

MICHEL COSNARD

## **Étude de la classification topologique des fonctions unimodales**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 35, n° 3 (1985), p. 59-77

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1985\\_\\_35\\_3\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_59_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DE LA CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES FONCTIONS UNIMODALES

par Michel COSNARD

Dans sa collection de problèmes mathématiques, S. Ulam [16] pose le problème de la classification topologique des applications continues de l'intervalle unité. Il illustre ce problème par l'exemple devenu classique de la conjugaison entre la parabole ( $f(x) = 4x(1-x)$ ) et la fonction ligne brisée ( $g(x) = 2x$  sur  $[0, 1/2]$ ,  $g(x) = 2(1-x)$  sur  $[1/2, 1]$ ) par l'intermédiaire de  $h(x) = 2/\pi \sin^{-1} \sqrt{x}$ . Le but de ce problème est de ramener l'étude de l'itération des applications telles que  $f$  à celle d'applications plus simples. Les progrès enregistrés dans la théorie de l'itération (voir les excellents livres de I. Gumowski et C. Mira [10], P. Collet et J.P. Eckmann [3] et G. Targonski [15]) ont montré que cet objectif est quelque peu erroné : il est aussi difficile d'étudier la conjugaison topologique entre deux applications que d'analyser leur comportement itératif. Néanmoins, le problème se pose de manière intrinsèque et les techniques employées pour le résoudre influent de manière non négligeable sur l'étude du comportement d'itération.

Dans la première partie de ce travail, nous montrons que la caractérisation des suites de tricotage et des itinéraires admissibles, proposée par Milnor et Thurston [13] peut être simplifiée et conduire à une étude beaucoup plus complète de la structure de bifurcations d'une application unimodale, voir Allouche et Cosnard [1].

Deux applications admettant les mêmes itinéraires seront dites conjuguées macroscopiquement. Cette notion est plus faible que la semi-conjugaison et peut être caractérisée par le fait que les deux applications admettent la même suite de tricotage.

*Mots-clés* : Fonctions unimodales – Conjugaison topologique – Systèmes dynamiques – Itération.

Nous étudions ensuite la conjugaison topologique et présentons un théorème de caractérisation montrant toute la complexité du problème. Nous en déduisons que chaque classe d'équivalence de la conjugaison macroscopique se décompose en une infinité de classes de la conjugaison topologique.

Enfin, nous illustrons ces résultats par la classification des solutions de l'équation de Feigenbaum [6].

### 1. Le cadre.

Nous appellerons  $C$  l'ensemble des applications  $f$  unimodales de  $[0, 1]$  dans lui-même, c'est-à-dire telles que :

- a)  $f$  est continue de  $[0, 1]$  dans lui-même
- b)  $f(1) = 0$
- c) il existe  $c$  dans  $]0, 1[$  avec  $f(c) = 1$
- d)  $f$  est strictement croissante sur  $[0, c]$ , décroissante sur  $[c, 1]$ .

**DEFINITION 1.** — *Deux applications  $f$  et  $g$  de  $C$  sont semi-conjuguées topologiquement s'il existe une application  $h$  continue croissante de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que  $h \circ g = g \circ h$ . Si  $h$  est une bijection, alors c'est un homéomorphisme et nous avons :  $f = h^{-1} \circ g \circ h \cdot f$  et  $g$  sont dites conjuguées topologiquement.*

### 2. Le codage.

Nous utilisons une technique de codage en affectant à  $[0, c]$  le code 0 et à  $[c, 1]$  le code 1. Cette technique n'est pas nouvelle puisqu'elle fut employée par Metropolis et coll [12], Derrida et coll [5], Guckenheimer [9] et systématisée par Milnor et Thurston [13]. On pose :

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, c[ \\ 1 & \text{si } x \in ]c, 1] \end{cases} \quad \gamma(c) = \{0, 1\}.$$

A la suite  $f^n(x)$  nous associons le code  $\sigma(x)$  suivant :  $\sigma(x) = \{\gamma(f^n(x))\}$ ,  $n = 0, \dots, +\infty$ . Si  $x$  n'est pas

un antécédent de  $c$ ,  $\sigma(x)$  est alors un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ . Par contre, dans le cas contraire, il est possible de faire en sorte que  $\sigma(x)$  soit formé d'au plus deux éléments de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ .  $\sigma$  est donc une multiapplication de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  qui à  $x$  de  $[0, 1]$  associe au plus deux éléments de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ , différant en une seule position.  $\sigma(x)$  sera appelé l'itinéraire de  $x$ .

DEFINITION 2. —  $f$  étant donnée, nous dirons que  $\alpha$  de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  est admissible pour  $f$  s'il existe  $x$  de  $[0, 1]$  tel que  $\alpha \in \sigma(x)$ . Nous notons  $A_f$  l'ensemble des itinéraires admissibles pour  $f$ .

Pour déterminer les itinéraires admissibles pour  $f$  nous introduisons une relation d'ordre sur  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ . Dans la suite nous identifions  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  et  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ .

Si  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=0, \dots, \infty}$  est un élément de cet ensemble, posons

$$\tau(\alpha) = \left\{ \sum_{0 \leq j < i} \alpha_j \right\}_{i=0 \dots \infty} \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$$

où chaque terme de la suite  $\tau(\alpha)$  est pris modulo 2. Nous munissons  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  de l'ordre lexicographique induit par  $0 < 1$  et nous dirons que  $\alpha$  précède  $\beta$  si  $\tau(\alpha) \leq \tau(\beta)$ .

