ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AZIZ EL KACIMI-ALAOUI
GILBERT HECTOR

Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 3 (1986), p. 207-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_207_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 3 (1986), 207-227

DÉCOMPOSITION DE HODGE BASIQUE POUR UN FEUILLETAGE RIEMANNIEN

par
A. EL KACIMI-ALAOUI et G. HECTOR

Introduction.

Soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$, une forme différentielle α sur M est dite *basique* si pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$ on a : $i_X \alpha = i_X d\alpha = 0$. Si α est basique, $d\alpha$ l'est aussi et on note $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ le complexe des formes basiques de $(M, \mathcal{F})$. L'homologie $H^*(M/\mathcal{F})$ de ce complexe s'appelle la *cohomologie basique* de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$.

Divers auteurs ont étudié cette cohomologie. Dans [9], G. Schwarz a montré que même si la variété M est compacte, il peut arriver que la cohomologie basique soit de dimension infinie. Dans [8], B. Reinhart a énoncé un théorème de finitude et de dualité pour la cohomologie basique d'un feuilletage *riemannien* (i.e. muni d'une métrique quasi-fibrée) sur une variété compacte orientée. Cet énoncé est malheureusement inexact (cf. [2]). Cependant dans un article récent ([5]), F. Kamber et P. Tondeur affirment que les techniques de Reinhart (basées sur la notion de "complexe transversalement elliptique") s'appliquent pourvu que l'on se restreigne aux feuilletages minimalisables (i.e. admettant une métrique quasi-fibrée pour laquelle les feuilles sont des sous-variétés minimales). Enfin dans [3], les auteurs en collaboration avec V. Sergiescu ont obtenu des résultats de finitude à l'aide de techniques de suites spectrales.

Le présent travail part des théorèmes de structure de Fédida [4] et Molino ([6]). Nous y reprenons et développons l'étude du complexe des formes basiques d'un feuilletage riemannien du point de vue de la théorie de Hodge.

Mots-clés : Feuilletage – Parallélisme transverse – Forme basique harmonique.

Pour un feuilletage *transversalement parallélisable* (voir 1.1.) le complexe $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ est un complexe elliptique au-dessus de la variété basique W de $\mathcal{F}$. A peu de choses près, ceci reste vrai pour un feuilletage riemannien en général (voir 4.6.).

Notre résultat essentiel découle de cette observation : pour tout feuilletage riemannien le complexe $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ admet une décomposition de Hodge. Comme conséquence, on trouve le théorème de finitude de $H^*(M/\mathcal{F})$ et il en découle que $H^*(M/\mathcal{F})$ vérifie la dualité de Poincaré si et seulement si $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ (où $n =$ codim $\mathcal{F}$). Ce dernier résultat est obtenu indépendamment par A. Haefliger (communication privée) et V. Sergiescu [10] utilisant des techniques homologiques.

Pendant la rédaction de ce travail, le second auteur a profité de l'hospitalité du Département de Géométrie et Topologie de l'Université de Zaragoza (Espagne).

Dans tout le travail, les feuilletages considérés seront supposés de classe C^∞ et sauf en 1.1. et 1.3., les variétés considérées seront supposées compactes.

1. Champs feuilletés – Champs basiques – Feuilletages transversalement parallélisables.

On note A(M) l'anneau des fonctions sur une variété M. Si M est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$, on désigne par $T(\mathcal{F}) \subset T(M)$ le fibré *tangent* à $\mathcal{F}$ et par $\nu(\mathcal{F}) = T(M)/T(\mathcal{F})$ le fibré *normal* à $\mathcal{F}$.

1.1. *Champs feuilletés – Champs basiques.*

Soient $\mathfrak{X}(M)$ le A(M)–module des champs de vecteurs sur M et $\Gamma(\mathcal{F})$ le sous-module des champs *tangents* à $\mathcal{F}$ (i.e. des sections de $T(\mathcal{F})$).

i) On dit que $X \in \mathfrak{X}(M)$ est un champ $\mathcal{F}$*-feuilleté* (ou simplement *un champ feuilleté*) si on a :

$$[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{F}) \quad \text{pour tout} \quad Y \in \Gamma(\mathcal{F}),$$

c'est-à-dire X est un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que X est feuilleté si et seulement si le flot local

(φ_t) engendré par X préserve $\mathcal{F}$. L'algèbre de Lie des champs $\mathcal{F}$-feuilletés est notée $\mathfrak{X}(M, \mathcal{F})$.

ii) Bien sûr, $\Gamma(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathfrak{X}(M, \mathcal{F})$ et on obtient une suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{X}(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\nu_*} \mathfrak{X}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

où $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F}) = \mathfrak{X}(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est appelée *l'algèbre de Lie des champs* $\mathcal{F}$*-basiques* (ou simplement *basiques*). Plus simplement on écrira X^b pour $\nu_*(X)$.

1.2. *Remarque.* La notation $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ se justifie par le fait que si $\mathcal{F}$ est une fibration localement triviale de base B, l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ s'identifie à B et $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{X}(B)$. La même interprétation reste valable dans le cas des feuilletages transversalement parallélisables pourvu que l'on considère $M/\mathcal{F}$ comme une Q-variété au sens de [1]. Pour cette même raison, nous préférons l'appellation champ "basique" plutôt que champ "transverse" (cf. [6]) pour les éléments de $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$.

Nous introduisons maintenant la famille des feuilletages dont nous voulons étudier la cohomologie basique aux paragraphes 2 et 3.

1.3. *Feuilletages transversalement parallélisables.*

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage de codimension n.

i) On dira qu'un n-uple $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de champs feuilletés définit un *parallélisme transverse* pour $\mathcal{F}$ si le n-uple $\mathcal{P}^b = \{P_1^b, \ldots, P_n^b\}$ de champs basiques est de rang n en tout point [et donc trivialise le fibré normal $\nu(\mathcal{F})$]. Si un tel parallélisme existe, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage *transversalement parallélisable* (ou plus simplement un *feuilletage* T.P).

