PIERRE LELONG

Applications polynomiales et applications entières dans les espaces vectoriels topologiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 227-239
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__227_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 227-239.

APPLICATIONS POLYNOMIALES ET APPLICATIONS ENTIÈRES DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par

Pierre LELONG

L'extension de l'analyse complexe à la dimension infinie conduit naturellement à étendre les notions d'applications analytiques et de fonctions plurisousharmoniques aux espaces vectoriels topologiques. On étudiera ici des problèmes préalables permettant d'introduire des notions utiles. Le lecteur trouvera les démonstrations détaillées dans les articles [3, f] et [3, g] et on donnera ici seulement un résumé pour certaines d'entre elles.

1. - Applications polynomiales. Soient E , F deux espaces vectoriels topologiques sur le même corps K ($K = R$ ou $\mathbb{C}$) . Une application $x \to P(x)$ de E dans F est dite polynomiale homogène si elle se relève en une application m-linéaire $f(x_1,.., x_m) \in \mathrm{Hom}_s(E^m , F)$ symétrique, telle qu'on ait $f(x,...x) = P(x)$, c'est-à-dire telle que P soit la restriction de f à la diagonale de E^m : f est unique et donnée, par exemple, par :

$$(1) \qquad f(x_1,..., x_m) = \frac{1}{m!} \Sigma(-1)^{m-|\varepsilon|} P(x+\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_m x_m) = L_m(P)$$

où $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_m$, et $\varepsilon_k = (0,1)$.

Soit $Q^m(E, F)$ l'espace vectoriel sur K des applications polynomiales homogènes de degré m : L'isomorphisme L_m défini par (1) : $Q^m(E,F) \to \mathrm{Hom}_s(E^m, F)$, conserve les familles équicontinues. On montre sans peine que pour une famille H d'applications polynomiales homogènes de degré m , l'équicontinuité en un point de E équivant à l'équicontinuité en tout point de E .

On a l'énoncé suivant : pour qu'une application $P = E \to F$ appartienne à $Q^m(E, F)$ il faut et il suffit que soient vérifiées les propriétés suivantes pour tous x , $y \in E$, $y \neq 0$, et $\lambda \in K$:

a) $P(x + \lambda y)$ est un polynôme de λ de degré borné, à coefficients dans un sur-espace vectoriel $\hat{F}$ de F .

b) On a $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$.

On définit alors les applications polynomiales non homogènes de degré n soit à partir de la condition a) soit comme somme finie d'éléments $P_i \in Q^i(E, F)$, $1 \leqslant i \leqslant m$: les deux définitions obtenues ainsi des applications polynomiales sont algébriquement équivalentes.

2. - <u>Lemmes de transport</u>. Supposons E et $F \in$ (E.V.T. sur K) , $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; soient $B_1 = \{U_i\}$, $B_2 = \{W_j\}$ des bases de voisinages disqués de l'origine dans E et F ; pour $W \in B_2$, notons W_p un élément de B_1 qui vérifie $W_p + W_p + \ldots$ (p fois) $\subset W$. Si F est localement convexe, on prendra $W_p = p^{-1} W$. On appellera lemme de transport une proposition qui permet de passer pour les applications polynomiales d'une majoration au voisinage de $x^o \in E$ à une majoration au voisinage de l'origine. On note e la base des logarithmes népériens. On obtient plusieurs lemmes de transport selon la précision des hypothèses sur E , F .

<u>Cas A</u> (cas général) . Soit $P \in Q^m(E, F)$ et $P(x^o + U) \subset W_{2^m}$, pour $x^o \in E$, $U \in B_1$, $W \in B_2$. Alors on a : $P(e^{-1} U) \subset W$.

<u>Cas B</u> : F est localement convexe. Soit $P(x^o + U) \subset W$, $U \in B_1$, $W \in B_2$; alors on a $P(\frac{U}{2e}) \subset W$, cf. [1,a] et [1,b] .

<u>Cas C</u> : $K = \mathbb{C}$, F est localement pseudo-convexe. Si l'on a $P(x^o + U) \subset W$, on a $P(U) \subset W$.

Le cas C nous conduit à rappeler deux notions que nous avons introduites récemment, cf. [3, d] et [3, f] .

3. - <u>Topologies localement pseudo-convexes sur un espace complexe.</u> On rappelle deux définitions.