Une propriété importante de  $\sigma$  est qu'elle préserve la structure d'ordre de  $[0, 1]$  et celle que nous venons d'introduire sur  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ . Si  $x$  n'est pas antécédent de  $c$ , on a alors la relation classique :

$$\forall i \geq 0, \sigma(f^i(x)) = d^i(\sigma(x))$$

où  $d$  est l'application décalage. Le cas où  $x$  est un antécédent de  $c$  peut donner lieu à une relation légèrement plus compliquée mais tout aussi évidente.

Nous pouvons alors caractériser les itinéraires admissibles, voir Collet et Eckmann [3] :

PROPOSITION 1. —  $f$  étant donnée, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément  $\alpha$  de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  soit admissible pour  $f$  est que :

$$\forall i \geq 0, \tau(\sigma(0)) = \tau(d(\sigma(1))) \leq \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\sigma(1)).$$

La proposition 1 montre que l'ensemble des itinéraires

admissibles est caractérisé par un seul itinéraire :  $\sigma(1)$ .

DEFINITION 3. —  $\alpha$  est une suite de tricotage s'il existe  $f$  telle que  $\alpha = \sigma(1)$ .

PROPOSITION 2. —  $\alpha$  de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  est une suite de tricotage si et seulement si

$$\forall i \geq 0 ; \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\alpha). \quad (1)$$

La condition précédente est purement combinatoire. Elle permet d'étudier les suites de tricotage indépendamment des propriétés topologiques propres des applications considérées. Cependant son emploi est difficile puisque interviennent les deux transformations  $\tau$  et  $d^i$ . Nous allons montrer comment surmonter cette difficulté. Remarquons tout d'abord que la condition implique que  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$  (ce qui est naturel puisque  $\alpha$  est l'itinéraire de 1).

PROPOSITION 3. — Soit  $\alpha$  un élément de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  tel que  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$ .  $\alpha$  est une suite de tricotage si et seulement si :

$$\forall i \geq 0 ; \overline{\tau(\alpha)} \leq d^i(\tau(\alpha)) \leq \tau(\alpha). \quad (2)$$

Si  $\alpha$  est une suite de tricotage, alors  $\beta$  est admissible si et seulement si :

$$\forall i \geq 0 \quad \overline{\tau(\alpha)} \leq d^i(\tau(\beta)) \leq \tau(\alpha)$$

et

$$\overline{d(\tau(\alpha))} \leq \tau(\beta).$$

Démonstration. — La démonstration est basée sur les deux identités suivantes : soit  $\omega \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  :

$$\text{si } \omega = 0 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots \quad \tau(d(\omega)) = d(\tau(\omega))$$

$$\text{si } \omega = 1 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots \quad \tau(d(\omega)) = d(\overline{\tau(\omega)}) = \overline{d(\tau(\omega))}.$$

$$\text{Remarquons aussi que } \tau(\alpha) = 11\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Démontrons la première partie de la proposition. Pour cela nous montrons par récurrence que (1) implique :

$$\forall i \geq 0 \quad \tau(d(\alpha)) \leq \tau(d^i(\alpha)). \quad (3)$$

C'est trivialement vrai pour  $i = 0$  et pour  $i = 1$ . Supposons la propriété vérifiée pour  $i - 1$  :  $\tau(d(\alpha)) \leq \tau(d^{i-1}(\alpha))$

1) Si  $\tau(d^{i-1}(\alpha)) = 0 \times \dots \times \dots$

on a  $\tau(d^{i-1}(\alpha)) \leq d(\tau(d^{i-1}(\alpha))) = \tau(d^i(\alpha))$ .

2) Si  $\tau(d^{i-1}(\alpha)) = 1 \times \dots \times \dots$

de (1) on tire  $\overline{\tau(d^{i-1}(\alpha))} \geq \overline{\tau(\alpha)}$

avec  $\overline{\tau(d^{i-1}(\alpha))} = 0 \times \dots \times \dots$  et  $\overline{\tau(\alpha)} = 0 \times \dots \times \dots$

Par conséquent,

$$\tau(d(\alpha)) = d(\overline{\tau(\alpha)}) \leq d(\overline{\tau(d^{i-1}(\alpha))}) = \tau(d^i(\alpha)).$$

Montrons maintenant que (1) et (3) implique (2). De (1) et (3) on déduit :

$$\forall i \geq 0 ; d(\overline{\tau(\alpha)}) \leq \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\alpha).$$

Or  $\overline{\tau(\alpha)} \leq \overline{d(\tau(\alpha))}$  car  $\overline{\tau(\alpha)} = 00 \times \dots \times \dots$ . Donc (1) et (3) impliquent

$$\forall i \geq 0 ; \overline{\tau(\alpha)} \leq \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\alpha).$$

Ceci est équivalent à :

$$\forall i \geq 0 ; \overline{\tau(\alpha)} \leq \overline{\tau(d^i(\alpha))} \leq \tau(\alpha).$$

Or  $d^i(\tau(\alpha))$  est égal soit à  $\tau(d^i(\alpha))$ , soit à  $\overline{\tau(d^i(\alpha))}$ , et donc les deux conditions ci-dessus impliquent :

$$\forall i \geq 0 ; \overline{\tau(\alpha)} \leq \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\alpha).$$

Pour la réciproque, on montre, en utilisant l'argument ci-dessus, que (2) implique que

$$\forall i \geq 0 ; \overline{\tau(\alpha)} \leq \tau(d^i(\alpha)) \leq \tau(\alpha)$$

et donc que (2) implique (1).