Dans le cas d'un feuilletage T.P, $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ est un module libre engendré par $\{P_1^b, \ldots, P_n^b\}$ et le morphisme ν_* introduit en 1.1 (ii) admet une section τ.

ii) Dans le cas particulier où le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ engendré par $\mathcal{P}^b$ est une sous-algèbre de Lie, on dit que $\mathcal{F}$ admet une *structure transverse de Lie* ou plus simplement que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$ *-feuilletage de Lie.* On vérifie que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie, si et seulement si $T(\mathcal{F})$ est le noyau d'une 1-forme α à valeurs dans $\mathcal{G}$, qui est de rang maximum et vérifie l'équation de Maurer-Cartan :

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0 .$$

On peut encore remarquer qu'un feuilletage T.P admet une structure riemannienne transverse. Nous introduirons et utiliserons cette structure au paragraphe 2.3.

1.4. *Structure des feuilletages transversalement parallélisables* (cf. [6]).

Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage T.P de codimension n sur une variété compacte M. Il existe :

a) une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension $g \leqslant n$,

b) une fibration localement triviale $\pi : M \longrightarrow W$ de fibre (compacte) $\mathfrak{F}$,

c) Un $\mathcal{G}$ -feuilletage de Lie $(F, \mathfrak{F}_0)$ à feuilles denses sur F tels que :

i) $m = \dim W = n - g$,

ii) les fibres de π sont les adhérences des feuilles de $\mathfrak{F}$,

iii) le feuilletage induit par $\mathfrak{F}$ sur une fibre de π est isomorphe à $(F, \mathfrak{F}_0)$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est appelée *l'algèbre de Lie structurale de* $\mathfrak{F}$, la fibration π est *la fibration (ou feuilletage) basique* de $\mathfrak{F}$ et W est *la variété basique de* $\mathfrak{F}$.

En raison de la propriété (ii) ci-dessus le feuilletage basique de $\mathfrak{F}$ sera désigné par $\overline{\mathfrak{F}}$.

Retenons quelques conséquences de 1.4. qui nous seront utiles pour la suite :

1.5. *Remarques.* – Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage T.P. sur M.

i) Pour le feuilletage $(F, \mathfrak{F}_0)$, on a bien sûr $\mathfrak{X}(F/\mathfrak{F}_0) \simeq \mathcal{G}$.

ii) Les espaces $\mathfrak{X}(M, \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{X}(M/\mathfrak{F})$ sont des A(W)-modules. Par ailleurs l'existence du parallélisme permet de montrer de façon immédiate que $\mathfrak{X}(M, \mathfrak{F})$ engendre $\mathfrak{X}(M)$ comme A(M)-module.

iii) De façon évidente $\mathfrak{X}(M/\overline{\mathfrak{F}})$ s'identifie à $\mathfrak{X}(W)$. Par ailleurs en raison de la propriété (ii) de 1,4 , $\mathfrak{X}(M, \mathfrak{F})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M, \overline{\mathcal{F}})$. On obtient alors un morphisme de $A(W)$-modules et d'algèbres de Lie $\pi_* : \mathfrak{X}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{X}(W)$.

iv) Finalement on remarquera que le feuilletage basique $\overline{\mathcal{F}}$ n'est pas T.P en général i.e. W n'est pas nécessairement parallélisable. Bien plus, W n'est pas orientable en général.

Passons rapidement à la cohomologie basique d'un feuilletage (quelconque) $(M, \mathcal{F})$.

1.6. *Formes basiques.*

i) Soit $\Omega^*(M)$ le complexe des formes différentielles sur M ($\Omega^\circ(M) = A(M)$). Si M est muni d'un feuilletage $\mathcal{F}$, on dira que $\alpha \in \Omega^*(M)$ est *$\mathcal{F}$-basique* (ou *basique* tout court), si on a :

$$i_X\, \alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad i_X\, d\alpha = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad X \in \Gamma(\mathcal{F}).$$

Bien sûr si α est basique il en est de même pour $d\alpha$ et l'espace des formes basiques est un sous-complexe de $\Omega^*(M)$ que l'on note $\Omega^*(M/\mathcal{F})$.

La cohomologie du complexe $[\Omega^*(M/\mathcal{F}), d]$ s'appelle *la cohomologie (de De Rham) basique de $\mathcal{F}$.*

ii) En particulier, on posera $\Omega^\circ(M/\mathcal{F}) = A(M/\mathcal{F})$. Alors $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ est muni d'une structure de $A(M/\mathcal{F})$-module. De plus si $\mathcal{F}$ est T.P. on a de façon évidente $A(M/\mathcal{F}) = A(W)$ donc $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ est un $A(W)$-module. On verra en 2.1 que ce module est libre.

2. Décomposition de Hodge des formes basiques pour les feuilletages T.P.

Soient $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage T.P. de codimension n et $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un parallélisme transverse de $\mathcal{F}$. On montre tout d'abord que $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ est libre.

2.1. *Base $\mathcal{P}$-canonique de $\Omega^r(M/\mathcal{F})$.*

i) Soit $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})^*$ le dual du module des champs basiques. On définit un morphisme de $A(W)$-modules :

$$j : \Omega^1(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})^*$$

par $(j\omega)(X) = \omega(\tau(X))$ pour $X \in \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ (où τ est comme en 1.3). On voit aisément en utilisant 1.5 (ii) que j est bijectif.

ii) Identifiant $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})^*$ avec $\Omega^1(M/\mathcal{F})$ à l'aide de j, on désigne par $\{\theta^i\} \subset \Omega^1(M/\mathcal{F})$ la base duale de $\mathcal{P}^b$. On voit que $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ est un A(W)-module libre de dimension C_n^r engendré par la base

$$\{\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}\}_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r}.$$

C'est la base *$\mathcal{P}$-canonique* de $\Omega^r(M/\mathcal{F})$.

iii) Le générateur $v = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ de $\Omega^n(M/\mathcal{F})$ est appelé *la forme volume basique de* $\mathcal{F}$.

