PIERRE-GILLES LEMARIE

Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 4 (1985), p. 175-187
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_175_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 4 (1985), 175-187

CONTINUITÉ SUR LES ESPACES DE BESOV DES OPÉRATEURS DÉFINIS PAR DES INTÉGRALES SINGULIÈRES

par Pierre-Gilles LEMARIE

Introduction.

Liée dès ses origines à la théorie des équations aux dérivées partielles, la théorie de Calderón et Zygmund des opérateurs d'intégrale singulière s'est très tôt appliquée à des problèmes de régularité ou de différentiabilité des fonctions. Nous nous proposons dans cet article de donner un critère très simple de continuité de tels opérateurs sur les espaces de Besov homogènes $\dot{B}^s_{p,q}$ et ensuite d'illustrer l'emploi de ce critère par quelques exemples, en particulier par l'utilisation du paraproduit.

1. Opérateurs d'intégrale singulière : définitions de base.

La terminologie utilisée est en grande partie empruntée à G. David et J. L. Journé [3].

DÉFINITION 1. — *Un opérateur d'intégrale singulière est une application linéaire* T *continue de* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ *telle que son noyau-distribution* $K(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ *est en dehors de la diagonale* $x = y$, *une fonction qui vérifie l'estimation :*

$$(1) \qquad |K(x,y)| \leqslant C_1 |x-y|^{-n}$$

pour une constante C_1 *positive ou nulle. On dit que* T *est de classe* ε, *pour*

Mots-clés : Intégrale singulière (opérateur d') - Besov homogène (espace de).

un $\varepsilon \in]0,1[$, *si de plus on a :*

$$(2) \quad |K(x,y)-K(x',y)| \leqslant C_2|x-x'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon} \textit{ pour } |x-x'| < \frac{1}{2}|x-y|$$

pour une constante C_2 *positive ou nulle. Lorsque* T *est un opérateur d'intégrale singulière de classe* ε, *on note* $T \in SIO_{\varepsilon}$ (*où* SIO *signifie « singular integral operator »*).

Remarquons que le transposé ${}^tT$ d'un opérateur d'intégrale singulière T est encore un opérateur d'intégrale singulière, mais que la transposition ne conserve pas la régularité de classe ε. La même remarque est valable pour l'adjoint T^* de T.

La définition suivante se base sur la remarque ci-dessous : si $T \in SIO_{\varepsilon}$ et si $\psi \in \mathscr{D}$ est d'intégrale nulle, on a, pour $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\operatorname{Supp}\psi}}$ et $y \notin \operatorname{supp}\psi$,

$$|{}^tT\psi(y)| = \left|\int (K(x,y)-K(x_0,y))\psi(x)\,dx\right| \leqslant C(x_0,T,\psi)|x_0-y|^{-n-\varepsilon}$$

de sorte que, ${}^tT\psi$ étant en dehors du support de ψ une fonction intégrable à l'infini, le crochet $\langle 1|{}^tT\psi\rangle$ a un sens.

DÉFINITION 2. — *A tout* $T \in SIO_{\varepsilon}$ *est associée une distribution* (*modulo les constantes*) $T(1) \in \mathscr{D}'/C$ *définie par :*

$$\langle T(1)|\psi\rangle = \langle 1|{}^tT\psi\rangle \textit{ pour toute fonction } \psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \textit{ d'intégrale nulle.}$$

Enfin, pour introduire la dernière définition, nous notons pour $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $u > 0$, $f_{x_0,u}$ la fonction définie par : $f_{x_0,u}(x) = f\left(\frac{x-x_0}{u}\right)$ (c'est-à-dire la fonction f recentrée en x_0 et recalibrée à l'échelle u).

DÉFINITION 3. — *Un opérateur linéaire* T *continu de* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ *est dit être faiblement d'ordre* 0 *s'il existe une semi-norme* $\|\ \|_T$ *continue sur* $\mathscr{S}$ *telle que, pour tous* $f \in \mathscr{S}$, $g \in \mathscr{S}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *et* $u > 0$, *on ait :*

$$(3) \qquad |\langle T(f_{x_0,u})|g_{x_0,u}\rangle| \leqslant \|f\|_T\|g\|_T u^n.$$

On note alors $T \in WBP$ (*où* WBP *signifie « weak boundedness property »*).