DEFINITION 1. - $E \in$ (E.V.T. <u>sur</u> $\mathbb{C}$) <u>est dit localement pseudo-convexe s'il existe une base</u> $B = \{W_i\}$ <u>des voisinages de l'origine donnée par</u> :

$$W_i = [x \in E \ ; \ q_i(x) < 1]$$

<u>où</u> q_i , <u>jauge de</u> W_i , <u>est une fonction plurisousharmonique continue et homogène de degré un, c'est-à-dire vérifie</u> $q_i(\lambda y) = |\lambda| \, q_i(y)$ <u>pour</u> $\lambda \in \mathbb{C}$ <u>et</u> $y \in E$.

On appellera <u>quasi-norme</u> sur E toute fonction plurisousharmonique homogène de degré 1 . Rappelons que si $f(x)$ est une fonction plurisousharmonique homogène de degré $\sigma > 0$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $\log f(x)$ est plurisousharmonique ; il en résulte que pour tout $\alpha > 0$, f^α est plurisousharmonique.

DEFINITION 2. - <u>Soit</u> E <u>un espace complexe localement pseudo-convexe et séparé pour sa topologie ; il sera dit C-tonnelé si toute famille</u> $q_i(x)$ <u>de quasi-normes continues, simplement bornée sur</u> E <u>est localement bornée supérieurement</u>.

<u>Remarques</u> :

1) Une semi-norme continue sur $E \in$ (E.V.T. sur $\mathbb{C}$) est une quasi-norme continue. Donc les espaces complexes localement convexes sont des espaces localement

pseudo-convexes. Les espaces tonnelés au sens usuel ou R-tonnelés, sont exactement les espaces localement convexes séparés pour lesquels une famille simplement bornée de semi-normes continues est localement bornée supérieurement ; donc si l'on a E (E.V.T. sur $\mathbb{C}$, C-tonnelé), E étant muni d'une topologie localement convexe séparée, celle-ci en fait un espace R-tonnelé : E (E.V.T. sur $\mathbb{C}$), C tonnelé et ELC, est R-tonnelé.

2) La propriété de la définition 2) est équivalente à la suivante : toute famille $q_i(x)$ de quasi-normes continues pour laquelle on a $\pi(x) = \sup_i q_i(x) < \infty$ pour tout $x \in E$ admet une majorante plurisousharmonique pour laquelle on peut prendre $\pi^* = \text{reg sup } \pi$; π^* régularisée supérieure de π est définie par $\pi^*(x) = \lim\sup \pi(x')$, $x' \to x$; π^* est lui-même une quasi-norme.

3) Les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ seront considérés dans la suite comme des espaces sur R avec une structure particulière.

4. - <u>Extension du théorème de Banach-Steinhaus aux applications polynomiales. Familles de degré borné.</u> Rappelons que le théorème de Banach-Steinhaus énonce qu'un ensemble $H \subset L(E, F)$ est équicontinu si l'une des conditions est vérifiée, E, F étant séparés et H simplement borné :

a) E est espace de Baire ,

b) E est R-tonnelé et F est localement convexe.

On désignera par $P^m(E, F)$ l'espace vectoriel sur K (K = R ou $\mathbb{C}$) des applications polynomiales homogènes de degré m qui sont <u>continues</u>. On obtient :

THEOREME 1. - <u>Soit</u> $H \subset P^m(E, F)$ <u>une famille d'applications polynomiales homogènes continues</u> $P_i(x)$ <u>de degré</u> m ; <u>on suppose que pour tout</u> x <u>d'un ensemble</u> $A \subset E$, <u>l'image</u> $H(x) = \{P_i(x)\}$ <u>de la famille est un borné</u> B_x <u>de</u> F . <u>Alors</u> H <u>est équicontinue dès que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée</u> (<u>on pose</u> n_i = <u>degré</u> P_i) :

1°) K = R A <u>est non maigre</u> ; (<u>E est alors espace de Baire</u>)

2°) K = C a) A <u>est non maigre</u>

b) A = E , E <u>est</u> C-<u>tonnelé</u> , F est loc. ps.-convexe.

