ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

El Hadji Malick Dia

Sur les résidus de Baum-Bott

Tome XIX, nº 2 (2010), p. 363-403.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_2_363_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 2, 2010
pp. 363–403

Sur les résidus de Baum-Bott

El Hadji Malick Dia[(1)]

Résumé. — 0n se donne une variété complexe V, compacte, de dimension complexe n, un champ de vecteurs v holomorphe sur V, un fibré vecoriel E de rang r au dessus de V et une $\mathbb{C}$-action θ_v sur E. Il est bien connu que si v n'a pas de singularité, tous les nombres de Chern $c_I(E) \frown [V]$ sont nuls ($|I| = n$). Si v a des singularités, Bott a démontré que ces nombres de Chern se localisent près de ces singularités donnant lieu à des résidus. Ces résidus ont été calculés d'abord par Bott dans le cas d'une singularité isolée non dégénérée, ensuite par Bott dans le cas d'une sous-variété non dégénérée et enfin, par Baum et Bott dans le cas d'une singularité isolée éventuellement dégénérée. Ce travail fournit une généralisation des résultats précédents en étudiant, sous réserve de quelques hypothèses simplificatrices, le cas d'une sous-variété holomorphe W, composante non-singulière du lieu singulier de v, éventuellement dégénérée. Quelques exemples sont donnés.

Abstract. — Given a compact complex manifold V of complex dimension n, a holomorphic vector-fields v on V, a vector bundle E of rank r on V, and a $\mathbb{C}$-action θ_v on E. It is well known that if v has not singularity, all the Chern numbers $c_I(E) \frown [V]$ are zero ($|I| = n$). If v has singularities, and if there exists a $\mathbb{C}$-action θ_v on E, Bott has proved that the Chern numbers "localize" near these singularities, giving residues. These residues are computed first, by Bott, in the case of a non degenerate isolated point, then, by Bott, in the case of a non degenerate holomorphic submanifold, at last, by Baum-Bott, in the case of a degenerate isolated point. This work gives a generalization of these results by studying the case of a degenerate holomorphic submanifold. Examples are given.

(*) Reçu le 31/12/2008, accepté le 26/06/2009
(1) Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation BP 5036, Dakar-Fann, Sénégal.
el.dia@ucad.edu.sn

Introduction

On se donne :

– une variété holomorphe V, compacte, de dimension complexe n,
– un champ de vecteurs v holomorphe sur V
– un fibré vecoriel E de rang r au dessus de V,
– une $\mathbb{C}$-action θ_v sur E, c'est-à-dire un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de l'espace $\Gamma(E)$ des sections C^∞ de E, qui préserve les sections holomorphes de E et vérifie la formule suivante :

$$\theta_v(u\ \sigma) = (v.\ u)\ \sigma + u\ \theta_v(\sigma), \quad \forall\ \sigma \in \Gamma(E), \quad \forall\ u \in C^\infty(V).$$

[Par exemple, v définit toujours une $\mathbb{C}$-action θ_v^0 sur le fibré tangent complexe TV en posant : $\theta_v^0\ (X) =\ [v, X]$.]

Si v n'a pas de singularité, les nombres de Chern $c_I(E) \frown [V]$ sont tous nuls ($|I| = n$), et en particulier les nombres de Chern $c_I(V) \frown [V]$ de TV : c'est le **théorème d'annulation** de Bott [4].

Si v a maintenant des singularités, Bott a alors démontré que les nombres de Chern de E se localisent près de ces singularités au sens suivant. Notons $S = \coprod_{\alpha\in\ \Lambda} S_\alpha$ l'ensemble singulier de v, réunion de ses composantes connexes S_α. Il existe alors, pour tout α, des nombres complexes $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$, appelés « résidus » de $c_I(E)$ en S_α, relativement à θ_v, ne dépendant que du comportement local de v et de l'action θ_v sur un voisinage arbitrairement petit de S_α dans V, tels que la formule suivante soit vérifiée :

$$c_I(E)\frown[V] = \sum_{\alpha\in\Lambda} \text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha).$$

C'est le **théorème d'existence des résidus**.

Avant de résumer les résultats connus concernant le calcul des résidus, rappelons les faits suivants : soit W une composante connexe de S, sous-variété compacte lisse de V.

– Pour toute connexion ∇^0 sur E, $\theta_v - \nabla_v^0$ est un endomorphisme linéaire de E dont la restriction Θ à W ne dépend pas de ∇^0.

– La compacité de la variété holomorphe W implique que les valeurs propres $\rho_1, \cdots, \rho_r$ de l'endomorphisme Θ_m de la fibre E_m en un point m de W, comptées avec leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de m.

– L'action θ_v^0 de v sur TV induit un endomorphisme θ_v^N du fibré normal N_W de W dans V (dont la donnée équivaut à celle de la partie linéaire v_α

de v en m_α lorsque W est un point isolé m_α). Pour les mêmes raisons que ci-dessus (compacité et holomorphie de W), les valeurs propres $h_1, \cdots, h_q$ de l'endomorphisme (θ_v^N) de l'espace normal N_m à W en un point m, ainsi que leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de m. On dit alors que v est non dégénéré le long de W si toutes ces valeurs propres sont non nulles, c'est-à-dire si (θ_v^N) est un automorphisme.

Le résidu $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$ a d'abord été calculé pour $E = TV$, dans le cas où S_α est une singularité isolée non dégénérée m_α de v (toutes les valeurs propres $h_1, \cdots, h_n$ de $(\theta_v)_{|m_\alpha}$ sont non nulles (Bott[4]) :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, m_\alpha) = c_I\big((\theta_v)_{|m_\alpha}\big)/c_n\big((\theta_v)_{|m_\alpha}\big).$$

Cette formule a ensuite été généralisée dans deux directions :

1) Pour un fibré E arbitraire dans le cas où S_α est une sous-variété holomorphe W de V le long de laquelle v est non dégénéré (Bott [3]) :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \Big(c_I(\Theta|_W + E|_W)\Big).\Big(c_q(\theta_v^N + N_W)\Big)^{-1} \frown [W].$$

Dans cette formule $E_{|W}$ et N_W désignent respectivement les matrices diagonales $(x_1, \cdots, x_r)$ et $(y_1, \cdots, y_q)$ à coefficients dans $H^2(W)$, telles que $c_j(E|_W)$ (resp. $c_j(N_W)$ soit la j-ième fonction symétrique élémentaire des x_a (resp. des y_b). Ces classes x_a et y_b ne sont pas en général bien définies (à moins que $E|_W$ ou N_W ne puissent se décomposer en somme de fibrés en droites complexes), mais elles n'interviennent dans la formule des résidus qu'à travers les fonctions symétriques $\sigma_j(x_1, \cdots, x_r)$ et $\sigma_j(y_1, \cdots, y_q)$. Par exemple, si toutes les valeurs propres $\rho_1, \cdots, \rho_r$ de θ_v d'une part, $h_1, \cdots, h_q$ de θ_v^N d'autre part sont distinctes,

$$\begin{aligned} &\Big(c_I(\Theta|_W + E|_W)\Big).\Big(c_q(\theta_v^N + N_W)\Big)^{-1} \\ &= \Big(\sigma_I(\rho_1 + x_1, \cdots, \rho_r + x_r)\Big).\Big(\sigma_q(h_1 + y_1, \cdots, h_q + y_q)\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

2) Dans le cas où S_α est une singularité isolée m_α éventuellement dégénérée (Baum-Bott [1]) :

$$\text{Rés}\big(c_I, \theta_v, m_\alpha\big) = \begin{bmatrix} c_I(\theta_v)\ dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \\ A_1 \cdots A_n \end{bmatrix}_{m_\alpha}$$

où $v = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ au voisinage de m_α, relativement à des coordonnées locales holomorphes $(z_1, \cdots, z_n)$, le terme de droite désignant le symbole résidu de Grothendieck. [Ce dernier cas, a été encore généralisé par Baum-Bott dans [2], en remplaçant champ de vecteurs v par feuilletage holomorphe de dimension un]. Dans [1], n'est considéré que le cas $E = TV$, mais le cas d'un fibré E arbitraire était certainement connu de Baum et Bott (cf. par exemple [7] pour une rédaction dans le cas où E est quelconque).

Le problème se pose de généraliser ces résultats au cas où v est éventuellement dégénéré le long d'une sous-variété holomorphe W de dimension positive. Ce travail fournit des résultats partiels dans cette direction. Nous avons en effet fait deux types d'hypothèses simplificatrices :

– d'une part, nous avons supposé qu'il existait un bi-holomorphisme d'un voisinage U de W sur un voisinage de la section nulle du fibré normal N_W de W dans V appliquant W à la section nulle de N_W (il existe toujours au moins un difféomorphisme C^∞),

– d'autre part, dans la mesure où ce sont en général les polynômes caractéristiques de $\Theta|_W$ et de θ_v^N, et non les polynômes minimaux qui sont constants le long de W, nous avons parfois supposé que ces endomorphismes avaient des valeurs propres distinctes. Résumons les résultats obtenus :

Après un premier résultat (Théorème A) où l'on calcule les résidus en utilisant le recouvrement $U_H \cup \bigcup_\lambda U_\lambda$ de $U \setminus W$, on s'intéressera au cas où l'on peut se passer de l'ouvert U_H pour recouvrir $U \setminus W$, on obtient le théorème B. Le théorème C est obtenu lorsque l'on peut se passer de l'un des ouverts U_λ. Ces résidus ont été aussi calculés dans le cas d'une variété produit ; c'est le théorème D. Enfin des exemples d'application de ces résultats seront fournis.

La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

– à la section 1, après avoir précisé quelques notations et rappelé quelques outils fondamentaux, on redémontrera le théorème d'existence des résidus,

– la section 2 est consacrée aux résultats nouveaux,

– des exemples sont fournis à la section 3.

1. Rappels et notations

1.1. Théorie de Chern-Weil pour les classes caractéristiques

On fera référence essentiellement à ([5] et [10])

Attention : Dans cette partie, nous suivons la convention de signe de Bott qui est différente de celle utilisée dans [10].

Soit $End\ F$ l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F de dimension r. Notons $\sigma_i : End\ F \to \mathbb{C}$ la i-ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres d'un tel endomorphisme, et posons $c_j = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^j \sigma_j$. L'algèbre graduée $I^*(F) = \mathbb{C}[c_1, c_2, \cdots, c_r]$ des polynômes sur $End\ F$, invariants par la représentation adjointe de $GL(F)$, est engendrée par les monômes c_j, lesquels sont en outre algébriquement indépendants.

Pour tout multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_r)$, on définit plus généralement le monôme $c_I = (c_1)^{i_1}...(c_r)^{i_r}$.
c_I est un polynm̂e de degré $\left|I\right| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r$ sur $End\ F$.

Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre commutative A, on notera encore c_j et c_I l'extension $End\ (F \otimes A) \to A$ des monômes précédents aux endomorphismes de $F \otimes A$.

Remarque 1.1. — On autorise l'algèbre A à être graduée, et les coefficients de l'élément dans $End\ (F \otimes A)$ à être hétérogènes. Par exemple, A peut être l'algèbre $\Omega^{pair}(V)$ des formes différentielles de degré pair sur une variété V, ou l'algèbre de cohomologie $H^{pair}(V)$.

On notera $\widehat{c_I}$ la forme multilinéaire, symétrique associée au polynôme c_I (c'est une généralisation de la forme polaire associée à une forme quadratique).

DÉFINITION 1.2. — *Etant donnée une connexion ∇ sur E, l'homomorphisme d'algèbres $\mathbb{C}[c_1, c_2, \cdots, c_r] \to \Omega^*(V)$ à valeurs dans l'algèbre de de Rham, qui associe la $2|I|$-forme $c_I(\nabla)$ au monôme c_I, est appelé **homomorphisme de Chern-Weil**.*

Plus généralement, étant données $k+1$ connexions $\nabla^0, \nabla^1, \cdots, \nabla^k$ sur E, Bott a défini un opérateur, qui, à un monôme c_I, associe la $(2d-k)$-forme $c_I(\nabla^0, ..., \nabla^k$ sur V. Cet opérateur est appelé différence itérée de Bott et coincide avec l'homomorphisme de Chern-Weil pour $k = 0$

Il a la propriété suivante :

$$dc_I(\nabla^0, ..., \nabla^k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_I(\nabla^0, ..., \widehat{\nabla^i}, ..., \nabla^k).$$

1.2. Complexe de Čech-de Rham – Intégration – Dualités

1.2.1. Définition et propriétés

Soit V une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension complexe n , I un multi-indice et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement fini de V. Posons : $I_p = \{\alpha_0, \cdots \alpha_p \ ; \ \alpha_0 < \cdots < \alpha_p, \ \alpha_\nu \ \in I\}$.

Rappelons que l'ensemble des p-cochaines de q-formes sur $\mathcal{U}$ noté $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ est défini par

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \bigoplus_{(\alpha_0, \cdots \alpha_p) \in I_{p+1}} \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$$

Notons $CDR^r(\mathcal{U})$ le complexe : $CDR^r(\mathcal{U}) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$.
Soit $D : CDR^r(\mathcal{U}) \longrightarrow CDR^{r+1}(\mathcal{U})$ l'opérateur de différentiation défini par

$$(D\sigma)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \sigma_{\alpha_0 \cdots \widehat{\alpha_\nu} \cdots \alpha_p} \ + \ (-1)^p d\sigma_{\alpha_0, \cdots \alpha_p}$$

et le produit extérieur : $CDR^r(\mathcal{U}) \times CDR^s(\mathcal{U}) \overset{\smile}{\longrightarrow} CDR^{r+s}(\mathcal{U})$ défini par :

$$(\sigma \smile \ \tau)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{(r-\nu)(p-\nu)} \sigma_{\alpha_0, \cdots \alpha_\nu} \wedge \tau_{\alpha_\nu \cdots \alpha_p}.$$

Définition 1.3. — *Le complexe $CDR^*(\mathcal{U})$ muni de l'opérateur de différentiation D et du produit extérieur $\smile$ est appelé complexe total de Čech-de Rham associé au recouvrement $\mathcal{U}$.*

Remarque 1.4. — Le complexe total de Čech-de Rham associé à un recouvrement à deux ouverts est appelé le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement.

