

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

G. NOEL

## **Espaces de Banach ultraplats et espaces de Lindenstrauss-Pelczynski**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 257-263

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__257_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES DE BANACH ULTRAPLATS ET ESPACES DE LINDENSTRAUSS-PELCZYNSKI

par

G. NOEL

I. Introduction -

La catégorie QESPC des Q-espaces complets a déjà été décrite par M. Waelbroeck dans son exposé. Cette catégorie peut être munie de façon naturelle d'un produit tensoriel, associatif et commutatif. Rappelons qu'un Q-espace complet  $Z$  peut être considéré comme un "quotient formel", noté  $Z = Y|X$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux espaces bornologiques convexes complets, l'espace vectoriel sous-jacent à  $X$  étant un sous-espace vectoriel de  $Y$ , et l'application canonique  $X \rightarrow Y$  étant supposée bornée. La relation  $Z = Y|X$  signifie en fait que  $Z$  est conoyau de cette injection canonique : la suite

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

est exacte dans la catégorie abélienne QESPC.

On peut, de plus, supposer que l'espace  $Y$  est projectif dans QESPC. Un tel espace est un facteur direct d'une somme directe d'espaces de Banach du type  $\ell^1(I)$ . En particulier, un espace de Banach est projectif dans QESPC si et seulement s'il est isomorphe (\*) à un tel espace  $\ell^1(I)$ .

Le produit tensoriel de deux Q-espaces complets  $Z, T$  est défini de la façon suivante : écrivons  $Z = Y|X$  et  $T = U|V$  où les espaces bornologiques convexes complets  $Y$  et  $U$  sont, chacun, une somme directe d'espaces de Banach du type  $\ell^1(I)$ . Alors :

$$Z \otimes_q T = Y \hat{\otimes}_b U \mid (Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U).$$

Dans cette formule,  $\hat{\otimes}_q$  désigne le produit tensoriel que nous définissons dans QESPC, cependant que  $\hat{\otimes}_b$  désigne le produit tensoriel bornologique inductif des espaces bornologiques convexes complets : si  $Y$  (resp.  $U$ ) est la limite inductive des espaces de Banach  $Y_i$  (resp.  $U_j$ ), alors  $Y \hat{\otimes}_b U$  est la limite inductive des espaces de Banach  $Y_i \hat{\otimes}_1 U_j$ , où, cette fois,  $\hat{\otimes}_1$  désigne le produit tensoriel projectif d'espaces de Banach (plus souvent noté  $\hat{\otimes}_\pi$ ). Bien entendu, il convient de montrer que les espaces vectoriels sous-jacents à  $Y \hat{\otimes}_b V$  et  $X \hat{\otimes}_b U$  s'identifient canoniquement à des sous-espaces vectoriels de  $Y \hat{\otimes}_b U$ , ce qui permet de définir  $Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U$  (qui n'est pas leur somme directe). Il convient aussi de montrer que

(\*) Dans cette note, deux espaces de Banach sont dits isomorphes s'il existe une application linéaire continue inversible de l'un sur l'autre.

le  $\mathbb{Q}$ -espace complet  $Z \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} T$  ne dépend qu'à un isomorphisme près des décompositions choisies pour  $Z$  et  $T$ . On trouvera tous les détails concernant les  $\mathbb{Q}$ -espaces dans [3], [4] et [5].

N'importe quel espace de Banach  $E$  peut être considéré comme étant un  $\mathbb{Q}$ -espace. Il suffit d'écrire  $E = E|O$ . On obtient une décomposition  $E = Y|X$  avec  $Y$  projectif dans  $\mathbb{Q}$ ESPC en exprimant que  $E$  est un quotient de  $\ell^1(B)$ , si  $B$  est la boule unité de  $E$ .