Soient U_i et W_j des bases de voisinages disqués de l'origine dans E et F respectivement. Pour la démonstration, on remarque que pour 1° et 2° a), l'hypothèse entraîne l'existence, pour tout $W \in B_2$ d'un $U \in B_1$ et d'un point $x^o \in E$ tels qu'on ait, quel que soit l'indice i :

$$P_i(x^o + U) \subset W .$$

Alors le lemme de transport (Cas A) fournit l'équicontinuité [cf. 3,f]

Pour le cas 2° b), on prend W déterminé par $q_W(y) < 1$, q_W quasi-norme continue :

$$L_{W,i}(x) = [q_W \circ P_i(x)]^{1/n_i}$$

est une quasi-norme continue et l'énoncé découle du fait que E est C-tonnelé.

5. - Familles de degré non borné. Les lemmes de transport, cas B et C s'appliquent ; dans les énoncés qui suivent, on supposera toujours les topologies séparées. Dans [3, f et 3, g] on a établi l'énoncé général :

THEOREME 2. - *Soit* $H = \{P_i\}$ *une famille d'applications polynomiales homogènes continues* $E \to F$. *On suppose que pour chaque* $x \in A$, $A \subset E$, *il existe un borné* $B_x \subset F$ *et* $\sigma_x > 0$, *tels qu'on ait* :

$$(2) \qquad P_i(x) \in \sigma_x^{n_i} B_x \ .$$

Alors pour tout $W \in B_2$, *il existe* $U \in B_1$ *de jauge* $p_U(x)$ *tel qu'on ait* :

$$(3) \qquad P_i(x) \subset W, \ \text{pour} \ x \in U \ \text{et} \ q_W \circ P_i(x) \leqslant [p_U(x)]^{n_i} ,$$

pour tout $x \in E$, q_W *étant la jauge de* W , *lorsque l'une des hypothèses suivante est satisfaite* , le corps de base K étant R ou C :

a) $K = R$, F *est localement convexe*, A *est non maigre dans* E .

b) $K = C$, F *est localement pseudo-convexe*, A *est non maigre dans* E .

c) $K = C$, E *est C-tonnelé*, F *est localement pseudo-convexe*, $A = E$.

d) $K = C$, E *est espace de Baire et a un voisinage de l'origine borné*, F *est localement pseudo-convexe*, A *n'est pas un ensemble maigre et contenu dans les* $-\infty$ *d'une fonction* $S(x)$ *plurisousharmonique sur* E .

La démonstration de a), b), c) utilise essentiellement les lemmes de transport (cas B et C) par contre, celle de d) repose sur une propriété plus fine des familles de quasi-normes continues. On l'énoncera ici pour une classe plus générale de fonctions plurisousharmoniques. Cette classe $S_\sigma(E)$ (cf. [3, g]) se présente comme la classe de fonctions plurisousharmonques de "plus petite croissance".

DEFINITION. - *Une fonction* f *plurisousharmonique sur* $E \in$ (E.V.T. *sur* $\mathbb{C}$) *est dite de la classe* $S_\sigma(E)$ *si pour tout* $y \in E$, *on a* :

$$(4) \qquad \limsup_{|u| \to +\infty} \frac{f(uy)}{\log|u|} \leqslant \sigma \ .$$

En fait, si (4) est vérifié pour tout $y \in A$, A absorbant, on a $f \in S_\sigma(E)$; si de plus, on a $f(x) \leqslant M$ pour $x \in V$, $V \in B_1$, on a $f(x) \leqslant M + \sigma \log^+ p_V(x)$ sur tout E . Si $f \in S_\sigma(E)$, $L(x,y) = \limsup \dfrac{f(x+uy)}{\log|u|}$ pour $|u| \to +\infty$ est majoré par σ quels que soient x , y dans E (cf. [3, g]) .

Remarque : La classe $S_o(E)$ est formée de constantes, c'est une généralisation d'une propriété classique des fonctions sousharmoniques.

THEOREME 3. - Soit $E \in$ (E.V.T. sur $\mathbb{C}$) et soit $\{f_i\}$, $f_i \in S_\sigma(E)$ et f_i continue. Si $M(x) = \sup_i f_i(x)$ est fini pour x appartenant à un ensemble $A \in E$ alors il existe $M_o < \infty$, et un voisinage disqué $U \in B_1$ tel qu'on ait :

(5) $f_i(x) \leqslant M_o + \sigma \log^+ p_U(x)$ pour tout $x \in E$ et tout i, dans les deux cas :

a) A est non maigre (E est alors espace de Baire).

b) E est espace de Baire, a un voisinage V de l'origine borné et A n'est pas simultanément maigre et contenu dans les $-\infty$ d'une fonction $S(x)$ plurisousharmonique dans E .