2.2. *Le complexe de de Rham de* $M/\mathcal{F}$.

i) Compte-tenu de ce qui précède, on voit immédiatement que $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ s'identifie au A(W)-module $\Gamma(\mathcal{B}_r)$ des sections d'un fibré vectoriel trivial $\mathcal{B}_r$ de rang C_n^r et base W. Soit $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_r\}_{r=0,1,\ldots,n}$, alors $(\mathcal{B}, d)$ est le *complexe de DeRham* de $M/\mathcal{F}$.

ii) Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U qui trivialise simultanément $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$. On peut choisir le parallélisme $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de telle façon que l'on ait :

$$P_{i_{|\pi^{-1}(U)}} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad \text{pour} \qquad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$P_{i_{|\pi^{-1}(U)}} \in \Gamma(\overline{\mathcal{F}}) \qquad \text{pour} \qquad i > m.$$

Un abus d'écriture évident nous donne alors les écritures locales suivantes pour tout $\omega \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$,

$$\omega_{|U} = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$

$$d\omega_{|U} = \sum d_W a_{i_1 \ldots i_r} \wedge d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$
$$+ \sum (-1)^s a_{i_1 \ldots i_r} d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge d(\theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r})$$

où s dépend du r-uple considéré $i_1 < \ldots < i_r$ et d_W désigne la différentielle sur la variété W.

L'expression précédente de $d\omega$ montre que la différentielle d est un opérateur différentiel d'ordre 1 *au sens du complexe* $\mathcal{B}$. Bref $(\mathcal{B}, d)$ est un complexe différentiel. (Dans la suite on écrira désormais d au lieu de d_{W}).

iii) Soient enfin $u \in \mathrm{W}$, $\xi \in \mathrm{T}_u^*(\mathrm{W})$, $\xi \neq 0$, et $\varphi \in \mathrm{A}(\mathrm{W})$ tels que $\varphi(u) = 0$ et $d\varphi(u) = \xi$. D'après ([11] p. 115), le symbole $\sigma(d)(u, \xi)$ de d au point (u, ξ) est défini par

$$\sigma(d)(u, \xi)\,\omega_u = (d\varphi \wedge \omega)_u$$

pour toute forme $\omega \in \Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F})$.

Alors si $(d\varphi \wedge \omega)_u = 0$, on choisit les coordonnées locales $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dans (ii) ci-dessus de façon à avoir $x_1 = \varphi$ et en utilisant les écritures précédentes, on obtient :

$$\omega_{|\mathrm{U}} = \sum a_{i_2 \ldots i_r}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$

$$\omega_{|\mathrm{U}} = dx_1 \wedge \alpha,$$

où α est la r-forme basique définie sur $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ par :

$$\alpha = \sum_{i_2 < \ldots < i_r} a_{i_2 \ldots i_r}\, dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}.$$

Bref le complexe de De Rham $(\mathcal{B}, d)$ de $\mathrm{M}/\mathcal{F}$ est un complexe elliptique.

Pour pouvoir appliquer au complexe $(\mathcal{B}, d)$ les résultats de la théorie des complexes elliptiques, il nous reste à définir le L^2-produit scalaire correspondant. Pour ce faire, on remarque qu'il existe sur $(\mathcal{B}, d)$ une structure riemannienne adaptée au parallélisme fixé $\mathcal{P}$.

2.3. *Structure riemanienne de* $(\mathrm{M}, \mathcal{F})$.

i) Rappelons que le fibré normal $\nu(\mathcal{F})$ est trivialisé par la famille des champs basiques :

$$\mathcal{P}^b = \{\mathrm{P}_1^b, \ldots, \mathrm{P}_n^b\}.$$

On désigne par R_ν l'unique structure riemanienne sur $\nu(\mathcal{F})$ telle que :

$$\mathrm{R}_\nu(\mathrm{P}_i^b, \mathrm{P}_j^b) = \delta_i^j.$$

Elle est définie par une section du fibré $\nu(\mathcal{F})^* \otimes \nu(\mathcal{F})^*$ qui est $\mathcal{F}$-basique (en un sens évident). En raison de l'existence de cette structure, on dit que $\mathcal{F}$ est un *feuilletage riemannien.*

ii) La structure R_ν définit une métrique riemannienne R_W sur W. Si W est orientable, on choisit une orientation $\mathcal{O}$ de W et on désigne par w la forme volume correspondant à $(R_W, \mathcal{O})$. Dans le cas contraire, on munit W de la mesure différentiable strictement positive μ obtenue en considérant une forme volume $\widetilde{w}$ sur le revêtement $\widetilde{W}$ des orientations de W et pour laquelle on a

$$\int_W f d\mu = \frac{1}{2} \int_{\widetilde{W}} \widetilde{f}\widetilde{w}$$

où $\widetilde{f}$ est le relèvement à $\widetilde{W}$ de la fonction f.

Pour unifier l'écriture dans la suite, on conviendra que l'on écrira aussi $d\mu = w$ dans le cas orientable.

2.4. *Produit scalaire – Laplacien basique – Formes harmoniques basiques.*

i) A la métrique R_ν de 2.3., on associe naturellement la structure euclidienne $(\,,\,)_r$ sur $\mathcal{B}_r$ telle que pour tout couple de r-formes basiques :

$$\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$$

$$\beta = \sum b_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$$

on ait :

$$(\alpha_u, \beta_u)_r = \sum a_{i_1 \dots i_r} b_{i_1 \dots i_r} \qquad \text{pour tout} \qquad u \in W.$$

On obtient un produit scalaire noté $< , >_r$ sur $\Omega^r(M/\mathcal{F})$, en posant :

$$< \alpha, \beta >_r = \int_W (\alpha_u, \beta_u)_r \, d\mu(u).$$

ii) On construit maintenant les opérateurs usuels associés à l'opérateur d_r :

$\delta_r : \Omega^{r+1}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^r(M/\mathcal{F})$ l'adjoint de d_r par rapport à $< , >_r$

et :

$$\Delta_r : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^r(M/\mathcal{F})$$

défini par :

$$\Delta_r = d_{r-1}\ \delta_{r-1} + \delta_r\, d_r\ .$$

L'opérateur Δ_r est auto-adjoint par rapport au produit scalaire $<,>_r$. C'est le *laplacien basique* de $(M, \mathcal{F})$. Les éléments de $\mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) = \ker \Delta_r$ sont les r-formes basiques *harmoniques*. On a l'égalité :

$$\mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) = \ker d_r \cap \ker\ \delta_{r-1}\ .$$

La théorie générale des complexes elliptiques (voir par exemple Wells [11]) nous donne alors le théorème de décomposition de Hodge pour les formes basiques de $(M, \mathcal{F})$.