Etant donnés deux espaces de Banach,  $E$  et  $F$ , nous souhaitons comparer le  $\mathbb{Q}$ -espace complet  $E \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} F$  à l'espace de Banach  $E \hat{\otimes}_1 F$ . Si  $E = Y|X$  et  $F = U|V$ , où  $Y$  et  $U$  sont des espaces de Banach projectifs, d'une façon générale, nous pouvons seulement affirmer que  $E \hat{\otimes}_1 F$  est le quotient (usuel) de  $Y \hat{\otimes}_1 U$  par l'adhérence de  $Y \hat{\otimes}_1 V + X \hat{\otimes}_1 U$ , ce qui revient à dire que tout morphisme de  $E \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} F$  dans un espace de Banach se factorise à travers  $E \hat{\otimes}_1 F$ . Introduisons la définition suivante :

DEFINITION. - L'espace de Banach  $E$  est dit ultraplat si et seulement si les  $\mathbb{Q}$ -espaces complets  $E \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} F$  et  $E \hat{\otimes}_1 F$  sont isomorphes, quel que soit l'espace de Banach  $F$ .

Nous montrerons ci-dessous que les espaces de Banach ultraplats sont précisément les espaces de type  $\mathcal{L}_1$  introduits par Lindenstrauss et Pelczynski [1]. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant : le  $\mathbb{Q}$ -espace  $Z = Y|X$  est un espace bornologique convexe, si et seulement si  $X$  est un sous-espace fermé de  $Y$ , c'est-à-dire si la bornologie de  $X$  est la bornologie induite par  $Y$ .  $Z$  est alors simplement le quotient usuel  $Y|X$ . En particulier, pour que  $E$  soit ultraplat, il faut et il suffit que  $E \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} F$  soit un espace de Banach, quel que soit l'espace de Banach  $F$ .

## II. Espaces de type $\mathcal{L}_1$ .

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach isomorphes, on pose :

$$d(E, F) = \inf \{ \|A\| \cdot \|A^{-1}\| : A \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } F \}.$$

D'après Lindenstrauss et Pelczynski, [1], un espace de Banach  $E$  est dit de type  $\mathcal{L}_{1, \lambda}$  ( $\lambda \geq 1$ ) si et seulement si tout sous-espace de dimension finie  $S$  de  $E$  est inclus à un sous-espace de dimension finie  $T$  tel que :

$$d(T, \ell_n^1) \leq \lambda$$

où  $n = \dim T$ , et où  $\ell_n^1$  est l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme  $\sum_{i=1}^n |\xi_i|$ .

Un espace de Banach est dit de type  $\mathcal{L}_{1,\lambda}$  s'il est de type  $\mathcal{L}_{1,\mu}$  pour tout  $\mu > \lambda$ . Il est dit de type  $\mathcal{L}_1$  s'il est de type  $\mathcal{L}_{1,\lambda}$  pour un certain  $\lambda$ .

Nous utiliserons encore le produit tensoriel  $\hat{\otimes}_1$  introduit par P. Saphar, [7], (où il est noté  $g_1 \setminus$ ) : tout tenseur  $u \in E \otimes F$  peut être considéré comme un opérateur de rang fini, donc (absolument) sommant de  $E'$  dans  $F$ . (La notion d'opérateur sommant remonte à Grothendieck. Elle est traitée de façon détaillée dans le livre de A. Pietsch, [6]). Si nous notons  $S_1(E', F)$  l'espace des opérateurs sommants de  $E'$  dans  $F$ , le produit tensoriel  $E \hat{\otimes}_1 F$  est l'adhérence de  $E \otimes F$  dans  $S_1(E', F)$ . La norme de  $u$  dans  $E \hat{\otimes}_1 F$  est donc l'infimum des  $\rho$  tels que :

$$\forall x'_1, \dots, x'_m \in E' : \sum_{j=1}^m \left\| \sum_{i=1}^n \langle x'_j, x_i \rangle y_i \right\| \leq \rho \sup_{\|v\| \leq 1} \sum_{j=1}^m |\langle x'_j, v \rangle|.$$

En particulier, il est immédiat que

$$\|x \otimes y\|_1 \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et ceci signifie que l'application bilinéaire canonique  $E \times F \rightarrow E \hat{\otimes}_1 F$  est continue et définit donc une application linéaire canonique de  $E \hat{\otimes}_1 F$  dans  $E \hat{\otimes}_1 F$ , de norme au plus 1 :

$$\|u\|_1 \leq |u|_1$$

(nous notons d'une simple barre la norme dans le produit tensoriel projectif).