Le théorème 3 s'applique aux quasi-normes car si q est une quasi-norme, $\log q$ appartient à $S_1(E)$. Du théorème 3 découle alors la démonstration du théorème 2, cas d). Mais le théorème 3 permet de traiter le cas des familles $\{P_i\}$ d'applications polynomiales non homogènes, de degré non borné, car si q est une quasi-norme continue sur F et P une application polynomiale de degré n_i , continue, $E \to F$, alors

$\frac{1}{n_i} \log q \circ P_i(x)$ est de classe $S_1(E)$ et continue. On obtient :

THEOREME 4. - Soit P_i une famille d'applications polynomiales continues $E \to F$, non nécessairement homogènes qui vérifie la condition (2) du théorème 2 pour $x \in A$, $A \subset E$, où n_i = degré P_i n'est pas nécessairement borné. On suppose que E et F sont des espaces vectoriels complexes, localement pseudo-convexes. Soit $\{W_\alpha\}$ une base de voisinages disqués de l'origine dans F donnés par $q_\alpha(y) < 1$, où q_α est une quasi-norme continue. Alors à tout W_α correspond un voisinage disqué de l'origine dans E , soit U_α , et un nombre M_α , de manière qu'on ait :

$$\log q_\alpha \circ P_i(x) \leqslant n_i \, [\log M_\alpha + \log^+ P_\alpha(x)]$$

où $p_\alpha(x)$ est la jauge de U_α , dès que l'une des deux propriétés a) ou b) du théorème 3 est vérifiée.

Remarque : Pour une famille $H = \{f_i\}$ de fonctions plurisousharmoniques de classe $S_\sigma(E)$, il est équivalent d'être localement bornée supérieurement sur E, ou de vérifier une majoration du type (5), ou encore d'être bornée supérieurement sur un ouvert ω de E.

Pour les démonstrations, notamment celle du théorème 4, on renvoie à [3, g]. La partie b) utilise le fait que dans un espace de Baire et pour des fonctions plurisousharmoniques continues $h_i(x)$, il existe un "théorème de Hartogs" : si $h_m(x)$ est une suite localement bornée supérieurement de telles fonctions et si l'on pose :

$\sup_m h_{m+s}(x) = g_s(x)$, g_s^* régularisée supérieure de g_s ,

$\lim \sup_m h_m(x) = \lim_s g_s(x) = g(x)$, g^* régularisée supérieure de g

$$\gamma(x) = \lim_s g_s^*(x)$$

alors, si $\gamma(x)$ est continue, on a :

$$\gamma(x) = g^*(x)$$

qui équivaut à la commutativité d'un diagramme où les flèches horizontales matérialisent l'opération $g \to g^* = \text{reg sup } g$ et la flèche verticale le passage à la limite décroissante quand $s \to +\infty$, cf. [5]).

6. - Applications analytiques $E \to F$, $K = \mathbb{C}$.

DEFINITION. - On dira qu'une application $x \to f(x)$ d'un domaine $G \subset E$ dans F normé est analytique si :

a) f est continue,

b) pour chaque point $x \in G$, il existe un voisinage $x + U$, et un développement

$$f(x+h) = \sum_0^\infty P_m(h) \tag{6}$$

qui converge (simplement) pour $h \in U$, P_m étant une application polynomiale homogène continue de degré m.

S'il existe un borné B tel que l'on ait $P_m(h_o) \subset B$, alors pour $\tau \in C$, $|\tau| < 1$, on a $P_m(\tau h_o) \subset \tau^m B$. Si F a les deux propriétés :

a) F est localement convexe,

b) F est séquentiellement complet,

(6) converge (uniformément) sur le disque $h = uh_o$, $|u| \leqslant \tau < 1$. Donc si $\{P_m(h)\}$ est borné en tout point de $A \subset E$, (6) converge pour $h \in \tau A_d$, où A_d est

l'enveloppe disquée de A et τ tout nombre vérifiant $|\tau| < 1$.

Nous supposons dans ce qui suit E , $F \in$ (E.V.T. sur $\mathbb{C}$) , F localement convexe et séquentiellement complet.

