ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

CHRISTINE NOOT-HUYGHE, FABIEN TRIHAN

Sur l'holonomie de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés à des F-isocristaux surconvergents sur des courbes lisses

Tome XVI, n° 3 (2007), p. 611-634.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_3_611_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 3, 2007
pp. 611–634

Sur l'holonomie de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés à des F-isocristaux surconvergents sur des courbes lisses (*)

Christine Noot-Huyghe[(1)], Fabien Trihan[(2)]

Résumé. — Nous montrons que le $\mathcal{D}$-module arithmétique associé à un F-isocristal surconvergent sur une courbe lisse est holonome. Nous montrons d'abord que les F-isocristaux unipotents sont des $\mathcal{D}$-modules holonomes en utilisant le fait que de tels F-isocristaux proviennent de F-isocristaux logarithmiques. Nous déduisons le cas général du théorème de réduction semi-stable pour les F-isocristaux sur les courbes de Matsuda-Trihan qui repose sur le théorème de monodromie p-adique démontré indépendamment par André, Kedlaya et Mebkhout.

Abstract. — We show that the arithmetic $\mathcal{D}$-module associated to an overconvergent F-isocrystal over a smooth curve is holonomic. We first prove that unipotent F-isocrystals are holonomic $\mathcal{D}$-module by using the fact that such F-isocrystals come from logarithmic F-isocrystals. We deduce the general case from the semi-stable reduction theorem for F-isocrystals over curves of Matsuda-Trihan which relies on the p-adic monodromy theorem independently proved by André, Kedlaya and Mebkhout.

(*) Reçu le 16 septembre 2005, accepté le 14 mars 2007
(1) Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA), Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex France.
huyghe@math-u.strasbg.fr, http ://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe
(2) Université de Mons-Hainaut, « Le Pentagone », 6 avenue du champ de Mars, B-7000 Mons (Belgique).
trihan@umh.ac.be

Pour cette collaboration, les deux auteurs ont bénéficié du soutien du Fond National de Recherche Scientifique (Belgique), ainsi que de l'IRMA, laboratoire de mathématiques de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg). Ce travail a bénéficié en outre du soutien du réseau européen de recherche Arithmetic Algebraic Geometry de la Communauté Européenne (Programme FP6, contrat MRTN-CT2003-504917).

Introduction

Dans [9], Caro montre que le $\mathcal{D}$-module arithmétique associé à un F-isocristal surconvergent sur une courbe lisse est holonome. Nous proposons de fournir une seconde preuve de ce résultat. Notre démonstration diffère de celle de [9] sur les points suivants : la preuve de Caro repose sur une caractérisation des F-isocristaux surconvergents due à Berthelot (cf. 4.1.1). Nous proposons une preuve qui ne fait pas appel à ce résultat.

Notre preuve repose en effet sur des résultats précédents du second auteur concernant les F-isocristaux surconvergents unipotents. En particulier, il est démontré dans [22] que tout F-isocristal unipotent sur une courbe lisse provient d'un F-log cristal sur la compactification. Nous sommes alors en mesure de décrire le foncteur qui associe à tout F-log cristal un F-isocristal surconvergent sur le lieu où la log structure devient triviale (cf. [20]) de manière explicite en terme de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Le fait que le prolongement logarithmique de l'isocristal soit muni d'un Frobenius implique automatiquement l'égalité entre la cohomologie de ces deux coefficients et permet de simplifier considérablement la preuve de [9] où la structure de Frobenius sur le log cristal n'est pas utilisée.

Pour généraliser ce résultat aux F-isocristaux surconvergents, nous utilisons le théorème de réduction semi-stable des F-isocristaux surconvergents dans le cas des courbes dû à Matsuda-Trihan ([22]). Notons que ce résultat repose essentiellement sur le théorème de monodromie p-adique démontré indépendamment par Kedlaya ([19]), Mebkhout ([23]), André ([1]). Techniquement, nous généralisons au cas des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques cohérents à pôles surconvergents, un résultat antérieur de Tsuzuki pour les images directes et inverses d'isocristaux surconvergents par un morphisme génériquement étale. En particulier, on construit un morphisme trace dans ce contexte.

Nous terminons par examiner la caractérisation des isocristaux surconvergents de Berthelot sous sa forme locale et globale et montrons comment cette dernière permet de démontrer la conjecture D de Berthelot, achevant ainsi la démonstration de la stabilité des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur des courbes lisses par les six opérations cohomologiques de Grothendieck à l'aide des travaux de Caro ([8], [9], [10], [11]).

Nous tenons enfin à remercier Pierre Berthelot pour ses précisions et corrections concernant la partie 4, ainsi que le référé pour ses judicieuses remarques.

1. Notations-Généralités

1.1. Notations et Rappels

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W son anneau des vecteurs de Witt, $K = Frac(W)$, $\mathcal{S} = SpfW$, $S_i = \mathrm{specW/p^{i+1}W}$. Soient $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ un schéma formel propre et lisse de dimension relative N, $\mathcal{Z}$ un diviseur à croisements normaux relatif de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U} := \mathcal{X}\backslash\mathcal{Z}$. On notera respectivement X, Z et U leur réduction modulo p. Ces schémas sont naturellement munis d'une log-structure : nous notons ainsi $\mathcal{X}^{\#}$ (resp. $\mathcal{Z}^{\#}$) le log-schéma de schéma sous-jaçent $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Z}$) et dont la log-structure est induite par $\mathcal{Z}$ (resp. par la log-structure inverse de celle de $\mathcal{X}^{\#}$) de sorte qu'on obtient un diagramme commutatif de log-schémas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}^{\#} & \stackrel{\pi}{\rightarrow} & \mathcal{Z} \\ u^{\#}\downarrow & & \downarrow u \\ \mathcal{X}^{\#} & \stackrel{\pi}{\rightarrow} & \mathcal{X}. \end{array}$$

Notons $X_i^{\#}/S_i$ la réduction mod p^{i+1} de $\mathcal{X}^{\#}/W$.

L'immersion diagonale de $X_i^{\#}$ se factorise en

$$X_i^{\#} \hookrightarrow X_i^{\#}(1) \rightarrow X_i^{\#} \times_{S_i} X_i^{\#}$$

où la première flèche est une immersion fermée exacte (cf [17]). Suivant [25], on note alors $\mathcal{P}^n_{X_i^{\#}(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^n_{X_i^{\#}}$) le faisceau des parties principales de niveau m et d'ordre n de l'immersion fermée exacte

$$X_i^{\#} \hookrightarrow X_i^{\#}(1)$$

(resp. le faisceau des parties principales de niveau m et d'ordre n de l'immersion fermée $X_i \hookrightarrow X_i(1)$). Ils sont tous deux munis d'une structure de $\mathcal{O}_{X_i}$-module. On note $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i^{\#},n}$ (resp. $\mathcal{D}_{X_i^{\#},n}$) son $\mathcal{O}_{X_i}$-module dual. Ce faisceau est appelé le faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre n (resp. le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre n) sur $X_i^{\#}$. On note

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i^{\#}} := \bigcup_n \mathcal{D}^{(m)}_{X_i^{\#},n} \quad (\text{resp.}\, \mathcal{D}_{X_i^{\#}} := \bigcup_n \mathcal{D}_{X_i^{\#},n}),$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{\#}} := \varprojlim \mathcal{D}^{(m)}_{X_i^{\#}} \quad (\text{resp.}\, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}^{\#}} := \varprojlim \mathcal{D}_{X_i^{\#}})$$

et finalement $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{\#}} := \bigcup_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{\#}}$ $(\subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}^{\#}})$. On montre de manière analogue à [3], 3.6 la cohérence du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{\#}}$.

