PAUL KRÉE

Étude d'un problème de transport singulier

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 207-214
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__207_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 207-214.

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE TRANSPORT SINGULIER

par

Paul KRÉE

Etude d'un problème de transport singulier : caractérisation de traces, existence et unicité, approximation, inéquation variationnelle, contrôle otpimal, estimation...

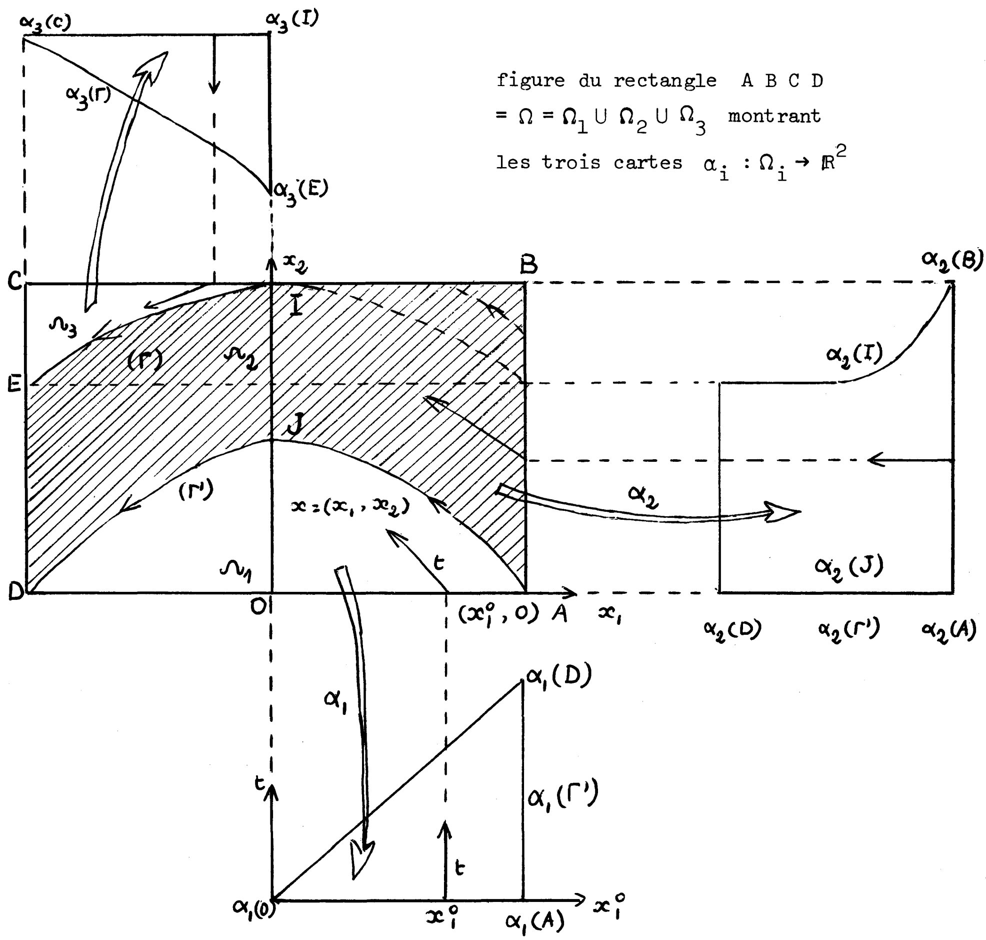

figure du rectangle A B C D $= \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ montrant les trois cartes $\alpha_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^2$

I. - INTRODUCTION

On appelle système linéaire tout système physique tel qu'une grandeur caractéristique y de l'état du système soit solution d'une équation linéaire

(1) $\mathcal{A} y = f$ (équation d'état)

où f est fonction des excitations subies par le système, $\mathcal{A}$ étant un opérateur linéaire dépendant des caractéristiques du système : pour simplifier, on dit que y est l'état du système. On dit que le système est à paramètres distribués si y est solution d'un problème aux limites pour une équation (ou un système d'équations) aux dérivées partielles. Le premier problème de la théorie des systèmes est celui de l'existence de l'unicité de la solution y de (1) : ce problème équivaut à la recherche d'espaces de Banach $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{F}$, tels que soit $\mathcal{A}$ un isomorphisme de $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{F}$. Mais il existe de nombreux autres problèmes :

(2) inéquations variationnelles, contrôle optimal, jeu aux dérivées partielles, identification de paramètres, filtrage, identification de grandeurs d'entrées, problèmes aléatoires...

Ceci conduit à un grand nombre de problèmes puisque pour un système donné, toutes les questions citées ci-dessus peuvent être étudiées. D'où l'intérêt des modèles généraux (voir K.O. Friedrichs [1], J.L. Lions [1]) car les études relatives à chacun de ces modèles sont applicables à plusieurs problèmes aux limites.