Un exemple d'opérateurs faiblement d'ordre 0 sont les opérateurs continus de L^2 dans L^2 (la norme $\| \|_T$ étant alors proportionnelle à la norme $\| \|_2$).

2. Une formule élémentaire.

La formule décrite par la proposition 1 ci-dessus est classique dans les problèmes de régularité (lipschitzienne) des fonctions; elle se trouve déjà dans l'article de 1957 de Calderón et Zygmund [1]. La formulation que nous donnons ici est due à Y. Meyer [7], ainsi que la démonstration que nous ne faisons qu'esquisser :

PROPOSITION 1. — *Soit* $T \in SIO_\varepsilon$ *tel que* $T(1) = 0$ *dans* $\mathscr{D}'/C$ *et* $T \in WBP$. *Soit* $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, x_1 et x_2 *deux points de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\xi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ *une fonction égale à* 1 *aux voisinages de* x_1 *et de* x_2. *Posons* $\eta = 1 - \varepsilon$. *Alors* Tf *est défini en tout point et on a :*

$$\begin{aligned}(4)\quad Tf(x_2)-Tf(x_1)=&\int (K(x_2,y)-K(x_1,y))(f(y)-f(x_1))\eta(y)\,dy\\&-\int_{y\neq x_1} K(x_1,y)(f(y)-f(x_1))\xi(y)\,dy\\&+\int_{y\neq x_2} K(x_2,y)(f(y)-f(x_2))\xi(y)\,dy\\&+(f(x_2)-f(x_1))T\xi(x_2).\end{aligned}$$

La formule (4) est élémentaire en ce sens qu'elle correspond grosso modo à un simple jeu d'écriture. On a formellement $T\xi(x) = \int K(x,y)\xi(y)\,dy$ et $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$, et donc :

$$\begin{aligned}(5)\quad Tf(x_i) = f(x_i)T\xi(x_i) &+ \int_{x_i\neq y} K(x_i,y)(f(y)-f(x_i))\xi(y)\,dy\\&+\int K(x_i,y)f(y)\eta(y)\,dy\end{aligned}$$

tandis que $T(1)$ se calcule formellement comme $\int K(x,y)\,dy = T(1)(x)$ et donc (puisque $T(1) = C^{te}$) :

$$(6)\quad \int (K(x_1,y)-K(x_2,y))\eta(y)\,dy+T\xi(x_1)-T\xi(x_2) = 0\,.$$

La juxtaposition de (5) et (6) donne (4). Pour démontrer (4), il nous suffit donc de vérifier que Tf et $T\xi$ sont définies en tout point et que les formules (5) et (6) sont valides. Ces vérifications reposent essentiellement sur le lemme suivant [7] :

LEMME 1. — T *vérifie la propriété de commutation suivante : pour tout* f, g, h *dans* $\mathscr{D}$ *on a :*

$$(7) \quad \langle T(fg)|h\rangle = \langle Tf|gh\rangle + \iint_{x\neq y} K(x,y)f(y)(g(y)-g(x))h(x)\,dx\,dy.$$

L'intégrale double dans le second membre de l'égalité converge bien puisque $|K(x,y)(g(y)-g(x))| \leqslant C|x-y^{-}|^{n+1}$. A partir de ce lemme, on vérifie facilement que Tf est définie en tout point : si $\omega \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ vaut 1 sur une boule $B(0,2r_0)$, $T\omega$ est définie sur $B(0,r_0)$ par

$$T\omega(x) = C_{r_0} - \int (K(x,y)-K(0,y)(1-\omega(y))\,dy$$

où C_{r_0} est une constante ne dépendant pas de x; pour définir $Tf(x)$, on écrit $f = f\omega$ où ω vaut 1 sur une boule suffisamment grande pour contenir le support de f et x, puis $Tf(x) = f(x)T\omega(x) + \int_{x\neq y} K(x,y)\omega(y)(f(y)-f(x))\,dy$ d'après le lemme 1. Les formules (5) et (6) sont alors immédiates et la formule (5) est établie.