La deuxième partie de la proposition se démontre de manière identique.

La proposition 3 est inspirée d'un résultat de Derrida et coll [5]. Elle permet d'obtenir un algorithme pour déterminer les suites de tricotage et les itinéraires admissibles. Pour cela, il suffit de construire A telle que :

$$\bar{A} \leq d^i(A) \leq A \text{ avec } A_0 = A_1 = 1,$$

puis de poser  $\alpha = \tau^{-1}(A)$ .

Soit  $N_1$  le nombre de 1 consécutifs dans  $A$  ( $N_1 \geq 2$ ),  $N_2$  le nombre de 0 consécutifs suivants ( $N_2 \geq 1$ ),  $N_3$  le nombre de 1 consécutifs suivants ( $N_3 \geq 1$ )...  $A$  vérifie la relation précédente si :

$$N_i \leq N_1, \forall i \geq 1$$

et, si  $\exists i N_i = N_1$ , alors  $N_{i+1} \geq N_2$

et, si  $\exists i N_i = N_1$  et  $N_{i+1} = N_2$ , alors  $N_{i+2} \leq N_3$  etc. . .

Ces conditions se résument ainsi :

$$\forall i \geq 1; \forall j \geq 0$$

- 1)  $\forall k, 0 \leq k \leq 2j; N_{i+k} = N_{k+1} \implies N_{i+2j+1} \geq N_{2j+2}$
- 2)  $\forall k, 0 \leq k \leq 2j+1; N_{i+k} = N_{k+1} \implies N_{i+2j+2} \leq N_{2j+3}$ .

### 3. Conjugaison macroscopique.

Dans cette partie,  $f$  et  $g$  sont deux applications unimodales données et nous supposons sans perte de généralité que les points  $c_f$  et  $c_g$  où  $f$  et  $g$  admettent leur maximum sont identiques. Nous l'appellerons  $c$ .

Nous munissons  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  de la topologie associée à la distance

$$\forall \alpha, \beta \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} \quad \delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \inf \{n \geq 0 / \alpha_n \neq \beta_n\}}.$$

Muni de cette distance et de la relation d'ordre précédemment définie,  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  est un espace métrique compact totalement ordonné. Il est clair que  $d$  est une application continue de  $[(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}, \delta]$  dans lui-même.  $A_f$  et  $A_g$  (ensembles des itinéraires admissibles de  $f$  et de  $g$ ) sont des parties compactes de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ .

On définit alors l'application  $R_f$  de  $A_f$  dans l'ensemble des parties de  $[0, 1]$  par :

$$\forall \alpha \in A_f, R_f(\alpha) = \{x \in [0, 1] / \alpha \in \sigma(x)\}.$$

$R_f(\alpha)$  est un intervalle fermé éventuellement réduit à un point. On pose  $\Omega_f = R_f(A_f)$ .

Nous munissons  $\Omega_f$  de la distance de Hausdorff  $\Delta$  :

$$\forall A, B \in \Omega_f; \Delta(A, B) = \max(\sup_{x \in A} \varrho(x, B), \sup_{x \in B} \varrho(x, A))$$

où  $\varrho$  est la distance de  $[0, 1]$ .

$(\Omega_f, \Delta)$  est un espace métrique compact totalement ordonné par la relation d'ordre induite sur  $\Omega_f$  par la relation d'ordre de  $[0, 1]$ .

$R_f$  est une application continue de  $(A_f, \delta)$  dans  $(\Omega_f, \Delta)$ . On démontre alors facilement le

LEMME 1. — *T de  $\Omega_f$  étant donné, il existe au plus deux éléments différents de  $A_f, \alpha$  et  $\beta$ , tels que :  $T = R(\alpha) = R(\beta)$ .*

*T est alors réduit à un point  $x$ , antécédent d'un certain ordre de  $c$ .*

Nous pouvons donc associer à  $f$  l'application  $F$  définie de la manière suivante :

$$F : (\Omega_f, \Delta) \longrightarrow (\Omega_f, \Delta) \quad F(T) = T'$$

où, si  $\alpha$  est tel que  $T = R(\alpha)$ , alors  $T' = R(d(\alpha))$ .

Du lemme 1, nous déduisons que  $F$  est une application continue dont le comportement itératif sur  $\Omega_f$  est identique à celui de  $d$  sur  $A_f$  :

$$\begin{array}{ccccc} [0, 1] & \xrightarrow{\sigma} & A_f & \xrightarrow{R} & \Omega_f \\ f \downarrow & & d \downarrow & & F \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\sigma} & A_f & \xrightarrow{R} & \Omega_f \end{array}$$

Pour pouvoir classifier topologiquement les éléments de  $C$ , il est nécessaire de classifier les applications associées, d'où la :

DEFINITION 4. — *Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $C$  et*



$$F : (\Omega_f, \Delta) \longrightarrow (\Omega_f, \Delta); G : (\Omega_g, \Delta) \longrightarrow (\Omega_g, \Delta)$$

les applications associées. Nous dirons que  $f$  et  $g$  sont semi-conjuguées (resp. conjuguées) macroscopiquement si  $F$  et  $G$  sont semi-conjuguées (resp. conjuguées) topologiquement.

Comme le montre le résultat suivant, la conjugaison macroscopique ne dépend que des suites de tricotage de  $f$  et de  $g$ .