On dispose également des faisceaux d'opérateurs différentiels classiques $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ définis dans [3]. De plus, la flèche $\pi : \mathcal{X}^\# \to \mathcal{X}$ induit un morphisme canonique injectif de faisceaux d'algèbres de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}.$$

Dans le cas d'un diviseur à croisements normaux, Montagnon montre dans le chapitre 5 de [25] que les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i^\#}$ sont de dimension cohomologique finie. En procédant comme en 4.4 de [5], on en déduit que les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^\#}$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$ sont de dimension cohomologique finie.

Nous aurons aussi besoin du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$, qui est une version à coefficients surconvergents du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ et dont nous rappelons brièvement la définition. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert affine $\subset \mathcal{X}$, V_0 la fibre spéciale de cet ouvert, t une équation locale de $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{V}$. On introduit le coefficient

$$\mathcal{B}^{(m)}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}(T) \Big/ t^{p^{m+1}}T - p\ ,$$

puis

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(Z) = \mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i},$$

et les faisceaux complétés $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z)$. Passons à la limite inductive sur m : on définit

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z),$$

où si $\mathcal{F}$ est un faisceau quelconque, on notera $\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$ pour $\mathcal{F} \otimes \mathbf{Q}$. Les faisceaux considérés sont des faisceaux d'algèbres cohérents. On voit facilement que les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ ne dépendent que de la réduction mod p du diviseur $\mathcal{Z}$ notée Z et du sous-schéma réduit Z_{red}, ce qui justifie la notation.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules, on pose

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{F}.$$

On dispose de morphismes canoniques

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z).$$

Nous noterons également **res**, le foncteur qui à tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module associe sa structure canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module via le morphisme canonique précédent.

Nous adopterons le formalisme des images directes et inverses au sens des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques introduits dans [6]. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ des schémas formels lisses sur $\mathcal{S}$, $f : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ un morphisme, $d = dim\mathcal{X}' - dim\mathcal{X}$, $\mathcal{U}' \subset \mathcal{X}'$ le complémentaire d'un diviseur $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{U}$ le complémentaire d'un diviseur $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$, tel que $f(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$. On peut supposer pour les constructions que l'on a un morphisme de faisceaux d'algèbres $f^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$, qui induit (1.1.3 de [9]) pour tout i des morphismes $f^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \to \mathcal{B}^{(m)}_{X'_i}$. On construit à partir de là les faisceaux

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(Z') = \mathcal{B}^{(m)}_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}' \to \mathcal{X}}(Z') = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(Z'),$$

où $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}$ est introduit en 2.2 de [6], et

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}(Z') = \mathcal{B}^{(m)}_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}, \quad \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X}'}(Z') = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}(Z'),$$

où $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}$ est introduit en 2.2 de [6]. On pose aussi

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}' \to \mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z') = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}' \to \mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z'), \quad \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z') = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X}',\mathbf{Q}}(Z').$$

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents, on définit $\tilde{f}^{!}\mathcal{E}$ comme dans 4.3.3 de [6]. Soit $\mathcal{E}'$ un faisceau de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-modules cohérents, on définit $\tilde{f}_{+}\mathcal{E}'$ comme dans 4.3.6 de [6]. Les versions sans diviseur (i.e Z et Z' sont vides) de ces foncteurs sont respectivement notés $f^{!}\mathcal{E}'$ et $f_{+}\mathcal{E}$.

Pour fixer les idées, donnons des descriptions en coordonnée locale, sur une courbe, des faisceaux intervenants, sous nos hypothèses que Z est un diviseur à croisements normaux de X.

1.2. Descriptions en coordonnée locale

Soit $\mathcal{X}$ une courbe. Plaçons-nous sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$, muni d'une coordonnée t, telle que $\mathcal{Z} \bigcap \mathcal{V} = V(t)$. Les symboles a_k et $a_{l,k}$ qui suivent désignent des éléments de $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$, que l'on munit de la norme spectrale. On note ∂ la dérivée partielle par rapport à t, et, comme d'habitude, $\partial^{[k]} = \partial^k/k!$. Nous avons alors les descriptions suivantes des faisceaux introduits ci-dessus

$$\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}) = \left\{ \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k \partial^{[k]} \mid \exists C > 0, \eta < 1 \,\text{tels que}\, |a_k|_{sp} < C\eta^k \right\},$$

$$\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)) = \left\{ \sum_{l,k\in\mathbf{N}} a_{l,k} t^{-l} \partial^{[k]} \mid \exists C > 0, \eta < 1 \,\text{tels que}\, |a_{l,k}|_{sp} < C\eta^{l+k} \right\}.$$

Notons enfin

$$\partial_{[k]} = \frac{1}{k!}(t\partial)(t\partial - 1)(t\partial - 2)\cdots(t\partial - k + 1).$$

Alors, d'après 2.3 C de [25], on a

$$\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}) = \left\{ \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k \partial_{[k]} \mid \exists C > 0, \eta < 1 \,\text{tels que}\, |a_k|_{sp} < C\eta^{k} \right\}.$$

1.3. Morphisme trace pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques à coefficients surconvergents

On considère ici $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ des schémas formels lisses sur $\mathcal{S}$, $f : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ un morphisme fini, de degré générique égal à d, $\mathcal{U}' = f^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ le complémentaire d'un diviseur $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$, tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \stackrel{j'}{\to} & \mathcal{X}' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{U} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{X}, \end{array}$$

où la restriction g de f à $\mathcal{U}'$ est finie et étale. On considère la réduction mod p de ces schémas et de ce diagramme ainsi que f_0 l'homomorphisme induit par $f : X' \to X$. Dans un contexte analogue, Tsuzuki construit l'image directe et inverse par f_0 d'isocristaux surconvergents sur U et U'. On donne ici des résultats analogues pour l'image inverse par f des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents et l'image directe des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-modules cohérents. Comme $\mathcal{Z}' = f^{-1}(\mathcal{Z})$, on peut supposer que $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = f^*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, pour faire les constructions d'images directes (resp. inverses) des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-modules (resp. des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ modules) comme en 7 de [16]. Dans la section 7 de [16], on considère la cas particulier où g est un isomorphisme. On explique ici ce qu'il faut ajouter aux considérations de [16] pour obtenir le cas considéré. Partons du lemme crucial suivant (7.2.3 de [16]).

Lemme 1.1. —

(i) Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-modules à gauche

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z').$$

On obtient ainsi un morphisme canonique injectif de faisceaux de $f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-algèbres

$$f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z) \hookrightarrow \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z').$$

(ii) Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-modules à droite

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z').$$

Démonstration. — La première partie de (i) est exactement 7.2.3 de [16], avec des hypothèses plus faibles. Nous expliquerons ci-dessous pourquoi l'énoncé est vrai dans notre cas.

