1^2\,\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{20}a_2\,\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{est non nul,}$$

c'est-à-dire si $\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2$.

Si $\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2$, alors $-\frac{11}{20}$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $\frac{2}{5}a_1^2 = a_2$, alors aucune fonction $I_0(P,\beta)(s)$ n'a pour pôle $-\frac{11}{20}$ et c'est donc $-\frac{31}{20}$ qui est racine de $\tilde{b}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que si

$$\frac{2}{5}a_1^2 = a_2 \quad \text{on a} \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1,X_2\}/(P,P'_{X_1},P'_{X_2}) = 12$$

et si

$$\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2 \quad \text{on a} \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1,X_2\}/(P,P'_{X_1},P'_{X_2}) = 11 .$$

Exemples IV :

$$P(X_1,X_2) = X_1^7 + X_2^6 + \Sigma\, a_\alpha X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}$$

où

$$\alpha_1 \leqslant 6, \qquad \alpha_2 \leqslant 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha_1}{7}+\frac{\alpha_2}{6} > 1 ,$$

$$f(x,y) = \frac{x}{7} + \frac{y}{6}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 7q \in \mathbf{N} \text{ ou } 6q \in \mathbf{N}\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, l'ensemble

$$\left\{-\frac{13}{42}, -\frac{19}{42}, -\frac{20}{42}, -\frac{25}{42}, -\frac{26}{42}, -\frac{27}{42}, -\frac{31}{42}, -\frac{32}{42}, -\frac{33}{42},\right.$$
$$-\frac{34}{42}, -\frac{37}{42}, -\frac{38}{42}, -\frac{39}{42}, -\frac{40}{42}, -\frac{41}{42}, -\frac{43}{42}, -\frac{44}{42}, -\frac{45}{42}, -\frac{46}{42},$$
$$\left.-\frac{47}{42}, -\frac{50}{42}, -\frac{51}{42}, -\frac{52}{42}, -\frac{53}{42}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et si q appartient à

$$\left\{-\frac{57}{42}, -\frac{58}{42}, -\frac{59}{42}, -\frac{64}{42}, -\frac{65}{42}, -\frac{71}{42}\right\}$$

alors q ou $q + 1$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_\alpha = 0$ pour tout α, les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{N}$ sont

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right)$$

et donc l'ensemble $\left\{-\frac{57}{42}, -\frac{58}{42}, -\frac{59}{42}, -\frac{64}{42}, -\frac{65}{42}, -\frac{71}{42}\right\}$ est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

Nous étudions tout d'abord les cas séparément.

Dans les tableaux suivants, on indique les rationnels $q + 1$ qui sont racines de b, les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ qui ont des pôles en ces points avec les résidus correspondants. La notation * signifie que la fonction $I_0(P,\beta)(s)$ est la seule qui admette la valeur correspondante comme pôle.

1) $X_1^7 + X_2^6 + a_1 X_1^6 X_2$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}.$$

$-\frac{15}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42}a_1^2\,\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{15}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{16}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{6.42}a_1^3\,\Gamma\left(\frac{19}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{16}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{24.42}a_1^4\,\Gamma\left(\frac{25}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{2.42}a_1^2\,\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{6.42}a_1^3\,\Gamma\left(\frac{19}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,3))(s)$	$-\frac{1}{2.42}a_1^2\,\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

2) $X_1^7 + X_2^6 + a_2X_1^5X_2^2$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{2\nu}{42},\qquad \nu\in\mathbf{N}$$

$-\frac{15}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{15}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42}a_2\Gamma\left(\frac{11}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$\frac{1}{2.42}a_2^2\,\Gamma\left(\frac{12}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,3))(s)$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

3) $X_1^7 + X_2^6 + a_3X_1^4X_2^3$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{3\nu}{42},\qquad \nu\in\mathbf{N}$$

$-\frac{16}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)$*	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{16}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(2,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

4) $X_1^7 + X_2^6 + a_4X_1^3X_2^4$.

$I_0(P,\beta)(s)$ peut admettre des pôles pour

$$s=\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{4\nu}{42},\qquad \nu\in\mathbf{N}$$

$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)$*	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{4}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(3,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

5) $X_1^7 + X_2^6 + a_5X_1^2X_2^5$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s=-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{5\nu}{42}$$

$-\dfrac{23}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\dfrac{1}{2.42}\,a_5^2\,\Gamma\left(\dfrac{5}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{11}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\dfrac{29}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)^*$	$\dfrac{1}{2.42}\,a_5^2\,\Gamma\left(\dfrac{6}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{11}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{29}{42}\right)^{-1}$

6) $X_1^7 + X_2^6 + a_6 X_1^6 X_2^2$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s = -\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{8\nu}{42}$$

$-\dfrac{29}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\dfrac{1}{2.42}\,a_6^2\,\Gamma\left(\dfrac{13}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{29}{42}\right)^{-1}$

7) $X_1^7 + X_2^6 + a_7 X_1^5 X_2^3$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s = -\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{9\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\dfrac{22}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\dfrac{1}{42}\,a_7\,\Gamma\left(\dfrac{6}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{4}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\dfrac{29}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)^*$	$-\dfrac{1}{42}\,a_7\,\Gamma\left(\dfrac{6}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{29}{42}\right)^{-1}$

8) $X_1^7 + X_2^6 + a_8 X_1^4 X_2^4$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{10\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\dfrac{23}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\dfrac{1}{42}\,a_8\,\Gamma\left(\dfrac{5}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\dfrac{29}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)^*$	$-\dfrac{1}{42}\,a_8\,\Gamma\left(\dfrac{6}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{29}{42}\right)^{-1}$

9) $X_1^7 + X_2^6 + a_9 X_1^5 X_2^4$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{16\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\dfrac{29}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\dfrac{1}{42}a_9\,\Gamma\left(\dfrac{6}{7}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)\Gamma\left(\dfrac{29}{42}\right)^{-1}$

Pour tous les autres trinômes on sait qu'il existe $g_1(X_1,X_2) \in \mathbf{C}\{X_1,X_2\}$ et $g_2(X_1,X_2) \in \mathbf{C}\{X_1,X_2\}$ tels que $P = g_1{}^{[}\,(X_1,X_2)P'_{X_1} + g_2(X_1,X_2)P'_{X_2}$.