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME. - Soit  $E$  un espace de Banach. Quel que soit l'entier naturel  $n$ , l'opérateur de transposition  $\sigma : \ell_n^1 \otimes E \rightarrow E \otimes \ell_n^1 : \sum_i \xi_i \otimes x_i \rightarrow \sum_i x_i \otimes \xi_i$  se prolonge en un opérateur linéaire continu, de norme  $\leq 1$ , de  $\ell_n^1 \hat{\otimes}_1 E$  dans  $E \hat{\otimes}_1 \ell_n^1$ .

Désignons par  $(\delta_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) la base canonique de  $\ell_n^1$ , ou  $\ell_n^\infty = (\ell_n^1)'$  :  $\delta_i = (\delta_{ij})$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Soit  $u = \sum_{i=1}^s x_i \otimes \xi_i \in E \otimes \ell_n^1$ . On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^s x_i \otimes \xi_i \right\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^s x_i \xi_{ij} \right) \otimes \delta_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^s x_i \xi_{ij} \right\| \cdot \|\delta_j\| =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^s x_i \xi_{ij} \right\| = \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^s \langle \delta_j, \xi_i \rangle x_i \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^s \xi_i \otimes x_i \right\|_1 \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \varphi \in \ell_n^1}} \sum_{j=1}^n |\langle \delta_j, \varphi \rangle| \leq \left\| \sum_{i=1}^s \xi_i \otimes x_i \right\|_1$$

THEOREME. - Soit E un espace de Banach de type  $\lambda_{1,\lambda+}$ . Quel que soit l'espace de Banach F, l'opérateur de transposition  $\sigma : E \otimes F \rightarrow F \otimes E$  se prolonge en un opérateur linéaire continu de norme  $\leq \lambda$ , de  $E \hat{\otimes}_1 F$  dans  $F \hat{\otimes}_1 E$ .

La démonstration utilise la propriété suivante (voir [7]), qui exprime que la norme de  $E \hat{\otimes}_1 F$  est une  $\otimes$ -norme au sens de Grothendieck : si  $u \in E \otimes F$ , alors :

$$\|u\|_1 = \inf \|u\|_{S \hat{\otimes}_1 T}$$

où S (resp. T) parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E (resp. F), tels que  $u \in S \otimes T$ , et où  $\|u\|_{S \hat{\otimes}_1 T}$  désigne la norme de u dans  $S \hat{\otimes}_1 T$ . On sait que cette propriété est également valable pour la norme de  $E \hat{\otimes}_1 F$ .

Considérons alors un tenseur  $u \in E \otimes F$ . Soient S et T des sous-espaces de dimension finie de E et F respectivement, tels que  $u \in S \otimes T$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque E est de type  $\lambda_{1,\lambda+}$ , il existe un sous-espace de dimension finie  $S_1$  de E tel que :

$$d(S_1, \ell_n^1) \leq \lambda + \varepsilon.$$

Désignons alors par A un isomorphisme de  $S_1$  sur  $\ell_n^1$  tel que :

$$\|A\| \leq 1 \text{ et } \|A^{-1}\| \leq \lambda + 2\varepsilon.$$

Il vient :

$$\|\sigma u\|_1 \leq \|\sigma u\|_{T \hat{\otimes}_1 S_1} \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|1 \otimes A \cdot \sigma u\|_{T \hat{\otimes}_1 \ell_n^1}.$$