L'exposé oral que nous avons fait à ce colloque donnait un aperçu des méthodes que nous développons pour présenter de façon synthétique ces résultats, et pour étendre leurs domaines d'application. Le texte ci-après explicite les applications à un problème de transport non homogène singulier cité dans C. Bardos [1] (voir contre-exemple précédant la proposition II 5, chapitre II, paragraphe 4).

(3) Le problème de trace considéré

Soit Ω le rectangle du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ où $|x_1| < 1$ et $0 < x_2 < 1$. On note A, B, C et D les sommets de ce rectangle et I le milieu de BC (voir figure). Soit X le champ de vecteurs de composantes $X_1(x) = -1$, $X_2(x) = x_1$. Soit γ_1 (resp γ_2, resp γ_3) un opérateur de trace (à définir avec précision) sur OA (resp AB, resp IC). Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ l'opérateur de trace sur la réunion $\partial_+ \Omega$ des segments OA, AB et IC

(4) Soit $W = \{ y \in L^2(\Omega) ; Xy \in L^2(\Omega) \}$

Le problème consiste à trouver les espaces H_j décrits par $\gamma_j y$ lorsque y décrit W.

Ce problème est résolu à l'aide d'un changement de carte (voir Krée [7], Le Barz [1], résultat annoncé dans Krée [6]). Cette méthode est générale et permet en particulier de retrouver le résultat de S. Baouendi et P. Grisvard [1].

On considère alors le système gouverné par l'équation d'état :

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} Xy + Ky = f_o \quad \text{dans } \Omega \\ \gamma_j\, y = f_j \;,\; j = 1, 2 \text{ et } 3 \end{array}\right.$$

f^o étant donné dans $L^2(\Omega)$, f_j étant donné dans H_j, K étant un opérateur linéaire borné de $L^2(\Omega)$. On indique brièvement comment peuvent être résolus les problèmes (2) relatifs à un tel système.

1. - CARACTERISATION DES TRACES

Les trajectoires de champ de vecteurs X sont les paraboles d'équation $2\,x_2 = -x_1^{\,2} + (x_1^{\,o})^2$ où $\pm\, x_1^{\,o}$, sont les abcisses des points d'intersection de ces paraboles avec l'axe $x_1'\,0\,x_1$. La partie $\partial_+\Omega$ du bord de Ω où le champ X est entrant est la réunion des segments OA, AB et IC. On sait (voir Bardos [1]) que pour toute f dans $L^2(\Omega)$, il existe y dans W tel que $Xy = f$, la trace de y sur $\partial_+\Omega$ étant nulle. De plus y peut être approchée dans W par une suite d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Pour caractériser les traces sur $\partial_+\Omega$ des éléments de W , il suffit donc de caractériser les traces sur $\partial_+\Omega$ des éléments de :

$$W_o = \{ y \in L^2(\Omega) \;,\; Xy = 0 \}$$

Introduisons les arcs de trajectoire $(\Gamma) = \widehat{IE}$ et $(\Gamma') = \widehat{AJD}$: voir figure. Ces arcs partagent Ω en trois domaines Ω_1, Ω_2 et Ω_3 . Pour caractériser les traces sur $\partial_+\Omega$ des éléments de W_o il suffit de caractériser pour $j = 1, 2$ et 3 les traces $\gamma_j\, y$ des y de

$$W_j = \{ y \in L^2(\Omega_j) \;,\; Xy = 0 \}$$

Ces trois problèmes de trace sont indépendants les uns des autres. Pour résoudre ces problèmes, nous utilisons au voisinage de $\partial_+\Omega$ des cartes locales qui transforment le champ X en un champ constant et le bord en un hyperplan transverse à ce champ constant. Plus précisément, pour déterminer la carte $\alpha_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^2$, au voisinage de OA , on résout le problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}\, x\,(t) = X\,(x(t))$$

$$x\,(0) = (x_1^o \,,\, 0)$$

avec $0 < x_1^o < 1$. Et l'on repère $x = (x_1, x_2) = x(t)$ par le couple $(x_1^o \,,\, t)$. On obtient ainsi l'application indéfiniment dérivable :

$$(x_1^o \,,\, t) \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} x_1 = x_1^o - t \;;\; x_2 = -\tfrac{1}{2}(x_1)^2 + \tfrac{1}{2}(x_1^o)^2$$

α_1 n'est pas un diffeomorphisme puisque les images par α_1 de OA et OD sont deux segments non colinéaires.
α_1 transforme la fonction y' de W_1 en une fonction $\bar{y}$ définie sur $\alpha_1(\Omega_1)$ telle que :