On a la propriété suivante :

Propriété 1.5. — *L'opérateur de différentiation D et le produit extérieur $\smile$ vérifient :*

$$D(\sigma \smile \tau) = D\sigma \smile \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \smile D\tau.$$

Remarque 1.6. — Soit $\iota : \Omega^*(V) \longrightarrow CDR^*(\mathcal{U})$ l'application naturelle définie par

$$\big(\iota(\alpha)\big)_i = \alpha\,|_{U_i} \quad \text{et} \quad \big(\iota(\alpha)\big)_{i_1\cdots i_k} = 0 \ \text{ pour } \ k \geqslant 2$$

C'est un homomorphisme injectif qui induit un isomorphisme en cohomologie. Il permet d'identifier l'algèbre de cohomologie $H^*\big(CDR^*(\mathcal{U})\big)$ du complexe de Čech-de Rham avec la cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(V;\mathbb{C})$.

1.2.2. Intégration et dualités

Soit V une variété de dimension réelle $2n$, orientée, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert de V et $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un système d'alvéoles (voir [7] ou [8] pour cette notion) subordonné à ce recouvrement. On définit l'intégration

$$\int_V : CDR^{2n}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par la formule : $\displaystyle\int_V \sigma = \sum_{p=0}^{2n}\Bigg(\sum_{(\alpha_0\cdots\alpha_p)\in I_p} \int_{R_{\alpha_0\cdots\alpha_p}} \sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\Bigg) \quad \forall\, \sigma \in CDR^{2n}(\mathcal{U}).$

Cette intégration a les propriétés suivantes :

(i) Elle prolonge l'intégration usuelle des formes différentielles.

(ii) Si $D\sigma = 0$ alors l'intégrale $\int_V \sigma$ ne dépend pas du choix de $\{R_\alpha\}$.

(iii) Si σ est un cobord, c'est-à-dire $\sigma \in D\big(CDR^{2n-1}(\mathcal{U})\big)$, alors $\int_V \sigma$ est nulle.

Cas particulier : intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris

C'est le cas où le recouvrement $\mathcal{U}$ est constitué de deux ouverts.

Soit S une partie fermée de V et U_1 un voisinage régulier de S. On pose $U_0 = V \setminus S$ et $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$.

L'inclusion

$$\begin{array}{rcl} \iota : \Omega^*(V) & \longrightarrow & MV^*(\mathcal{U}) \\ \alpha & \mapsto & (\alpha|_{U_0}, \alpha|_{U_1}, 0) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres différentielles graduées qui induit un isomorphisme en cohomologie, noté ι^*. Elle permet d'identifier l'algèbre de cohomologie $H^*\big(MV^*(\mathcal{U})\big)$ du complexe de Mayer-Vietoris avec celle de de Rham $H^*_{DR}(V;\mathbb{C})$.

Les projections naturelles $MV^*(\mathcal{U}) \to \Omega^*(U_0)$ et $MV^*(\mathcal{U}) \to \Omega^*(U_1)$ étant surjectives, leurs noyaux respectifs $MV^*(\mathcal{U}, U_0)$ et $CDR^*(\mathcal{U}, S)$ ont pour cohomologie $H^*(V; V \setminus S; \mathbb{C})$ et $H^*(V; S; \mathbb{C})$.

Supposons maintenant que V soit compacte, connexe et orientée.

Soit $\mathcal{T}$ une sous variété à bord de U_1, de même dimension réelle $2n$ que V, dont on notera $\partial\mathcal{T}$ le bord, telle que $S \subset \mathcal{T}$ et $\partial\mathcal{T} \cap S = \emptyset$.

Si $\sigma = (\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_{01})$ est un élément de $MV^{2n}(\mathcal{U})$, alors : $\int_V \sigma = \int_{V-\overset{\circ}{\mathcal{T}}} \xi_0 + \int_{\mathcal{T}} \xi_1 \ - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01}$.

L'application :

$$\Big(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_{01}\Big) \ \to$$

$$\left[(\xi_0',\ \xi_0',\ \xi_{01}') \ \to \int_{V-\overset{\circ}{\mathcal{T}}} \xi_0 \wedge \xi_0' + \int_{\mathcal{T}} \xi_1 \wedge \xi_1' - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01} \wedge \xi_1' + (-1)^{|\xi_0|} \xi_0 \wedge \xi_{01}'\right],$$

de $MV^k(\mathcal{U})$ dans $Hom\big(CDR^{2n-k}(\mathcal{U}, \mathbb{C})\big)$ induit la **dualité de Poincaré** :

$$\mathcal{P}_V : H^k(V, \mathbb{C}) \overset{\cong}{\to} H_{2n-k}(V, \mathbb{C})$$

Si $\xi = (0, \xi_0, \xi_{01}) \in CDR^{2n}(\mathcal{U}, U_0)$, l'intégrale $\int_V \xi = \int_{\mathcal{T}} \xi_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01}$ est bien définie.

D'autre part, pour $\sigma = (0, \sigma_0, \sigma_{01}) \in CDR^k(\mathcal{U}, U_0)$ et $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_{01}) \in MV^{2n-k}(\mathcal{U}, U_0)$, le cup-produit : $(0, \sigma_1, \sigma_{01}) \smile (\tau_0, \tau_1, \tau_{01}) = (0, \sigma_1 \wedge \tau_1, \sigma_{01} \wedge \tau_1)$ ne dépend ni de τ_0 ni de τ_{01}.

L'application : $(0, \sigma_1, \sigma_{01}) \ \mapsto \ [\tau_1 \ \mapsto \ \int_{\mathcal{T}} \sigma_{01} \wedge \tau_1 \ - \ \int_{\partial\mathcal{T}} \sigma_{01} \wedge \tau_1]$ de $MV^k(U, U_0)$ dans $Hom\Big(\Omega^{2n-k}(U^1), \mathbb{C}\Big)$ induit la **dualité d'Alexander-Lefschetz** : [6] [9]

$$AL : H^k(V, U_0, \mathbb{C}) \overset{\cong}{\to} H_{2n-k}(S; \mathbb{C})$$

1.3. Connexions spéciales et existence des résidus

1.3.1. Connexions spéciales

Définition 1.7 ([3]). — *Soient v un champ de vecteurs holomorphe sur une variété holomorphe V et θ_v une action de v sur un fibré vectoriel holomorphe E de base V. Une connexion ∇ sur E est dite θ_v-***spéciale** *si :*

– *elle est de type* $(1,0)$.

– $\forall\ \sigma \in \Gamma(E|_{V\setminus S}), \nabla_v\ (\sigma) = \theta_v(\sigma)$.

PROPOSITION 1.8 [3]. — *Si v est un champ de vecteurs sans singularité sur V et θ_v une action de v sur un fibré vectoriel holomorphe E, alors il existe une connexion θ_v-spéciale sur E.*

THÉORÈME 1.9 (***d'annulation***). — *Soit ∇ une connexion θ_v-spéciale sur un fibré vectoriel holomorphe E. Alors, pour tout multi-indice I tel que $|I| = n$, la $2n$-forme $c_I(\nabla)$ est nulle.*

COROLLAIRE 1.10. — *S'il existe un champ de vecteurs v sans singularité sur V et une action θ_v sur E, alors, pour $|I| = n$, tous les nombres de Chern $c_I(E) \frown V$ sont nuls.*

Démonstration du théorème 1.9. — Notons F un supplémentaire (C^∞) du fibré vectoriel $\{v\}$ engendré par v dans TV (par exemple le supplémentaire orthogonal pour une structure hermitienne sur TV) : $T_{\mathbb{C}}V = \{v\} \oplus F \oplus \overline{TV}$. Soient $\big(e_2, ..., e_n\big)$ une trivialisation locale C^∞ de F, et et $\big(Z_1, ..., Z_n\big)$ une trivialisation locale de $\overline{TV}$: $(v, e_2, ..., e_n, Z_1, ..., Z_n)$ est alors une trivialisation locale de $T_{\mathbb{C}}V$, dont on notera $(\eta, \xi_2, ..., \xi_n, \zeta_1, ..., \zeta_n)$ le dual.

Notant k la courbure de ∇, on a : $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \ K(v, Z_i) = 0$ et $\forall i, j \in \{1, ..., n\},\ \ K(Z_i, Z_j) = 0$.

Les coefficients K_λ^μ de la matrice de courbure relative à une trivialisation locale par des sections holomorphes sont du type : $K_\lambda^\mu = A(\eta \wedge \xi_\alpha) + B(\xi_\alpha \wedge \xi_\beta) + C(\xi_\alpha \wedge \zeta_\beta)$ où A, B et C sont des fonctions définies sur V. Par conséquent, les termes $K_{\lambda_1}^{\mu_1} \wedge K_{\lambda_2}^{\mu_2} \wedge ... \wedge K_{\lambda_n}^{\mu_n}$ sont nuls car chacun d'eux contient un terme du type $\xi_\mu \wedge \xi_\nu$ et que les ξ_λ sont au nombre de $n-1$. $\square$

Plus généralement :

PROPOSITION 1.11. — *Soit $(\nabla^0, \cdots, \nabla^k)$ une famille de $k+1$ connexions θ_v-spéciales. Pour tout multi-indice I tel que $|I| = n$, la $(2n-k)$-forme $c_I(\nabla^0, \cdots, \nabla^k)$ est nulle.*

1.3.2. Existence des résidus

Soient v un champ de vecteurs holomorphe sur une variété holomorphe V de dimension complexe n, E un fibré vectoriel holomorphe de base V de rang r et I un mult-indice de hauteur égale à n. Le théorème d'annulation de Bott signifie que si v n'a pas de singularités et s'il existe une action θ_v de v sur E, alors le monôme de Chern $c_I(E)$ est nulle. Lorsqu'une telle action n'est définie qu'en dehors d'un fermé $S = \coprod_{\alpha\in\ \Lambda} S_\alpha$ de V, on va montrer que les classes de Chern $c_I(E)$ se « localisent » au voisinage des singularités de v.

Soit $S = \coprod_{\alpha\in A} S_\alpha$ le lieu singulier de v, c'est-à-dire l'ensemble des points de V sur lesquels v s'annule.

Soient θ_v une action holomorphe sur $E|_{V\setminus S}$, $\mathcal{U} = \{V \setminus S,\ U\}$ un recouvrement ouvert de V où U est un voisinage ouvert de S, ∇ une connexion θ_v-spéciale sur $E|_{V\setminus S}$ et ∇_0 une connexion sur $E_{|_U}$.

On pose : $\rho_I(\theta_v) = \Big(0, c_I(\nabla^0), c_I(\nabla,\nabla^0)\Big)$

Lemme 1.12. — *L'élément $\rho_I(\theta_v)$ de $MV^{2n}(\mathcal{U}, V\setminus S)$ est un cocycle dont la classe de cohomologie, $\Big[\rho_I(\theta_v)\Big]$, dans $H^{2n}(\mathcal{U}, V\setminus S) = H^{2n}(U, U\setminus S)$, ne dépend ni de ∇, ni de ∇^0 ; elle ne dépend que de c_I et du comportement de θ_v au voisinage de S.*

Définition 1.13. — *La classee de cohomologie $\Big[\rho_I(\theta_v)\Big]$ de $\rho_I(\theta_v)$ dans $H^{2n}(\mathcal{U}, V\setminus S,\mathbb{C}) = H^{2n}(U, U\setminus S,\mathbb{C})$ est appelée **classe caractéristique résiduelle de Bott** relative à c_I et à θ_v.*

Théorème de localisation. — *L'image de la classe caractéristique résiduelle de Bott $\Big[\rho_I(\theta_v)\Big]$ par l'homomorphisme canonique $j^* : H^*(\mathcal{U}, V\setminus S,\mathbb{C}) \longrightarrow H^*(V,\mathbb{C})$ est le monôme de Chern $c_I(E)$.*

Ce théorème signifie que le monôme de Chern $c_I(E)$ ne dépend que de c_I et du comportement de θ_v au voisinage de S. Si on suppose S compact, (ce qui est le cas si V est compacte), on définit le résidu à partir de la classe caractéristique résiduelle.

Définition 1.14. — *Si l'ensemble singulier S de v est compacte, le résidu* Rés*(c_I,θ_v,S) de θ_v, relativement à c_I et S est l'image de la classe caractéristique résiduelle de Bott $\Big[\rho_I(\theta_v)\Big]$ par l'isomorphisme d'Alexander-Lefschetz $AL_S : H^*(V, V\setminus S) \longrightarrow H_{2n-*}(S)$.*

On voit alors que Rés(c_I,θ_v,S) est un élément de $H_0(S)$. D'autre part, si $S = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ où S_α est une composante connexe de S, alors, $H_0(S)$ est isomorphe à $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_0(S_\lambda)$.

On notera $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$ la contribution de la composante connexe S_α au résidu. Cet élément du groupe d'homologie $H_0(S_\alpha)$ est obtenu de la façon suivante :

si U_α un voisinage ouvert régulier de S_α et $\mathcal{T}_\alpha$ une variété à bord compacte de dimension réelle $2n$ vérifiant : $S \subset \mathcal{T}_\alpha \subset U_\alpha$ et $\partial\mathcal{T}_\alpha \cap S_\alpha = \emptyset$, alors, on a :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha) = \int_{\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0_\alpha) + \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0_\alpha, \nabla),$$

où ∇^0_α est une connexion sur $E_{|U_\alpha}$ et ∇ une connexion θ_v-spéciale sur $E_{|V\setminus S_\alpha}$, et $\partial\mathcal{T}_\alpha$ étant orienté par la normale sortante de $\mathcal{T}_\alpha$.