**THEOREME 1.** — i)  $f$  et  $g$  sont semi-conjuguées macroscopiquement si et seulement si  $\sigma_f(1) = \sigma_g(1) = \alpha$ .

ii)  $f$  et  $g$  sont conjuguées macroscopiquement si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$a) \sigma_f(1) = \sigma_g(1) = \alpha$$

$$b) R_f(\alpha) = \{1\} \iff R_g(\alpha) = \{1\}.$$

*Démonstration.* — L'idée de la démonstration est de construire une application  $H$  en faisant correspondre entre eux les éléments de  $\Omega_f$  et de  $\Omega_g$  ayant les mêmes itinéraires. La condition a) est nécessaire et suffisante pour qu'un itinéraire admissible pour  $f$  le soit aussi pour  $g$ . Par conséquent, c'est une condition nécessaire pour i) et ii). Pour démontrer la suite, nous distinguons quatre cas.

Posons :  $\sigma(c) = \{\omega^-, \omega^+\}$ .

La condition b) est alors équivalente à la condition suivante :

$$R_f(\omega^-) = \{c\} \iff R_g(\omega^+) = \{c\}.$$

1) Si  $R_f(\omega^-) \neq \{c\}$  et  $R_g(\omega^+) \neq \{c\}$

alors  $\forall \beta, \beta' \in A_f = A_g$

$$\beta \neq \beta' \implies R_f(\beta) \neq R_f(\beta') \text{ et } R_g(\beta) \neq R_g(\beta').$$

Nous en déduisons que :

$$\forall T \in \Omega_f, \exists \beta \text{ unique } \in A_f \text{ tel que } T = R_f(\beta).$$

On définit  $H$  par :  $H(T) = R_g(\beta)$ .

On vérifie aisément que  $H$  est un homéomorphisme de  $\Omega_f$  sur  $\Omega_g$  et que  $F = H^{-1} \circ G \circ H$ .

2) Si  $R_f(\omega^-) = R_g(\omega^+) = \{c\}$ ,

alors  $\forall \beta, \beta' \in A_f = A_g \quad \beta \neq \beta'$

$$R_f(\beta) = R_f(\beta') \iff R_g(\beta) = R_g(\beta').$$

On définit  $H$  comme précédemment pour obtenir les mêmes conclusions.

3) Si  $R_f(\omega^-) \neq \{c\}$  et  $R_g(\omega^-) = \{c\}$ ,  
 alors  $R_f(\omega^-) \neq R_f(\omega^+)$  et  $R_g(\omega^-) = R_g(\omega^+)$ . Il est donc impossible de définir un homéomorphisme  $H$  tel que  $F = H^{-1} \circ G \circ H$  ce qui montre que b) est nécessaire. Par contre,  $\forall T \in \Omega_f, \exists \beta$  unique  $\in A_f$  tel que  $T = R_f(\beta)$ . On définit  $H$  par :  $H(T) = R_g(\beta)$ .  $H$  est une application continue croissante (non strictement) de  $\Omega_f$  sur  $\Omega_g$  et  $H \circ F = G \circ H$ .

4) Si  $R_f(\omega^-) = \{c\}$  et  $R_g(\omega^-) \neq \{c\}$ ,

on inverse les rôles de  $f$  et de  $g$  et on applique 3 avec  $K$  au lieu de  $H$ .

La conjugaison macroscopique est donc, à peu près, équivalente au fait que  $f$  et  $g$  admettent les mêmes itinéraires admissibles. Cette relation implique, de plus, que  $f$  et  $g$  ont des comportements itératifs proches. Il semble donc que, de ce point de vue, la conjugaison macroscopique soit plus utile que la conjugaison topologique. Remarquons que la conjugaison topologique implique la conjugaison macroscopique. De plus cette dernière est une relation d'équivalence sur  $C$ , dont les classes d'équivalence sont formées par la réunion de classes d'équivalence de la conjugaison topologique.

#### 4. Conjugaison topologique.

De nombreux contre-exemples (voir la cinquième partie) montrent que les deux conditions précédentes ne suffisent pas en général à assurer la conjugaison topologique. Cependant si chaque itinéraire de  $f$  et de  $g$  ne correspond qu'à un seul point alors  $H$  est un homéomorphisme de  $[0, 1]$  et  $f$  et  $g$  sont conjuguées topologiquement. Formellement, la relation de conjugaison entre  $f$  et  $g$  s'écrit alors

$$f = R_f \circ \sigma_g \circ g \circ R_g \circ \sigma_f.$$

On rencontre ce cas lorsque  $f$  et  $g$  sont à dérivée de Schwarz négative et n'admettent aucun cycle attractif, voir Misiurewicz [14] et Guckenheimer [9].

DEFINITION 5. — Soit  $J$  un intervalle d'intérieur non vide de  $[0, 1]$  tel que  $\forall n \geq 0, f^n_J$  soit un homéomorphisme de  $J$  sur son image.

$J$  est un puits si :  $\exists k \geq 1, f^k(J) \subseteq J$

$J$  est un homtervalle si :  $\forall m \neq n, f^m(J) \cap f^n(J)$  est d'intérieur vide.

Par la suite, nous ne considérerons que des puits et des homtervalles maximaux, notion introduite par Misiurewicz [14]. Nous dirons, de plus, que  $T$  est antécédent d'un puits  $J$  si :

$$\exists k \geq 0, f^k(T) \subseteq J.$$

PROPOSITION 4. — Soit  $T$  de  $\Omega_f$ . Une et une seule des trois propositions suivantes est vérifiée :

- 1)  $T$  est d'intérieur vide
- 2)  $T$  est antécédent d'un puits
- 3)  $T$  est un homtervalle.