Alors, (cf. [1, b]), si U est un ensemble de E coupé par les sous-ensembles vectoriels de dimension 1 selon un ouvert de $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes pour la série (6), même sans supposer les P_m continus :

a) pour tout $h \in U$, (6) converge,

b) pour tout $h \in U$, $P_m(h)$ est un borné $B_h \subset F$,

c) pour toute semi-norme q d'une famille fondamentale Γ sur F , la série $\Sigma\, q \circ P_m(h)$ converge pour $h \in U$.

En général, si la topologie de F est définie par une famille q_λ de semi-normes, on établira par les énoncés précédents l'existence d'un voisinage de l'origine U_λ dans E tel que (6) converge en semi-norme q_λ pour $h \in U_\lambda$. Par exemple, si E est espace de Baire, et A absorbant (A est alors non maigre), si $\{P_m(h)\}$ est simplement borné pour $h \in A$, U_λ existe pour tout $q_\lambda \in \Gamma$. Mais il n'en résulte pas directement l'existence d'un voisinage U de l'origine <u>indépendant de</u> λ dans lequel (6) soit convergent; Une définition moins stricte de l'analyticité demande que pour tout q_λ, il existe U_λ dans lequel (6) converge [cf (4)].

7. - <u>Cas où</u> F <u>est un espace de Banach</u>. On a alors :

THEOREME 5. - <u>Soit</u> $E \in$ (E.V.T. <u>sur</u> $\mathbb{C}$) , F <u>espace de Banach complexe et</u> $P_m(h)$ <u>une suite d'applications polynomiales homogènes continues</u>, m = degré P_m . <u>Considérons la série</u> :

$$f(x + h) = \sum_{0}^{\infty} P_m(h) \quad . \tag{7}$$

<u>Pour qu'il existe un voisinage</u> U <u>disqué ouvert de l'origine où (7) converge et</u> f <u>soit une application analytique</u> $U \to F$, <u>il suffit que la suite</u> $\{P_m(h)\}$ <u>soit bornée pour</u> $h \in A$, $A \subset E$, <u>et que</u> (E , A) <u>vérifient les conditions</u> :

a) E <u>est C-tonnelé et</u> A <u>est absorbant.</u>

b) E <u>est espace de Baire et</u> A <u>est non maigre</u>.

c) E <u>est espace de Baire, a un voisinage borné de l'origine et</u> A <u>n'est pas simultanément maigre et contenu dans les</u> $-\infty$ <u>d'une fonction</u> $S(x)$ <u>plurisousharmonique dans</u> E .

En effet, si a) est vérifié, d'après le théorème 3, il existe un voisinage disqué ouvert de l'origine dans E , soit V , de jauge $p_V(x)$, et $M, 0<M<\infty$, tels qu'on ait :

$$\log \| P_m(h) \| < m\, [\log M + \log p_V(h)] \quad . \tag{8}$$

On a alors $\|P_m(h)\| \leqslant \tau^m M^m$ pour $h \in \tau V$, $\tau > 0$.

On prend τ vérifiant $0 < \tau < M^{-1}$. Alors (7) converge uniformément pour $h \in \tau V = U$; la somme $f(x + h)$ est continue pour $h \in U$. On vérifie facilement comme dans le cas classique que si h_o est point intérieur de U, il existe un développement $f(x + h_o + h') = \Sigma\, Q_m(h')$, Q_m application polynomiale homogène continue qui converge dans un voisinage de $x + h_o$; f est donc une application analytique pour $h \in U$.

Les cas b) et c), grâce au théorème 3 conduisent aussi à la majoration (8) et la démonstration s'achève de même.

COROLLAIRE 1. - Si $P_m(h)$ vérifie la condition (2) pour les h d'un ensemble A, $A \subset E$, si l'enveloppe disquée de A est absorbante, et si E est espace de Baire et F un espace de Banach, alors il existe un voisinage disqué U de l'origine, tel que (7) converge pour $h \in U$ et y soit analytique de h.

En effet, pour h_o fixé dans A, considérons le disque $h = uh_o$, $u \in \mathbb{C}$, $|u| \leqslant \sigma_x^{-1}$; $0 < \sigma_x < \infty$; la réunion A' de ces disques est absorbante et $\{P_m(h)\}$ est borné pour $h \in A'$. On a $E \subset \bigcup_n n\, A'$, $n \in \mathbb{N}$, de sorte que A' n'est pas maigre. Le théorème 4, b) s'applique donc.