Théorème d'existence des résidus. — *Il existe, pour tout α, des nombres complexes* $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$ *ne dépendant que du comportement local de v et de l'action θ_v sur la restriction du fibré à un voisinage arbitrairement petit de S_α dans V, tels que la formule suivante soit vérifiée, lorsque V est compacte :*

$$\sum_{\alpha\in A} \text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha) = c_I(E)\frown[V].$$

1.3.3. Cas où S_α est une sous-variété holomorphe W de V

On peut choisir pour U_α un voisinage tubulaire de W dans V admettant une rétraction par déformations différentiable π sur W : il existe donc un isomorphisme différentiable $\Phi : \pi^{-1}(TV|_W) \xrightarrow{\cong} TU$. Si l'on choisit pour ∇^0 la connexion $\Phi\big(\pi^{-1}(\overline{\nabla}^0)\big)$ correspondant par Φ à l'image réciproque d'une connexion $\overline{\nabla}^0$ sur $E|_W$, alors, pour des raisons de dimension, $\int_{\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0) = 0$. D'où :

Proposition 1.15. — *Avec les choix de U et ∇^0 faits ci-dessus, et ∇ désignant toujours une connexion θ_v-spéciale sur $E_{|V\setminus S_\alpha}$, on a :*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0, \nabla).$$

2. Résultats nouveaux

Dans toute cette section, on supposera (**hypothèse dite du « biholomorphisme »**) :

– que W désigne une composante connexe du lieu singulier de v qui est une sous-variété lisse de V,

– qu'il existe un biholomorphisme d'un voisinage régulier U de W dans V sur un voisinage de la section nulle dans l'espace total du fibré normal N_W, appliquant W sur la section nulle de N_W.

Cette hypothèse est en particulier satisfaite dans les cas suivants :

– la sous-variété W est un sous espace projectif d'un espace projectif,

– la sous-variété W est une sous-variété de Hopf d'une variété de Hopf,

– la sous-variété W est le produit cartésien de sous-variétés des types précédents,

– la sous-variété W est un point isolé.

On identifie désormais U à un voisinage de la section nulle dans N_W. Soit ∇^N une connexion sur N_W. Notant π la projection de N_W sur W, on a alors : $TU = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ désigne le fibré des vecteurs tangents à U qui sont horizontaux pour ∇^N, et $\mathcal{V}$ le fibré des vecteurs « verticaux », c'est-à-dire tangents aux fibres de π.

De plus $\mathcal{H}$ est canoniquement isomorphe (on dira désormais « égal ») à $\pi^{-1}(TW)$ et $\mathcal{V}$ à $\pi^{-1}(N_W)$:

$$TU = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \text{ où } \mathcal{H} = \pi^{-1}(TW) \text{ et } \mathcal{V} = \pi^{-1}(N_W).$$

2.1. Construction de repères adaptés de TU

Soit θ_v^0 l'action de v sur TV définie par $\theta_v^0(Y) = [v, Y]$ pour toute section Y de TU. Cette action induit un endomorphisme θ_v^N du fibré normal N_W de W. Comme W est compacte et que, pour tout élément m de W, le polynôme caractéristique associé à $(\theta_v^N)_m$ est à coefficients holomorphes, il est constant. Par conséquent, les valeurs propres de $(\theta_v^N)_m$, ainsi que leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de m. Notant Λ l'ensemble des valeurs propres de θ_v^N, N_W est alors égal à $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, N_λ désignant le sous-fibré de N_W dont la fibre au dessus d'un élément m de W est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ. On a alors : $TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(N_\lambda)$.

Pour tout point $\widetilde{m}$ de U, notons $m = \pi(\widetilde{m})$ son projeté sur W.

Dans toute la suite, nous supposerons que θ_v^N admet q valeurs propres distinctes.

N_W se décompose alors sous la forme suivante : $N_W = \bigoplus_{\lambda=1}^{q} N_\lambda$ (N_λ désigne le sous-fibré de N_W dont la fibre au dessus d'un élément m de W est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ). Par conséquent, $TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda=1}^{q} \pi^{-1}(N_\lambda)$. Considérons un point fixé m_0 de W. Soient $\big(x_1, ..., x_{n-q}\big)$ un système de coordonnées locales holomorphes définies sur un voisinage T de m_0 dans W, et $(\sigma_1, ..., \sigma_q)$ une trivialisation holomorphe de $N_W|_T$ adaptée à la décomposition de $N_W|_T$ en sous-fibrés caractéristiques ; pour tout $\widetilde{m} \in \pi^{-1}(T)$, on note $\big(y_1, ..., y_q\big)$ les coordonnées de $\widetilde{m}$ par rapport à la base $\big(\sigma_1(m), \cdots, \sigma_q(m)\big)$ de $(N_W)_{\widetilde{m}}$, c'est-à-dire : $\widetilde{m} = \sum_{\lambda=1}^{q} y_\lambda\ \sigma_\lambda(m)$.

Posant $\widetilde{x_i} = x_i \circ \pi$, $\big(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{n-q}, y_1, ..., y_q\big)$ est alors un système de coordonnées holomorphes sur $\pi^{-1}(T)$ par rapport auxquelles la sous-variété W est définie par les équations : $y_\lambda = 0, \forall\ \lambda \in \{1, 2, ..., q\}$.

Soit ∇^N une connexion adaptée à la décomposition de N_W; on a :

$$\nabla^N \sigma_\lambda = a_\lambda \sigma_\lambda \quad \forall \lambda \in \{1, 2, ..., q\} \ \text{ où } a_\lambda \quad \text{est une 1-forme locale sur } W.$$

Notations. — $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sera noté ∂_i, $\quad \frac{\partial}{\partial y_\lambda}$ sera noté ∂_λ et $\frac{\partial}{\partial \widetilde{x_i}}$ sera noté $\widetilde{\partial_i}$.

S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira ∂_i à la place de $\widetilde{\partial_i}$. Notons ∂_i^* le relevé horizontal de ∂_i relativement à ∇^N dans l'ouvert $\pi^{-1}(T)$.

Plus généralement, notons h^* le relevé horizontal d'un champ de vecteur h tangent à W.

LEMME 2.1. — *La famille* $\Big(\partial_i^*, \partial_\lambda\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n-q, 1 \leqslant \lambda \leqslant q}$ *est une base de sections locales de* TU, *et on a :*

$$\partial_i^* = \widetilde{\partial_i} \ - \ \sum_{\lambda=1}^{q} \Big(y_\lambda\ \pi^* a_\lambda(\partial_i)\Big)\ \partial_\lambda.$$

La base duale $\Big(dx_i^*,\ \xi_\lambda\Big)$ *de* $\Big(\partial_i^*, \partial_\lambda\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n-q, 1 \leqslant \lambda \leqslant q}$, *vérifie :*

$$(\mathbf{dx_i})^* = \mathbf{dx_i},\ (1 \leqslant i \leqslant n-q) \quad \textit{et} \quad \xi_\lambda = \mathbf{dy}_\lambda\ +\ \mathbf{y}_\lambda\ \pi^*\ (\mathbf{a}_\lambda),\ (1 \leqslant \lambda \leqslant q).$$

Démonstration. — 1) Montrons d'abord la formule suivante :

$$\partial_i^* = \widetilde{\partial}_i - \sum_{\lambda=1}^{q} \Big(y_\lambda\ a_\lambda\big(\partial_i\big)\Big)\partial_\lambda \qquad (\boldsymbol{*}).$$

Soit γ_i la courbe sur W passant par m définie par : $x_i(t) = x_i(m) + t$, $\ x_j(t) = x_j(m)$ pour $j \neq i$ qui admet ∂_i comme champ de vecteurs tangents. Soit $\widetilde{\gamma}_i$ le relevé horizontal de γ_i relativement à ∇^N. Dans les coordonnées ci-dessus, on a : $\widetilde{\gamma}_i = (\widetilde{x}(t), y(t))$, avec $\widetilde{x}(t) = \big(\widetilde{x}_1(t), ..., \widetilde{x}_{n-q}(t)\big)$ et $\widetilde{x}_i(t) = \widetilde{x}_i(m) + t,\ \widetilde{x}_j(t) = \widetilde{x}_j(m)$ pour $j \neq i$.

Ecrivant que ∂_i^* est tangent à $\widetilde{\gamma}_i$, on obtient :

$\partial_i^* = \sum_{j=1}^{n-q} \frac{dx_j(t)}{dt}\ \partial_j\ +\ \sum_{\lambda=1}^{q} \frac{dy_\lambda}{dt}\ \partial_\lambda,$

soit $\qquad \partial_i^* = \partial_i + \sum_{\lambda=1}^{q} \frac{dy_\lambda}{dt}\ \partial_\lambda.$

Ecrivant que $\widetilde{\gamma}_i$ est une courbe horizontale, la section $s_i\big(\gamma(t)\big) = \sum_{\lambda=1}^{q} y_\lambda(t)\, \sigma_\lambda\big(\gamma(t)\big)$ de N_W a une dérivée covariante nulle, soit : $\sum_{\lambda=1}^{q} \Big(\frac{dy_\lambda}{dt} + y_\lambda\, a_\lambda\big(\partial_i\big)\Big)\, \sigma_\lambda = 0$, c'est-à-dire : $\quad \frac{dy_\lambda}{dt} + y_\lambda\, a_\lambda\big(\partial_i\big) = 0, \quad \forall \lambda \in \{1, 2, ..., q\}$. ce qui achève la preuve de la formule.

On dispose maintenant de deux trivialisations locales de TU :

– la première est $\mathcal{B}_1 = \Big((\partial_i)_{i=1\cdots n-q},\ (\partial_\lambda)_{\lambda=1\cdots q}\Big)$ de trivialisation duale $\mathcal{B}_1^* = \Big((dx_i)_{i=1\cdots n-q},\ (dy_\lambda)_{\lambda=1\cdots q}\Big)$.

Le champ de vecteur v s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{n-q} A_i \partial_i + \sum_{\lambda=1}^{q} \overline{B_\lambda} \partial_\lambda$$

– la deuxième est $\mathcal{B}_2 = \Big((\widetilde{\partial}_i^*)_{i=1\cdots n-q},\ (\partial_\lambda)_{\lambda=1\cdots q}\Big)$ de trivialisation duale $\mathcal{B}_2^* = \Big({(dx_i)^*}_{i=1\cdots n-q},\ (\xi_\lambda)_{\lambda=1\cdots q}\Big)$. Le champ de vecteur v s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{n-q} A_i \partial_i^* + \sum_{\lambda=1}^{q} B_\lambda \partial_\lambda$$

2) Il reste à démontrer la deuxième partie du lemme.

D'une part, il est facile de vérifier que dx_i et dx_i^* vérifient les mêmes propriétés par rapport $\mathcal{B}_2$
Donc : $\qquad dx_i^* = dx_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-q\}$

D'autre part pour toute forme ξ_λ, on peut écrire : $\quad \xi_\lambda = \sum_{\mu=1}^{q} A_\gamma^\mu dy_\mu + \sum_{j=1}^{n-q} B_\gamma^j dx_j$.

Or, ξ_λ doit vérifier les conditions suivantes :

$$\xi_\lambda\big(\partial_\lambda\big) = 1, \quad \xi_\lambda\ \big(\partial_\mu\big) = 0 \text{ (pour } \lambda \neq \mu) \ \text{ et } \ \xi_\lambda\ \big(\partial_i^*\big) = 0 \text{ (pour tout } i).$$

On en déduit : $A_\lambda^\mu = 0$ (pour $\mu \neq \lambda$), $A_\lambda^\lambda = 1,,\ \ B_\lambda^i = y_\lambda\ \pi^* a_\lambda\big(\partial_i\big)$.

Donc, $\xi_\lambda = dy_\lambda\ +\ \sum_{j=1}^{n-q} y_\lambda\ \pi^* a_\lambda\big(\widetilde{\partial}_j\big)\ dx_j$. Mais $\sum_{j=1}^{n-q} \pi^* a_\lambda\ \big(\widetilde{\partial}_j\ \big) dx_j = \pi^* a_\lambda$.

Finalement $\qquad \xi_\lambda\ =\ dy_\lambda\ +\ y_\lambda \pi^* a_\lambda.$

Lemme 2.2. — *Les formes différentielles* $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$, $(\lambda = 1 \cdots q)$ *ne dépendent pas de la trivialisation choisie.*

Démonstration. — Soient $(\sigma_1, \cdots \sigma_q)$ et $(\sigma_1', \cdots \sigma_q')$ deux trivialisations holomorphes de N_W au dessus d'un ouvert de W, adaptées à la décomposition de N_W. Il existe des 1-forme locales a_λ (resp. a_λ') sur W telle que :

$$\nabla^N \sigma_\lambda = a_\lambda\ \sigma_\lambda, \ \text{(resp. } \nabla^N \sigma_\lambda' = a_\lambda'\ \sigma_\lambda').$$

Il existe alors, pour tout λ, une fonction f_λ, holomorphe, partout non nulle sur l'intersection des deux ouverts, telle que : $\qquad {\sigma'}_\lambda = f_\lambda\ \sigma_\lambda.$

On en déduit : $\ y_\lambda\ =\ f_\lambda\ y_\lambda'\ $ et $\ a_\lambda'\ =\ a_\lambda + \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$. Or, $\ \xi_\lambda\ =\ dy_\lambda + y_\lambda \pi^*\ a_\lambda$ et $\xi_\lambda' = dy_\lambda' + y_\lambda' \pi^*\ a_\lambda'$.

On vérifie alors : $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} = \frac{\xi_\lambda'}{y_\lambda'}$.

Le lemme 2.2 implique que les formes différentielles locales $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$ se recollent en une 1-forme différentielle globale sur tout l'ouvert $U \setminus W$, que l'on notera encore $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$.