Du lemme précédent, on déduit alors :

$$\|\sigma u\|_1 \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|A \otimes 1 \cdot u\|_{\ell_n^1 \hat{\otimes}_1 T} \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|u\|_{S_1 \hat{\otimes}_1 T} \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|u\|_{S \hat{\otimes}_1 T}.$$

Cette inégalité étant vraie quels que soient S, T, il vient :

$$\|\sigma u\|_1 \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|u\|_1.$$

Et enfin, puisque  $\varepsilon$  est arbitraire :  $\|\sigma u\|_1 \leq \lambda \|u\|_1$ .

COROLLAIRE 1. - Si E est un espace de Banach de type  $\lambda_{1,\lambda+}$ , alors les espaces  $E \hat{\otimes}_1 F$  et  $E \hat{\otimes}_1 F$  sont isomorphes quel que soit l'espace de Banach F. De plus,  $d(E \hat{\otimes}_1 F, E \hat{\otimes}_1 F) \leq \lambda$ .

En effet, d'après le théorème précédent, nous pouvons écrire une suite d'applications canoniques continues :  $E \hat{\otimes}_1 F \rightarrow E \hat{\otimes}_1 F \rightarrow F \hat{\otimes}_1 E$ . La thèse se déduit de ce que les espaces  $E \hat{\otimes}_1 F$  et  $F \hat{\otimes}_1 E$  sont isométriques.

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace de Banach de type  $\lambda_1$ . Si G est un espace de Banach et F un sous-espace fermé de G, alors  $E \hat{\otimes}_1 F$  est un sous-espace fermé de  $E \hat{\otimes}_1 G$ .

En effet,  $E \hat{\otimes}_1 F$  est isomorphe à  $E \hat{\otimes}_1 F$ ; cet espace est un sous-espace fermé de  $E \hat{\otimes}_1 G$  (car  $S_1(E', F)$  est un sous-espace fermé de  $S_1(E', G)$ ). Et enfin,  $E \hat{\otimes}_1 G$  est isomorphe à  $E \hat{\otimes}_1 G$ .

THEOREME. - Tout espace de Banach E de type  $\lambda_1$ , est ultraplatt.

Supposons d'abord qu'on ait  $E = \ell^1(I)$ . Soit F un espace de Banach quelconque, avec  $F = \ell^1(J)/G$ . On a par définition :

$$E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \mid E \hat{\otimes}_1 G .$$

D'après le corollaire 2,  $E \hat{\otimes}_1 G$  est un sous-espace fermé de  $E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J)$ . Il en résulte que  $E \hat{\otimes}_q F$  est un espace de Banach, donc que  $E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 F$ .

Passons au cas général : E est de type  $\lambda_1$ . Le foncteur  $E \hat{\otimes}_q$  étant exact à droite, la suite suivante est exacte :

$$E \hat{\otimes}_q G \rightarrow E \hat{\otimes}_q \ell^1(J) \rightarrow E \hat{\otimes}_q F \rightarrow 0 .$$

Comme on vient de le voir,  $E \hat{\otimes}_q \ell^1(J)$  est un espace de Banach isomorphe à  $E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J)$ . Par conséquent, le morphisme  $E \hat{\otimes}_q G \rightarrow E \hat{\otimes}_q \ell^1(J)$  se factorise en :

$$E \hat{\otimes}_q G \xrightarrow{u} E \hat{\otimes}_1 G \xrightarrow{v} E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) .$$

Des travaux de Grothendieck, on déduit facilement, l'espace E possédant la propriété d'approximation, que v est un monomorphisme. Comme d'autre part, u est un épimorphisme, la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow E \hat{\otimes}_1 G \rightarrow E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \rightarrow E \hat{\otimes}_q F \rightarrow 0 .$$

On a donc  $E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \mid E \hat{\otimes}_1 G$ , et la démonstration se termine comme dans le cas où  $E = \ell^1(I)$ .