Justifions la deuxième partie du (i). On dispose d'un morphisme $f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire à droite $f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z) \to f^{*}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$, qui envoie P sur $1\otimes P$. Grâce au (i) du lemme, cela donne un morphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire à droite de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ vers $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$. Il suffit de voir en restriction à l'ouvert $\mathcal{U}$ que c'est un morphisme de faisceaux d'algèbres, ce qui est clair car dans ce cas le morphisme considéré est un isomorphisme de faisceaux d'algèbres. Cela complète la première assertion qui ne figure pas stricto sensu dans [16].

Pour le (ii), on procède comme précédemment et on utilise l'isomorphisme de transposition qui suit et qui identifie les deux faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$-algèbres (1.3.4 de [5])

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z') \simeq \tilde{\omega}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z') \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}},$$

où $\omega_{\mathcal{X}'}$ est le faisceau inversible des différentielles de rang maximal sur $\mathcal{X}'$.

Résumons la construction de la partie 7 de [16]. En réalité, on suppose dans cette partie 7 de [16] que f induit un isomorphisme $f^{-1}\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}$, mais on utilise seulement le fait qu'un certain déterminant jacobien est inversible en restriction à $\mathcal{U}'$, de sorte que seule l'hypothèse que $f_{|\mathcal{U}'}$ est étale intervient. Plus précisément, on constate, grâce à un lemme de géométrie rigide, que pour m assez grand on a un isomorphisme d'espaces tangents

$$J\colon \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{T}_{\mathcal{X}'} \xrightarrow{\sim} f^{*}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{T}_{\mathcal{X}}.$$

Soit j_m l'homomorphisme canonique

$$j_m\colon \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(Z') \to f^{*}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z).$$

Comme ce morphisme devient un isomorphisme en restriction à $\mathcal{U}$, j_m est injectif.

On utilise J pour construire, à partir d'un m assez grand, une suite croissante d'entiers u_m ($u_m \geqslant m$) et des injections continues pour la topologie p-adique

$$i_m\colon f^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(u_m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(Z'),$$

telles que $i_m \circ j_m$ est l'injection canonique

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(Z') \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(u_m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(Z').$$

De plus, si ∂ est une section locale de $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$, alors $i_m(1 \otimes \partial) = J^{-1}(1 \otimes \partial)$.

Remarquons que, avec nos hypothèses ($\mathcal{U}' = f^{-1}\mathcal{U}$ et f est fini), $\tilde{f}_+$ préserve la cohérence (4.3.8 de [6]).

Le lemme permet de donner la description suivante de l'image directe d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-module cohérent (resp. de l'image inverse d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent).

Proposition 1.2. —

(i) On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$-modules à droite

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z') \simeq f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z).$$

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent. Alors il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-modules à gauche

$$\tilde{f}^!\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}'}({}^{\dagger}Z') \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)} f^{-1}\mathcal{E}.$$

Le module $\tilde{f}^!\mathcal{E}$ est concentré en degré 0 et est isomorphe comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$-module à $f^*\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}'} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} f^{-1}\mathcal{E}$.

(ii) Soit $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-module cohérent, alors $\tilde{f}_+\mathcal{E}' \simeq f_*\mathcal{E}'$ comme faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules.

On peut bien entendu donner une variante de cette proposition pour $\mathcal{E} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z))$ et $\mathcal{E}' \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z'))$.

Démonstration. — Par définition, on a

$$f^!\mathcal{E} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z') \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)} f^{-1}\mathcal{E}.$$

D'après le lemme précédent, on a donc

$$f^!\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z') \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)} f^{-1}\mathcal{E}.$$

On est donc ramené à montrer que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$ est plat comme $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module à droite, et donc que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z')$ est plat à droite sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z)$ pour m assez grand. Dans notre situation, on a $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = f^*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. La question de la platitude est locale sur $\mathcal{X}$ qu'on suppose donc affine et muni de coordonnées locales. Dans ce cas, l'algèbre $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(\mathcal{X}')$ est finie sur $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\mathcal{X})$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z)$ est une algèbre de Banach pour la norme associée à la topologie p-adique. Ainsi, le module

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}(\mathcal{X}') \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\mathcal{X})} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z),$$

est de type fini sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z)$. Ce module est donc complet pour la norme quotient provenant de sa structure de module et qui définit la topologie p-adique sur ce module. Ainsi, ce module s'identifie à $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z')$. Pour m assez grand, le morphisme $f^{-1}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$ est fini et étale donc plat. On en déduit, pour $\mathcal{X}$ général, un isomorphisme canonique de $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z)$-modules à droite

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z') \simeq \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \otimes_{f^{-1}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z).$$

Cela donne que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z')$ est plat sur $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z)$ et donc la platitude cherchée. De plus, comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \simeq f^*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, on en déduit l'isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(Z') \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z).$$

En passant à la limite inductive sur m, on trouve l'isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire à droite

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z') \simeq f^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z),$$

d'où l'ensemble des énoncés du (i).

En passant à la limite inductive sur m, et la deuxième partie du (i). Au passage, on vérifie que le faisceau d'algèbres $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z')$ est fini et étale (donc plat) sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$.

Comme f est un morphisme fini, $f_* = \mathbf{R}f_*$. Par définition, on a

$$f_+\mathcal{E}' = \mathbf{R}f_*\left(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}'}({}^\dagger Z') \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z')} \mathcal{E}'\right)$$

L'énoncé (ii) suit donc directement du lemme précédent.

Précisons l'action des opérateurs différentiels par ces opérations cohomologiques. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent, e une section locale de $\mathcal{E}$, ∂' une section locale du faisceau tangent $\mathcal{T}_{\mathcal{X}'}$. Alors, on a la description suivante de l'action de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$ sur $f^*\mathcal{E}$

$$\partial' \cdot (1 \otimes e) = J(1 \otimes \partial') \cdot (1 \otimes e).$$

Soient $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z')$-module cohérent, $\mathcal{V}$ un ouvert affine de $\mathcal{X}$, ∂ une section du faisceau tangent $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{V}$, e' une section de $f_*\mathcal{E}'(\mathcal{V})$. Alors, on a la description suivante de l'action de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ sur $f_*\mathcal{E}$

$$\partial \cdot e' = J^{-1}(1 \otimes \partial) \cdot e' \ \in f_*(\mathcal{E})(\mathcal{V}).$$

Ces résultats nous permettent de construire un morphisme trace dans ce contexte. Commenons par interpréter l'homomorphisme d'adjonction dans la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents.