2.2. Lemme fondamental

Rappelons que θ_v^N admet q valeurs propres distinctes (dont une éventuellement nulle).

$$TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda=1}^{q} \pi^{-1}(N_\lambda)$$

où N_λ est le sous fibré de N_W dont la fibre au dessus d'un élément x de W est le sous espace vectoriel de la fibre de N_W au dessus de x correspondant à l'espace propre associée à la valeur propre α_λ. Le champ de vecteurs v peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$v = v_H + \sum_{\lambda=1}^{q} v_\lambda \quad \text{où} \quad v_H \in \mathcal{H} = \pi^{-1}(TW) \quad \text{et} \quad v_\lambda \in \mathcal{V} = \pi^{-1}(N_\lambda).$$

Posons : $U^H = \{m \in U \backslash W;\ v_H(m) \neq 0\}$ et $U^\lambda = \{m \in U \backslash W;\ v_\lambda(m) \neq 0\}$.
Ainsi : $U \setminus W = U^H \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U^\lambda$.
On va maintenant chercher à calculer le résidu

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \int_{\partial \mathcal{T}} c_I(\nabla^0, \nabla)$$

en construisant des connexions adaptées en un certain sens au recouvrement ci-dessus, et en utilisant l'intégration sur le complexe de Čech-de Rham correspondant.

2.2.1. Connexions μ-adaptées

Définition 2.3. — *Soit $\mu \in \{1, \cdots, q\}$*

On dira qu'une connexion ∇ sur E est μ-adaptée si :

- ∇ *est de type* $(1,0)$
- $\nabla_X(\widetilde{\sigma}) = 0$ *pour tout X dans $\pi^{-1}N_\mu$ et pour toute section π-invariante $\widetilde{\sigma}$.* (*c'est-à-dire telle que $\widetilde{\sigma} = \pi^{-1}(\sigma)$ où σ est une section de $E|_W$*).

Proposition 2.4. — *De telles connexions existent toujours.*

Théorème 2.5. — *Si $\nabla_0, \cdots, \nabla_k$ sont $k+1$ connexions μ-adaptées ($k \geqslant 0$), $c_I(\nabla_0, \cdots \nabla_k) = 0$ pour $|I| = n$.*

Démonstration. — On a : $T_{\mathbb{C}}U = TU \oplus \overline{TU}$, où $T^{(1,0)}U = TU$ et $T^{(0,1)}U = \overline{TU}$.

Mais, $TU = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ où $\mathcal{H} \simeq \pi^{-1}(TW)$ et $\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{\lambda=1}^{q} \pi^{-1}(N_\lambda)$.

Soit $\mathcal{B} = \Big(h_1, \cdots, h_{n-q},\ \partial_1, \cdots \partial_\mu, \cdots \partial_\lambda, \cdots \partial_q,\ \overline{Z}_1, \cdots \overline{Z}_n\Big)$ une trivialisation locale de $T_{\mathbb{C}}U$ adaptée à la décomposition précédente. La trivialisation duale sera notée
$\mathcal{B}^* = \Big(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-q},\ \xi_1, \cdots \xi_\mu, \cdots \xi_\lambda, \cdots, \zeta_1, \cdots \zeta_n\Big)$ où (ε_i) est le dual de (h_i), (ξ_λ) celui de (∂_λ) et (ζ_k) celui de $(\overline{Z}_k)$.

Si $k = 0$ **:** Soit ∇_0 une connexion μ-adaptée ; on note K sa courbure.

Si X et Y sont des champs de vecteurs purs relativement à la décomposition précédente de $T_{\mathbb{C}}U$, $K(X,Y)$ n'est non nul que si l'un des vecteurs X ou Y est dans $\bigoplus_{\lambda\neq\mu}\pi^{-1}(N_\lambda)\oplus\mathcal{H}$. Par suite, les coefficients K_α^β de K s'écrivent : $K_\alpha^\beta = \sum_{1,j} A_{ij}\varepsilon_i\wedge\tau_i + \sum_{\lambda,k}\xi_\lambda\wedge\tau_k$ avec $\lambda\neq\mu$ et $\tau\in\Gamma(TU)$.

On en déduit : $K_{\alpha_1}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge K_{\alpha_n}^{\beta_n}=0$, d'où $c_I(\nabla_0)=0$.

Si $k>0$, on procède de la même manière que pour la preuve de la proposition 1.11.

2.2.2. Choix de connexions spéciales

(i) Soit ∇ une connexion θ_v-spéciale sur $TU_{|V\setminus W}$ c'est-à-dire :
- ∇ est de type (1,0),
- $\nabla_v=\theta_v$.

(ii) $\nabla^0=\pi^*(\overline{\nabla}^0)$ où $\overline{\nabla}^0$ est une connexion sur $E_{|W}$.

(iii) v et $v^\mu(\mu\neq\lambda)$ n'étant pas colinéaires sur U^λ, on choisit ∇^λ sur $E_{|\overset{\lambda}{U}}$ de la manière suivante :
- ∇^λ est θ_v-spéciale,
- $\nabla_X^\lambda=\nabla_X^0$ pour tout X dans $\mathcal{H}\oplus\bigoplus_{\mu,\mu\neq\lambda}\pi^{-1}(N_\mu)$ au dessus de U^λ.

(iv) On choisit ∇^H de la manière suivante :
- ∇^H est θ_v-spéciale,
- ∇^H est μ-adaptée pour tout μ appartenant à Λ,
- $\nabla_X^H=\nabla_X^0$ pour tout X appartenant à un sous-fibré $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ dont la fibre au dessus d'un point m de U^H est un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par $v^H(m)$ dans la fibre $\mathcal{H}_m$ de $\mathcal{H}$ au dessus de m.

Il est facile de voir que les formules suivantes sont vérifiées :

$$(\mathbf{1})\qquad \nabla^\lambda=\nabla^0+\frac{\xi_\lambda}{B_\lambda}\otimes\Theta\qquad\text{et}\qquad(\mathbf{2})\qquad\nabla^H=\nabla^0+\zeta\otimes\Theta\quad\text{où}$$

- $\Theta=\theta_v-\nabla_v^0$,
- ξ_λ est la 1-forme différentielle sur U^λ telle que : $\xi_\lambda(v_\lambda)=1$ et $\xi_\lambda=0$ sur $\mathcal{H}\oplus\bigoplus_{\mu,\mu\neq\lambda}\pi^{-1}(N_\mu)$.
- ζ est la 1-forme différentielle sur U^H telle que : $\zeta(v_H)=1$ et $\zeta=0$ sur $\mathcal{K}\oplus\bigoplus_{\mu\in\Lambda}\pi^{-1}(N_\mu)$

2.2.3. Enoncé et démonstration du lemme fondamental

On se donne maintenant le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U^1, \cdots, U^q, U^H\}$ de $U \setminus W$. On notera $\{1, 2, \cdots, q, i_H\}$ l'ensemble des 0-simplexes du nerf $\mathcal{N}(U)$ du recouvrement. Plus généralement, la dimension $|\sigma|$ d'un simplexe ordonné σ de $\mathcal{N}(U)$ est s si $\sigma = (i_0 \cdots i_s)$, et $s+1$ si $\sigma = (i_0 \cdots i_s i_H)$.

Lemme fondamental. — *Les cochaines* α et β de $CDR^*\big(\mathcal{U}\big)$ *définies par*

- $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$ *où :*

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\sigma| < q-1 \\ 0 & \text{si} \quad \sigma = (i_0 \ \cdots i_s H), \quad s < q-1 \\ (-1)^{[\frac{q}{2}]} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \cdots \nabla^q) & \text{si} \quad \sigma = (i_0 \cdots i_{q-1}) \\ (-1)^{[\frac{q+1}{2}]} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \cdots \nabla^q, \nabla^H) & \text{si} \quad \sigma = (i_0 \cdots i_{q-1H}) \end{cases}$$

- $\beta = (\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$ *où :*

$$\beta_\sigma = \begin{cases} c_I(\nabla^0, \nabla) & si \ |\sigma| = 0 \\ 0 & si \ |\sigma| > 0. \end{cases}$$

sont des cocycles et sont cohomologues dans $CDR^*(\mathcal{U})$.

Démonstration. — Considérons l'élément ρ de $CDR^{2n-2}\big(\mathcal{U}\big)$ défini par :

- $\rho_{i_0,\cdots i_s} = (-1)^{[\frac{s}{2}]} c_I\big(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, ..., \nabla^{i_s}\big)$
- $\rho_{i_0,\cdots i_s H} = (-1)^{[\frac{s+1}{2}]} c_I\big(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, ..., \nabla^{i_s}, \nabla^H\big)$

$D\rho$ contient quatre types de termes :
Les termes du type $\big(D\rho\big)_i$, les termes du type $\big(D\rho\big)_H$, les termes du type $\big(D\rho\big)_{i_0,\cdots i_s}$ $(s \geqslant 1)$ et les termes du type $\big(D\rho\big)_{i_0,\cdots i_s H}$ $(s \geqslant 1)$.

Calcul de $\big(D\rho\big)_i$.

$$\begin{aligned} \big(D\rho\big)_i &= dc_I\big(\nabla^0, \nabla, \nabla^i\big) \\ &= c_I\big(\nabla, \nabla^i\big) - c_I\big(\nabla^0, \nabla^i\big) + c_I\big(\nabla^0, \nabla\big) \\ &= c_I\big(\nabla^0, \nabla\big). \end{aligned}$$

Calcul de $\left(D\rho\right)_H$.

$$\begin{aligned}\left(D\rho\right)_H &= dc_I\left(\nabla^0, \nabla, \nabla^H\right)\\ &= c_I\left(\nabla, \nabla^H\right) - c_I\left(\nabla^0, \nabla^H\right) + c_I\left(\nabla^0, \nabla\right)\\ &= c_I\left(\nabla^0, \nabla\right).\end{aligned}$$

calcul de $\left(D\rho\right)_{i_0,\cdots i_s}(s \geqslant 1)$

$$\begin{aligned}\left(D\rho\right)_{i_0\cdots i_s} &= (-1)^s d\left(\rho_{i_0\cdots i_s}\right) + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \rho_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_s}\\ &= (-1)^s(-1)^{[\frac{s}{2}]}\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k c_I\left(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \cdots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \cdots \nabla^{i_s}\right)\right.\\ &\quad \left.+c_I\left(\nabla, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right) - c_I\left(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right)\right)\\ &\quad +(-1)^{[\frac{s-1}{2}]}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k c_I\left(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \cdots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \cdots, \nabla^{i_s}\right).\\ &= \left((-1)^{s+[\frac{s}{2}]} + (-1)^{[\frac{s-1}{2}]}\right)\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k c_I\left(\nabla^0, \nabla,\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\nabla^{i_0}, \cdots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \cdots \nabla^{i_s}\right)\right).\\ &\quad +(-1)^{s+[\frac{s}{2}]}\left(c_I\left(\nabla, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right) - c_I\left(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right)\right)\end{aligned}$$

or,

$$(-1)^{s+[\frac{s}{2}]} = (-1)^{[\frac{s+1}{2}]} \quad \text{et} \quad (-1)^{[\frac{s+1}{2}]} + (-1)^{[\frac{s-1}{2}]} = 0.$$

D'autre part,

$$c_I\left(\nabla, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right) = 0$$

car les connexions ∇ et $\nabla^{i_k}, (k = 1, \cdots s)$ sont toutes θ_v-spéciales.

Donc

$$\left(D\rho\right)_{i_0\cdots i_s} = -(-1)^{[\frac{s+1}{2}]}c_I\left(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}\right).$$

Ainsi :

- Si $s < q-1$, $\left(D\rho\right)_{i_0\cdots i_s} = 0$ car $\nabla^0, \nabla^{i_0}, \cdots, \nabla^{i_s}$ sont toutes μ-adaptées pour $\mu \neq i_0, \cdots, i_s$

- Si $s=q-1$, $\big(D\rho\big)_{i_0\cdots i_s} = -(-1)^{[\frac{q}{2}]}c_I\big(\nabla^0,\nabla^1,\cdots,\nabla^q\big)$.

<u>**calcul de** $\big(D\rho\big)_{i_0,\cdots i_sH}, s\geqslant 1$</u>

$$\begin{aligned}
\big(D\rho\big)_{i_0\cdots i_sH} &= (-1)^{s+1}d\big(\rho_{i_0\cdots i_sH}\big)+\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\rho_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_sH}+(-1)^{s+1}\rho_{i_0\cdots i_s}\\
&= (-1)^{s+1}(-1)^{[\frac{s+1}{2}]}\Big[c_I\big(\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\nabla^{i_s}\nabla^H\big)-c_I\big(\nabla^0,\nabla^{i_0},\cdots,\nabla^{i_s}\nabla^H\big)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{s}(-1)^kc_I\big(\nabla^0,\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\widehat{\nabla^{i_k}},\cdots\nabla^{i_s},\nabla^H\big)\\
&\quad+(-1)^{s+1}c_I\big(\nabla^0,\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\nabla^{i_s},\big)\Big].\\
&\quad+(-1)^{[\frac{s}{2}]}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kc_I\big(\nabla^0,\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\widehat{\nabla^{i_k}},\cdots\nabla^{i_s},\nabla^H\big)\\
&\quad+(-1)^{s+1}\times(-1)^{[\frac{s}{2}]}c_I\big(\nabla^0,\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\nabla^{i_s},\big).
\end{aligned}$$

Or

$$(-1)^{s+1+[\frac{s+1}{2}]}+(-1)^{[\frac{s}{2}]}=0\quad\text{et}\quad(-1)^{[\frac{s+1}{2}]}+(-1)^{s+1+[\frac{s}{2}]}=0.$$

De plus, $c_I\big(\nabla,\nabla^{i_0},\cdots,\nabla^{i_s},\nabla^H\big)=0$ car ces connexions sont toutes θ_v-spéciales. Donc

$$\big(D\rho\big)_{i_0,\cdots i_sH}=\begin{cases}0 & \text{si}\quad s<q-1\\ -(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}c_I\big(\nabla^0,\nabla^1,\cdots,\nabla^q,\nabla^H\big) & \text{si}\quad s=q-1\end{cases}$$

Remarque 2.6. — La preuve du lemme 2.2 montre que si l'on peut recouvrir $U\backslash W$ en omettant l'un des ouverts U^{λ_i}, $c_I(\nabla_0,\nabla)$ est alors cohomologue à 0 : cf. 2.4.3 ci-après (théoréme C).