THEOREME 2. — Soit  $f$  une application unimodale n'admettant pas de puits. Une application unimodale  $g$  est conjuguée topologiquement avec  $f$  si et seulement si :

- i)  $g$  est conjuguée macroscopiquement avec  $f$
- ii)  $\forall \beta \in A_f = A_g, \mathring{R}_f(\beta) = \emptyset \iff \mathring{R}_g(\beta) = \emptyset$
- iii)  $f$  est une bijection de  $R_f(\sigma_f(0))$  dans  $R_f(d(\sigma_f(0)))$  est équivalent à  $g$  est une bijection de  $R_g(\sigma_g(0))$  dans  $R_g(d(\sigma_g(0)))$ .

Démonstration. — La difficulté consiste à montrer que les conditions sont suffisantes. Si nous pouvons construire une application  $h$  de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que, pour tout  $\beta$  de  $A_f = A_g$ ,  $h$  est un homéomorphisme de  $R_f(\beta)$  dans  $R_g(\beta)$ , alors  $h$  est un homéomorphisme de  $[0, 1]$  et  $f$  et  $g$  sont conjuguées topologiquement.

Remarquons tout d'abord que  $f$  est un homéomorphisme de  $T$  sur  $F(T)$ , si  $T \neq R_f(\sigma_f(0))$ .  $T$  de  $\Omega_f$  étant donné, nous appellerons orbite de  $T$  l'ensemble suivant :

$$o(T) = \{S \in \Omega_f / \exists k \in \mathbf{N}, F^k(S) = T \text{ ou } F^k(T) = S\}.$$

Nous commençons par définir  $h$  sur  $U(T) = \bigcup_{S \in o(T)} S$ .

Supposons que  $T$  soit tel que  $R_f(\sigma_f(0)) \notin o(T)$ . Soit  $\beta$  tel que  $T = R_f(\beta)$ . Posons  $T' = R_g(\beta)$ . Il est clair que  $R_g(\sigma_g(0)) \notin o(T')$ .

Soit alors  $h$  un homéomorphisme croissant quelconque de  $T$  sur  $T'$ . Nous allons étendre  $h$  en un homéomorphisme croissant de  $U(T)$  sur  $U(T')$ . Nous avons :

$$\forall k \in \mathbf{Z},$$

$$\forall y \in f^k(T) = F^k(T), \exists x \text{ unique } \in T, y = f^k(x)$$

$$\forall y' \in g^k(T') = G^k(T'), \exists x' \text{ unique } \in T', y' = g^k(x')$$

$y$  de  $f^k(T)$  étant donné soit  $x'$  tel que  $x' = h(x)$ . On pose alors :

$$g^k(x') = y' \stackrel{\text{def}}{=} h(y)$$

(c'est-à-dire  $h(y) = g^k \circ h(x)$ ).

Si  $T$  est d'intérieur non vide,  $h$  est bien définie puisque  $T$  n'est pas antécédent d'un puits. Si  $T$  est d'intérieur vide,  $h$  est bien définie puisque tous les éléments de  $U(T)$  ne contiennent qu'un seul point.

Bien évidemment  $h$  est une bijection de  $f^k(T)$  sur  $g^k(T')$ . Remarquons que cette construction implique que les extrémités des intervalles se correspondent. Par construction on a de plus:

$$\forall x \in U(T), h \circ f(x) = h(y) = y' = g(x') = g \circ h(x).$$

Examinons le cas de  $R_f(\sigma_f(0))$ . Posons :

$$R_f(\sigma_f(0)) = [0, w], R_f(d(\sigma_f(0))) = [u, v], f(0) = t.$$

On a, bien sûr,  $f(w) = v$  et  $f(0) \geq u$ . On définit, avec des primes, les mêmes notations pour  $g$ . Soit alors  $h$  un homéomorphisme croissant de  $[u, v]$  sur  $[u', v']$  tel que  $h(t) = t'$ .

En reprenant la construction précédente, on étend  $h$  en une bijection de  $f^k([u, v])$  sur  $g^k([u', v'])$ , pour tout  $k$  de  $\mathbf{N}$ . Si  $z \in [0, w]$ ,  $\exists x$  unique  $\in [u, v]$  tel que  $f(z) = x$ . Soit  $x' = h(x)$ . On a  $x' \geq t'$  puisque  $h(t) = t'$ . Par conséquent,  $\exists z'$  unique  $\in [0, w']$ ,  $g(z') = x'$ . Définissons

$$h(z) \stackrel{\text{def}}{=} z', (h(z) = g^{-1} \circ h(x)).$$

Remarquons que cette construction est possible si et seulement si iii) est vérifiée. En effet la définition de  $h$  nécessite que  $h(t) = t'$ . Si  $f$  n'est pas une bijection ( $t > u$ ) alors que  $g$  en est une, nous avons :

$$h[t, v] = [t', v'] = g[0, w'] = [u', v'],$$

ce qui contredit que  $h$  est un homéomorphisme de  $[u, v]$  sur  $[u', v']$ .