Proposition 1.3. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent. L'homomorphisme d'adjonction canonique $ad : \mathcal{E} \to f_*f^*\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire si on identifie $f_*f^*\mathcal{E}$ à $\tilde{f}_+\tilde{f}^!\mathcal{E}$.*

Démonstration. — On a par définition $ad(e) = 1 \otimes e$. L'assertion est locale sur la base. On peut donc supposer que $\mathcal{X}$ est affine, muni de coordonnées locales et que $\mathcal{Z} = V(h)$ avec $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Comme $\tilde{f}^!$ est $\tilde{f}_+$ sont exacts, toute surjection $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)^a \to \mathcal{E}$ donne lieu à une surjection $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire $f_*f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z) \to f_*f^*\mathcal{E}$. Il suffit finalement de vérifier que l'adjonction est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire pour $\mathcal{E} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Or, dans ce cas, l'adjonction correspond à l'homomorphisme de faisceaux d'algèbres $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z) \hookrightarrow f_*(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z'))$. Cela donne la linéarité de l'adjonction.

Proposition 1.4. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent. Alors il existe un morphisme trace $tr : f_*f^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire si on identifie $f_*f^*\mathcal{E}$ à $\tilde{f}_+\tilde{f}^!\mathcal{E}$. De plus, l'homomorphisme composé*

$$\mathcal{E} \stackrel{ad}{\to} \tilde{f}_+\tilde{f}^!\mathcal{E} \stackrel{tr}{\to} \mathcal{E},$$

est égal à $d \cdot Id_{\mathcal{E}}$.

Démonstration. — Pour m assez grand, on a un morphisme fini étale $f^{-1}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$ qui permet de définir un morphisme trace $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-linéaire

$$t_m \colon f_*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}.$$

Identifions

$$f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z') \simeq f_*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z).$$

En étendant les scalaires, on dispose ainsi d'un morphisme trace $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire $t = t_m \otimes Id_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)} : f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z') \to \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent. Comme f est fini, on peut identifier

$$f_*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z') \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)} f^{-1}\mathcal{E}\right) \simeq f_*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z')\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)} \mathcal{E}.$$

Le morphisme $t \otimes Id_{\mathcal{E}}$ définit alors un morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire $f_*f^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Il reste à vérifier que la flèche obtenue est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire. Par le même argument que précédemment, on se ramène au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$. Dans ce cas, la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module de $f_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z'))$ est donnée par l'homomorphisme de faisceaux d'algèbres $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \hookrightarrow f_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z'))$ et la trace qui est égale à $t \otimes Id_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire.

1.4. Quelques résultats de compatibilité

On considère dans cette partie un schéma formel $\mathcal{X}$ lisse sur $\mathcal{S}$, muni d'un diviseur relatif $\mathcal{Z}$, ainsi que les faisceaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$. On montre ici des résultats de compatibilité entre l'image inverse et l'image directe au sens des $\mathcal{D}^\dagger$-modules et au sens des F-isocristaux surconvergents. On commence par l'image inverse et un énoncé (1.5.4 de [15]) que nous reproduisons ici car il n'a pas été publié et est souvent cité. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ des schémas formels lisses sur $\mathcal{S}$, $f : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ un morphisme, $d = dim\mathcal{X}' - dim\mathcal{X}$, $\mathcal{U}' \subset \mathcal{X}'$ le complémentaire d'un diviseur $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{U}$ le complémentaire d'un diviseur $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$, tel que $f(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$. On note f_0 le morphisme induit par f au niveau des fibres spéciales, $f_0 : X' \to X$.

Soit E un isocristal surconvergent sur U le long de $X \backslash Z$. Son image directe par spécialisation sp_*E sur $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$-module cohérent. On note $f_0^{rig,*}E$ l'image inverse de E comme isocristal surconvergent sur U'. On a alors le théorème de comparaison suivant

Proposition 1.5. — *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-modules à gauche*

$$sp_* f_0^{rig,*} E \xrightarrow{\sim} \tilde{f}^!(sp_* E)[-d].$$

En particulier, $\tilde{f}^!(sp_*E)[-d]$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}'}({}^\dagger Z')$-module cohérent.

Terminons maintenant par un énoncé de comparaison des images directes en tant que $\mathcal{D}^\dagger$-module et en tant qu'isocristal surconvergent sous les hypothèses de la sous-section précédente, i.e. f est fini, génériquement étale sur un ouvert $\mathcal{U}$. On consultera 5. de [27] pour les descriptions de l'image directe et inverse par f_0 des isocristaux surconvergents dans ce contexte.

Proposition 1.6. — *Soit E' un F-isocristal surconvergent sur U' (le long de Z'). Alors on a un isomorphisme canonique*

$$sp_* f^{rig}_{0,*} E' \xrightarrow{\sim} \tilde{f}_+(sp_* E').$$

Démonstration. — Posons $\mathcal{E}' = sp_* E'$. C'est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-module cohérent. Il résulte de [27], 5.1.2 et de 1.2 que ces deux modules s'identifient à $f_*\mathcal{E}'$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules. Nous sommes donc ramenés à montrer que l'action de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ est identique sur ces deux modules. La question est locale sur $\mathcal{X}$, qu'on peut supposer affine, lisse, muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_N$, et tel que $\mathcal{Z} = V(h)$ avec $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Comme $f_*\mathcal{E}'$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module localement projectif, on a une injection $f_*\mathcal{E}'(\mathcal{X}) \subset f_*\mathcal{E}'(\mathcal{U})$. On a une injection analogue pour $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$. Il suffit donc de vérifier que l'action de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ est la même sur $sp_* f^{rig}_{0,*}E'$ et sur $\tilde{f}_+\mathcal{E}'$, en restriction à $\mathcal{U}$. Comme f est fini et étale au-dessus de $\mathcal{U}$, l'action de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$ est obtenue sur chacun de ces deux modules en prenant l'image directe de la PD-stratification définissant la connexion sur $\mathcal{E}'$. Ainsi l'action des dérivations est identique sur $sp_* f^{rig}_{0,*}E'(\mathcal{U})$ et sur $\tilde{f}_+\mathcal{E}'(\mathcal{U})$, qui s'identifient tous les deux à $f_*\mathcal{E}'(\mathcal{U})$. L'action des opérateurs

$$\partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle_{(m)}} = \frac{q_{k_i}!}{k_i!}\partial_{x_i}^{k_i},$$

où q_{k_i} est le quotient de la division euclidienne de k_i par p^m, est donc aussi identique. Comme $f_*(\mathcal{E}')(\mathcal{U})$ est p-adiquement complet, cela donne que l'action de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}(\mathcal{U})$ est la même et en passant à la limite inductive sur m, on voit que l'action de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$ est la même sur $sp_* f^{rig}_{0,*}E'$ et sur $\tilde{f}_+\mathcal{E}'$ au-dessus de $\mathcal{U}$. Cela montre la proposition.

Dans toute la suite de cet article, nous reprenons les notations de 1.1 et supposons de plus que $\mathcal{X}$ est de dimension relative 1 sur $\mathcal{S}$.

2. Holonomie des F-isocristaux unipotents

Nous montrons tout d'abord comment démontrer l'holonomie des modules différentiels associés à des F-isocristaux surconvergents unipotents. Si $\mathcal{A}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres, on note comme d'habitude $D^*_{coh}(\mathcal{A})$ pour $* \in \{b, -\}$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à cohomologie bornée si $* = b$ et concentrée en degrés négatifs si $* = -$.

2.1. Images directes de $\mathcal{D}$-modules logarithmiques

Nous pouvons aussi construire de manière analogue à [6], 4.3.7.1 l'image directe

$$\pi_+ : D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}) \to D^-(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$$
$$\mathcal{E}^\cdot \mapsto \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#}} \mathcal{E}^\cdot,$$

où $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#}$ est obtenu par passage à la limite en la variable i et m du faisceau :

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i\leftarrow X_i^\#} = \omega^{-1}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \omega_{X_i^\#},$$

où $(\omega_{X_i})^{-1}$ est l'inverse du faisceau inversible ω_{X_i} des différentielles sur X_i.

On a le lemme suivant.

Lemme 2.1. —

(i) Le foncteur π_+ est un foncteur de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}})$ vers $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$.

(ii) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-module cohérent. Alors il existe un isomorphisme canonique dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z))$

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \pi_+\mathcal{E},$$

ces deux complexes étant concentrés en degré 0.

Démonstration. — Comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$ est de dimension cohomologique finie, il suffit, par dévissage, de montrer que $\pi_+(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}) \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$. Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ n'est autre que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, vu comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}} \times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-bimodule. On a donc

$$\pi_+\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}} = \omega^{-1}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}^\#}.$$

Or, comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module à gauche, ce faisceau est isomorphe au $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module à gauche cohérent et induit

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} (\omega_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \omega_{\mathcal{X}}^{-1}),$$

(où la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module à gauche vient de celle de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$). En effet, ces différents faisceaux sont isomorphes comme $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules. Il suffit de vérifier en restriction à $\mathcal{U}$, qu'ils sont isomorphes comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules à gauche, ce qui provient de l'isomorphisme de transposition de 1.3.4 de [5]. Cela achève le (i).

Pour la seconde assertion, la flèche $\omega_\mathcal{X} \to \omega_{\mathcal{X}^\#}$ induit un morphisme après tensorisation par $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$, qui est un isomorphisme sur $\mathcal{U}$ et est donc un isomorphisme puisque l'extension $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$ est fidèlement plate par [3], 4.3.7.1.

Il existe un morphisme canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-bi-modules

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#} \to \tilde{\omega}_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \tilde{\omega}_\mathcal{X}^{-1},$$

le deuxième module étant muni de la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-module à droite provenant de la structure gauche de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ tordue par $\tilde{\omega}_{\mathcal{X}^\#}$ et de la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module à gauche de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module, provenant de la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module à droite, tordue par $\tilde{\omega}_\mathcal{X}^{-1}$. Cette flèche est un isomorphisme en restriction à $\mathcal{U}$. Cette flèche est donc un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules à gauche. On vérifie en restriction à $\mathcal{U}$, que cet isomorphisme est aussi $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-linéaire à droite, si bien que l'isomorphisme est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-linéaire à droite. En tensorisant à droite, sur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$, par $\mathcal{E}$, on en déduit un isomorphisme dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z))$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#} &\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}} \mathcal{E} \\ &\simeq \tilde{\omega}_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \tilde{\omega}_\mathcal{X}^{-1} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}} \mathcal{E}.\end{aligned}$$

On a une flèche canonique

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \to \tilde{\omega}_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}({}^\dagger Z)} \tilde{\omega}_\mathcal{X}^{-1},$$

envoyant 1 sur $s \otimes 1 \otimes s'$, où s est une section locale de $\tilde{\omega}_\mathcal{X}$ et s' la section duale de $\tilde{\omega}_{\mathcal{X}^\#}^{-1}$. Cette flèche est un isomorphisme bi-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire en restriction à $\mathcal{U}$ (de nouveau grâce à 1.3.4 de [5]), ce qui donne le fait que c'est un isomorphisme bi- $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z) \times \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{\#},\mathbf{Q}}$-linéaire et donne la formule du (ii) du lemme, puisque $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est plat sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. En restriction à $\mathcal{U}$, la log-structure devient triviale et le faisceau $\pi_+\mathcal{E}$ s'identifie à $\mathcal{E}$ comme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$-module. Pour $i \leqslant -1$, les faisceaux de cohomologie

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z) \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{H}^i(\pi_+\mathcal{E})$$

sont des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents nuls en restriction à $\mathcal{U}$, donc nuls, ce qui donne le (ii).

2.2 Soit $E^{\dagger}$ un F-isocristal surconvergent sur U. On notera $\tilde{\mathcal{D}}^{\dagger}(.)$ (resp. $\mathcal{D}^{\dagger}(.)$) le foncteur qui associe à $E^{\dagger}$ sa structure de canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$- (resp. $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$)-module (cf [2],4). Avec ces notations, nous avons l'isomorphisme de foncteurs :

$$\mathcal{D}^{\dagger}(.) \simeq \mathbf{res} \circ \tilde{\mathcal{D}}^{\dagger}(.).$$

Supposons à présent que $E^{\dagger}$ soit unipotent. Soient E le log-isocristal sur $X^{\#}$ muni d'une structure de Frobenius non-dégénéré lui correspondant d'après [22] et $\mathcal{E}^{\dagger} = \mathcal{D}^{\dagger}(E^{\dagger})$. Rappelons que la restriction de E à l'ouvert U (où la log-structure devient triviale) n'est autre que le F-isocristal convergent associé à $E^{\dagger}$ par simple restriction au tube de U. Sous nos hypothèses, E correspond de manière analogue à [5], 4.6.3 à la donnée d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E} := sp_*E$ muni d'une structure de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{\#},\mathbf{Q}}$-module.

L'énoncé suivant permet de calculer la cohomologie de E et $E^{\dagger}$.

Lemme 2.2. — *Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Soit $f : \mathcal{X} \to Spf\ W$ le morphisme structural de $\mathcal{X}/W$. Alors*

(i) Pour tout isocristal $E^{\dagger}$ surconvergent sur U, on a

$$f_+(\mathcal{E}^{\dagger}) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{rig}(U/K, E^{\dagger})[1].$$

(ii) Pour tout cristal E sur $X^{\#}/W$, on a

$$f_+(\pi_+(\mathcal{E})) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{cris}(X^{\sharp}/W, E)[1] \otimes K$$