2.3. Les formules de résidu

2.3.1. Cas général : (où l'on ne peut se passer d'aucun des ouverts U^H ou U^λ)

THÉORÈME A. — Si θ_v^N *admet* q *valeurs propres distinctes, alors*

$$\text{Rés}\Big(c_I,\theta_v,W\Big)=$$

$$(-1)^{[\frac{q}{2}]}\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n\int_{R_{12\cdots q}}\frac{\xi_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\xi_q}{y_q}\,\frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q\widetilde{B_\lambda}}\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q}$$

$$+(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n\int_{R_{12\cdots qH}}\frac{\zeta}{1-d\zeta}\wedge\frac{\xi_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\xi_q}{y_q}\,\frac{1}{\prod\widetilde{B_\lambda}}\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q-1}$$

- $B_\lambda=\widetilde{B_\lambda}\;y_\lambda$, avec $v=\sum A_i\partial_i^*+\sum B_\lambda\partial_\lambda$,
- $\Theta=\theta_v-\nabla_v^0$, Ω_0^E est la courbure de ∇^0 sur E, Ω^N est la courbure de ∇^N sur N_W,
- $\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont : $\frac{1}{\widetilde{B}_\lambda}\pi^*\;da_\lambda,(\lambda=1\cdots q)$.
- $\Big(\big(R_\lambda\big)_\lambda,R_H\Big)$ est un système d'alvéoles sur $\partial\mathcal{T}$ subordonné au recouvrement induit par le recouvrement $\Big(\big(U_\lambda\big)_\lambda,U_H\Big)$

Démonstration. — Le résidu à calculer devient :

$$\text{Rés}(c_I,\theta_v,W)=(-1)^{[\frac{q}{2}]}\int_{R_{12\cdots q}}c_I\big(\nabla^0,\nabla^1,\cdots,\nabla^q\big)$$
$$+(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\int_{R_{12\cdots qH}}c_I\big(\nabla^0,\nabla^1,\cdots,\nabla^q,\nabla^H\big).$$

1) Calcul de $(-1)^{[\frac{q}{2}]}\int_{R_{12\cdots q}}c_I\big(\nabla^0,\nabla^1,\cdots,\nabla^q,\big)$:

Pour calculer $c_I(\nabla^0,\nabla^1,\cdots\nabla^q)$, on introduit la connexion $\widetilde{\nabla}$ définie sur le fibré $E|_{U^1\cap U^2\cap\cdots\cap U^q}\times\Delta^q\;\mapsto\;U^1\cap U^2\cap\cdots\cap U^q\;\times\Delta^q$ par

$$\widetilde{\nabla}=\Big(1-\sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\Big)\;\nabla^0\;+\;\sum_{\lambda=1}^q\;t_\lambda\;\nabla^\lambda.$$

où Δ^q est le q-simplexe standard de $\mathbb{R}^q$.

Comme
$$\nabla^\lambda = \nabla^0 + \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B_\lambda}}\ \Theta,$$
on a :
$$\widetilde{\nabla} = \nabla^0 + \sum_\lambda t_\lambda\ \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B_\lambda}}\ \Theta.$$
Sa courbure est :
$$\widetilde{\Omega} = \Omega_0 + \sum_{\lambda=1}^{q} \Big(dt_\lambda\ \wedge\ \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B_\lambda}}\Big)\ \Theta + \sum_{\lambda=1}^{q} \Big(t_\lambda\ \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda}\ \Omega_N^\lambda\Big)\ \Theta\ +\ R.$$
où R est un terme qui contient ξ_λ.

Ainsi,
$$\widetilde{\Omega}^n = \frac{n!}{q!(n-q)!}\left(\sum_{\lambda=1}^{q} dt_\lambda \wedge \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}\frac{1}{\widetilde{B_\lambda}}\right)^q \Theta^q \wedge \left(\Omega_0 + \sum_{\lambda=1}^{q}\Big(t_\lambda \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda}\ \Omega_N^\lambda\Big)\Theta + R\right)^{n-q} + Q.$$
où Q est un terme de degré inférieur à q en $dt_1, \cdots, dt_\lambda$. D'où :
$$c_I(\widetilde{\Omega}) = \frac{n!}{q!(n-q)!}\ \left(\sum_{\lambda=1}^{q} dt_\lambda\ \wedge \frac{\xi_\lambda}{B_\lambda}\right)^q \widehat{c_I}\left(\Theta^q,\ \left(\Omega_0 + \Big(\sum_{\lambda=1}^{q}\ \big(\frac{t_\lambda}{\widetilde{B}_\lambda}\ \Omega_N^\lambda\big)\ \Theta\Big)\right)^{n-q}\right)$$
$$+ \text{ terme de degré inférieur à } q \text{ en } dt_1, \cdots, dt_\lambda \wedge \cdots.$$
Par conséquent,
$$⨍ c_I(\widetilde{\nabla}) = (-1)^{[\frac{q}{2}]}\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n\ \frac{n!}{q!(n-q)!}\ q!$$
$$\int_{\Delta^q} dt_1 \wedge ... \wedge dt_q \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge ... \wedge \frac{\xi_q}{B_q}\ \widehat{c_I}\Big(\Theta^q, \big(\Omega_0 + A\Theta\big)^{n-q}\Big)$$
où

- $A = \sum_{\lambda=1}^{q} \frac{t_\lambda}{B_\lambda} y_\lambda \Big(\Omega_N\Big)_\lambda^\lambda$
- $⨍$ désigne l'intégration le long de la fibre Δ^q pour la projection $V \times \Delta^q \longrightarrow V$.

Puisque $c_I\big(\nabla^0, \nabla^1, ..., \nabla^q\big) = (-1)^{[\frac{q}{2}]} \int_{\Delta^q} c_I(\widetilde{\nabla})$, $c_I\big(\nabla^0, \nabla^1, ..., \nabla^q\big)$ est égal à
$$\frac{n!}{(n-q)!}\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n ⨍_{\Delta^q} dt_1 \wedge ... \wedge dt_q \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge ... \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} A^k \widehat{c_I}\Big(\Theta^{k+q}, {\Omega_0}^{n-q-k}\Big)$$

Or, $$A^k = \sum_{J/|J|=k} \frac{|J|!}{J!} \left(\frac{t}{\widetilde{\widetilde{B}}} \, \Omega_N \right)^J$$ où on a posé $B_\lambda = y_\lambda \widetilde{\widetilde{B_\lambda}}$

$\Big(Notation : D^J = D_1^{j_1}.D_2^{j_2}.....D_q^{j_q}$ et $J = (j_1, j_2, ..., j_q)$ est un multi-indice, $J! = j_1! j_2! ... j_q! \Big)$

et, $$\int_{\Delta^q} t^J dt_1 \wedge ... \wedge dt_q = \frac{J!}{(|J|+q)!}$$

donc, $$c_I\big(\nabla_0, \nabla^1, ..., \nabla^q\big) =$$

$$\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \frac{\xi_1}{B_1} \wedge ... \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \sum_{J/|J|\leqslant n-q} \frac{n!}{(|J|+q)!\big(n-q-|J|\big)!} \left(\frac{\Omega_N}{\widetilde{\widetilde{B}}} \right)^J \widehat{c_I}\big(\Theta^{|J|+q}, {\Omega_0}^{n-q-|J|}\big)$$

Calculons maintenant, $$\left[c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big) \left(c_q\Big(\big(Id - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}} \, \Omega_0^N\big)\Big)\right)^{-1} \right]_{n-q}$$

D'une part, $$\left[c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big)\right]_{n-q} = \sum_{s\leqslant n-q} \frac{n!}{s!(n-s)!} \, \widehat{c_I}\Big(\big(\Omega_0^E\big)^s, \Theta^{n-s}\Big)$$

D'autre part,

$$\left[c_q\Big(\big(Id - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}} \pi^* \Omega^N\big)\Big)\right]^{-1} = \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \left(1 - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}_\lambda} \pi^* \Omega_\lambda^N\right)}$$

En posant : $p_\lambda = \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}_\lambda} \pi^* \Omega_\lambda^N$, on obtient

$$\left[c_q\Big(\big(Id - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}} \pi^* \Omega^N\big)\Big)\right]^{-1} = \prod_{\lambda=1}^q \Big(1 + p_\lambda + p_\lambda^2 + ...\Big)$$

ou encore

$$\left[c_q\Big(\big(Id - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}} \pi^* \Omega^N\big)\Big)\right]^{-1} = \sum_{s\geqslant 0} W_s\Big(p_1, \cdots, p_q\Big),$$

W_s étant la fonction symétrique complète de degré s en $p_1, \cdots, p_q$.

De plus, $$\sum_{|J|=j} P^J = 1 + W_1\Big(p_1, \cdots, p_q\Big) + ... + W_s\Big(p_1, \cdots, p_q\Big)$$

donc, $$\left[c_q\Big(\big(Id - \pi^*\Omega^N\big)\Big)\right]^{-1} = \sum_{|J|=j}\Big(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\Omega_N\Big)^J.$$

Ainsi

$$\left[c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big)\left[c_q\Big(Id - \pi^*\Omega^N\big)\Big)\right]^{-1}\right]_{n-q}$$

$$= \sum_{s\leqslant n-q} \frac{n!}{s!(n-s)!}\ \widehat{c_I}\Big(\big(\pi^*\Omega_0^E\big)^s, \Theta^{n-s}\Big)\ \sum_{|J|=j}\Big(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\pi^*\Omega^N\Big)^J$$

En posant $s = n - q - |J|$, on obtient

$$\left[c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big)\left[c_q\Big(Id - \pi^*\Omega^N\big)\Big)\right]^{-1}\right]_{n-q} =$$

$$\sum_{|J|\leqslant n-q}\Big(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\pi^*\Omega^N\Big)^J \frac{n!}{(n-q-|J|)!(|J|+q)!}\widehat{c_I}\Big(\big(\pi^*\Omega_0^E\big)^{n-q-|J|}, \Theta^{|J|+q}\Big)$$

Finalement, on a la formule voulue.

2) Calcul de $(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\int_{R_{12\cdots qH}} c_I\big(\nabla^0, \nabla^1, \cdots, \nabla^q, \nabla^H\big)$:

Là aussi, on introduit la connexion $\widetilde{\nabla}$ définie sur $\widetilde{E}|_{U^1\cap\cdots\cap U^H} \longrightarrow U^1\cap\cdots\cap U^H \times \Delta^{q+1}$ par :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla} &= \Big(1 - t_0 - \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\Big)\ \nabla_0 + t_0\ \nabla_H + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\ \nabla_\lambda.\\ &= \nabla_0 + \Big(t_0\ \zeta + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\ \frac{\xi_\lambda}{B_\lambda}\Big)\ \otimes\Theta.\end{aligned}$$

Donc, la courbure $\widetilde{\Omega}$ peut s'écrire : $\widetilde{\Omega} = \rho\otimes\Theta + R$

où $\rho = dt_0\wedge\zeta + \sum_{\lambda=1}^q dt_\lambda\ \wedge\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}\ \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda}$ et $R = \Omega_0 + \Big(t_0 d\zeta + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\ \frac{d\xi_\lambda}{B_\lambda}\Big)\otimes\overline{M}$ + termes en ξ_λ ou en ζ. Donc,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}^n &= \big(\rho\otimes\Theta + R\big)^n.\\ &= \frac{n!}{(q+1)!(n-q-1)!}\rho^{q+1}\otimes\Theta^{q+1}\otimes\big(\Omega_0 + A\Theta\big)^{n-q-1}\\ &\quad + \text{termes de degrés inférieurs à } q+1 \text{ en } dt_0, \cdots dt_q.\end{aligned}$$

Avec $A = t_0 d\zeta + \sum_{\lambda=1}^{q} t_\lambda \quad \wedge \frac{d\xi_\lambda}{B_\lambda}$

$$\begin{aligned} c_I(\widetilde{\Omega}) &= (-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\frac{n!}{(n-q-1)!}dt_0\wedge\cdots dt_q\wedge\zeta\wedge\frac{\xi_1}{B_1}\wedge\cdots \\ &\qquad\qquad \frac{\xi_q}{B_q}\widehat{c_I}\Big(\Theta^{q+1},\big(\Omega_0+A\Theta\big)^{n-q-1}\Big) \\ &= (-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\frac{n!}{(q+1)!(n-q-1)!}(q+1)!dt_0\wedge\cdots dt_q\wedge\zeta\wedge\frac{\xi_1}{B_1}\wedge\cdots\frac{\xi_q}{B_q} \\ &\quad \otimes\sum_{k=0}^{n-q-1}\frac{(n-q-1)!}{k!(n-q-1-k)!}A^k\widehat{c_I}\Big(\Theta^{k+q+1},\Omega_0^{n-q-1-k}\Big). \end{aligned}$$

Or, $$A^k = \sum_{J;|J|=k}\frac{(|J|)!}{J!}t^J(d\zeta\wedge\frac{d\xi}{B})^J.$$

Donc,

$$\begin{aligned} c_I(\widetilde{\Omega}) &= (-1)^{[\frac{q+1}{2}]}dt_0\wedge dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\wedge\zeta\wedge\frac{\xi_1}{B_1}\wedge\frac{\xi_2}{B_2}\wedge\cdots\wedge\frac{\xi_q}{B_q}) \\ &\quad \wedge n!\sum_{J;|J|\leqslant n-q-1}t^J(d\zeta\wedge\frac{d\xi}{B})^J\times\frac{|J|!}{|J|!(n-q-1-|J|)!J!} \\ &\quad \times\ \widehat{c_I}(\overline{M}^{|J|+q+1},\Omega_0^{n-q-1-|J|}) \end{aligned}$$

Mais,
$$\int_{\Delta^{q+1}} t^J dt^J = \frac{J!}{(|J|+q+1)!}.$$

Donc,
$$(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\int_{\Delta^{q+1}} c_I(\widetilde{\Omega}) = \zeta\wedge\frac{\xi_1}{B_1}\wedge\frac{\xi_2}{B_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\xi_q}{B_q}$$
$$\sum_{J/|J|\leqslant n-q-1} C_n^{|J|+q+1}\widehat{c_I}(\Theta^{|J|+q+1},\Omega_0^{n-q-1-|J|})(d\zeta\wedge\frac{d\xi}{B})^J.$$

On vérifie, en se reférant au calcul analogue fait dans la sous-section précédente,

$$(-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\int_{\Delta^{q+1}} c_I(\widetilde{\Omega}) = \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{q}\widetilde{B}_\lambda}\frac{\zeta}{1-d\zeta}\wedge\frac{\xi_1}{y_1}\wedge\cdots$$
$$\wedge\frac{\xi_q}{y_q}\left[c_I\Big(\Omega_0+\Theta\Big)\left[c_q\Big(Id_q-\frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\Omega_N\Big)\right]^{-1}\right]_{n-q-1}. \qquad \square$$

Il peut arriver, dans certains cas, qu'on n'ait pas besoin de l'un des ouverts précédents pour recouvrir $U \setminus W$. Le cacul des résidus se fait alors de manière plus simple.