En reprenant la construction du début, on étend  $h$  en une bijection de  $f^{-k}([0, w])$  sur  $g^{-k}([0, w])$ , pour tout  $k$  de  $\mathbf{N}$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que  $h$  est croissant. Pour cela remarquons que  $h(0) = 0$ ,  $h(c) = c$  et  $h(1) = 1$ . Soit  $T$  un intervalle où  $h$  est un homéomorphisme. Nous allons montrer que  $h$  est croissant sur  $f^{-1}(T)$ . Pour simplifier nous supposons  $f^{-1}(T) \subseteq [0, c]$

$$\begin{aligned} \forall y_1, y_2 \in f^{-1}(T), y_1 \leq y_2 &\iff f(y_1) \leq f(y_2) \\ \iff x_1 \leq x_2 &\iff h(x_1) \leq h(x_2) \iff x'_1 \leq x'_2 \\ &\iff g(y'_1) \leq g(y'_2) \end{aligned}$$

où  $y'_1 = h(y_1)$  et  $y'_2 = h(y_2)$ .

Le fait que  $h$  fasse correspondre les extrémités des intervalles de  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  implique que  $g^{-1}(T') \subseteq [0, c]$ . Par conséquent :

$$g(y'_1) \leq g(y'_2) \iff y'_1 \leq y'_2 \iff h(y_1) \leq h(y_2),$$

ce qui montre que  $h$  est croissante. On fait de même la démonstration sur  $f(T)$  et, de proche en proche, sur  $U(T)$ .  $h$  est donc une bijection croissante de  $R_f(\beta)$  dans  $R_g(\beta)$  pour tout  $\beta$  de  $A_f = A_g$ . C'est donc un homéomorphisme croissant de  $R_f(\beta)$  dans  $R_g(\beta)$  ce qui conclut la démonstration.

La deuxième condition (la plus importante) est équivalente au fait que les intervalles d'intérieur vide de  $f$  et de  $g$  se correspondent, ainsi que les homtervalles. L'intérêt de ce résultat est double. Premièrement, il montre que, un itinéraire étant donné, seul importe de savoir s'il correspond à un point ou à un homtervalle et que, dans ce cas, aucune autre propriété du homtervalle n'est nécessaire. Deuxièmement, il montre la complexité du problème de la classification topologique : même si elles ont la même suite de tricotage, deux applications unimodales seront dans des classes différentes dès qu'un itinéraire, correspondant à un point pour l'une, correspondra à un intervalle pour l'autre.

Une conséquence importante de la démonstration concerne l'unicité de l'homéomorphisme de conjugaison  $h$ .

**COROLLAIRE 1.** — *Soient  $f$  et  $g$  deux applications unimodales, n'admettant pas de puits et conjuguées topologiquement. L'homéomorphisme de conjugaison est unique si et seulement si  $f$  n'admet pas de homtervalles.*

Le cas des applications admettant des puits est encore plus complexe. La conjugaison dépend du comportement de  $f$  et de  $g$  dans chaque puits : nombre de cycles, attractivité, domaine d'attraction. Il est possible par contre de restreindre l'ensemble des applications considérées. Dans [9], on trouvera la classification topologique des applications à dérivée de Schwarz négative et on pourra noter la complexité du résultat alors que ces fonctions n'admettent, au plus, qu'un seul puits, correspondant à un seul cycle attractif, et aucun homtervalle.

Etudions tout d'abord le cas où  $f$  est un homéomorphisme croissant d'un intervalle fermé  $I$  dans lui-même et  $g$  un homéomorphisme croissant de  $I'$  dans lui-même. Le cas des contractions est étudié dans Godbillon [8]. Certaines parties des démonstrations sont inspirées de ce travail.

**DEFINITION 6.** — *Soit  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ .*

- $J$  est de type  $+1$  si  $f(J) = J$  et  $\forall x \in \overset{\circ}{J} f(x) > x$
- $J$  est du type  $-1$  si  $f(J) = J$  et  $\forall x \in \overset{\circ}{J} f(x) < x$
- $J$  est du type  $0$  si  $\forall x \in J f(x) = x$  et  $I$  est maximal pour cette propriété ( $\forall J', J' \not\subset J, \exists x \in J', f(x) \neq x$ ).

LEMME 2. — Si  $f$  est un homéomorphisme d'un intervalle fermé  $I$  dans lui-même alors il existe une partie  $P$  de  $\mathbf{R}$  tel que :

$$I = \bigcup_{p \in P} J_p \quad \text{avec}$$

- i)  $\forall p \in P, J_p$  est un intervalle fermé du type  $-1, 0$  ou  $+1$   
 ii)  $\forall p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2 \implies \forall x_1 \in J_{p_1}, \forall x_2 \in J_{p_2}, x_1 < x_2$ .

THEOREME 3. — Soient  $f$  et  $g$  des homéomorphismes de  $I$  et de  $I'$  dans eux-mêmes, et soient  $\{J_p\}, p \in P$  et  $\{J'_p\}, p \in P'$ , les décompositions associées.

Alors  $f$  et  $g$  sont conjugués topologiquement si et seulement s'il existe une bijection  $b$  de  $\{J_p\}$  dans  $\{J'_p\}$  telle que

- i)  $\forall p_1, p_2 \in P; J_{p_1} < J_{p_2} \implies b(J_{p_1}) < b(J_{p_2})$   
 ii)  $\forall p \in P, \forall i \in \{-1, 0, +1\}$

$J_p$  est du type  $i \implies b(J_p)$  est du type  $i$ .