2.5. THEOREME. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage T.P. de codimension* n *sur une variété compacte* M. *Alors pour tout* $r \in \{0, \ldots, n\}$ *on a :*

i) $\mathcal{H}^r(M/\mathcal{F})$ *est de dimension finie.*

ii) $\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \oplus \operatorname{im} d_{r-1} \oplus \operatorname{im} \delta_r$.

En particulier, on a $H^r(M/\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F})$ *et on retrouve le résultat de* [3] :

2.6. COROLLAIRE. — *La cohomologie basique d'un feuilletage T.P. sur une variété compacte est de dimension finie.*

3. Dualité de Poincaré en cohomologie basique pour les feuilletages T.P.

La non-nullité de $H^n(M/\mathcal{F})$ est bien sûr une condition nécessaire pour que $H^*(M/\mathcal{F})$ vérifie la dualité de Poincaré. En fait nous voulons montrer dans la suite qu'elle est suffisante. Nous commençons par expliciter la signification de cette condition dans le cas d'un feuilletage T.P. $(M, \mathcal{F})$ dont la variété basique W est orientable.

3.1. *Suite spectrale de cohomologie basique de* $(M, \mathcal{F})$.

i) Soient r, p des entiers naturels. On pose :

$$F^p\, \Omega^r(M/\mathcal{F}) = \{\alpha \in \Omega^r(M/\mathcal{F}) \ /\ i_X\, \alpha = 0\}$$

pour tout $(r-p+1)$-uple $X = X_1 \wedge \ldots \wedge X_{r-p+1}$ de champs feuilletés X_i appartenant à $\chi_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{F})$. Du fait que $\chi_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{F})$ est une sous-algèbre de Lie de $\chi(M, \mathcal{F})$, on vérifie que l'on a (de façon analogue au cas des fibrés) :

$$dF^p\,\Omega^r(M/\mathcal{F}) \subset F^p\,\Omega^{r+1}(M/\mathcal{F}).$$

Autrement dit, on obtient une filtration décroissante compatible avec la différentielle.

ii) La suite spectrale ainsi obtenue est en fait la suite spectrale décrite dans [3]. Son terme E_2 est donné par

$$E_2^{pq} = H^p(W, \underset{\sim}{H^q(\mathcal{J})}).$$

En remarquant que le faisceau localement constant $\underset{\sim}{H^q(\mathcal{J})}$ est un fibré plat, on remarque que si W est orientable, on a par dualité de Poincaré, la relation (avec les notations de 1.4.) :

$$H^m(W, \underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})}) \cong H^\circ(W, \underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})}).$$

3.2. Proposition. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage T.P. de codimension* n *sur* M. *Si* W *est orientable, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$;

ii) $\mathcal{J}$ *est unimodulaire et* $\underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})}$ *est un fibré orientable de rang un qui est trivial comme fibré plat ;*

iii) *l'homomorphisme de* A(W)*-modules* I :

$$\Omega^n(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^m(W)$$

défini par $I(v) = w$ *est un morphisme différentiel.*

Et dans cette situation, I *induit un isomorphisme en cohomologie.*

Démonstration. – D'après 3.1., on a une suite d'isomorphismes

$$(S)\quad H^n(M/\mathcal{F}) \cong E_\infty^{m,g} \cong E_2^{m,g} \cong H^m(W, \underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})}) \cong (H^\circ(W, \underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})})$$

et donc on a $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{J}$ est unimodulaire et le fibré plat $\underset{\sim}{H^g(\mathcal{J})}$ est trivial, de rang 1. Ceci montre que i) équivaut à ii).

De (S) on déduit aussi que i) implique

$$H^m(M/\mathcal{F}) \cong H^m(W) = R.$$

En outre, dans la suite spectrale, tout élément de E_0^{mg} est d_0-fermé et la projection naturelle de Z_0^{mg} sur E_1^{mg} définit un morphisme I de $A(W)$-modules différentiels

$$\Omega^n(M/\mathcal{F}) \cong E_0^{mg} = Z_0^{mg} \longrightarrow E_1^{mg} \cong \Omega^m(W, \underbrace{H^g(\mathcal{J})}) \cong \Omega^m(W)$$

qui pour une décomposition $v = w \wedge \lambda$ (où λ est de degré g sur les fibres de $\overline{\mathcal{F}}$) s'écrit :

$$I(w) = I(w \wedge \lambda) = w \otimes [\lambda] = w \ .$$

Bref on a i) implique iii), comme la réciproque est triviale, la démonstration est terminée. □

Soit maintenant $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un parallélisme transverse de $\mathcal{F}$ et soit $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ la base duale de $\mathcal{P}^b$ (cf. 2.1.).

3.3. *Opérateur de Hodge basique – autre expression du produit scalaire* $<,>$.

i) On définit un morphisme de $A(W)$-modules

$$* : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{n-r}(M/\mathcal{F})$$

en posant :

$$*(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}) = \epsilon(i_1, \ldots, i_r)\, \theta^{j_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{j_{n-r}}$$

où $j_1 < \ldots < j_{n-r}$ est la suite complémentaire de $i_1 < \ldots < i_r$ dans $(1, \ldots, n)$ et $\epsilon(i_1, \ldots, i_r)$ est la signature de la permutation $(i_1 \ldots i_r\, j_1 \ldots j_{n-r})$. C'est l'opérateur de Hodge basique pour $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que :

$$* * \alpha = (-1)^{r(n-r)}\alpha \quad \text{pour tout } \alpha,$$

donc que $*$ est un isomorphisme dont l'inverse est donné par :

$$*^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * .$$

ii) Il est alors immédiat que si la variété basique W est orientable, le produit scalaire $<,>$ peut s'écrire

$$<\alpha, \beta>_r = \int_W I(\alpha \wedge * \beta) \quad \text{pour} \quad \alpha, \beta \in \Omega^r(M/\mathcal{F}) \ .$$

Si W n'est pas orientable, on passera à un revêtement $\widetilde{M}$ à deux feuillets comme en 2.3. ii). Avec des notations évidentes, on aura l'écriture

$$<\alpha,\beta>_r = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{W}} \widetilde{I}(\widetilde{\alpha}\wedge *\widetilde{\beta})$$

où I et $\widetilde{I}$ sont des morphismes différentiels si $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$.