De même, on a :

COROLLAIRE 2. - Soient E et F des espaces de Banach complexes et P_m une suite d'applications polynomiales homogènes continues, simplement bornée pour $h \in A$, $A \subset E$, où A n'est pas un ensemble maigre et contenu dans les $-\infty$ d'une fonction plurisousharmonique dans E. Alors il existe un voisinage disqué U de l'origine tel que (7) converge et représente une application analytique pour $h \in U$.

8. - Applications entières $E \to F$. On dira que $f : E \to F$ est entière si f est analytique à valeurs dans F, au voisinage de tout point $x \in E$. On représente par $H(E, F)$ l'espace vectoriel des applications entières $E \to F$.

DEFINITION. - $f \in H(E, F)$ est dite de type borné si tout borné $B \subset E$ a son image $f(B)$ bornée dans F.

En général $f \in H(E, F)$ n'est pas de type borné. Exemple :
$E = L^2(z_k\,,\ \Sigma|z_k|^2 < \infty)$, $F = \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_0^\infty z_k^k$; soit $M(r) = \sup |f(z)|$ pour $\|z\| \leqslant r$. Alors $M(r) \leqslant 1 + r + r^2 \leqslant 3$ pour $r \leqslant 1$, mais $M(r) = +\infty$ si $r > 1$ (cf. 3, b). Une fonction plurisousharmonique ou une application analytique ne sera pas en général de type borné.

Soit F normé : on dira que $f \in H(E, F)$ est du type de croissance $\Psi(r)$, où Ψ est une fonction croissante convexe de $\log r$, s'il existe un ensemble borné $B \subset F$, et un voisinage disqué de l'origine, soit V dans E tels que l'on ait pour tout $r>0$,

$$f(rV) \subset \Psi(r) B . \tag{9}$$

(Cette définition n'est pas modifiée si on remplace Ψ par Ψ_k définie par $\Psi_k(r) = \Psi(kr)$, $k>0$) . On pourra préciser en disant que f est du type (Ψ , V , B) si (9) est vérifié pour tout $r>0$.

Exemple : $f \in H(E, F)$ est dit du type exponentiel si (9) est vérifié pour $\Psi(r) = e^r$, c'est-à-dire si $e^{-r} f(rV)$ demeure borné dans F .

Notons d'abord un "théorème de Liouville" pour les applications entières $E \to F$ dès qu'on connait une norme q continue sur F .

THEOREME 6. - Soit $f \in H(E, F)$, $F \in$ (E.L.C. séparé) et q une norme continue sur F . Si pour tout $x \in A$, A absorbant, on a :

$$\limsup (\log |u|)^{-1} \log q \circ f(ux) = 0 , \quad |u| \to +\infty , \tag{10}$$

alors f est une application constante.

En effet, pour chaque x fixé, $x \neq 0$ (10) entraîne, A étant absorbant: $\log q \circ f(ux) = \text{constante} = \log q \circ f(0)$, donc $q \circ f(x) = q \circ f(0)$ pour tout $x \in E$. Alors on a :

$$q \circ [f(ux) - f(0)] \leqslant 2\, q \circ f(0) ,$$

et $q \circ [f(ux) - f(0)]$ est aussi constant et vaut donc $q(0) = 0$. Alors q étant une norme sur F , on a $f(ux) = f(0)$ soit $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in E$.

9. - Passage du local au global pour les types de croissance. Il est clair que si $f \in H(E, F)$ est du type borné et du type de croissance Ψ , et si M est un sous-espace de E , la restriction f_M de f à M est aussi du type borné et de type Ψ au plus. La réciproque est-elle vraie ? En s'appuyant sur les énoncés précédents on va donner deux énoncés qui montrent comment, si F est espace de Banach et E espace de Baire ou espace C-tonnelé, on peut passer du local au global. Une majoration de la croissance des

$$\varphi_y(u) = f(uy) \in H(\mathbb{C} , F)$$

sur les droites complexes (propriété locale) obtenues pour $y \neq 0$, $y \in A$ permet de majorer la croissance de $f \in H(E, F)$ globalement.

L'énoncé suivant, assez général, ne suppose pas $f \in H(E, F)$, mais seulement que l'application f est définie et analytique dans un voisinage de l'origine.