La proposition suivante, également due à Y. Meyer [7], permet de traiter le terme $T\xi(x_2)$ dans la formule (4) :

PROPOSITION 2. — *Soit* $T \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$ *tel que* $T(1) = 0$ *dans* $\mathscr{D}'/\mathbf{C}$ *et* $T \in \mathrm{WBP}$. *On note* $\|\ \|_T$ *la semi-norme associée à* T *dans la définition* 2. *Alors il existe une constante* C *positive ou nulle, telle que pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ *portée par la boule* $|x| \leqslant 1$, *pour tous* $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *et* $u > 0$, *on ait :*

$$(8) \qquad \|T(\varphi_{x_0,u})\|_\infty \leqslant C(\|\varphi\|_T + \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty).$$

3. Le critère de continuité $\dot{B}^s_{p,q}$.

Soit φ une fonction dans $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ portée par $\left\{\xi \Big/ \frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\right\}$ et telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right) = 1$ pour tout $\xi \neq 0$. On note Δ_k l'opérateur continu de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}'$ définie par $\mathscr{F}\,\Delta_k f(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\mathscr{F} f(\xi)$ où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier. Pour $s \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, on définit alors l'espace de Besov homogène $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$ par :

$$\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q} = \{f \in \mathscr{S}'/\mathbf{C}[\mathrm{X}]; (2^{ks}\Delta_k f)_\cdot \in \ell^q(\mathrm{L}^p)\} \tag{9}$$

et

$$\|f\|_{\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}} = \left\{\sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{ksq} \|\Delta_k f\|_p^q\right\}^{1/q}. \tag{9'}$$

C'est un espace de distributions modulo les polynômes; cet espace ne dépend pas du choix de φ.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME A. — *Soit* $\varepsilon \in]0,1]$ *et* $\mathrm{T} \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$. *Si* $\mathrm{T}(1) = 0$ *dans* $\mathscr{D}'/\mathbf{C}$ *et si* $\mathrm{T} \in \mathrm{WBP}$, *alors* T *est continu de* $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$ *dans* $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$ *pour tout* $s \in]0,\varepsilon[$ *et tous* $p, q \in [1,+\infty]$.

Un premier problème vient de ce que $\mathscr{S}$ n'est pas dense dans $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$ pour certaines valeurs de p, q. On étend alors la définition de T à $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$ par la formule (4).

Pour démontrer le théorème, on utilise une autre norme que (9') sur $\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}$.

LEMME 2. — *Pour* $s \in]0,1[$, p *et* $q \in [1,+\infty]$ *les normes suivantes sont équivalentes sur*

$$\|f\|_{\dot{\mathrm{B}}^s_{p,q}} = \|(2^{ks}\Delta_k f)\|_{\ell^q \mathrm{L}^p}$$

et

$$\mathrm{N}(f) = \|(|t|)^{-\frac{n}{q}-s}(\|f(x+t)-f(x)\|_{\mathrm{L}^p(dx)})\|_{\mathrm{L}^q(dt)}.$$

Ce lemme est classique. Pour sa version inhomogène, nous renvoyons à Stein [9] ou à Triebel [10].

Nous allons donc chercher à établir une inégalité de la forme $\mathrm{N}(\mathrm{T}f) \leqslant \mathrm{CN}(f)$; la norme $\mathrm{N}(\mathrm{T}f)$ fait intervenir la quantité $|\mathrm{T}f(x+t)-\mathrm{T}f(x)|$; nous utilisons alors la formule (4) avec $x_2 = x + t$,

$x_1 = x$ et $\xi = \Psi_{x,|t|}$ où $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est une fonction fixe vérifiant $\Psi(y) = 1$ si $|y| < 2$ et 0 si $|y| > 4$.

La formule (4) et les estimations (1) et (2) donnent la majoration :

$$\begin{aligned}|\mathrm{T}f(x+t)-\mathrm{T}f(x)| \leqslant \mathrm{C}\Bigg[& \int_{|x-y|>2|t|} \frac{t}{|x-y|^{n+\varepsilon}} |f(y)-f(x)|\, dy \\ & + \int_{|x-y|<4|t|} \frac{1}{|x-y|^n} |f(y)-f(x)|\, dy \\ & + \int_{|x+t-y|<5|t|} \frac{1}{|x+t-y|^n} |f(y)-f(x+t)|\, dy \\ & + \|\mathrm{T}(\Psi_{x,|t|})\|_\infty |f(x+t)-f(x)| \Bigg].\end{aligned}$$

La proposition 2 permet de majorer $\|\mathrm{T}(\Psi_{x,|t|})\|_\infty$ indépendamment de x et de t; on obtient donc, en posant

$$g_1(x,t) = \int_{|x-y|>2|t|} \frac{1}{|x-y|^{n+\varepsilon}} |f(y)-f(x)|\, dy$$

et

$$g_2(x,t) = \int_{|x-y|<5|t|} \frac{1}{|x-y|^n} |f(y)-f(x)|\, dy$$

la majoration,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\mathrm{T}f) \leqslant \mathrm{C}'\Bigg[& \mathrm{N}(f) + \| \, |t|^{-\frac{n}{q}-s} \|g_1(x,t)\|_{\mathrm{L}^p(dx)} \|_{\mathrm{L}^q(dt)} \\ & + \| \, |t|^{-\frac{n}{q}-s} \|g_2(x,t)\|_{\mathrm{L}^p(dx)} \|_{\mathrm{L}^q(dt)} \Bigg].\end{aligned}$$

LEMME 3. — *Soient* α *et* β *deux réels tels que* $0 < \alpha < s < \beta < \varepsilon$. *Alors on a les majorations :*

$$(10) \quad \|g_1(x,t)\|_{\mathrm{L}^p(dx)} \leqslant \mathrm{A}\left(\int_{|z|>2|t|} \frac{|t|^{\beta q}}{|z|^{n+\beta q}} \|f(x+z)-f(x)\|^q_{\mathrm{L}^p(dx)}\, dz \right)^{1/q}$$

$$(10') \quad \|g_2(x,t)\|_{\mathrm{L}^p(dx)} \leqslant \mathrm{A}\left(\int_{|z|<5|t|} \frac{|t|^{\alpha q}}{|z|^{n+\alpha q}} \|f(x+z)-f(x)\|^q_{\mathrm{L}^p(dx)}\, dz \right)^{1/q}$$

où la constante A *dépend de* $\varepsilon, s, \alpha, \beta, p$ *et* q.

La démonstration du lemme 3 est élémentaire : on utilise les inégalités de Minskowski et de Hölder :

$$\|g_1(x,t)\|_{L^p(dx)} = \left\| \int_{|z|>2|t|} \frac{|t|^\varepsilon}{|z|^{n+\varepsilon}} |f(x+z)-f(x)|\, dz \right\|_p$$

$$\leqslant \int_{|z|>2|t|} \frac{|t|^\varepsilon}{|z|^{n+\varepsilon}} \|f(x+z)-f(x)\|_{L^p(dx)}\, dz$$

$$\leqslant \left(\int_{|z|>2|t|} \frac{|t|^{\beta z}}{|z|^{n+\beta q}} \|f(x+z)-f(x)\|^q_{L^p(dx)}\, dz \right)^{1/q} \times \left(\int_{|z|>2|t|} \frac{|t|^{(\varepsilon-\beta)q'}}{|z|^{n+(\varepsilon-\beta)q'}}\, dz \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

et de même

$$\|g_2(x,t)\|_{L^p(dx)} = \left\| \int_{|z|<5|t|} \frac{1}{|z|^n} |f(x+z)-f(x)|\, dz \right\|_p$$

$$\leqslant \int_{|z|<5|t|} \frac{1}{|z|^n} \|f(x+z)-f(x)\|_{L^p(dx)}\, dz$$

$$\leqslant \left(\int_{|z|<5|t|} \frac{|t|^{\alpha q}}{|z|^{n+\alpha q}} \|f(x+z)-f(x)\|^q_{L^p(dx)}\, dz \right)^{1/q} \times \left(\int_{|z|<5|t|} \frac{|t|^{-\alpha q'}}{|z|^{n-\alpha q'}}\, dz \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

où $q' = \dfrac{q}{q-1}\cdot$

Pour conclure, on utilise (10) et (10′) pour majorer à nouveau $N(Tf)$, on obtient alors des intégrales doubles dt et dz, on intègre par rapport à $|t|$ $\left(\text{dans les domaines } |t| < \frac{|z|}{2} \text{ la fonction } |t|^{-n-sq+\beta q} \text{ et } |t| > \frac{|z|}{3} \text{ la fonction } |t|^{-n-sq+\alpha q}\right)$ et l'intégrale en dz obtenue, n'est autre que l'expression de $N(f)$. On a donc obtenu $N(Tf) \leqslant CN(f)$ et le théorème est démontré.

Lorsque $s < \frac{n}{p}$, $\dot{B}^s_{p,q}$ peut être considéré comme un espace de distributions, et pas seulement de distributions modulo les polynômes. Plus précisément, on peut définir $\dot{B}^s_{p,q}$ comme l'espace des $f \in \mathscr{S}'$, telles que, d'une part $(2^{ks}\Delta_k f) \in \ell^q(L^p)$, et d'autre part $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \Delta_k f$ dans $\mathscr{S}'$.

Pour compléter la démonstration de notre théorème, il nous faut donc démontrer que lorsque $f \in \mathscr{D}$, la distribution Tf vérifie $Tf = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \Delta_k Tf$. Mais Tf est une fonction bornée (d'après la proposition 2) et $|Tf(y)|$ se majore en $\frac{1}{|y|^n}$ à l'infini; on en conclut que $Tf \in L^2$ et donc $Tf = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \Delta_k Tf$. Le théorème est complètement démontré.

4. Le paraproduit de J.-M. Bony.

Soit φ la fonction introduite au début du paragraphe 3 pour définir les opérateurs Δ_k. On note Φ la fonction définie par $\Phi(0) = 1$ et $\Phi(\xi) = \sum_{k<0} \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$ pour $\xi \neq 0$; $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ et vaut 1 au voisinage de 0. Pour $k \in \mathbf{Z}$ on note S_k l'opérateur défini par $\mathscr{F} S_k f(\xi) = \Phi\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \mathscr{F} f(\xi)$. Le paraproduit de f et g noté $\pi(f,g)$, est alors défini par J.-M. Bony comme :

$$\pi(f,g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \Delta_k f S_{k-3} g \tag{11}$$

et l'on note L_f l'opérateur de paraproduit par f.

Une première utilisation importante (dans notre contexte) de l'opérateur de paraproduit a été faite par G. David et J.-L. Journé : ils ont remarqué que, lorsque $f \in \mathrm{BMO}$, $L_f \in \mathrm{SIO}_1$ et $L_f^* \in \mathrm{SIO}_1$; de plus, $L_f \in \mathrm{WBP}$, $L_f(1) = f$ et $L_f^*(1) = 0$; de là ils tirent le théorème suivant [3] :

Théorème B. — *Soit* $T \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$ *tel que* $T^* \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est continu de* L^2 *dans* L^2

(ii) $T \in \mathrm{WBP}$, $T(1) \in \mathrm{BMO}$ *et* $T^*(1) \in \mathrm{BMO}$.

Le sens i) $\Rightarrow$ ii) est classique. Pour ii) $\Rightarrow$ i), on retranche à T sa « copie conforme » $T'' = L_{T(1)} + L^*_{T^*(1)}$; on obtient alors un opérateur $T_0 \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$ tel que $T_0^* \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$, $T_0 \in \mathrm{WBP}$, $T_0(1) = 0$ et $T_0^*(1) = 0$.

Comme la continuité L^2 de L_f pour $f \in \mathrm{BMO}$ est un résultat classique, on est ramené à étudier la continuité de T_0. G. David et J.-L. Journé concluent en appliquant le lemme de Cotlar à un bon découpage de T_0; mais nous pouvons également conclure en nous appuyant sur le théorème A : T_0 est continu sur $\dot{B}^s_{2,2}$ pour $0 < s < \varepsilon$, T_0^* est continu sur $\dot{B}^s_{2,2}$ pour $0 < s < \varepsilon$ et donc T_0 est continu sur $\dot{B}^{-s}_{2,2}$ par dualité, et enfin par interpolation (puisque $[\dot{B}^s_{2,2}, \dot{B}^{-s}_{2,2}]_{[\frac{1}{2}]} = \dot{B}^0_{2,2} = L^2$) T_0 est continu sur L^2.

Cette démonstration et le Théorème A ont poussé Y. Meyer et M. Meyer à étudier de plus près l'opérateur de paraproduit. Ils ont alors démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — i) *Soit* $T \in SIO_\varepsilon$. *Si* $T \in WBP$, *alors* $T(1) \in \dot{B}^0_{\infty\infty}$.

ii) *Soit* $f \in \dot{B}^0_{\infty\infty}$. *Alors* $L_f \in SIO_1$, $L^*_f \in SIO_1$, $L_f \in WBP$, $L_f(1) = f$ et $L^*_f(1) = 0$.

Résultat d'où découle le :

THÉORÈME C. — *Notons* $BMO^s_{p,q}$ *pour* $0 < s < 1$ *et* $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ *l'espace des* $f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ *telles que* L_f *soit continu de* $\dot{B}^s_{p,q}$ *dans* $\dot{B}^s_{p,q}$. *Alors, pour* $T \in SIO_\varepsilon$ *et* $0 < s < \varepsilon$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $T : \dot{B}^s_{p,q} \to \dot{B}^s_{p,q}$

(ii) $T \in WBP$ *et* $T(1) \in BMO^s_{p,q}$.

Nous renvoyons le lecteur pour plus de détails à la thèse de M. Meyer [6]. Notons cependant que $BMO^s_{p,q} \cap L^\infty$ est l'espace des multiplicateurs ponctuels de $\dot{B}^s_{p,q}$: si $f \in L^\infty$, on écrit $Lf = Mf + T_0$ où M_f est l'opérateur de multiplication ponctuelle par f; il est clair que $M_f \in WBP \cap SIO_1$ et que $M_f(1) = f$. On applique alors le théorème A à T_0 et on obtient l'équivalence de la continuité du produit M_f avec celle du paraproduit L_f.

5. Remarques et exemples.

a) La valeur $s = \varepsilon$ doit être exclue dans le théorème A.

En effet, désignons par ω une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ paire telle que $\omega(\xi) = 1$ pour $|\xi| < \frac{5}{8}$ et 0 pour $|\xi| \geqslant \frac{7}{8}\cdot$ Désignons par Ω la fonction de transformée de Fourier ω et par Ω_ε celle de transformée $\Omega_\varepsilon(\xi) = (\operatorname{sgn} \xi)|\xi|^\varepsilon \omega(\xi)$. Les estimations

$$|\Omega_\varepsilon(x)| \leqslant C_\varepsilon/|x| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\Omega_\varepsilon(x)\right| \leqslant C_\varepsilon |x|^{-2}$$

sont standards. De plus on vérifie aisément que

$$\Omega_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \lim_{\eta\downarrow 0} \int_{|y|>\eta} \Omega(x-y)\frac{1}{y|y|^\varepsilon}\,dy$$

et de là on tire : $|\Omega_\varepsilon(x)| \leqslant C_\varepsilon \dfrac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}$.

On considère alors l'opérateur T_ε de symbole $\sigma_\varepsilon(x,\xi) = e^{ix}\Omega_\varepsilon(\xi)$. Son noyau $K(x,y)$ vaut $K(x,y) = Ce^{ix}\Omega_\varepsilon(x-y)$, de sorte qu'il est immédiat que $T \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$. Comme T_ε est continu de L^2 dans L^2, on a $T_\varepsilon \in \mathrm{WBP}$. Enfin, si $\varphi \in L^1$,

$${}^tT_\varepsilon\varphi = (\varphi e^{ix}) * \check{\Omega}_\varepsilon \qquad \text{où} \qquad \check{\Omega}_\varepsilon(x) = \Omega_\varepsilon(-x)$$

et donc

$$\int {}^tT_\varepsilon\varphi\,dx = \left(\int \varphi e^{ix}dx\right)\left(\int \Omega_\varepsilon\,dx\right) = 0,$$

de sorte que $T_\varepsilon(1) = 0$.

Soit maintenant $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k<0} 2^{-k\varepsilon}e^{i2^kx}$. Alors

$$f_\varepsilon \in \dot{B}^\varepsilon_{\infty,\infty} \qquad \text{et} \qquad T_\varepsilon f_\varepsilon = e^{ix}\left(\sum_{k<0} e^{i2^kx}\right)$$

n'est pas dans $\dot{B}^\varepsilon_{\infty,\infty}$.

b) Les espaces inhomogènes $B^s_{p,q}$ sont définis, pour $s > 0$, par

$$B^s_{p,q} = \dot{B}^s_{p,q} \cap L^p \qquad \text{et} \qquad \|\ \|_{B^s_{p,q}} = \|\ \|_{L^p} + \|\ \|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Le Théorème A permet, dans certains cas, d'établir la continuité $B^s_{p,q}$ d'un opérateur T.

Le cas le plus simple est quand $T \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$ vérifiant $T \in \mathrm{WBP}$ et $T(1) = 0$ vérifie de plus $T^* \in \mathrm{SIO}_\varepsilon$ et $T^*(1) \in \mathrm{BMO}$. Le Théorème A nous assure la continuité $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < \varepsilon$; le Théorème B nous assure la continuité L^2; mais par la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund (au sens de [2]), nous pouvons passer de la continuité L^2 à la continuité L^p pour $1 < p < +\infty$; d'où la continuité $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < \varepsilon$, $1 < p < +\infty$ et $1 < q < +\infty$.

Il existe un autre critère de continuité $B^s_{p,q}$ d'un opérateur $T \in SIO_\varepsilon$ plus direct, qui ne demande ni la régularité du noyau $K(x,y)$ par rapport à la variable y ni la continuité L^2 de T.

THÉORÈME D. — *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $T \in SIO_\varepsilon$ *tel que* $T \in WBP$ *et* $T(1) = 0$. *Supposons de plus que le noyau* $K(x,y)$ *vérifie uniformément en* x *et en* y :

$$(12) \quad \int_{|x-y|>1} |K(x,y)|\, dy \leqslant C \quad \text{et} \quad \int_{|x-y|>1} |K(x,y)|\, dx \leqslant C.$$

Alors T *est continu de* $B^s_{p,q}$ *dans* $B^s_{p,q}$ *pour tout* $s \in]0,\varepsilon[$ *et tous* p, $q \in [1,+\infty]$.