2.3.2. Recouvrement ne nécessitant pas U^H (Recouvrement par les seuls $(U^\lambda)_\lambda$.)

Théorème B. — *Avec les hypothèses du théorème A, et lorsqu'en plus $U \setminus W \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, alors :*

$$\text{Rés}\Big(c_I, \theta_v, W\Big) = (-1)^{[\frac{q}{2}]}\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n \int_{R'_{12\ldots q}} \frac{\xi_1}{y_1} \wedge \ldots$$

$$\wedge \frac{\xi_q}{y_q} \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \widetilde{B_\lambda}} \left[c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big)\Big[c_q\Big(Id - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\pi^* \Omega^N\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q},$$

où $(R'_\lambda)_\lambda$ est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement $(U_\lambda \cap \partial\mathcal{T})_{\lambda \in \Lambda}$ de $\partial\mathcal{T}$ et $R'_{12\ldots q} = \cap_{\lambda=1}^q (R'_\lambda)$.

Remarque 2.7. — Si $R_{12\cdots q}$ fibre au dessus de W, on peut remplacer $\frac{\xi_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\xi_q}{y_q}$ par $\frac{dy_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dy_q}{y_q}$ dans l'intégrale le long de la fibre, laquelle peut donc se calculer comme un résidu de Grothendieck. Il faut en effet remarquer que l'expression à intégrer, qui n'est pas nécéssairement holomorphe par rapport aux variables x, est holomorphe en y pour x fixé.

Cette remarque vaut aussi pour le théorème B, en ce qui concerne l'intégrale $\int_{R_{12\ldots q}}$.

Démonstration du théorème B. — Considérons le recouvrement $\mathcal{U}' = (U_\lambda)$ de $U \setminus W$. La démonstration du lemme 2.2 montre que les cocycles α et β de $CDR^*\big(\mathcal{U}\big)$ définis par

- $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$ *où :*

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\sigma| < q-1 \\ (-1)^{[\frac{q}{2}]} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \cdots \nabla^q) & \text{si} \quad \sigma = (i_0 \cdots i_{q-1}) \end{cases}$$

- $\beta = (\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$ *où :*

$$\beta_\sigma = \begin{cases} c_I(\nabla^0, \nabla) & si \ |\sigma| = 0 \\ 0 & si \ |\sigma| > 0. \end{cases}$$

sont alors cohomologues dans $CDR(\mathcal{U}')$. Il en résulte que

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = (-1)^{[\frac{q}{2}]} \int_{R'_{1\ 2\ \cdots\ q}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \cdots \nabla^q)$$

où $(R'_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant q}$ est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement $\mathcal{U}'(\partial\mathcal{T})$ induit par le recouvrement $\mathcal{U}'$ de $U \setminus W$ et $R'_{1\ 2\ \cdots\ q} = R'_1 \cap R'_2 \cap \cdots \cap R'_q$.

Un calcul analogue à celui fait dans 3.3.1 nous conduit au résultat. □

On va voir maintenant que le théorème B est une généralisation du théorème de calcul des résidus le long d'une sous-variété non dégénérée ainsi que du théorème de calcul des résidus relativement à un point singulier isolé.

Corollaire 1 (Bott [3]). — *Si W est une composante connexe non dégénérée de l'ensemble singulier, alors*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \left[\frac{c_I\big(E|_W + \theta_v\big)}{c_q\big(N_W + \theta_v^N\big)}\right]_{n-q} \frown [W].$$

Pour démontrer ce corollaire, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.8. — *Si W est non dégénérée, les ouverts U^λ suffisent à recouvrir $U \setminus W$, sans qu'il soit besoin de U_H.*

Démonstration du lemme. — Soit M_W la matrice de θ_v^N relativement au projeté de la trivialisation $\mathcal{B}_2$ de TU sur N_W. On a alors

$$M_W = -\begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial y_1} & \frac{\partial B_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial y_q} \\ \frac{\partial B_2}{\partial y_1} & \frac{\partial B_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial y_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_q}{\partial y_1} & \frac{\partial B_q}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial B_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$$

D'autre part, dans la même trivialisation $\mathcal{B}_2$,

$$M_W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_q \end{pmatrix}$$

On en déduit, pour tout λ,

$$B_\lambda(x,y) = -\alpha_\lambda\ y_\lambda\ \Big(1+\epsilon(x,y)\Big)^{-1} \quad \text{avec} \quad \epsilon(x,0)=0.$$

Donnons nous maintenant un point m dans $U\backslash W$ suffisamment voisin de W.

Il existe alors $\lambda \in \Lambda$ tel que $y_\lambda \neq 0$ et par suite $B_\lambda(x,y) \neq 0$ puisque l'hypothèse de non-dégénérescence implique $\alpha_\lambda \neq 0$. On en déduit $m \in U^\lambda$. □

Démonstration du corollaire 1. — Puisque

$$\xi_\lambda = dy_\lambda\ +\ y_\lambda\ \pi^* a_\lambda,$$

$$\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} = \frac{dy_\lambda}{y_\lambda}\ +\ \pi^* a_\lambda.$$

Comme on suppose que la restriction à $R'_{12\ldots q}$ de la fibration sur W est encore une fibration, le résidu Rés$\Big(c_I, \theta_v, , W\Big)$ est égal à

$$(-1)^{[\frac{q}{2}]}\ \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n \int_W\ (-1)^{[\frac{q}{2}]}\Bigg(\fint \frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_q}{y_q}\frac{1}{\prod\widetilde{B_\lambda}}$$

$$\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(\big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^{*}\Omega^N\big)\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q} + R\Bigg),$$

soit

$$\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n\int_W\Bigg(\fint\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_q}{y_q}\times\frac{1}{\prod\widetilde{B_\lambda}}\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(\big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N\big)\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q}\Bigg),$$

puisque dx_i figure dans R à une puissance $> n-q$. Mais, puisque v est non dégénéré le long de W, les termes $(\widetilde{B}_\lambda)^{-1}$ sont holomorphes en y (y compris en $y=0$ où ils prennent la valeur $-\alpha_\lambda$), et par conséquent, la forme différentielle $\frac{1}{\prod\widetilde{B_\lambda}}\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(\big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N\big)\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q}$ peut s'écrire sous la forme $f(x,y)dx\wedge d\overline{x}$ où f est holomorphe en y, y compris en $y=0$. Ainsi, pour x fixé,

$$\fint \frac{1}{\prod\widetilde{B_\lambda}}\left[c_I\Big(\Omega_0^E+\Theta\Big)\Big[c_q\Big(\big(Id-\frac{1}{\widetilde{B}}\pi^*\Omega^N\big)\Big)\Big]^{-1}\right]_{n-q}\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_q}{y_q}$$

$$= (2i\pi)^q\times(-1)^q\left[c_I(\Omega_0^{E_{|W}}+\theta_v)\big[c_q(\Omega_N+\theta_v^N)\big]^{-1}\right]_{n-q}.$$

D'autre part, $c_I\Big(E_{|W} + \theta_v\Big)$ est égal à la classe de cohomologie de $\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^n \; c_I\Big(\Omega_0^{E|_W} + \theta_v\Big)$, tandis que $c_q\Big(N_W + \theta_v^N\Big)$ est égal à celle de $\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^q \; c_q\Big(\Omega_N + \theta_v^N\Big)$, d'où la formule cherchée. □

COROLLAIRE 2 (Baum-Bott [1]). — *Si W est une singularité isolée m_0, éventuellement dégénérée, du champ de vecteurs holomorphe $v = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial y_i}$,* les coordonnées locales holomorphes $(y_1, \cdots, y_n)$ étant nulles en m_0,

$$\text{Rés}\big(c_I, \theta_v, m_0\big) = \left[\begin{array}{c} c_I(\theta_v) \; dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ B_1 \cdots B_n \end{array} \right]_0 .$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que les courbures Ω_0^E et Ω^N sont nulles. Donc,

$$c_I\Big(\Omega_0^E + \Theta\Big) = c_I(\theta_v) \text{ et } c_q\Big(Id - \frac{1}{\widetilde{B}} \overset{*}{\pi}\, \Omega^N\Big)\Big] = 1$$

Comme ξ_λ peut être remplacé par dy_λ dans l'intégration le long de la fibre et $y_\lambda \widetilde{B_\lambda} = B_\lambda$, on obtient la formule voulue.

2.4. Recouvrement ne nécessitant pas l'un des ouverts U^λ

Dans le cas où l'on peut se passer de l'un des U^λ pour recouvrir $U \setminus W$ sans, on obtient :

THÉORÈME C. — *S'il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $U \setminus W = U_H \cup \bigcup_{\lambda \neq \lambda_0} U_\lambda$, le résidu est alors nul :*

$$\text{Rés}\Big(c_I, \theta_v, W\Big) = 0.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la remarque 2.6.

2.5. Cas d'une variété produit

Soient :

– une variété holomorphe V_0 de dimension complexe q,

– une variété holomorphe W de dimension complexe $n - q$,

– un champ de veteurs v_0 holomorphe sur V_0 d'ensemble singulier $S_0 = \coprod_\alpha S_\alpha$,

– la variété produit $V = W \times V_0$ (projections de V sur W et V_0 notées respectivement p_1 et p_2), de telle sorte que

$$TV = (p_1)^{-1}(TW) \bigoplus (p_2)^{-1}(TV_0).$$

Notons ρ l'homomorphisme $\rho : \mathbb{R}[c_1, \cdots, c_n] \longrightarrow \mathbb{R}[c'_1, \cdots, c'_{n-q}] \otimes \mathbb{R}[c''_1, \cdots, c''_q]$ induit par l'inclusion $GL_{n-q} \times GL_q \hookrightarrow GL_n$:

$$\rho(1 + c_1 + \cdots + c_n) = (1 + c'_1 + \cdots + c'_{n-q})(1 + c''_1 + \cdots + c''_q).$$

Pour tout monôme c_I tel que $|I| = n$, posons : $\rho(c_I) = \sum_{|J|=n-q, \|K|=q} n^I_{J,K}\ c'_J c''_K$ où

- c'_J est élément de $I^*\Big(\mathcal{G}l\big(n-q,\ \mathbb{C}\big)\Big)$
- c''_K est élément de $I^*\Big(\mathcal{G}l\big(q,\ \mathbb{C}\big)\Big)$
- $n^I_{J,K}$ est un coefficient entier qui ne dépend que des multi-indices I, J et K.

Soit v le champ de vecteurs $v = (0, v_0)$ sur V dont 'ensemble singulier

$$S = \coprod_\alpha W_\alpha \quad \text{où} \quad W_\alpha = W \times S_\alpha.$$

Théorème D. — *Le résidu de $c_I(V)$, relativement à θ_v et W_α est donné par la formule suivante :*

$$Rés\big(c_I, \theta_v, W_\alpha\big) = \sum_{|J|=n-q,\ |K|=q} n^I_{J,K} \left(c_J(W) \frown [W]\right) \times\ Rés\big(c_K, \theta_{v_0}, S_\alpha\big)$$

Démonstration. — Rappelons (voir proposition 1.4.1) la formule $\text{Rés}\big(c_I, \theta_v, W_\alpha\big) = \int_{\partial\mathcal{T}} c_I(\nabla_0, \nabla)$ dans laquelle

- $\nabla_0 = \pi^*(\overline{\nabla}^0)$ ($\overline{\nabla}^0$ désignant t une connexion sur $TV_{|_{W_\alpha}}$),
- $\pi : U = N_{W_\alpha} \longrightarrow W_\alpha$,
- ∇ est une connexion θ_v-spéciale sur $TV_{|_{V \setminus W_\alpha}}$.

soit $\overline{\nabla}^0 = \overline{\nabla}^0_{W_\alpha} + \overline{\nabla}^0_N$ où $\overline{\nabla}^0_{W_\alpha}$ est une connexion sur TW_α et $\overline{\nabla}^0_N$ une connexion sur N_{W_α}. Comme $N_{W_\alpha} = p_2^{-1}\big(N_{S_\alpha}(V_0)\big)$ (p_2 étant la projection de V sur V_0), $\pi^{-1}(\overline{\nabla}^0_N) = 0$. Donc, $\nabla^0 = \pi^*(\overline{\nabla}^0_{W_\alpha})$.