On peut résumer l'ensemble de ces résultats dans un tableau :

X_2^6		— — — — 23 29		-		
		X_1^2 X_2^5	— — 17 — 23 29	— — — — 23 29	— — — — — 29	
			$X_1^3X_2^4$	— 16 — 22 23 29	— — — 22 — 29	
				$X_1^4X_2^3$	15 — 17 22 23 29	— — — — — 29
					$X_1^5X_2^2$	15 16 17 22 23 29
						$X_1^6X_2$

X_1^7

Dans le tableau suivant, on a calculé tous les polynômes de Bernstein des déformations à μ constant de $X_1^7 + X_2^6$. On a indiqué aussi les strates qui correspondent à τ constant $\left(\tau = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1, X_2\} / \left(P, \dfrac{\partial P}{\partial X_1}, \dfrac{\partial P}{\partial X_2}\right)\right)$ calculées par Laudal et Pfister (Modular Singularities, Lecture Notes, à paraître). On peut constater que l'on peut avoir plusieurs polynômes de Bernstein dans une strate à τ constant et que τ peut varier dans une famille à b constant.

b constant et τ constant

pour $X_1^7 + X_2^6 + T_1X_1^5X_2^2 + T_2X_1^4X_2^3 + T_3X_1^3X_2^4 + T_4X_1^5X_2^3 + T_5X_1^4X_2^4 + T_6X_1^5X_2^4$

<table>
<tr>
<td>S_{26}
$9T_2^2-8T_1T_3+\frac{20}{7}T_1^3 \neq 0$</td>
<td rowspan="2">$T_1 \neq 0$
$T_2 \neq 0$
$T_3 \neq \frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}$ $\frac{16}{42}$ $\frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td rowspan="2">$T_1 \neq 0$
$T_2 \neq 0$
$T_3 = \frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}$ $\frac{16}{42}$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1 \neq 0$
$T_2 = 0$
$T_3 \neq \frac{2}{7}T_1^2$
$T_3 \neq \frac{5}{14}T_1^2$
ou
$T_5 \neq \frac{5}{7^4.6}T_1^5$
$\frac{15}{42}$ – $\frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1 \neq 0$
$T_2 = 0$
$T_3 = \frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}$ – –
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1 = 0$
$T_2 \neq 0$
$T_3 \neq 0$
– $\frac{16}{42}$ $\frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1 = 0$
$T_2 \neq 0$
$T_3 = 0$
– $\frac{16}{42}$ –
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{27}
$9T_2^2-8T_1T_3+\frac{20}{7}T_1^3 = 0$
$T_1 \neq 0$ ou $T_2 \neq 0$
ou $T_3 \neq \frac{5}{14}T_1^2$</td>
<td>$T_1 \neq 0$
$T_2 = 0$
$T_3 = \frac{5}{14}T_1^2$
et
$T_5 = \frac{5}{7^4.6}T_1^5$
$\frac{15}{42}$ – $\frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td></td>
<td>$T_1 = 0$
$T_2 = 0$
$T_3 \neq 0$
$T_4 \neq 0$
– – $\frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1 = 0$
$T_2 = 0$
$T_3 \neq 0$
$T_4 = 0$
– – $\frac{17}{42}$
– $\frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{28}
$T_1=T_2=T_3=0$</td>
<td colspan="2">$T_4 \neq 0$ $T_5 = 0$
$\frac{22}{29}$ $\frac{29}{42}$</td>
<td colspan="2">$T_4 = 0$ $T_5 \neq 0$
$\frac{23}{42}$ $\frac{29}{42}$</td>
<td colspan="2">$T_4 \neq 0$ $T_5 \neq 0$
$\frac{22}{42}$ $\frac{23}{44}$
$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{29}</td>
<td colspan="6">$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{30}</td>
<td colspan="6">quasi-homogène</td>
</tr>
</table>

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold, On some problems in singularity theory, Geometry and Analysis, *Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi*, Springer Verlag, 1981.

[2] I. N. Bernstein, Feasibility of the analytic continuation f_+^λ for certain polynomials f translated from *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, vol. 2, n° 1, p. 92-93, January-March 1968.

[3] P. Cassou-Noguès, Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées, *Journal of Number Theory*, Vol. 23, n° 1 (1986), 1-54.

[4] M. Kashiwara, B functions and holonomic systems, Rationality of roots of b functions, *Invent. Math.*, (1976-1977), 33-53.

[5] B. Malgrange, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes in Math.*, vol. 459, Springer Verlag 1975, 98-119.

[6] T. Yano, On the theory of b-functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 14 (1978), 111-202.

[7] T. Yano, b-functions and exponents of hypersurface isolated singularities, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 40 (1983), Part. 2.

[8] F. Ehlers et K. Lo, Minimal characteristic exponent of the Gauss-Manin connection of isolated singular point and Newton polyhedron, *Math. Ann.*, 259 (1982), 431-441.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1984
révisé le 18 juin 1985.

Pierrette Cassou-Noguès,

L. A. au C.N.R.S. n° 226
U.E.R. de Mathématiques
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex.