MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN RISS

Analyse harmonique et familles sommables

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 321-325
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__321_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 321-325.

ANALYSE HARMONIQUE ET FAMILLES SOMMABLES

par

Jean RISS

Un théorème d'Orlicz-Pettis, qui a reçu d'intéressantes généralisations de la part de Thomas, peut se traduire en disant que si une fonction additive d'ensembles à valeurs dans un espace normé est σ-additive pour la topologie faible elle est aussi σ-additive pour la topologie de la norme. Un énoncé équivalent est le suivant : si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de fonctions continues définies sur un espace compact, à valeurs réelles, telles que :

- $\forall t \in K \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(t)| < \infty$

- $\forall A \subset \Lambda \qquad t \to \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(t)$ est continue

alors ces sommes sont uniformément convergentes.

Il est évident que dans le cas où les f_λ sont positives, ceci n'est rien d'autre que le théorème de Dini. En fait, on peut se ramener à ce cas en considérant les fonctions $|f_\lambda|^2$ à condition de savoir étudier :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(t)|^2 \quad .$$

Or on peut interpréter ceci comme une partie du second membre d'une relation de Parseval-Bessel (en introduisant l'analyse harmonique sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Lambda)$ des parties de Λ) et en tirer les conclusions cherchées. C'est ce qui va être développé.

1. L'anneau topologique compact $\mathcal{P}(X)$.

Soit X un ensemble quelconque ; on sait que l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(X)$ est d'une façon naturelle muni d'une structure d'anneau et que l'on peut en faire un anneau topologique compact en prenant comme système fondamental de voisinages de l'élément neutre ϕ la famille des idéaux $\mathfrak{I}(F)$

$$\mathfrak{I}(F) = \{ A \ , \ A \subset \complement F\}$$

où F décrit l'ensemble $\mathcal{P}_o(X)$ des parties finies de X . Dans la suite $\mathcal{P}(X)$ est considéré comme muni de cette structure d'anneau topologique. Les propriétés suivantes de $\mathcal{P}(X)$ seront utilisées :

- $\mathcal{P}_o(X)$ est dense dans $\mathcal{P}(X)$,
- le dual du groupe abélien compact $\mathcal{P}(X)$ s'identifie intrinsèquement à $\mathcal{P}_o(X)$ par la formule exprimant la dualité :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}_o(X) & & \mathbb{C} \\ (A \quad , \quad F) & \to & (-1)^{\mathrm{card}\,(AF)} \end{array}$$

- pour l'intégrale de Haar normalisée sur $\mathcal{P}(X)$, l'intégrale d'une fonction continue f à valeurs complexes est donnée par :

$$\lim_{F\to X} \frac{1}{2^{\mathrm{card}\,F}} \sum_{A\subset F} f(A)$$

(limite suivant le filtre intersection avec $\mathcal{P}_o(X)$ du filtre des voisinages de X dans $\mathcal{P}(X)$).

2. Fonctions additives continues.

Soit G un groupe topologique abélien séparé. Une fonction additive continue à valeurs dans G sera une fonction continue

$$\mathcal{P}(X) \xrightarrow{f} G$$

telle que :

$$AB = \phi \Rightarrow f(A + B) = f(A) + f(B) .$$

Une telle fonction est complètement déterminée par sa restriction à $\mathcal{P}_o(X)$ donc aussi par les éléments :

$$f(\{x\})$$

et ceux-ci sont tels que toute famille

$$(f(\{x\}))_{x\in A} \qquad A\subset X$$

est sommable, de somme $f(A)$. Inversement, la donnée d'une famille d'éléments vérifiant ces conditions détermine une f additive continue.

$\mathcal{P}(X)$ étant en particulier un espace de Baire, il est immédiat de vérifier que :

- si $(f_n)_{n\in N}$ est une suite de fonctions continues de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers une fonction additive f alors f est continue.
- si de plus les f_n sont additives, la convergence est uniforme.

Une fonction additive continue vérifie évidemment les deux conditions suivantes :

$$f(\mathcal{P}(X)) \subset \overline{f(\mathcal{P}_o(X))} \quad \text{et} \quad \overline{f(\mathcal{P}_o(X))} \text{ est un compact,}$$

mais réciproquement si l'on suppose que f est additive, elle vérifie ces deux conditions, et si de plus $\overline{f(\mathcal{P}_o(X))}$ ne contient aucun de ses translatés par une translation non nulle, alors f est continue, modulo une fonction additive nulle dans $\mathcal{P}_o(X)$.

Un exemple simple et utile de fonction additive continue est le suivant : Soient X et Y deux ensembles ; associons à chaque $y \in Y$ une partie X_y de X telle que :

$$y' \neq y \Rightarrow X_{y'},\ X_y = \emptyset$$

alors la fonction π

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & & \mathcal{P}(X) \\ B & \to & \pi(B) = \bigcup\limits_{y \in B} X_y \end{array}$$

est une fonction additive continue (cette propriété contient le théorème dit d'associativité des familles sommables).

3. La transformée de Fourier des fonctions additives continues à valeurs complexes.

Soit f une telle fonction ; sa transformée de Fourier $\mathfrak{F}f$, définie sur le groupe discret $\mathcal{P}_o(X)$, est donnée par :

$$\mathfrak{F}f(F) = \begin{cases} 0 & \text{si card } F > 1 \\ -\frac{1}{2}\ f(\{x\}) & \text{si } F = \{x\} \\ \frac{1}{2}\ f(X) & \text{si } F = \emptyset \end{cases}$$

et on a donc la relation :

$$\int_{\mathcal{P}(X)} |f(A)|^2\, dA = \frac{1}{4}\, |f(X)|^2 + \frac{1}{4} \sum_{x \in X} |f(\{x\})|^2$$

4. L'énoncé du problème.

Soit $f : \mathcal{P}(X) \to G$ une fonction additive continue pour une topologie donnée $\mathcal{T}_o$ de G ; peut-on définir sur G des topologies de groupe topologique $\mathcal{T}_1$ plus fine que $\mathcal{T}_o$ et pour lesquelles f est encore continue ?

C'est ce que l'on va essayer de faire. Disons d'abord que l'on arrivera au résultat en utilisant deux types d'arguments :

- on vérifiera d'abord que la restriction de f à $\mathcal{P}_o(X)$ reste continue pour $\mathcal{C}_1$,
- puis par des considérations de nature différente on vérifiera que f est continue pour $\mathcal{C}_1$.

5. Le théorème.

En plus de G donnons-nous un espace topologique T et sur $G \times T$ une fonction à valeurs complexes

$$(g,t) \to \langle g,t \rangle$$

ayant les propriétés suivantes :

- $t \to \langle g,t \rangle$ est continue,
- la restriction de $g \to \langle g,t \rangle$ à tout compact de G est continue
- $g \to \langle g,t \rangle$ est additive.

Posons :

$$\|g\|_K = \sup_{t \in K} | \langle g,t \rangle |$$

où K est un compact de T et définissons $\mathcal{C}_1$ comme étant la borne supérieure de $\mathcal{C}_o$ et de la topologie définie par la famille de distances $\| g_2 - g_1 \|_K$ où K parcourt la famille des parties compactes de T .

Alors la restriction de f à $\mathcal{P}_o(X)$ est encore continue pour la topologie $\mathcal{C}_1$.

En effet, on a :

$$4. \quad \int_{\mathcal{P}(X)} | \langle f(A),t \rangle |^2 \, dA = | \langle f(X),t \rangle |^2 + \sum_{x \in X} | \langle f(\{x\}),t \rangle |^2$$

et il en résulte que :

$$t \to \sum_{x \in X} | \langle f(\{x\}),t \rangle |^2$$

est séquentiellement continue. On en déduit que la convergence de cette somme est uniforme sur tout compact K en examinant successivement

- le cas où K est métrisable,
- le cas où X est dénombrable,
- le cas général.

Cette propriété de convergence uniforme entraîne alors la continuité de la restriction de f à $\mathcal{P}_o(X)$ pour $\mathcal{C}_1$.

Ensuite :

- si G est $\mathcal{C}_1$-complet,
- ou si l'élément neutre de G possède un système fondamental de $\mathcal{C}_1$-voisinages qui sont $\mathcal{C}_o$-fermés, alors f est continue pour $\mathcal{C}_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ORLICZ. - Uber umbedingte Konvergenz in Funktionraümen. I, Studia Math. 4, p. 33-37 (1933). II, ibid. 4, p. 41-47 (1933).

[2] PETTIS. - Linear functionnals and completely additive set functions. Duke Math. J. 4, p. 552-565 (1938).

[3] THOMAS. - Thèse, Paris, 1969, A. O. 3423, (appendice II).

Université de Bordeaux-I
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
351, Cours de la Libération
33 - TALENCE (France)