THEOREME 7. - Soient E , $F \in$ E.V.T. sur $\mathbb{C}$, F espace de Banach, E espace de Baire. Soit f application analytique d'un voisinage U de l'origine dans F . Soit encore $h(t_1, \ldots, t_n, r)$ une fonction des t_k et de r , définie pour $r \geq 0$, $t_k \geq 0$, positive, séparément croissante des t_k et de r , et, de plus, continue de l'ensemble de ces $n+1$ variables.

On suppose que pour chaque $y \in A$, $A \subset E$, il existe des valeurs $t_1, \ldots, t_n$ telles qu'on ait :

$$\|\varphi_y(u)\| = \|f(uy)\| \leq h(t_1, \ldots, t_n, |u|) \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{C} .$$

Alors si E est espace de Baire, et A non maigre, il existe $C>0$, des valeurs $t_1^o, \ldots, t_n^o$, et un voisinage disqué V de l'origine de jauge $p_V(x)$, tels qu'on ait :

$$\|f(x)\| \leq C\, h\, [t_1^o, \ldots, t_n^o, p_V(x)]$$

pour tout $x \in E$.

Pour la démonstration, on renvoie à notre article [3, g] .

Donnons un autre énoncé plus précis dans le cas particulier du type exponentiel et, plus généralement, du type moyen de l'ordre ρ , $\rho>0$. Il généralise un énoncé donné dans [3, g] :

THEOREME 8. - Soient $E \in$ (E.V.T. sur $\mathbb{C}$) F espace de Banach et f une application définie et analytique dans un voisinage U de l'origine. On suppose que pour tous les y d'un ensemble $A \subset E$, $f_y(u) = f(uy)$, définie au voisinage de $u = 0$, $u \in \mathbb{C}$, se prolonge en une application $C \to F$ entière, du type moyen de l'ordre ρ , $\rho>0$, le type $c(y)$ de l'ordre pouvant varier avec y . Alors pour que f se prolonge en une application entière f de E dans F , qui est au plus du type moyen de l'ordre ρ , c'est-à-dire vérifie une majoration :

$$\|f(x)\| \leq M\, \Psi_1 \circ p_V(x) \tag{11}$$

où Ψ_1 est du type moyen de l'ordre ρ et $p_V(x)$ est la jauge d'un voisinage V de l'origine dans E , il suffit que soit vérifiée l'une des conditions suivantes, où $\hat{A}$ désigne le cône sur $\mathbb{C}$ de base A :

a) E est C-tonnelé et $\hat{A} = E$,

b) E est espace de Baire et $\hat{A}$ est non maigre ,

c) E est espace de Baire, possède un voisinage borné de l'origine et $\hat{A}$ n'est pas maigre et contenu dans les $-\infty$ d'une fonction plurisousharmonique dans E .

<u>Démonstration</u> : a) Soit :

(12) $$f(x) = \sum_{0}^{\infty} P_m(x) \quad ,$$

le développement de f à l'origine. On a :

$$f_y(u) = \Sigma\, u^m P_m(y)$$

et si pour $y \in A$, $f_y \in H(\mathbb{C} , F)$ est du type $c(y)$ de l'ordre ρ , on a :

$$c(y) = \limsup |u|^{-\rho} \log \| f_y(u)\| \quad , |u| \to +\infty \, .$$

D'après un calcul classique, on a :

$$c(y) = \limsup\, (e\,\rho)^{-1} \ m \,\|P_m(y)\|^{\rho/m} = \limsup U_m(y) \quad .$$

Si $c(y)$ est fini pour $y \in A$, il l'est aussi sur $\hat{A}$ car on a pour $u \in \mathbb{C}$: $c(uy) = |u|^{\rho} c(y)$. Posons $U'_m(y) = U_m^{1/\rho}(y)$: pour $m \geqslant 1$, $U'_m(y)$ est une quasi-norme continue et les hypothèses entraînent $\pi(y) = \sup U'_m(y) < \infty$ pour $y \in \hat{A}$.