Nous arrivons au résultat central de ce paragraphe.

3.4. Proposition. — *Soit* $(M,\mathcal{F})$ *un feuilletage T.P. de codimension* n *tel que* $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$. *Alors on a les relations :*

$$\delta_r = (-1)^r *^{-1} d_r * \qquad \text{et} \qquad *\Delta_r = \Delta_r * .$$

Démonstration. — On va montrer que l'opérateur

$$\hat{\delta}_r = (-1)^r *^{-1} d_r *$$

est bien l'adjoint de d_r pour le produit scalaire $<,>_r$. En effet, pour $\alpha \in \Omega^{r-1}(M/\mathcal{F})$ et $\beta \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$, on a :

$$d(\alpha\wedge *\beta) = d\alpha\wedge *\beta + (-1)^{r-1}\alpha\wedge d*\beta,$$

$$d(\alpha\wedge *\beta) = d\alpha\wedge *\beta - \alpha\wedge *\hat{\delta}\beta.$$

En utilisant l'écriture du produit scalaire introduite précédemment et en utilisant le fait que I est un morphisme différentiel, il vient par application du théorème de Stokes :

$$<d\alpha,\beta>_r = <\alpha,\hat{\delta}\beta>_r \qquad \text{et donc} \qquad \hat{\delta}_r = \delta_r,$$

le reste en découle aisément. □

3.5. Theoreme De Dualite. — *Soit* $(M,\mathcal{F})$ *un feuilletage T.P. de codimension* n. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *la forme volume basique* v *est harmonique*

ii) $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$

iii) $H^*(M/\mathcal{F})$ *vérifie la dualité de Poincaré.*

Démonstration. — (i) implique (ii) d'après 2.5. Supposons alors que $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, l'opérateur de Hodge commutant avec Δ (voir

3.4), induit un isomorphisme $* : \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-r}(M/\mathcal{F})$. D'où la condition (iii).

Enfin, si $H^*(M/\mathcal{F})$ vérifie la dualité de Poincaré, on a $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ et donc $*\Delta = \Delta *$ d'après 3.4. En appliquant cette relation à la forme volume ν, il vient :

$$* \Delta v = \Delta * v = \Delta 1 = 0 .$$

Puisque $*$ est un isomorphisme, on a $\Delta v = 0$. D'où le théorème. □

4. Feuilletages riemanniens : théorie de Hodge et dualité.

Un feuilletage riemannien $(M, \mathcal{F})$ transversalement orienté se "relève" en un feuilletage T.P. $(M^\#, \mathcal{F}^\#)$ dans le $SO(n)$-fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}$ (cf. 4.1). Ceci nous permet de relier les opérateurs de la théorie de Hodge pour $\mathcal{F}$ à des opérateurs relatifs à $\mathcal{F}^\#$ (cf. 4.4 et 4.6). On en déduit les théorèmes de décomposition de Hodge et de dualité de Poincaré basiques en 4.7 et 4.10.

4.1. *Feuilletages riemanniens – Feuilletage relevé.*

i) On dit que $\mathcal{F}$ est *riemannien* s'il existe une métrique riemannienne R_0 sur $\mathbf{R}^n$ et un cocycle feuilleté $\mathcal{C} = (\{U_i, f_i)\}, \{g_{ij}\})$ définissant $\mathcal{F}$ tel que pour tout $x \in M$, $g_{ij}(x)$ soit une isométrie locale de $\mathbf{R}^n$. La différentielle Dg_{ij} est à valeurs dans le groupe orthogonal $O(n)$ et le fibré normal $\nu(\mathcal{F})$ est muni d'une structure riemannienne R_ν invariante le long des feuilles de $\mathcal{F}$ (voir aussi 2.3. (ii)).

En choisissant un supplémentaire $N(\mathcal{F})$ de $T(\mathcal{F})$ dans $T(M)$, on pourra compléter R, considérée comme structure riemannienne sur $N(\mathcal{F})$ en une métrique $R = R_T \oplus R_\nu$ sur M, dont on dira qu'elle est *quasi-fibrée* (voir [9]).

ii) Le $SO(n)$-fibré principal $p : M^\# \longrightarrow M$ associé à $\nu(\mathcal{F})$ (c'est-à-dire le fibré des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}$), est défini par le cocycle $(\{U_i\}, \{Dg_{ij}\})$. Soit $p_0 : E \longrightarrow \mathbf{R}^n$ le fibré des repères directs de $\mathbf{R}^n$; chaque submersion f_i induit une submersion $F_i : \rho^{-1}(U_i) \longrightarrow E$ et chaque différentielle Dg_{ij} induit un difféomorphisme G_{ij} de E tels que

$$(\{(\rho^{-1}(U_i), F_i)\}, \{G_{ij}\})$$

soit un cocycle feuilleté. Il définit le feuilletage *relevé* $\mathcal{F}^{\#}$ de $\mathcal{F}$ sur $M^{\#}$. Ce feuilletage de même dimension que $\mathcal{F}$ est invariant par l'action à droite de $SO(n)$ sur $M^{\#}$.

L'intérêt de $\mathcal{F}^{\#}$ réside dans le fait qu'il est transversalement parallélisable.