Comme le Théorème A nous fournit la continuité en norme $\dot{B}^s_{p,q}$, il nous suffit d'estimer $\|Tf\|_p$. Comme $K(x,y)$ est intégrable en y loin de x, $T(1)$ se calcule comme $T(1)(x) = \int K(x,y)\, dy$. Quitte à retrancher à T un multiple de l'identité, on peut supposer $T(1) = 0$ dans $\mathscr{D}'$. On écrit alors

$$Tf(x) = \int K(x,y)(f(y)-f(x))\, dy.$$

(12) nous fournit l'estimation :

$$\left\| \int_{|x-y|>1} K(x,y)(f(y)-f(x))\, dy \right\|_p \leqslant C\|f\|_p.$$

Par ailleurs on a :

$$\left\| \int_{|x-y|<1} K(x,y)(f(y)-f(x)\, dy \right\|_p$$
$$\leqslant C \int_{|t|<1} \|f(x+t)-f(x)\|_p \frac{dt}{|t|^n}$$
$$\leqslant C\left(\int \|f(x+t)-f(x)\|_p^q \frac{dt}{|t|^{n+sq}} \right)^{1/q} \left(\int_{|t|<1} \frac{dt}{|t|^{n-sq}} \right)^{1/q'}$$

où $q' = \dfrac{q}{q-1}\cdot$ Le théorème D est donc démontré.

Comme application, on vérifie immédiatement qu'un opérateur pseudo-différentiel T de la classe exotique $S^0_{1,1}$ (c'est-à-dire dont le symbole vérifie les estimations

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$$

est continu sur $B^s_{p,q}$ pour $s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. En effet, on traite d'abord le cas $0 < s < 1$. Le noyau $K(x,y)$ de T vérifie les estimations

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\beta,N}|x-y|^{-n-N-|\alpha|-|\beta|}$$

pour tous $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$ et $N \in \mathbf{N}$. De plus, T est faiblement d'ordre 0, son symbole $\sigma(x,\xi)$ étant une fonction bornée. Enfin, $T(1) = \sigma(\bullet,0)$ est bornée, ainsi que toutes ses dérivées; c'est donc un multiplicateur ponctuel de $B^s_{p,q}$. En écrivant $T = M_{T(1)} + T_0$ où $T_0(1) = 0$, et en appliquant le Théorème D à T_0, on voit que T est continu sur $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < 1$. Ensuite, on passe de s à $s+2$ en remarquant que lorsque $T \in S^0_{1,1}$, alors $(I-\Delta)T(I-\Delta)^{-1} \in S^0_{1,1}$; enfin, par interpolation, T est continu sur $B^s_{p,s}$ pour tout $s > 0$.

c) Groupes stratifiés.

La théorie décrite ci-dessus reste valable dans le cadre plus général des groupes de Lie stratifiés. Comme on dispose dans ces groupes d'un noyau de Poisson lié au sous-laplacien (Folland [4]), on y dispose d'espaces de Besov « naturels »; leur étude a été menée par Saka [8]. Les adaptations des définitions, des théorèmes et des démonstrations de cet article sont à peu près immédiates.

Le cas des espaces $\dot{B}^s_{p,p}$ peut se traiter dans le cadre encore plus général de certains espaces de nature homogène. Nous renvoyons le lecteur à [5] où les cas $\dot{B}^s_{2,2}$ et $\dot{B}^s_{\infty,\infty}$ sont étudiés avec précision.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, *Amer. J. Math.*, 9 (1957), 801-821.

[2] R. R. Coifman et Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, 57 (1978).

[3] G. David et J.-L. Journé, Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, *C.R.A.S.*, Paris, 296 (16 Mai 1983), 761-764.

[4] G. B. Folland, Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups, *Studia Math.*, 66 (1979), 37-55.

[5] P. G. LEMARIE, Algèbres d'opérateurs et semi-groupes de Poisson sur un espace de nature homogène, *Publications Mathématiques d'Orsay*, 1984.
[6] M. MEYER, Thèse de 3^e cycle, Orsay.
[7] Y. MEYER, Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund. Actes du Colloque L. Schwartz, École Polytechnique, Juin 1983 (à paraître dans *Astérisque*, SMF).
[8] K. SAKA, Besov spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group, *Tohoku Math. J.*, 31 (1979), 383-437.
[9] E. M. STEIN, *Singular integral operators and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
[10] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

Manuscrit reçu le 22 mars 1985.

Pierre-Gilles LEMARIE,
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
1060 Tunis (Tunisie).