Démonstration. — La première assertion résulte de [6], 4.3.6.3 et de [2], 4.1.7. Passons à la deuxième. Remarquons d'abord que $(f_+ \circ \pi_+)\mathcal{E} \simeq f_+^{\#}\mathcal{E}$. En effet, le terme de gauche fait intervenir le module

$$\omega_{\mathcal{X}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^{\#}},$$

qui est égal à

$$\omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#}$$

puisque $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{X}^\#}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module à gauche plat d'après la démonstration de 2.1, soit encore à $\omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} (\omega_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$, c'est-à-dire finalement à $\omega_{\mathcal{X}^\#}$. On vérifie en restriction à $\mathcal{U}$ que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-bi-modules. Comme le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{X}^\#}$ coïncide avec $\omega_{\mathcal{X}^\#}$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-bi-module, cela donne l'assertion. Il reste à calculer $f_+^\#\mathcal{E}$. Pour cela, on utilise la résolution $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-linéaire à droite de $\omega_{\mathcal{X}^\#}$ par le complexe de de Rham suivant dont les termes sont placés en degrés -1 et 0

$$0 \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}} \to \omega_{\mathcal{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}} \to 0,$$

et qui est défini localement par $P \mapsto dt/t \otimes \partial_{[1]}P$, en reprenant les notations de 1.2. Remarquons qu'une section locale P de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$ peut se mettre sous la forme $P = \sum_{k\in\mathbf{N}} \partial_{[k]} b_k$ tels qu'il existe $C > 0, \eta < 1$ tels que $|b_k| < C\eta^k$. Posons

$$Q = \sum_{k\geqslant 1} \frac{\partial_{[k]}}{k+1} b_k,$$

dont on vérifie que Q est une section locale de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$. Alors P se décompose $P = b_0 + \partial_{[1]}Q$, ce qui montre que le complexe précédent est quasi-isomorphe à $\omega_{\mathcal{X}^\#}$ placé en degré 0. Cela permet de vérifier que $f_+^\#\mathcal{E}$ s'identifie au complexe de de Rham logarithmique de $\mathcal{E}$ décalé de 1 et donc à $\mathbf{R}\Gamma_{cris}(X^\sharp/W, E)[1] \otimes K$, d'après 4.1.1 de [20].

Théorème 2.3. — *Soit E un log-isocristal sur $X^\#$ muni d'une structure de Frobenius non-dégénéré et notons $E^\dagger$, le F-isocristal surconvergent le long de $X\backslash U$ associé à E dans [20]. Alors $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ a une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent.*

Démonstration. — L'isocristal E correspond à la donnée d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module à connexion à pôles logarithmiques que nous noterons E_K et $\mathcal{E} := sp_*E$ à celle d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent muni d'une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}$-module. L'image de ce module à connexion par le foncteur de [20] est $sp_*(j^\dagger E_K)$. Sa structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent est

$$\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger) \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}} \mathcal{E}.$$

Pour voir ceci, il suffit d'après [3], 4.3.12 de trouver un homomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents entre ces deux modules qui soit un isomorphisme lorsqu'on le restreint à $\mathcal{U}$. Ce morphisme est construit de la manière suivante : on a une flèche canonique (cf [4], 1.2.1) :

$$\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$$

qui induit après extension des scalaires une flèche

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#}} \mathcal{E} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#,\mathbf{Q}}} \tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$$

où $\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$ est considéré comme un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#}$-module. Enfin on compose cette flèche avec la flèche canonique

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\#}} \tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger) \to \tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$$

pour obtenir la flèche souhaitée. Par le (ii) du lemme 2.1, on a donc $\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger) \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \pi_+\mathcal{E}$ et on déduit de [6], 5.3.6, et en particulier de la description qui y est donnée du foncteur $\mathbf{R}j_*j^*$ ($j : U \to X$ est l'immersion ouverte canonique), un triangle distingué

$$\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z(\pi_+\mathcal{E}) \to \pi_+\mathcal{E} \to \mathcal{D}^\dagger(E^\dagger),$$

où $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z$ est le foncteur défini dans [6], 4.4.4. Comme $\pi_+\mathcal{E}$ est dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$, pour montrer que $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-cohérent, il suffit de montrer que $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z(\pi_+\mathcal{E})$ est dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$. On a en fait beaucoup mieux :

Lemme 2.4. — *Le complexe $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z(\pi_+\mathcal{E})$ est quasi-isomorphe au complexe nul.*

Démonstration. — En appliquant le foncteur f_+ au triangle distingué précédent, on obtient grâce à 2.2, le triangle distingué

$$f_+\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z(\pi_+\mathcal{E}) \to \mathbf{R}\Gamma_{cris}(X^\sharp/W, E) \to \mathbf{R}\Gamma_{rig}(U/K, E^\dagger).$$

Comme E est muni d'un Frobenius non-dégénéré, les endomorphismes résidus de sa connexion ont pour seule valeur propre 0 (voir [26], preuve du théorème 2.5) et donc par [20], 4.2 (ii), la deuxième flèche du triangle est un quasi-isomorphisme et ainsi $f_+\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z(\pi_+\mathcal{E})$ est quasi-isomorphe au complexe nul. Comme $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z \simeq \oplus_{x\in Z}\mathbf{R}\Gamma^\dagger_x$ par [4], 2.4 (ii), nous pouvons supposer que Z est un point fermé $u : x \hookrightarrow X$. De plus, on a alors par [6], 4.4.5 un isomorphisme de foncteurs

$$\mathbf{R}\Gamma^\dagger_Z \simeq u_+u^!.$$

Le foncteur composé $(fu)_+$ est le foncteur restriction de la catégorie des K_x-espaces vectoriels dans celle des K-espaces vectoriel, où

$K_x = Frac(W(k(x))/K$ est une extension finie. Comme $(fu)_+u^!(\tilde{\pi}_+\mathcal{E}) = 0$, il en donc de même pour $u^!(\pi_+\mathcal{E})$ et pour $u_+u^!(\pi_+\mathcal{E})$.

On déduit du lemme précédent que

$$\pi_+(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$$

et ainsi $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ est cohérent. De plus, $\pi_+(\mathcal{E})$ est concentré en degré 0.

Corollaire 2.5. — *$\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ est holonome.*

Démonstration. — D'après [6], 5.3.5, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert non-vide de $\mathcal{X}$ tel que la restriction de $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ à cet ouvert soit le $\mathcal{D}$-module arithmétique associé à un F-isocristal convergent. C'est bien le cas ici puisque, par fonctorialité des constructions, la restriction de $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ à $\mathcal{U}$ n'est autre que le $\mathcal{D}$-module arithmétique associé au F-isocristal convergent induit par la restriction de $E^\dagger$ au tube de U.

3. Cas général

Soient une courbe propre, lisse intègre connexe X/k, D un diviseur à croisements normaux de X et $U := X \setminus D$. Soit $E^\dagger$ un F-isocristal surconvergent sur U. Comme il a été démontré dans [22], cet isocristal devient unipotent après un éventuel changement de bases par un morphisme fini sur X et étale sur U. Nous allons alors montrer que $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$-module cohérent. Ceci résultera du cas unipotent ainsi que de 1.3.4.

Proposition 3.1. — *Soit $E^\dagger$ un F-isocristal surconvergent sur U. Alors $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ a une structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module holonome.*

Démonstration. — D'après [6], p.70, exemple (i), il suffit de montrer que $\mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ est $\mathcal{D}$-cohérent. D'après [22], il existe un recouvrement fini et plat $f_0 : X' \to X$, étale au-dessus du U, tel que $E'^\dagger = f_0^{rig,*}(E^\dagger)$ soit unipotent. D'après [13], 8.3 on peut choisir un relèvement $\mathcal{X}'$ de X' tel que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \to & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \to & X \end{array}$$

se relève en un carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{U} \\ j' \downarrow & & \downarrow j \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{X}, \end{array}$$

où la flèche f est finie et plate et la flèche g est bien étale puisque c'est le cas de la flèche $U' \to U$ par le principe d'invariance topologique des morphismes étales ([24], 3.23). Posons $\mathcal{E} = \mathcal{D}^\dagger(E^\dagger)$ et $\mathcal{E}' = f^!\mathcal{E}$. Comme f est plat, on déduit de 2.1.3 de [8] que $\mathcal{E}' = \mathbf{res} \circ \tilde{f}^!\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$. On peut aussi déduire de 2.1.6 de [8] que $f_+(\mathcal{E}') = \mathbf{res} \circ \tilde{f}_+\tilde{f}^!\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$. Le module $\tilde{f}^!\tilde{\mathcal{D}}^\dagger(E^\dagger)$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{D}}(f_0^{rig,*}(E^\dagger))$ d'après le résultat rappelé en 1.5. Le module $\mathcal{E}'$ est donc $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$-cohérent d'après 2.3.

Finalement, le diagramme obtenu en 1.4 donne un diagramme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules

$$\mathcal{E} \stackrel{ad}{\to} f_+f^!\mathcal{E} \stackrel{tr}{\to} \mathcal{E},$$

et la composée de l'application trace avec l'adjonction est égale à la multiplication par d, le degré générique de f. En particulier, l'application $1/d \cdot tr$ fournit un scindage de ad et permet d'identifier $\mathcal{E}$ à un facteur direct de $f_+f^!\mathcal{E}$, comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module. Le module $f^!\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbf{Q}}$-cohérent. La cohérence est préservée par f_+, car f est propre (4.3.8 de [6]). On en déduit que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent.

4. Sur la conjecture D de Berthelot

Nous souhaitons étudier le rapport entre la proposition précédente et la conjecture (D) de Berthelot. Rappelons tout d'abord celle-ci :

Conjecture 4.1. — *([6], 5.3.6) Si $\mathcal{E}^\dagger$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent dont la restriction à $\mathcal{U}$ est holonome, alors $\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module holonome.*

Dans [9], 4.3.5 la preuve de la conjecture (D) est réduite (dans le cas des courbes) au résultat suivant de Berthelot dont la démonstration devrait paraître dans [7] :

Proposition 4.2. — *Si $\mathcal{E}^\dagger$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent dont la restriction à $\mathcal{U}$ est un F-isocristal convergent sur U, alors $\mathcal{E}^\dagger$ est en fait surconvergent.*

Nous rappelons au lecteur la démonstration de la conjecture (D) dans le cas des courbes lisses et en profitons pour préciser l'un des arguments de Caro (plus précisément son recours à [3], 4.3.12).

Théorème 4.3. — *Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Soit $\mathcal{E}^\dagger$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent dont la restriction à $\mathcal{U}$ est holonome. Alors $\mathcal{E}^\dagger$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module holonome.*

Démonstration. — Comme la restriction à $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}^\dagger$ est holonome, il existe d'après [6], p.70 un ouvert non-vide $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{E}^\dagger|_{\mathcal{V}}$ corresponde à un F-isocristal convergent. Nous pouvons écrire la fibre spéciale V de $\mathcal{V}$ sous la forme $V = X \setminus (Z \cup Z')$, pour un certain diviseur Z' disjoint de Z. En particulier, $\mathcal{E}^\dagger|_{\mathcal{V}}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{V},\mathbf{Q}}$-cohérent et donc grâce à la caractérisation des isocristaux surconvergents de 4.1.1, on en déduit que le F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z \cup Z')$-module cohérent $\mathcal{E}'^\dagger = \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z \cup Z')$ correspond à un F-isocristal surconvergent sur V/K. Par la proposition 3.1, $\mathbf{res}(\mathcal{E}'^\dagger)$ a ainsi une structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module holonome. On peut factoriser le foncteur $\mathbf{res}(.)$ en le foncteur composé :

$$\mathbf{res}(res_{Z\cup Z',Z'})(.),$$

où le foncteur $res_{Z\cup Z',Z'}$ consiste à considérer tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z \cup Z')$ comme un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')$-module. On peut montrer que

$$res_{Z\cup Z',Z'}(\mathcal{E}'^\dagger) = \mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z').$$

Pour montrer cette assertion il suffit en effet de regarder ce qui se passe sur le complementaire de Z', noté U'. L'assertion devient alors

$$\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger) = \mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z))$$

au-dessus de l'ouvert U'. Et donc, on conclut en remarquant que $\mathcal{E}^\dagger = \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ d'après [11], 2.2.8. On a d'autre part un triangle distingué

$$\mathbf{R}\Gamma^\dagger_{Z'}(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)) \to \mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger) \to \mathbf{res}(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z')),$$

où le terme de droite est holonome puisqu'il n'est autre que $\mathbf{res}(\mathcal{E}'^\dagger)$ par l'assertion précédente. Il reste donc à vérifier l'holonomie de $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_{Z'}(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger))$. Notons $u' : Z' \hookrightarrow X$, et $u'' : Z' \hookrightarrow U$ les immersions fermées canoniques. D'après [6], 4.4.5, on a

$$\mathbf{R}\Gamma^\dagger_{Z'}(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)) = u'_+ u'^!(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)).$$

Comme Z' est disjoint de Z, on a $u'^!(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)) = u''^! \mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger)|_{\mathcal{U}}$ qui a une structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z}'}$-module holonome d'après [6], p.72, exemples (iv). Finalement, on conclut que $\mathbf{R}\Gamma^\dagger_{Z'}(\mathbf{res}(\mathcal{E}^\dagger))$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module holonome en utilisant [6], p.72, exemples (iii).

Corollaire 4.4. — *Soit $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ un schéma formel lisse de dimension relative un. Alors la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-complexes holonomes bornés est stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck.*

Démonstration. — D'après [6], il suffit de démontrer les conjectures A et D (respectivement [6], 5.3.6 A) et D)). L'assertion résulte alors du théorème précédent et de [10] où il est démontré que la conjecture D implique la conjecture A.

4.1 Pour terminer, nous souhaitons signaler que les résultats précédents admettent des énoncés analogues dans le cas simple où les F-isocristaux surconvergents correspondent à des modules sur des anneaux de séries formelles munis d'une connexion et d'un opérateur Frobenius horizontal. Nous ne faisons ici qu'ébaucher ces analogues locaux. Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à [14] ou encore à [21].

4.2 Soit k un corps parfait de caractéristique p. On note W l'anneau des vecteurs de Witt de k et K le corps des fractions de W. On note σ le Frobenius canonique de K. Pour une indéterminée x, on note :

$$B = \{a = \textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x^i |\ a_i \in K,\ \sup_i |a_i| < \infty,\ |a_i| \to 0\ (i \to -\infty)\}.$$

$$B^\dagger = \{a \in B|\ |a_i| r^i \to 0\ (i \to -\infty) \text{ pour un certain } 0 < r < 1\}.$$

Notons indifféremment R l'anneau B ou $B^\dagger$. C'est un corps de valuation discrète de corps résiduel $k((x))$ muni d'un opérateur Frobenius et d'une K-dérivation

$$d : R \to \omega_R := R.\frac{dx}{x}.$$

Rappelons ([22]) qu'un (ϕ, ∇)-module sur R consiste en la donnée d'un R-module libre de rang fini M muni d'une connexion K-linéaire :

$$\nabla : M \to M \otimes \omega_R$$

telle que $\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m)$ pour tout $a \in R$ et tout $m \in M$. Le module est d'autre part muni d'un endomorphisme σ-linéaire :

$$\phi : M \to M$$

tel que $\phi(M)$ engendre M et :

$$\nabla\phi = (\sigma \otimes \phi)\nabla.$$

En fait, les (ϕ,∇)-modules sur B (resp. $B^\dagger$) correspondent moralement aux F-isocristaux convergents (resp. surconvergents) sur $k((x))$.