4.2. *Un parallélisme transverse pour* $(M^{\#}, \mathcal{F}^{\#})$ (cf. [6]).

i) Posons $N = \frac{1}{2} n(n-1) = \dim SO(n)$. La connexion de Levi-Civita sur $(\mathbf{R}^n, R_0)$ permet de construire un parallélisme

$$\mathcal{P}^0 = \{P_1^0, \ldots, P_n^0, Q_1^0, \ldots, Q_N^0\}$$

de E qui jouit des propriétés suivantes :

a) La partie *verticale* $\{Q_1^0, \ldots, Q_N^0\}$ de $\mathcal{P}^0$ est formée par une base de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs fondamentaux pour l'action de $SO(n)$ sur E (celle-ci est isomorphe à l'algèbre de Lie $so(n)$ de $SO(n)$)

b) La partie *horizontale* $\{P_1^0, \ldots, P_n^0\}$ de $\mathcal{P}^0$ est formée de n champs de vecteurs tels que pour tout $x \in E$,

$$\{P_1^0(x), P_2^0(x), \ldots, P_n^0(x)\}$$

se projette en un repère orthonormé de $T_{\rho_0(x)}(\mathbf{R}^n)$

c) Si G est le difféomorphisme local de E induit par une isométrie locale g de $\mathbf{R}^n$, alors $\mathcal{P}^0$ est invariant par G.

ii) Cette dernière propriété (c), nous permet d'associer à $\mathcal{P}^0$ une famille $\mathcal{P}^b = \{P_1^b, \ldots, P_n^b, Q_1^b, \ldots, Q_N^b\}$ de champs de vecteurs $\mathcal{F}^{\#}$-basiques qui trivialise le fibré $\nu(\mathcal{F}^{\#})$. On choisit un supplémentaire $N(\mathcal{F}^{\#})$ de $T(\mathcal{F}^{\#})$ dans $T(M)$; en représentant les éléments de $\mathcal{P}^b$ par des sections de $N(\mathcal{F}^{\#})$, on obtient finalement une famille

$$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_N\}$$

de champs $\mathcal{F}^\#$-feuilletés qui est un parallélisme transverse de $\mathcal{F}^\#$, où l'on peut supposer que $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\}$ est une famille de champs fondamentaux pour l'action de $SO(n)$ sur $M^\#$.

4.3. *Les complexes de formes $\mathcal{F}^\#$-basiques et $\mathcal{F}$-basiques*

On désigne par W la variété basique de $\mathcal{F}^\#$.

i) Dans la base $\mathcal{R}$-canonique de $\Omega^1(M^\#/\mathcal{F}^\#)$ (cf. 2.1), nous distinguons les éléments *horizontaux* $\{\omega^1, \omega^2 \ldots \omega^n\}$ définis par

$$\begin{cases} \omega^i(Q_k) = 0 & \text{pour tout } k \\ \omega^i(P_j) = \delta^i_j & \text{pour tout } i, j; \end{cases}$$

et les éléments *verticaux* $\{\theta^1, \ldots, \theta^N\}$ définis de façon analogue. Ceci définit une décomposition en produit tensoriel du complexe de De Rham $\mathcal{B}(\mathcal{F}^\#)$ de $\mathcal{F}^\#$ en

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}^\#) = \mathcal{B}^h(\mathcal{F}^\#) \otimes \mathcal{B}^v(\mathcal{F}^\#)$$

la partie *horizontale* $\mathcal{B}^h(\mathcal{F}^\#)$ (qui est un fibré vectoriel au-dessus de W) jouera pour $\mathcal{F}$ le rôle de $\mathcal{B}(\mathcal{F}^\#)$ pour $\mathcal{F}^\#$. On le note $\mathcal{B}(\mathcal{F})$.

ii) La base $\mathcal{R}$-canonique de $\Omega^r(M^\#/\mathcal{F}^\#)$ sera alors donnée par les C^r_n expressions du type

$$\{\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p} \wedge \theta^{j_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{j_q}\}$$

(où $r = p + q$, $i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ et $j_1 < j_2 < \ldots j_q \leqslant N$) dont on dira qu'elles sont de degré *horizontal* p et de degré *vertical* q. Ceci définit une bigraduation :

$$\Omega^r(M^\#/\mathcal{F}^\#) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{pq}(M^\#/\mathcal{F}^\#).$$

Par définition de la partie verticale du parallélisme $\mathcal{R}$, on a des relations du type :

$$d\theta^j = \sum C^j_{ik}\, \theta^i \wedge \theta^k \;, \quad C^j_{ik} \in A(W).$$

Par suite la différentielle d se décompose comme dans les cas usuels sous la forme :

$$d = d_{01} + d_{10} + d_{2,-1}\,.$$

Le sous-complexe des formes $\mathcal{F}^{\#}$-basiques $SO(n)$-invariantes qu'on désignera par

$$(I\Omega^{*}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#}), d)$$

est muni d'une structure de $IA(W)$-module. Il est bigradué par restriction de la bigraduation de $\Omega^{*}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$.

iii) La fibration ρ induit un homomorphisme injectif

$$\rho^{*} : \Omega^{r}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r,0}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$$

dont il est aisé de voir que l'image est exactement $I\Omega^{r,o}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$. Donc $\Omega^{r}(M/\mathcal{F})$ identifié à $I\Omega^{r,0}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ apparaît comme l'espace des sections $SO(n)$-invariantes du fibré $\Lambda^{r}\mathcal{B}(\mathcal{F})$ des puissances extérieures de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Nous introduisons maintenant les opérateurs nécessaires en théorie de Hodge en nous plaçant dans le cas où $\mathcal{F}$ est transversalement orienté. Afin d'éviter les confusions, nous affectons d'un dièse $\#$ tous les opérateurs (sauf la différentielle d) relatifs à $\mathcal{F}^{\#}$. Ainsi, on désignera désormais par $*^{\#}, <>^{\#}, \delta^{\#}, \Delta^{\#}$ les opérateurs introduits dans (2.4.), réservant les notations $*, <>, \delta, \Delta$ pour des opérateurs portant sur les formes $\mathcal{F}$-basiques.