Dans la trivialisation $\{\partial_i^*, \partial_\lambda\}$, on a :

$$\omega_0^V = \begin{pmatrix} \omega_0^W & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

où ω_0^W est la forme de connexion associée à la connexion ∇_0^W sur $p_1^{-1}(TW)$. Soit $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$, M la matrice de θ_v relatvement à la la trivialisation $\{\partial_i^*, \partial_\lambda\}$ et $\overline{M}$ la matrice de Θ relativement cette même trivialisation. Comme $\omega_0(v) = 0$, on a :

$$\overline{M} = M = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -J_0 \end{pmatrix}.$$

où

$$J_0 = \left(\!\!\left(\frac{D(B_1, \cdots B_q)}{D(y_1, \cdots y_q)} \right)\!\!\right).$$

Enfin, on se donne une connexion $\overline{\nabla^{V_0}}$ sur TV_0, θ_{v_0}-spéciale et η_0 une 1-forme de type $(1,0)$ telle que : $\eta_0(v_0) = 1$. Soit η la 1-forme sur TV définie par :

$$\eta \equiv \begin{cases} p_2^* \eta_0 & \text{sur} \quad p_2^{-1}(TV_0) \\ 0 & \text{sur} \quad p_1^{-1}(TW) \end{cases}$$

On définit une connexion ∇^V sur $TV_{|V \setminus W_\alpha}$ définie par : $\nabla^V = \nabla^0 + \eta\,\Theta$. Il est clair que ∇^V est θ_v-spéciale. En effet, $\nabla_v = \nabla_v^0 + \eta(v)\ \Theta = \theta_v$. Sa courbure est : $\widetilde{\Omega} = \Omega_0^V + d(t\ \eta)\ \theta_v$ où

$$\Omega_0^V = \begin{pmatrix} \Omega_0^W & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -d(t\ p_2^* \eta_0) J_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$c_I(\widetilde{\Omega}) = \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I\ c'_J(\Omega_0^W)\ .\ c''_K\big(d(t\ \eta_0)\ (-J_0)\big).$$

Par conséquent :

$$c_I(\nabla_0^V, \nabla^V) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q,|K|=q} n_{J,K}^I \; c'_J(\Omega_0^W) \; . \; \int_0^1 c''_K\big(d(t\ \eta_0)\ (-J_0)\big).$$

Donc

$$\text{Rés}\big(c_I, \theta_v, W_\alpha\big) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q,|K|=q} n_{J,K}^I \int_{\partial\mathcal{T}} \Big[c_J(\Omega_0^W). \int_0^1 c''_K\big(d(t\eta_0)(-J_0)\big)\Big].$$

Mais, $\partial\mathcal{T}$ peut se décomposer sous la forme suivante : $\partial\mathcal{T} = W \ \times \ \partial\mathcal{T}_0$ où $\mathcal{T}_0$ est un voisinage tubulaire de S_α. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\text{Rés}\big(c_I, \theta_v, W_\alpha\big) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q,|K|=q} n_{J,K}^I \int_W c'_J(\Omega_0^W) \\
&\qquad \int_{\partial\mathcal{T}_0} \left(\int_0^1 c''_K\big(d(t\eta_0)(-J_0)\big)\right) \\
&= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q,|K|=q} n_{J,K}^I.(-2i\pi)^{n-q}\Big(c'_J(W) \frown [W]\Big) \\
&\qquad \times(-2i\pi)^q \text{Rés}\big(c''_K, \theta_{v_0}, S_\alpha\big).
\end{aligned}$$

3. Exemples

Dans toute cette section, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ sera noté ∂_x et on fera de même avec les autres variables.

3.1. Exemple d'application du théorème A

On notera $[X, Y, Z, T]$ les coordonnées homogèmes dans $\mathbb{P}_3$ et (x, y, z) les coordonnées sur l'ouvert affine $U_T : T \neq 0$.

Le lieu singulier de v est $S = W \cup \{m_Y\}$ où $W : Y = Z = 0$ et $m_Y[0, 1, 0, 0]$.

Soit v le champ de vecteur sur $\mathbb{P}_3$ dont la restriction à $\mathbb{C}^3$ est définie par :

$$v = z\ \partial_x \ + \ h\ y\ \partial_y \quad (h \neq 0).$$

Prenons pour E le fibré $T\mathbb{P}_3$ et pour θ_v le crochet $[v,\ .\ ]$ par v.

Dans la trivialisation $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, v peut sécrire sous la forme suivante :

$$v = A\partial_x + \overline{B}\partial_y + \overline{C}\partial_z \quad \text{où} \quad A = z, \overline{B} = h\ y \text{ et } \overline{C} = 0.$$

Dans la trivialisation $(\partial_x^*, \partial_y, \partial_z), v$ s'écrit :

$$v = A\partial_x^* + B\partial_y + C\partial_z \ \text{ où } \ B = y(h - z\varphi) \text{ et } C = -z^2\varphi \ \text{ avec } \ \varphi(x) = \frac{\overline{x}}{1 + x\overline{x}}.$$

On pose : $B = y\,\widetilde{B}$ et $C = z\,\widetilde{C}$ c'est-à-dire $\widetilde{B} = (h - z\varphi(x)$ et $\widetilde{C} = -z\,\varphi(x)$.

De manière analogue, relativement aux coordonnées affines $t' = \frac{T}{X}$, $y' = \frac{Y}{X}$, $z' = \frac{Z}{X}$ $v = A'\partial_t' + \overline{B'}\partial_y' + \overline{C'}\partial_z'$ où $A' = -t'z'$, $\overline{B'} = y'(h - z')$ et $\overline{C'} = -z'^2$.

On en déduit : $v = A'\partial_t'^* + B\partial_y' + C\partial_z'$ où $B' = y'(h - z'\Delta')$ et $C' = -z^2\Delta'$ avec $\Delta' = 1 - t'\varphi(t')$.

On pose : $B' = y'\ \widetilde{B'}$ et $C' = z'\ \widetilde{C'}$ c'est-à-dire $\widetilde{B'} = (h - z'\Delta')$ et $\widetilde{C'} = -z'\ \Delta'$.

Calcul des résidus en m_Y : L'expression de v au voisinage de m_Y, relativement aux coordonnées affines $t" = \frac{T}{Y}$, $x" = \frac{X}{Y}$, $z" = \frac{Z}{Y}$ est : $v = (z'' - hx'')\ \partial_x'' - hz''\ \partial_z'' - ht''\ \partial_t''$.

θ_v admet h pour valeur propre multiple ; m_Y est alors une singularité non dégénérée de v.

La formule de Bott donne alors : $\text{Rés}(c_1)^3 = 27$, $\text{Rés}(c_1c_2) = 9$ et $\text{Rés}(c_3) = 1$.

Recouvrement de $U' = U \setminus W$ où $U = \mathbb{P}_3 \setminus (m_Y m_Z)$

On définit les ouverts U^H, U^1 U^2 respectivement par $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Ces définitions se traduisent en coordonnées affines de la manière suivante : $U^H : z \neq 0$, $U^1 : (y \neq 0;\ h - z\varphi(x) \neq 0)$, $U^2 : (z \neq 0;\ \varphi(x) \neq 0)$. On a : $U \setminus W = U^H \cup U^1 \cup U^2$.

Pour recouvrir, $U \backslash W$, on ne peut se passer d'aucun des ouverts précédents. En effet :

- les points de $U' \cap (m_X m_Y)$ n'appartiennent qu'à U^1.
- les points de $U' \cap (m_T m_Z)$ n'appartiennent qu'à U^H.
- les points de $U' \cap (m_X m_Z)$ n'appartiennent qu'à U^2.

Le résidu est alors :

Rés$(c_I, \theta_v, W) = -\int_{R_{12}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) - \int_{R_{12H}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H)$ où

- $\partial\mathcal{T} = \Big\{|X| = |Z|;\quad |T| \leqslant |Z|\Big\} \cup \Big\{|X| \leqslant |Z|;\quad |T| = |Z|\Big\}$.
- $\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H$ sont des connexions définies respectivement sur TU, $TU_{|_{U^1}}$, $TU_{|_{U^2}}$ $TU_{|_{U^H}}$.
- $R_{12} = R_1 \cap R_2$; $R_{12H} = R_1 \cap R_2 \cap R_H$ où R_1, R_2 ; R_H sont des régions de $\partial\mathcal{T}$ définies par $(\varepsilon > 0)$:
  - $R_1 = \Big\{[X,\ Y,\ Z,\ T] \in \partial\mathcal{T};\ |Y| \geqslant |Z|\Big\}$.
  - $R_2 = \Big\{[X,\ Y,\ Z,\ T] \in \partial\mathcal{T};\ |Y| \leqslant |Z|\ ;\ |X| \geqslant \varepsilon\ |T|\Big\}$.
  - $R_H = \Big\{[X,\ Y,\ Z,\ T] \in \partial\mathcal{T};\ |Y| \leqslant |Z|\ ;\ |X| \leqslant \varepsilon\ |T|\Big\}$.

$\Big\{R_1, R_2, R_H\Big\}$ est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement $\mathcal{U}\big(\partial\mathcal{T}\big)$ induit par le recouvrement $\mathcal{U} = \Big\{U^H, U^1, U^2\Big\}$ de U'.

3.1.1. Définition des connexions

Rappelons d'abord la formule suivante : $(T\mathbb{P}_3)_{|_W} = TW \oplus N_W$.
Or, $TW = \breve{L}^{\otimes 2}$ et $N_W = \breve{L} \oplus \breve{L}$ où $\breve{L}$ est le dual du fibré tautologique sur $\mathbb{P}_1$. On définit une connexion sur $\breve{L}$ dont la fome de connexion associée, relativement à la trivialisatio (∂_x), est : $a_0 = -\varphi\ dx$ où $\varphi(x) = \frac{\overline{x}}{1+x\overline{x}}$. On définit ainsi une connexion $\overline{\nabla}^0$ sur $T\mathbb{P}_{3|W}$ puis une connexion ∇^0 dont la forme de connexion, relativement à la trivialisation $(\partial_x^*, \partial_y, \partial_z)$, est :

$$\omega_0 = -\varphi\ dx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∇^1, ∇^2 et ∇^H sont définies comme dans (2.2.2). Les formes de connexion associées sont :

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\xi_1}{B} \otimes \overline{M}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\xi_2}{C} \otimes \overline{M} \quad \text{et} \quad \omega_H = \omega_0 + \frac{dx}{A} \otimes \overline{M}, \quad \text{où}$$

- $\xi_1 = dy - y\ \varphi dx, \quad \xi_2 = dz - z\ \varphi dx.$

- M et $\overline{M}$ sont respectivement les matrices représentant θ_v et $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$ relativement à la trivialisation $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

On a :

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que la matrice de θ_v^N est :

$$-\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, W est une sous-variété dégénérée.

Dans cette même trivialisation,

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} -2\varphi\ dx & 0 & 0 \\ -\varphi\ dy - y\big(\varphi^2 dx + d\varphi\big) & -\varphi\ dx & 0 \\ -\varphi\ dz - z\big(\varphi^2\ dx + d\varphi\big) & 0 & -\varphi\ dx \end{pmatrix}$$

On obtient : $Tr(\overline{M}) = 4z\ \varphi - h$.
On vérifie aussi : $Tr(\Omega_0) = 4dx \wedge d''\varphi$ où Ω_0 est la courbure de ∇^0 et $d''\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{x}}\ d\overline{x}$.

3.1.2. Calcul de $\int_{R_{12}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2)$

On vérifie :

$$\begin{aligned} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) &= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^3 \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \Big[-3\widehat{c_I}(\overline{M}, \overline{M}, \Omega_0) - \Big(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}} + \frac{1}{\widetilde{\widetilde{C}}}\Big) c_I(\overline{M})\Big] \\ &= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^3 \Big(K_1 + K_2 + K_3\Big) \text{ où :} \end{aligned}$$

$K_1 = -3\ \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C}\ \widehat{c_I}(\overline{M},\ \overline{M},\ \Omega_0)$, $\qquad K_2 = \frac{-1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\ \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi\ c_I(\overline{M})$
et
$K_3 = \frac{-1}{\widetilde{\widetilde{C}}}\ \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi\ c_I(\overline{M})$.

$$\begin{aligned} K_1 &= -3\ \frac{dy}{y(h-z\varphi}\wedge\frac{dz}{\big(-z^2\varphi\big)}\ \big(Tr(\overline{M})\big)^2\ Tr(\Omega_0) \\ &= 12\ dx\ \wedge\ d''\varphi\ \frac{dy}{y}\wedge\ \frac{dz}{z^2}\ \times\frac{1}{h-z\varphi}\ \times\frac{1}{\varphi}\ \times(4z\varphi-h)^2. \end{aligned}$$

Comme R_{12} fibre sur W, en notant $⨍$ le long de la fibre, on obtient :

$$\begin{aligned} ⨍ K_1 &= 12\ dx\wedge\ d''\varphi ⨍ \frac{dy}{y}\ \wedge\frac{dz}{z^2}\ \times\frac{1}{h-z\varphi(x)}\ \times\frac{1}{\varphi}\ \times(4z\varphi-h)^2. \\ &= -84\times\ (2i\pi)^2\ dx\ \wedge\ d''\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{-1}{\widetilde{B}}\ \frac{\xi_1}{B}\wedge\frac{\xi_2}{C}\ \wedge dx\wedge d''\varphi(x)\ c_I(\overline{M}) \\ &= -\frac{1}{h-z\varphi}\times dx\wedge d''\varphi\ \frac{dy}{y(h-z\varphi)}\wedge\frac{dz}{(-z^2\varphi)}\ \big(Tr(\overline{M})\big)^3 \end{aligned}$$

Là aussi, en intégrant le long de la fibre, on obtient : $⨍ K_2 = 10\times(2i\pi)^2 dx\wedge d''\varphi$.