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \quad \iint_{\alpha_1(\Omega_1)} x_1^o \, | \, \bar{y}\,(x_1^o \,, t) \, |^2 \, d\, x_1^o \, dt < \infty$$

Donc $\bar{y}\,(x_1^o \,, t) = z\,(x_1^o)$ et $\int_o^1 (x_1^o)^2 \, | z\,(x_1^o) \, |^2 \, d\, x_1^o < \infty$

Réciproquement, il est clair que toute fonction $\bar{y}$ de ce type provient d'une fonction y de W_1. Par conséquent si l'on introduit :

$$H^1 = \{ z :]0, 1[\to \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \int_o^1 t^2 | \; z\,(t) \, |^2 \; dt < \infty \}$$

On voit que l'application de X - trace sectionnelle (ou transversale : voir Krée [8]) :

$$\begin{aligned} W_1 &\to H_1 \\ y &\mapsto {}_1y \end{aligned}$$

est continue surjective. Notons que la trace $\gamma_1 y$ est également une trace fonctionnelle (voir Krée [8]) car $\bar{y}$ peut être approchée par des fonctions $\bar{y}_n$ de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\alpha, (\Omega_1)})$, et les fonctions $\bar{y}_n \circ \alpha_1$ sont $\mathcal{C}^\infty$ et approchent y dans W_1.
Par le même procédé (utilisation de cartes locales adéquates), on caractérise les traces sur AB (et resp IC) des éléments de W_2 (et resp W_3). On introduit donc les espaces H_2 et H_3 :

$$H_2 = \{ z :]0, 1[\to R \; ; \int_o^1 |1-x_2| \; |z(x_2)|^2 \; dx_2 < \infty \}$$

$$H_3 = \{ z :]0, 1[\to R \; ; \int |x_1| (1 + x_1) | \; z(x_1)|^2 \; dx_1 < \infty \}$$

et l'on peut énoncer la :

(6) <u>proposition</u>

a) $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans W

b) Posons $H = L^2(\Omega) \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. Alors l'application

$$\begin{aligned} W &\to H \\ y &\mapsto (Xy, \gamma_1 y, \gamma_2 y, \gamma_3 y) \end{aligned}$$

est continue surjective.

II. - EXISTENCE ET UNICITE. TRANSPOSITION.

Le résultat du paragraphe précédent permet d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (5), en raisonnant directement sur des opérateurs fermés (sans utiliser la théorie des extensions d'opérateurs non bornés).

(7) Lemme.

Soit $(\mathcal{C}) = (D_{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$ l'opérateur non borné de H, ainsi défini :
$D_{\mathcal{C}} = \{ \vec{u} = (u, \gamma_1 u, \gamma_2 u, \gamma_3 u) \in H ; u \in W \}$
pour $\vec{u} \in D_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}\vec{u} = (X u, 1/2\, \gamma_1 u, 1/2\, \gamma_2 u, 1/2\, \gamma_3 u)$

a) $(\mathcal{C})$ est un opérateur fermé positif.

b) $(\mathcal{C})'$ est aussi un opérateur fermé positif.

Ce lemme résulte de calculs naturels. Soit à présent K un opérateur linéaire borné coercif de $L^2(\Omega)$:

(8) $\exists\, c > 0$, $\forall\, u \in L^2(\Omega)$, $(K u, u) \geqslant c \, \| u \|^2$

Associons à K l'opérateur coercif suivant de H :

$$H \xrightarrow{\mathcal{B}} H$$

$$(u, u_1, u_2, u_3) \mapsto (K u, 1/2\, u_1, 1/2\, u_2, 1/2\, u_3)$$

(9) Alors les opérateurs non bornés $(\mathcal{A}) = (\mathcal{C}) + (\mathcal{B})$ et $(\mathcal{A}') = (\mathcal{C}') + (\mathcal{B}')$ sont fermés strictement positifs. Il en résulte alors que $\mathcal{A}$ (et resp $\mathcal{A}'$) réalisent des isomorphismes de $D_{\mathcal{C}}$ (et resp $D_{\mathcal{C}'}$) sur H .

(10) Proposition.

Si K vérifie la condition (8), alors le problème aux limites (5) admet une et une seule solution dans W pour (f_o, f_1, f_2, f_3) dans H .

(11) Transposition.