4.4. *Eléments de théorie de Hodge pour $\mathcal{F}$.*

Soit $\{\omega^{1}, \ldots, \omega^{n}, \theta^{1}, \ldots, \theta^{N}\}$ la base duale dans $\Omega^{1}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ du parallélisme $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}^{\#}$.

i) La forme $\chi = \theta^{1} \wedge \theta^{2} \wedge \ldots \wedge \theta^{N} \in \Omega^{N}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ est appelée *forme caractéristique* du fibré ρ est $SO(n)$-invariante et vérifie $d_{10}\chi = 0$. La forme $v = \omega^{1} \wedge \omega^{2} \wedge \ldots \wedge \omega^{n} \in \Omega^{n}(M/\mathcal{F})$ est la forme *volume basique* de $\mathcal{F}$; elle peut être définie à l'aide de la métrique transverse R_{v} exactement comme la forme volume d'une variété riemannienne. Enfin, $v^{\#} = v \wedge \chi$ est la forme volume de $\mathcal{F}^{\#}$; elle est $SO(n)$-invariante.

ii) En procédant comme sur les variétés riemanniennes, on introduit un *opérateur de Hodge basique*

$$* : \Omega^{r}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{n-r}(M/\mathcal{F})$$

dont on vérifie qu'il est induit par l'opérateur suivant défini sur $\Omega^{r,0}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$:

$$*(\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_r}) = \epsilon(i_1, \ldots, i_r)\, \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_{n-r}}$$

où $k_1 < \ldots < k_{n-r}$ est la suite complémentaire de $i_1 < i_2 \ldots < i_r$ dans $(1, 2, \ldots, n)$ et $\epsilon(i_1, \ldots, i_r)$ est la signature de la permutation $(i_1, \ldots, i_r, k_1, \ldots, k_{n-r})$.

On vérifie que l'on a la formule habituelle pour l'inverse de $*$. Enfin, l'opérateur de Hodge $*^{\#}$ relatif à $\mathcal{F}^{\#}$ est relié à $*$ par les relations

$$*^{\#}\alpha = *\alpha \wedge \chi \quad \text{et} \quad *\alpha = *^{\#}(\alpha \wedge \chi) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F}).$$

4.5. *Produits scalaires pour* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}^{\#}$: *laplacien basique relatif à* $\mathcal{F}$.

i) Nous munissons $\Omega^r(\mathrm{M}^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ du produit scalaire $<,>^{\#}$ défini en (2.4.) et notons $<,>$ le produit scalaire sur $\Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F})$ obtenu par restriction de $<,>^{\#}$ à $\mathrm{I}\Omega^{r,0}(\mathrm{M}^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$. Grâce aux relations précédentes, ce produit scalaire s'exprimera en fonction de l'opérateur $*$ par les formules :

$$<\alpha, \beta> = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathrm{W}} \mathrm{I}(\alpha \wedge *\beta \wedge \chi) & \text{si la variété basique W de } \mathcal{F}^{\#} \text{ est orientable,} \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathrm{W}} \widetilde{\mathrm{I}}(\widetilde{\alpha} \wedge *\widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\chi}) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F})$.

ii) Soit $\delta : \Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r-1}(\mathrm{M}/\mathcal{F})$ l'adjoint de d par rapport à $<,>$. En général on a bien sûr $\delta\alpha \neq \delta^{\#}\alpha$. De même pour le *laplacien* $\mathcal{F}$*-basique* $\Delta = d\delta + \delta d$, on a $\Delta\alpha \neq \Delta^{\#}\alpha$.

Finalement $\mathcal{H}(\mathrm{M}/\mathcal{F}) = \operatorname{Ker}\Delta$ est appelé l'espace des *formes harmoniques basiques* de $\mathcal{F}$. On vérifie de la façon habituelle que les sous-espaces $\operatorname{Ker}\Delta$, $\operatorname{Im} d$ et $\operatorname{Im}\delta$ sont deux à deux disjoints et que l'on a $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker}\delta$.

L'opérateur Δ agit sur les sections invariantes du fibré $\Lambda^r\,\mathcal{B}(\mathcal{F})$, il nous faut l'étendre en un opérateur agissant sur

$$\Omega^{r,0}(\mathrm{M}^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) = \Gamma(\Lambda^r\,\mathcal{B}(\mathcal{F}))$$

espace de toutes les sections de $\Lambda^r\,\mathcal{B}(\mathcal{F})$ et montrer que cette extension est elliptique.

4.6. *L'opérateur* D.

i) Bien sûr, la différentielle $d : \Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(\mathrm{M}/\mathcal{F})$ s'identifie à la restriction à $\Omega^r(\mathrm{M}/\mathcal{F}) = \mathrm{I}\Omega^{r,0}(\mathrm{M}^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ de l'opérateur

$d_{10} : \Omega^r(M^\#/\mathcal{F}^\#) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M^\#/\mathcal{F}^\#)$ (cf. 4.3 ii)). Comme le produit scalaire $<,>$, est obtenu par restriction de $<,>^\#$, il s'ensuit que δ est la restriction à $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ de l'adjoint $\delta_{1,0}$ de d_{10} par rapport à $<,>$. Enfin Δ est la restriction de l'opérateur différentiel $\Delta' = d_{10}\,\delta_{10}^\# + \delta_{10}^\#\, d_{10}$ aux sections invariantes de $\overset{r}{\Lambda}\,\mathcal{B}\,(\mathcal{F})$.

Malheureusement Δ' n'est pas elliptique.

ii) En 4.2, nous avons introduit une famille $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ de champs fondamentaux de l'action de $SO(n)$ sur $M^\#$ qui sont aussi des champs $\mathcal{F}^\#$-feuilletés. Ils définissent des opérateurs différentiels $\{\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2, \dots, \widetilde{Q}_N\}$ d'ordre 1 sur $M^\#$ qui préservent les formes $\mathcal{F}^\#$-basiques et que l'on peut considérer comme des opérateurs différentiels au sens du complexe $\overset{*}{\Lambda}\,\mathcal{B}(\mathcal{F}^\#)$. On pose

$$A' = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{Q}_i^2 \quad \text{et} \quad D' = \Delta' + A'.$$