### III. Espaces de Banach ultraplats.

THEOREME. - Soit E un espace de Banach ultraplatt. Soient G un espace de Banach, et F un sous-espace fermé de G. Si E ou F est approximant,  $E \hat{\otimes}_1 F$  est un sous-espace fermé de  $E \hat{\otimes}_1 G$ .

Considérons la suite exacte  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow G/F \rightarrow 0$ , et appliquons le

foncteur exact à droite  $E \hat{\otimes}_Q$ , la suite :

$$0 \rightarrow E \hat{\otimes}_Q F \rightarrow E \hat{\otimes}_Q G \rightarrow E \hat{\otimes}_Q (G/F) \rightarrow 0$$

est exacte à droite. Comme  $E$  est ultraplatt, cette suite s'écrit aussi :

$$0 \rightarrow E \hat{\otimes}_1 F \rightarrow E \hat{\otimes}_1 G \rightarrow E \hat{\otimes}_1 (G/F) \rightarrow 0 .$$

Si  $E$  ou  $F$  est approximant, la suite est exacte, de sorte que le  $Q$ -espace complet  $E \hat{\otimes}_1 G \mid E \hat{\otimes}_1 F$  coïncide avec l'espace de Banach  $E \hat{\otimes}_1 (G/F)$ . Donc,  $E \hat{\otimes}_1 F$  est un sous-espace fermé de  $E \hat{\otimes}_1 G$ .

COROLLAIRE 1. - Si  $E$  est un espace de Banach approximant ultraplatt, alors  $E'$  est un espace de Banach injectif, et  $E$  est de type  $\lambda_1$ .

Soit  $G$  un espace de Banach, et  $F$  un sous-espace fermé de  $G$ . Toute application linéaire continue de  $F$  dans  $E'$  provient d'une forme linéaire continue sur  $E \hat{\otimes}_1 F$ . D'après le résultat précédent, et le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge à  $E \hat{\otimes}_1 G$ , et on obtient ainsi une application de  $G$  dans  $E'$  qui prolonge l'application donnée. Par conséquent,  $E'$  est injectif et d'après les résultats de [2],  $E$  est de type  $\lambda_1$ .

COROLLAIRE 2. - Soit  $E$  un espace de Banach ultraplatt. Soient  $G$  un espace de Banach et  $F$  un sous-espace fermé approximant de  $G$ . Toute application linéaire continue de  $F$  dans  $E'$  se prolonge en une application linéaire continue de  $G$  dans  $E'$ .

La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LINDENSTRAUSS (J.) and PELCZYNSKI (A.). - Absolutely summing operators in  $\lambda_p$ -spaces and their applications. *Studia Math.* 29, p. 275-326, (1968).
- [2] LINDENSTRAUSS (J.) and ROSENTHAL (H.P.). - The  $\lambda_p$ -spaces. *Israël Journal of Math.* 7, p. 325-349, (1969).
- [3] NOEL (G.). - Une immersion de la catégorie des espaces bornologiques convexes séparés dans une catégorie abélienne. *C.R.A.S.* 269, p. 195-197, (1969).
- [4] NOEL (G.). - Sur le complété d'un  $Q$ -espace. *C.R.A.S.* 269, p. 238-240, (1969).

- [5] NOEL (G.). - Produit tensoriel et platitude des  $Q$ -espaces. Bull. Soc. Math. Belg. 22, p. 119-142, (1970).
- [6] PIETSCH (A.). - Nukleare lokalkonvexe Räume. Akademie Verlag (1965), Berlin.
- [7] SAPHAR (P.). - Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires. Studia Math. 38, p. 71-100, (1970).

Université de l'Etat à MONS  
Faculté des Sciences  
19, Avenue Maistriau  
B 7000 MONS  
(Belgique)

---