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{-1}{\widetilde{C}}\ \frac{\xi_1}{B}\wedge\frac{\xi_2}{C}\ \wedge dx\wedge d''\varphi\ c_I(\overline{M}) \\ &= -\frac{1}{\big(-z\varphi\big)}\times dx\wedge d''\varphi\ \frac{dy}{y(h-z\varphi)}\wedge\frac{dz}{(-z^2\varphi)}\ \big(Tr(\overline{M})\big)^3 \end{aligned}$$

L'intégrale le long de la fibre donne : $⨍ K_3 = 37\times(2i\pi)^2 dx\wedge d''\varphi$.
Donc, $⨍ (c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2) = \frac{-1}{2i\pi}\times 37\times dx\wedge d''\varphi$.
Comme $\int_W dx\wedge d''\varphi = 2i\pi$ puisque $c_1(\check{L})\frown[\mathbb{P}_1] = 1$, on obtient :

$$\int_{R_{12}} (c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2) = -37(1-\rho_\varepsilon) \quad \text{où} \quad \rho_\varepsilon = \frac{1}{2i\pi}\ \int_{|x|\leqslant\varepsilon} dx\wedge d''\varphi.$$

Notons que ρ_ε tend vers 0 quand ε tend vers 0.

3.1.3. Calcul de $\int_{R_{12H}} c_I(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H)$

On vérifie : $c_I(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \frac{dx}{A}\wedge\frac{\xi_1}{B}\wedge\frac{\xi_2}{C}\ c_I(\overline{M})$.

Donc

$$
\begin{aligned}
(c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H) &= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^3 \frac{dx}{A}\wedge\frac{\xi_1}{B}\wedge\frac{\xi_2}{C}\,\big(Tr(\overline{M})\big)^3.\\
&= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^3 \frac{dx}{z}\wedge\frac{dy}{y\big(h-z\varphi\big)}\wedge\frac{dz}{\big(-z^2\varphi\big)}\,\big(4z\varphi-h\big)^3.
\end{aligned}
$$

En intégrant le long de la fibre en x, on obtient : $\displaystyle{-\!\!\!\!\!\!\int} (c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H) = \frac{-1}{2i\pi}\times 37\times\varphi\ dx$.

Pour achever le calcul de $\int_{R_{12H}}(c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H)$, il reste à intégrer la 1-forme $\frac{-1}{2i\pi}\times 37\times\varphi\ dx$.

Rappelons que R_{12H} est définie par : $|Y|=|Z|; |X|=\varepsilon|T|$. En particulier, $|x|=\varepsilon$ dans R_{12H}.

Posons : $x=\varepsilon\ e^{i\gamma},\quad \gamma\in\ \mathbb{R}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi\ \mathbb{Z})$.

$$
\begin{aligned}
\int_{R_{12H}}(c_1)^3(\nabla^0,\nabla^1,\nabla^2,\nabla^H) &= \frac{-1}{2i\pi}\times 37\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon e^{-i\gamma}}{1+\varepsilon^2}\times i\varepsilon e^{i\gamma}d\gamma\\
&= \frac{-1}{2i\pi}\times 37\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}d\gamma\\
&= \frac{-37\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rés}\big((c_1)^3,\theta_v,W\big) &= -\Big[-37(1-\rho_\varepsilon)\Big]-\Big[\frac{-37\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\Big)\\
&= 37\times\Big(\frac{1+2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}-\rho_\varepsilon\Big).
\end{aligned}
$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$
\boxed{\mathrm{Rés}\big((c_1)^3,\theta_v,W\big)=37.}
$$

On peut remarquer que la somme des résidus de $(c_1)^3$ est bien égale au nombre de Chern $(c_1)^3\frown[\mathbb{P}^3]$.

3.2. Exemple d'application des théorèmes B et D

On notera $\big[Y, Z, T\big]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_2$ et (y, z) les coordonnées affines $y = \frac{Y}{T}$ et $z = \frac{Z}{T}$ sur l'ouvert U_T^0 défini pat $T \neq 0$.

Le lieu singulier de v_0 est : $S_0 = \{m_T,\ m_Z\}$ où $m_T = [0, 0, 1]$. et $m_Z = [0, 1, 0]$.

Soit v_0 le champ de vecteurs sur $\mathbb{P}_2$ dont la restriction à $\mathbb{C}^2$ est :

$$v_0(y, z) = y^2 \partial_y + z(y + b)\partial_z, \quad (b \neq 0).$$

Considérons maintenant le champ de vecteurs $v = (0, v_0)$ sur V. Notant $[X, R]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_1$, le lieu singulier de v est :

$$S = W_T \cup W_Z \quad \text{où} \quad W_T = \mathbb{P}_1 \times \{m_T\} \quad \text{et} \quad W_Z = \mathbb{P}_1 \times \{m_Z\}.$$

Expressions de v

En posant $x = \frac{X}{R}$, l'expression de v dans $\mathbb{P}_1 \times U_T$ est : $v(x, y, z) = 0\ \partial_x + B(x, y, z)\ \partial_y + C(x, y, z)\ \partial_z$ où $B(x, y, z) = y^2$ et $C(x, y, z) = z(y + z)$.

Dans $\mathbb{P}_1 \times U_Z$, l'expression de v est : $v(x, y'', t'') = 0\ \partial_x + B''(x, y'', t'')\partial''_y + C''(x, y'', t'')\partial''_t$ où $B''(x, y'', t'') = -by''$ et $C''(x, y'', t'') = -(y'' + bt'')$.

Expressions des restrictions des monômes de Chern

La restriction $\rho : I^*\Big(\mathcal{G}l(3, \mathbb{C})\Big) \longrightarrow I^*\Big(\mathcal{G}l(1, \mathbb{C})\Big) \otimes I^*\Big(\mathcal{G}l(2, \mathbb{C})\Big)$ donne :

$$\rho(c_1) = c'_1 + c''_1, \quad \rho(c_2) = c'_1\ c''_1 + c''_2, \quad \rho(c_3) = c'_1\ c''_2.$$

On en déduit : $\rho\Big((c_1)^3\Big) = 3\, c'_1\, c''^2_1,\ \rho\Big(c_1\ c_2\Big) = c'_1\ (c''_2 + c''^2_1),\ \rho\Big(c_3\Big) = c'_1\ c''_2$.

Calcul des résidus en W_T

D'après le théorème D,

$$\begin{aligned}
\text{Rés}\Big((c_1)^3, \theta_v, W_T\Big) &= 3\ c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times\ \text{Rés}\Big((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\Big).\\
\text{Rés}\Big((c_1\ c_2), \theta_v, W_T\Big) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times \Bigg(\text{Rés}\Big((c''_2), \theta_{v_0}, m_T\Big)\\
&\qquad + \text{Rés}\Big((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\Big)\Bigg).\\
\text{Rés}\Big((c_3), \theta_v, W_T\Big) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times\ \text{Rés}\Big((c''_2), \theta_{v_0}, m_T\Big).
\end{aligned}$$

Notons tout de suite : $c_1'(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] = 2$.

Pour calculer les résidus en m_T, on calcule d'abord la matrice Jacobienne $J_0 = \frac{D(B,C)}{D(y,z)}$.

$$J_0 = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ z & y+b \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que m_T est une singularité dégénérée de v. Ainsi :

$$\text{Rés}\Big(c_K, \theta_{v_0}, m_T\Big) = \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)}\ c_K(-J_0).$$

Or, $(c_1)^2(-J_0) = (3y+b)^2, \quad (c_2)(-J_0) = 2y\ (y+b)$. Donc,

$$\begin{aligned} \text{Rés}\Big((c_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\Big) &= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)}\ (3y+b)^2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Rés}\Big((c_2), \theta_{v_0}, m_T\Big) &= \Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)}\ 2y\ (y+b) \\ &= 2. \end{aligned}$$

On en déduit :

- $\text{Rés}\Big((c_1)^3, \theta_v, W_T\Big) = 3\ \times 2\ \times 5 = 30.$
- $\text{Rés}\Big((c_1\ c_2), \theta_v, W_T\Big) = 2\ \times (2+5) = 14.$
- $\text{Rés}\Big((c_3), \theta_v, W_T\Big) = 2\ \times 2 = 4.$

Remarque 1. — W_T est une sous-variété dégénérée de V.

Remarque 2. — Posons :

- $U_0 = \mathbb{P}_2 \setminus \{m_Z\}$ et $U = \mathbb{P}_1\ \times U_0$.
- $U = \mathbb{P}_1\ \times U_0$.
- $U^B = \Big\{m(x,y,z) \in U \setminus W_T\ ; B(y,z) \neq 0\Big\}$.
- $U^C = \Big\{m(x,y,z) \in U \setminus W_T\ ; C(y,z) \neq 0\Big\}$.

On a : $U \setminus W_T = U^B \cup U^C$.

Cela signifie qu'on a un recouvrement de $U \setminus W_T$ sans U^H. Le théorème C est donc applicable.

Calcul des résidus en W_Z

Le théorème D permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\text{Rés}\Big((c_1)^3, \theta_v, W_Z\Big) &= 3\ c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times\ \text{Rés}\Big((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_Z\Big).\\
\text{Rés}\Big((c_1\ c_2), \theta_v, W_Z\Big) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times \Bigg(\text{Rés}\Big((c''_2), \theta_{v_0}, m_Z\Big)\\
&\qquad\qquad + \text{Rés}\Big((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_Z\Big)\Bigg).\\
\text{Rés}\Big((c_3), \theta_v, W_Z\Big) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1]\ \times\ \text{Rés}\Big((c''_2), \theta_{v_0}, m_Z\Big).
\end{aligned}$$

La matrice jacobienne est

$$J''_0 = \frac{D\big(B'', C''\big)}{D(y'', t'')} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que m_Z est une singularité non dégénérée de v_0.

Ainsi, $\text{Rés}\Big((c_1)^2, \theta_{v_0}, m_Z\Big) = 4$ et $\text{Rés}\Big((c_2), \theta_{v_0}, m_Z\Big) = 1$. Donc $\text{Rés}\Big((c_1)^3, \theta_v, W_Z\Big) = 24, \text{Rés}\Big((c_1\ c_2), \theta_v, W_Z\Big) = 10, \text{Rés}\Big((c_3), \theta_v, W_T\Big) = 2.$

Là aussi, on remarque que, pour chaque c_I, la somme des résidus est égale au nombre de Chern.

3.3. Exemple d'application du Théorème C

Soit λ un nombre complexe différent de 0 et de 1.

Dans $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence suivante : $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. L'espace quotient $\Big[\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}/\sim\Big]$ est appelé variété de Hopf de dimension 3 et est noté $\mathbb{H}_3$.

Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ défini par : $v = (y + z)\ \partial_x + y\ \partial_y$. Le lieu singulier de v est la droite $W : y = z = 0$ privée de l'origine. Notons $p : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}_3$ l'application de passage aux quotients, et $\widetilde{v}$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{H}_3$ donné par v en passant au quotient. Le lieu singulier de $\widetilde{v}$ est $\widetilde{W} = p(W)$. Les sections $(x\ \partial_y,\ x\ \partial_z)$ trivialisent le fibré normal N_W. De plus cette trivialisation passe aux quotients. En choisissant une connexion triviale sur N_W, on a : $\partial_x^* = \partial_x$. Le champ de vecteurs v s'écrit : $v = A\ \partial_x^* + B\ \partial_y + C\partial_z$ où $A = y + z$, $B = y$, $C = 0$.

Posons : $U = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, $U' = U \setminus W$. On définit les ouverts U^H, U^1 et U^2 respectivement par $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $C \neq 0$. Ces définitions se traduisent par : $U^H\ : y \neq 0$, $U^1\ : y + z \neq 0$. Il est clair que U' est recouvert par U^H et U^1. En posant : $\widetilde{U} = \mathbb{H}_3$, $\widetilde{U'} = \widetilde{U} \setminus \widetilde{W}\ \widetilde{U^H} = p(U^H)$, $\widetilde{U^H} = p(U^1)$, on voit que $\widetilde{U'}$ est recouvert par $\widetilde{U^H}$ et $\widetilde{U^H}$. D'après le théorème C, pour $|I| = 3$, $\mathrm{Rés}\big(c_I, \theta_{\widetilde{v}}, \widetilde{W}\big) = 0$.

On a encore la formule donnant la somme des résidus qui est vérifiée.

Remerciements. — Je remercie très vivement le Professeur Daniel Lehmann pour m'avoir proposé ce projet et aidé dans sa réalisation.

Je ne saurai oublier El Hadji Cheikh Mbacké DIOP pour tout le soutien qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

Bibliographie

[1] Baum (P.) and Bott (R.). — On the zeroes of meromorphic vector-fields, In Haefliger A. and Narasimhan Raghavan, editors, Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham. Springer-Verlag, (1970).

[2] Baum (P.) and Bott (R.). — Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geometry, 7 (1972).

[3] Bott (R.). — A residue formula for holomorphic vector fields, J. Differential Geometry, 1(3-4) p. 311-330 (1967).

[4] Bott (R.). — Vector fields and characteristics numbers, Michigan math J, 14(2), p. 231-244 (1967).

[5] Bott (R.). — Lectures on characteristics classes and foliation, Springer. Lecture Notes, 279, (1972).

[6] Lehmann (D.). — Classes caractéristiques résiduelles. In Differential Geometry and its Applications, proc. Conf., pages 85-108, Brno, Czechoslovakia, Aug 27-sept 2 (1989), World Scientific, Singapore (1989).

[7] Lehmann (D.). — Résidus des sous variétés invariantes d'un feuilletage singulier. Ann. Inst. Fourier, 41(1) p. 211-258 (1991).

[8] Lehmann (D.). — Systèmes d'alvéoles et intégration sur le complexe de Čechderham. In Publications de l'IRMA, Université de Lille I, N°VI, volume 23 (1991).

[9] Lehmann (D.) and Suwa (T.). — Generalization of variations and baum-bott résidues for holomorphic foliations on singular varieties. International Journal of Mathematics, Vol 10(3) p. 367-384 (1999).

[10] Suwa (T.). — Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations. Hermann, Paris, (1998).