Dans le cas a), où E est C-tonnelé et $\hat{A} = E$, il existe donc une quasi-norme $p_V(y)$, jauge d'un voisinage V disqué de l'origine dans E , telle qu'on ait :

(13) $$U'_m(y) \leqslant p_V(y) \quad , \quad m \geqslant 1 \quad ,$$

ce qui entraîne pour $m \geqslant 1$:

(14) $$\|P_m(y)\| \leqslant \frac{(e\rho)^{m/\rho}}{m^{m/\rho}}\, p_V^m(y) \quad .$$

Soit :

$$\Psi(r) = \sum_{0}^{\infty} \frac{r^m}{m^{m/\rho}} \quad .$$

Quand $r \to +\infty$, on a $\log \Psi(r) \sim \dfrac{r^\rho}{e\rho}$ et Ψ est du type moyen de l'ordre ρ . On a alors d'après (14) :

(15) $$\|f(x)\| \leqslant \|f(0)\| + [\Psi(r) - 1] \circ p_V(x) = \Psi_1 \circ p_V(x)$$

où l'on pose $\Psi_1(r) = \Psi(r) - 1 + \|f(0)\|$. Alors f est bien du type moyen de l'ordre ρ au plus comme Ψ_1 , car on a :

$$f(rV) \subset \Psi_1(r)\, B$$

où B est la boule unité de F , ce qui achève la démonstration du cas a).

Dans le cas b) on remarque que la famille des quasi-normes continues $\{U'_m(y)\}$ est bornée en tout point y d'un ensemble $\hat{A}$ non maigre. Alors le théorème 3 et (5) appliqués à $U'_m(y)$ montrent l'existence de $M < \infty$ et d'un voisinage disqué de l'origine soit V_1 dans E tels que l'on ait :

$$U'_m(y) \leq M \ , \qquad M > 0 \quad \text{pour} \quad y \in V_1$$

c'est-à-dire par homogénéité $U'_m(y) \leq p_V(y)$, où $V = M^{-1}V_1$ soit (13) et l'on termine la démonstration comme au cas a).

Dans le cas c) on applique de même le théorème 3, cas b). Finalement, on a obtenu dans tous les cas la majoration (15) de $\|f(x)\|$; il en résulte que la série (12) prolonge f en une application entière, de type borné, et du type de croissance $\Psi_1(r)$.

La croissance exponentielle est obtenue pour $\rho = 1$: une application f à valeurs dans un Banach F , définie et analytique au voisinage de l'origine dans E et telle que $f_y(u) = f(uy)$ soit de type exponentiel (variable avec y) pour les y d'un ensemble A , se prolonge en une application entière, globalement de type exponentiel, dès que le couple $(E, \hat{A})$ vérifie l'une des trois propriétés indiquées au théorème 8. On notera que dans ce problème les espaces topologiques complexes qui sont espaces de Baire ou espaces C-tonnelés interviennent naturellement ; pour la propriété plus fine du théorème 8, c) on a dû supposer E non seulement espace de Baire, mais possédant un voisinage borné V de l'origine, ce qui entraîne au moins que E soit métrisable ; E est un espace normé si V est convexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNAK (J.) et SICIAK (J.). - a) Analytic functions in topological vector spaces. Studia Math. 39 (1), 1971.

b) Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. Studia Math. Ibidem.

[2] COEURE (G.). - Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques. Ann. Institut Fourier, 1970.

[3] LELONG (P.). - a) Fonctions entières de type exponentiel dans C^n. Ann. Inst. Fourier, t. 16, 2, p. 271-318, 1966.

b) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques. Lecture-Notes Springer, n° 71, exposé 17, 1968.

c) Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires ... Lecture-Notes Springer, n° 116, exposé 1, 1969.

d) Recents results on analytic mappings and plurisubharmonic functions in topological linear spaces. Internat. Conf. on several complex variables, University of Maryland, Avril 1970, t. 2, Lecture-Notes Springer, n° 185.

e) Fonctions et applications de type exponentiel dans les espaces vectoriels topologiques. C. R. Ac. Sci. Paris, t. 269, p. 420-422, 1969.

f) Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales, C. R. du Colloque de Liège sur l'Analyse fonctionnelle, 1970.

g) Théorème de Banach-Steinhaus pour les polynômes ; applications entières d'espaces vectoriels complexes. Séminaire d'Analyse P. Lelong 1970, exposé n° 9. Lecture Notes Springer n° 205, p. 87-112.

[4] NACHBIN (L.). - Uniformité d'holomorphie et type exponentiel. Séminaire d'Analyse P. Lelong 1970, exposé n° 15. Lecture-Notes Springer. n° 205, p. 216-224

[5] NOVERRAZ (P.). - Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels complexes. Ann. Inst. Fourier, t. 19, fasc. 2, p. 419-493, 1969.

95, Boulevard Jourdan
75 - PARIS 14 (France)