Retournons maintenant au cas général où  $f$  et  $g$  sont des applications unimodales admettant un puits. Soient  $T \in \Omega_f$  et  $\alpha$  tel que  $T = R_f(\alpha)$ . Il est clair que  $\alpha$  est périodique. Soit  $q$  sa période. Posons :

$$T_0 = T, T_i = f(T_{i-1}); i = 1, \dots, q-1.$$

On a alors

$$f(T_{q-1}) = T_0$$

et les  $T_i$  forment un cycle d'intervalles

$$f^q(T_i) = T_i.$$

On effectue le même travail sur  $T' = R_g(\alpha)$ . On introduit de même l'orbite de  $T$  et l'orbite de  $T'$  :

$$o(T) = \{s \in \Omega_f / \exists k \in \mathbf{N}, F^k(S) = T\} \quad U(T) = \bigcup_{s \in o(T)} S.$$

Remarquons que  $f(U(T)) = U(T)$  et  $g(U(T')) = U(T')$ .

Nous dirons que  $T$  est de type positif si  $f^q$  est un homéomorphisme croissant de  $T$  et dans lui-même, de type négatif s'il est décroissant.  $T$  est de type positif si et seulement si le nombre de 1 dans la période de  $\alpha$  est pair. Nous obtenons alors la :

PROPOSITION 5. — *Les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $U(T)$  et  $U(T')$  sont conjuguées topologiquement si et seulement si :*

– *les restrictions de  $f^q$  et  $g^q$  à  $T$  et  $T'$  sont conjuguées topologiquement si  $T$  est de type positif ;*

– *les restrictions de  $f^{2q}$  et  $g^{2q}$  à  $T$  et  $T'$  sont conjuguées topologiquement si  $T$  est de type négatif.*

Dans l'ensemble des puits de  $f$ , la relation "T et S appartiennent à la même orbite" est une relation d'équivalence. Nous identifierons chaque classe d'équivalence avec un de ses représentants et noterons  $\mathcal{T}$  leur ensemble. En rassemblant le théorème 3 et la proposition 5 nous obtenons le :

THEOREME 4. — *Deux applications unimodales  $f$  et  $g$  sont conjuguées topologiquement si et seulement si :*

i)  *$f$  et  $g$  sont conjuguées macroscopiquement*

ii)  $\forall \beta \in A_f = A_g, \mathring{R}_f(\beta) = \emptyset \iff \mathring{R}_g(\beta) = \emptyset$

iii)  *$f$  est une bijection de  $R_f(\sigma_f(0))$  dans  $R_f(d(\sigma_f(0)))$  est équivalent à  $g$  est une bijection de  $R_g(\sigma_g(0))$  dans  $R_g(d(\sigma_g(0)))$ .*

iv)  $\forall T \in \mathcal{T}$  et  $\beta \in A_f$  tel que  $T = R_f(\beta)$  il existe une bijection  $b$  entre les décompositions  $\{J_p\}_{p \in P}$  et  $\{J'_p\}_{p \in P'}$  de  $T$  et de  $T' = R_g(\beta)$  telle que :

a)  $\forall p_1, p_2 \in P, J_{p_1} J_{p_2} = b(J_{p_1}) b(J_{p_2})$

b)  $\forall p \in P, \forall i \in \{-1, 0, +1\},$

$J_p$  est de type  $i \implies b(J_p)$  est de type  $i$ .

Deux conséquences immédiates du théorème 4 sont que :

– une classe d'équivalence de la conjugaison macroscopique contient une infinité dénombrable (et peut-être non dénombrable) de classes d'équivalence de la conjugaison topologique ;

– l'homéomorphisme de conjugaison est unique si et seulement si  $f$  n'admet aucun homtervalle et aucun puits.

A la lecture de ce théorème on comprend mieux la complexité du problème de la conjugaison topologique. Ce résultat n'est cependant pas sans intérêt puisqu'en particulierisant la classe de fonctions étudiée, les conditions peuvent se simplifier. Nous illustrons les résultats de ce paragraphe dans la partie suivante.



### 5. Conjugaison des solutions de l'équation de Feigenbaum.

Nous allons appliquer les résultats, présentés dans les paragraphes précédents, à la classification topologique des solutions de l'équation fonctionnelle de renormalisation (voir Feigenbaum [6], [7], Campanino et Epstein [2], Lanford [11], Cosnard [4]), c'est-à-dire des applications  $f$  continues paires unimodales telles que :

$$\forall x \in [-1, +1], f(x) = -\frac{1}{\lambda} f^2(-\lambda x) \text{ avec } \lambda = -f(1) > 0. \quad (1)$$

Soient  $\lambda$  et  $\rho$  tels que  $0 < \lambda < \rho < 1$ . Dans [4], on montre que  $f$  peut être choisie égale à un homéomorphisme  $f_0$  quelconque de  $[\rho, 1]$  dans  $[-\lambda, \lambda^2]$  et à une application  $g_0$  continue, décroissante quelconque de  $[\lambda, \rho]$  dans  $[f_0(\rho), f_0^{-1}(\lambda^2)]$ .

PROPOSITION 6. — *Toutes les solutions de (1) sont conjuguées macroscopiquement et  $\alpha = \sigma(1)$  est l'unique point fixe de la 2-substitution :  $1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 11$ .*

Bien entendu, les solutions de (1) ne sont pas toutes conjuguées topologiquement. Nous présentons dans la suite quelques classes topologiques.