4.3 Posons $\mathcal{X} := Spf(W[[x]])$ et $\mathcal{U} = Spf(\widehat{W[[x]]}[\frac{1}{x}])$ et $D^\dagger_{\mathcal{X}}$ et $D^\dagger_{\mathcal{U}}$ (resp. $D^\dagger(0)$) l'anneau des opérateurs différentiels surconvergents sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$ (resp. l'anneau des opérateurs différentiels surconvergents le long du diviseur $(x = 0)$). On note $\partial^{[i]} := \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}$ et on munit l'anneau des series formelles de la norme de Gauss

$$|\sum_{i\geqslant 0} a_i x^i| = p^{-min_i(v(a_i))}.$$

Les anneaux differentiels $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, $D^\dagger_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$ et $D^\dagger(0)_{\mathbf{Q}}$ sont définis de la manière suivante :

$$D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} := \left\{\sum_{i\geqslant 0} b_i\partial^{[i]}/b_i \in W[[x]][\frac{1}{p}]/\exists c,\eta\in\mathbf{R}, |b_i| < c\eta^i\right\},$$

$$D^\dagger_{\mathcal{U},\mathbf{Q}} := \left\{\sum_{i\geqslant 0} b_i\partial^{[i]}/b_i \in \widehat{W[[x]]}[\frac{1}{x}]\left[\frac{1}{p}\right] = B/\exists c,\eta\in\mathbf{R}, |b_i| < c\eta^i\right\}$$

$$D^\dagger(0)_{\mathbf{Q}} := \left\{\sum_{i\geqslant 0} b_i\partial^{[i]}/b_i \in B^\dagger/\exists c,\eta\in\mathbf{R},\eta<1, |b_i| < c\eta^i\right\}.$$

Il semble raisonnable de penser qu'on a une équivalence de catégories entre les (ϕ,∇)-modules sur B et les B-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une structure de F-$D^\dagger_{\mathcal{U}}$-modules (on a $B = \mathcal{O}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$).

La conjecture (D) et la caractérisation des F-isocristaux surconvergents de Berthelot peuvent être traduits de la manière suivante (et démontrés de manière analogue au cas des courbes) :

Proposition 4.5. —

(i) Soit $M(0)$ un $D^\dagger(0)_{\mathbf{Q}}$-module cohérent tel que $M := M(0)\otimes_{D^\dagger(0)} D^\dagger_{\mathcal{U}}$ soit un (ϕ,∇)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}$. Alors $\mathbf{res}(M)$ *est un $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent.*

(ii) Soit $M(0)$ un $D^\dagger(0)_{\mathbf{Q}}$-module cohérent tel que $M := M(0)\otimes_{D^\dagger(0)} D^\dagger_{\mathcal{U}}$ soit un (ϕ,∇)-module sur B. Alors il existe un (ϕ,∇)-module $M^\dagger$ sur $B^\dagger$ tel que

$$M^\dagger\otimes_{B^\dagger} B \simeq M\otimes_{D^\dagger(0)} D^\dagger_{\mathcal{U}}.$$

On peut également montrer de manière analogue à 3.1, le résultat local suivant (voir aussi [14], 3.3) :

PROPOSITION 4.6. — *Soit M un (ϕ, ∇)-modules sur $B^\dagger$. Alors M est holonome, i.e.* $\mathbf{res}(M \otimes_{D^\dagger_{\mathcal{X}}} D^\dagger(0))$ *est un (ϕ, ∇)-module sur $B^\dagger$.*

Bibliographie

[1] ANDRÉ (Y.). — Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. Math., 148(2), p. 285-317 (2002).

[2] BERTHELOT (P.). — Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules, Proc. Conf. p-adic Analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1454, p. 78-124 (1990).

[3] BERTHELOT (P.). — $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 29, p.185-272 (1996).

[4] BERTHELOT (P.). — Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, Invent. Math, 128, p. 329-377 (1997).

[5] BERTHELOT (P.). — D-modules arithmétiques II descente par Frobenius, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 81, p. 1-135 (2000).

[6] BERTHELOT (P.). — Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules, Bull. Soc. Math. France, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques II, Astérisque No. 279, 2002.

[7] BERTHELOT (P.). — $\mathcal{D}$-modules arithmetiques IV, Variétés caractéristiques En préparation.

[8] CARO (D.). — Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I (2002).

[9] CARO (D.). — Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes, Compos. Math. 142, No. 1, 169-206 (2006).

[10] CARO (D.). — D-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 54, 6, 1943-1996 (2004).

[11] CARO (D.). — Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 114, 81 p. (2005).

[12] CREW (R.). — F-isocrystals and their monodromy groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) 25 no. 4, p. 429-464 (1992).

[13] CREW (R.). — Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. ,(4) 31 no. 6, p. 717-463 (1998).

[14] CREW (R.). — Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on a formal curve, Math. Ann. 336, No. 2, p. 439-448 (2006).

[15] HUYGHE (C.). — Construction et étude de la transformée de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, thèse de Doctorat, Université de Rennes1 (1995).

[16] HUYGHE (C.). — $D^\dagger$-affinité des schémas projectifs, Ann. Inst. Fourier, t. 48, fascicule 4, p. 913-956 (1995).

[17] KATO (K.). — Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1989), Johns Hopkins Univ. Press, p. 191-224 (1988).

[18] Kiran Kedlaya (S.). — Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals on a curve, Math. Res. Lett., 10(2-3), p. 151-159 (2003).

[19] Kiran Kedlaya (S.). — A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math. (2), 160(1), p. 93-184 (2004).

[20] Le Stum (B.) and Trihan (F.). — Log-cristaux et surconvergence, Ann. Inst. Fourier, 51, p. 1189-1207 (2001).

[21] Marmora (A.). — Constantes locales p-adiques. Thèse d'Etat, Université Paris 13 (2006).

[22] Matsuda (B.) and Trihan (F.). — Image directe supérieure et unipotence, J. Reine Angew. Math. 569, 47-54 (2004).

[23] Mebkhout (Z.). — Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, Invent. Math., 148(2), p. 319-351 (2002).

[24] Milne (J.S.). — Etale cohomology, Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., xiii+323 pp (1980).

[25] Montagnon (C.). — Généralisation de la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules à la géométrie logarithmique, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I (2002).

[26] Trihan (F.). — Cohomologie syntomique des $F-T$-cristaux, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 108, p. 1-26 (2002).

[27] Tsuzuki (N.). — Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals, Duke Math. J., 111, no. 3, p. 385-418 (2002).

[28] Virrion (A.). — Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Adolphson, Alan (ed.) et al., Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II. Berlin : Walter de Gruyter. 1039-1112 (2004).