L'action de $SO(n)$ sur $M^\#$ préserve la fibration basique de $\mathcal{F}^\#$ donc induit une action isométrique de $SO(n)$ sur W et pour tout $x \in W$ on a une décomposition $T_x(W)^* = T_x^h(W)^* \oplus T_x^v(W)^*$ où $T_x^v(W)$ est l'espace tangent à l'orbite de $SO(n)$ et $T_x^h(W)$ est l'orthogonal à $T_x^v(W)$. Si ξ est un vecteur cotangent à W en x, la forme quadratique associée au symbole $\sigma(\Delta')\ (x,\xi)$ [resp. $\sigma(A')\ (x,\xi)$] est définie positive pour $\xi \in T_x^h(W)^*$ [resp. $\xi \in T_x^v(W)^*$]. Par suite la forme quadratique associée à $\sigma(D')\,(x,\xi)$ est définie positive pour tout ξ et D' est elliptique (au sens du fibré $\overset{*}{\Lambda}\,\mathcal{B}(\mathcal{F}^\#)$).

iii) Enfin on remarque que D' préserve les sections du fibré $\overset{r}{\Lambda}\,\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \overset{r}{\Lambda}\,\mathcal{B}^h(\mathcal{F}^\#)$. La restriction D de D' à $\overset{r}{\Lambda}\,\mathcal{B}(\mathcal{F})$ est bien sûr un opérateur différentiel elliptique. Sa restriction aux formes $SO(n)$ invariantes n'est rien d'autre que Δ; donc D est l'extension annoncée plus haut.

4.7. Théorème de décomposition de Hodge basique. — *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien de codimension* n *sur une variété compacte* M. *Pour tout* $r \leqslant n$, *on a* :

i) $\dim \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) < +\infty$.

ii) $\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} \delta$.

Démonstration. – Si $\mathcal{F}$ est transversalement orienté, on déduit du fait que D est elliptique, que l'on a

$$\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} D < +\infty \\ \Omega^{r,o}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D. \end{cases}$$

Mais l'opérateur D commute avec l'action de $SO(n)$, et sa restriction à $I\Omega^{r,o}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ est égale à Δ. On obtient donc une décomposition analogue pour $\Omega^r(M/\mathcal{F})$:

$$\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} \Delta < +\infty \\ \Omega^r(M/\mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \Delta \oplus \operatorname{Im} \Delta = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} \delta. \end{cases}$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement orientable, on passera à un revêtement à deux feuillets convenable $(M_1, \mathcal{F}_1)$, les formes $\mathcal{F}$-basiques s'identifiant aux formes $\mathcal{F}_1$-basiques invariantes par l'action naturelle de $\mathbf{Z}_2$ sur M_1.

4.8. COROLLAIRE. – *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien de codimension* n. *Pour tout* $r \leqslant n$ *on a* :

$$H^r(M/\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) .$$

Donc la cohomologie basique de $(M, \mathcal{F})$ *est de dimension finie (cf.* [3]).

Pour finir, nous allons établir un théorème de dualité de Poincaré dans les mêmes conditions et de la même manière que pour les feuilletages T.P. à partir du préliminaire technique suivant (analogue à 3.4).

4.9. PROPOSITION. – *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien de codimension* n. *Si* $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ *on a les relations :*

i) $\delta = (-1)^r *^{-1} d*$ *et*

ii) $*\Delta = \Delta *$.

Démonstration. – Si $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, $\mathcal{F}$ est bien sûr transversalement orientable ; $H^{n+N}(M^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) \neq 0$ d'après [3] et le morphisme I relatif à $\mathcal{F}^{\#}$ est un morphisme différentiel.

Pour établir la formule (i), on procède comme en 3.4. (en se restreignant là aussi au cas où W est orientable !).

Pour tout $\alpha \in \Omega^{r-1}(M/\mathcal{F})$ et $\beta \in \Omega^{r}(M/\mathcal{F})$, on a la suite d'égalités :

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d * \beta$$

$$d[\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] = d\alpha \wedge * \beta \wedge \chi + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d * \beta \wedge \chi$$

puisque $d_{10}\chi = 0$,

$$d\mathrm{I}[\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] = \mathrm{I}[d\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] + (-1)^{r-1} \mathrm{I}[\alpha \wedge d * \beta \wedge \chi] .$$

En intégrant sur W, il vient grâce au théorème de Stokes :

$$0 = < d\alpha , \beta > + (-1)^{r-1} < \alpha , *^{-1} d * \beta >$$

et $\hat{\delta} = (-1)^{r} *^{-1} d*$ est l'adjoint de d par rapport à $<,>$ c'est-à-dire $\hat{\delta} = \delta$. La relation (ii) suit immédiatement. □

4.10. Theoreme De Dualite. — *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien de codimension* n. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{F}$ *est transversalement orientable et la forme volume basique* v *de* $\mathcal{F}$ *est harmonique ;*

ii) $H^{n}(M/\mathcal{F}) \neq 0$,

iii) $H^{*}(M/\mathcal{F})$ *vérifie la dualité de Poincaré.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Barre, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 23-3 (1973), 227-312.

[2] Y. Carriere, Flots riemanniens — Journées sur les structures transverses, Toulouse 1982, *Astérisque* n° 116 (1984).

[3] A. El Kacimi-Alaoui, V. Sergiescu et G. Hector, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie, *Math. Z.*, 188 (1985), 593-599.

[4] E. Fedida, Sur les feuilletages de Lie, *C.R.A.S.*, Paris, 272 (1971), 999-1002.

[5] F. KAMBER, P. TONDEUR, Dualité de Poincaré pour les feuilletages harmoniques, *C.R.A.S.*, Paris, 294 (1982).

[6] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, *Proc. Kon, Nederl. Akad.*, Sci, A, 1, 85 (1982) 45-76.

[7] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 119-132.

[8] B. REINHART, Harmonic integrals on foliated manifolds, *Am. J. of Math*, (1959), 529-586.

[9] G.W. SCHWARZ, On the De Rham cohomology of the leaf space of foliation, *Topology*, 13 (1974),185-187.

[10] V. SERGIESCU, Cohomologie basique et dualité pour les feuilletages riemannien, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 35-3 (1985), 137-158.

[11] R.O. WELLS, Differential Analysis on complex manifolds, G.T.M. n° 65, Springer Verlag (1979).

Manuscrit reçu le 27 novembre 1984
révisé le 12 juin 1985.

A. EL KACIMI & G. HECTOR,
Université des Sciences et Techniques de
Lille I, U.A. 751
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 – Villeneuve d'Ascq Cedex (France).