THEOREME 5 (Guckenheimer [9]). — *Toutes les solutions de (1) à dérivée de Schwarz négative sont conjuguées topologiquement.*

En fait, la classe précédente contient d'autres applications. Nous dirons que  $f$  vérifie :

- (2) si  $\forall x, x' \in [\rho, 1], x \neq x', |f(x) - f(x')| > \lambda |x - x'|$ ,
- (3) si  $\forall x, x' \in [\lambda, \rho], x \neq x', |f(x) - f(x')| > |x - x'|$ ,
- (4) si  $f$  admet dans  $[\lambda, \rho]$  un unique cycle d'ordre 2 et ce cycle est répulsif,
- (5) si  $f$  admet dans  $[\rho, 1]$  un unique  $x^*$  tel que  $f(x^*) = \alpha^2 x^*$  et s'il existe un voisinage  $V(x^*)$  tel que :

$$\forall x, x' \in V(x^*), |f(x) - f(x')| < \alpha^2 |x - x'|,$$

$$\forall x, x' \in [\rho, 1] - V(x^*), x \neq x', |f(x) - f(x')| > \lambda |x - x'|.$$

THEOREME 6. — *Toutes les solutions de (1) vérifiant :*

i) (2) et (3) sont conjuguées topologiquement à une solution de (1) à dérivée de Schwarz négative.

ii) (2) et (4) sont conjuguées topologiquement.

iii) (3) et (5) sont conjuguées topologiquement.

iv) (4) et (5) sont conjuguées topologiquement.

*Les quatre classes de conjugaison sont différentes.*

*Démonstration.* — Il est clair qu'une démonstration complète nécessite une étude approfondie des solutions de (1). Cette étude se trouve dans [4]. Toutes les affirmations présentées dans la suite sont démontrées dans ce travail.

Si  $f$  vérifie (2) et (3), alors  $f$  n'admet aucun homtervalle, et aucun cycle attractif. La conclusion provient donc du théorème 2.

Si  $f$  vérifie (2) et (4), alors elle n'admet aucun homtervalle et une infinité de puits. Quel que soit  $i$  de  $\mathbf{N}$ ,  $f$  admet un cycle attractif unique d'ordre  $2^i$  dont le domaine d'attraction immédiat est limité par un cycle répulsif d'ordre  $2^{i+1}$ . Ce sont ces domaines qui constituent les puits de  $f$ . Un tel puits  $T$  se décompose ainsi :  $T = J_1 \cup J_2$  où  $J_1 < J_2$  et  $J_1$  est du type  $+1$  et  $J_2$  du type  $-1$ . La condition iv) du théorème 4 est vérifiée.

Si  $f$  vérifie la condition (5), elle admet une infinité de homtervalles dont les codes ne dépendent pas de  $f$ . Les conclusions de iii) et iv) se déduisent donc encore une fois de l'application du théorème 4.

Bien évidemment, les quatre classes sont différentes.

Nous voyons donc que le théorème 4 permet d'apporter un début de réponse à un problème non trivial : la classification des solutions de (1). Bien évidemment, des variantes peuvent être apportées à ces résultats pour obtenir une infinité de classes d'équivalence. Nous conjecturons que cette infinité est non dénombrable ce qui montre bien toute la complexité du partitionnement d'une classe d'applications conjuguées macroscopiquement en classes d'applications conjuguées topologiquement.

Remarquons aussi que nous avons construit des applications admettant des homtervalles. En raffinant quelque peu la construction, on peut obtenir des fonctions de classe  $C^\infty$  possédant des homtervalles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. ALLOUCHE et M. COSNARD, Itération de fonctions unimodales et suites engendrées par automates, *C.R.A.S.*, 286 (1982), 159-162.
- [2] M. CAMPANINO et H. EPSTEIN, *On the existence of Feigenbaum's fixed point*, Preprint IHES P/80/35 (1980).
- [3] P. COLLET et J.P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Basel, (1980)
- [4] M. COSNARD, Etude des solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum, Actes du colloque de Dijon, *Astérisque*, (1983)
- [5] B. DERRIDA, A. GERVOIS et Y. POMEAU, Iteration of endomorphisms on the real axis and representation of numbers, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 29, 3 (1978), 305-356.
- [6] M.J. FEIGENBAUM, The universal metric properties of nonlinear transformation, *J. Stat. Phys.*, 21, 6 (1979), 669-706.
- [7] M.J. FEIGENBAUM, The transition to aperiodic behavior in turbulent systems, *Commun. Math. Phys.*, 77 (1980), 65-86.
- [8] C. GODBILLON, *Systèmes dynamiques sur les surfaces*, IRMA Strasbourg, (1979)
- [9] J. GUCKENHEIMER, Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps, *Commun. Math. Phys.*, 70 (1969), 133-160.
- [10] I. GUMOWSKI et C. MIRA, Recurrences and discrete dynamic systems, *Lect. Notes Math.*, 809 (1980).
- [11] O.E. LANFORD III, *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures*, Preprint IHES P/81/17 (1981).
- [12] N. METROPOLIS, M.L. STEIN et P.R. STEIN, On the finite sets for transformations on the unit interval, *J. Comb. Theory.*, 15 (1973), 25-44.
- [13] J. MILNOR et W. THURSTON, *On iterated maps of the interval*, Preprint Princeton, (1977).

- [14] M. MISIUREWICZ, Invariant measures for continuous transformations of  $[0, 1]$  with zero topological entropy, *Lecture Notes Math.*, 729 (1980) 144-152
- [15] G. TARGONSKI, *Topics in iteration theory*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, (1981).
- [16] S. ULAM, *Sets, numbers and universes.*, M.I.T., Press Cambridge, (1974).

Manuscrit reçu le 11 juillet 1983  
révisé le 4 octobre 1984.

Michel COSNARD,  
Laboratoire TIM 3 – CNRS  
Institut IMAG-INPG  
B.P. 68  
38402 St Martin d'Hères Cedex.