Considérons $\mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$ comme un opérateur borné de $D_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{C}}$ (muni de la norme du graphe) à valeurs dans H . Alors, le transposé $\bar{\mathcal{A}}' : H \to (D_{\mathcal{A}})'$ de cet opérateur borné est un prolongement de $\mathcal{A}'$. L'équation $\bar{\mathcal{A}}' f = g$ ne peut pas être interprétée comme un problème de transport, pour g quelconque dans $(D_{\mathcal{A}})'$. Mais, dans le cas particulier où :

(12) $$g = g_o + T$$

avec $g_o \in L^2(\Omega)$, T étant une somme de trois simples couches, portées respectivement par OD, DC, IB, à densités dans H_1, H_2, H_3 respectivement ; l'équation $\bar{\mathcal{A}}' f = g$ est équivalente à un problème de transport non homogène pour le champ -X. Si g dans $(D_{\mathcal{A}})'$ a la forme (12), on dit que g vérifie la condition de régularité.

III. - ETUDE DU SYSTEME ASSOCIE AU PROBLEME (5) .

La preuve que nous avons donnée au paragraphe précédent, aboutit au schéma fonctionnel suivant :

On a un espace de Hilbert H ; on a un opérateur non borné $(\mathfrak{a}) = (D_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$

(13) de H à domaine dense ainsi que son transposé, strictement positif ainsi que son transposé. K.O. Friedrichs avait déjà remarqué en 1958 que de nombreux problèmes aux limites homogènes de la physique admettent naturellement un tel schéma.

(14) Nous avons noté dans Krée [1], [3], [4] les faits suivants :

a) De nombreux problèmes aux limites non homogènes de la physique admettent un schéma du type (13).

b) Les nombreux résultats particuliers connus relatifs aux problèmes (2) peuvent être formulés sous forme de résultats généraux relatifs à (13) ou même relatifs simplement à un isomorphisme d'espaces de Banach.

c) Ces résultats généraux entraînent de nouveaux résultats en ce qui concerne l'étude de système physiques gouvernés par un système hyperbolique, une équatier de Tricomi, une équation de transport...

(15) Voyons ceci sur l'exemple de l'équation (5).

a) Approximation numérique de la solution.

Les propositions (6) et (7) de Krée [1] donnent directement deux méthodes d'approximation (et même une majoration de l'erreur) pour le problème non homogène (5), sans aucune hypothèse de régularité : noter que la méthode de régularisation proposée dans Lattès - Lions [1] et Bardos [1] est appliquée à des problèmes homogènes, et suppose une hypothèse de régularité de la solution.

b) Contrôle optimal avec coût quadratique.

Les résultats de Krée [1] et [3] s'appliquent. L'avant dernière équation de Krée [1] s'interprète comme un problème de transport si tous les g de Im $(\mathcal{C}')$ vérifient la condition de régularité (12).

c) Inéquation variationnelle.

Le théorème fonctionnel général est le théorème 9-2 de Lions [2]. Il s'applique directement ici à $(\mathfrak{a}) = (\mathcal{C}) + (\mathfrak{B})$, $(\mathcal{C})$ étant maximal positif et $(\mathfrak{B})$ étant coercif.

d) Estimation de grandeur d'entrée.

Les résultats généraux évoqués au point 5 de Krée [3], présentés dans Krée [4] s'appliquent directement.

e) Identification de paramètre : idem

f) <u>Etude de y si f est aléatoire et si de champ X est aléatoire</u>.
Voir Krée [5].

<u>Remarques</u>.

a) Les applications de ces méthodes aux équations différentielles abstraites décrites dans Krée [6] et [7], et aux systèmes physiques associés, feront l'objet d'une publication ultérieure.

b) Les problèmes stationnaires de transport de la physique sont étudiés dans Krée [4].

BIBLIOGRAPHIE

BAOUENDI (S.) et GRISVARD (P.)
[1] Sur certaines équations de transport, C.R. Acd. Sc. Paris, série A (1967).

BARDOS (C.)
[1] Problèmes aux limites... Thèse Paris (Juin 1969).

FRIEDRICHS (K.O.)
[1] Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. vol. II, (1958), pp. 333-418.

KRÉE (P.)
[1] Synthèse et extension de certaine théories variationnelles linéaires, C.R.A.S. Paris, Série A (1970), t. 271, pp. 457-460.
[2] Produit et accouplement de processus stochastiques généralisés. Application aux équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires C.R.A.S. Paris (Janvier 1971).
[3] Quelques résultats sur la théorie des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, C.R.A.S. Paris (Avril 1971).
[4] Synthesis and extension of some linear variational theory.Application to the theory of distributed parameter systems. (to appear).
[5] Equations à coefficients aléatoires, Colloque de Rome (Istituto di alta Matematica) sur l'analyse fonctionnelle et les équations hypoelliptiques, Symporie Mathematica vol. 7. (1971) pp. 515-546.
[6] Equations differentielles dissipatives, Comptes-Rèndus (Mai 1970).
[7] Technical report UCLA, Los Angeles, Department of system sciences,(Juillet 1970).
[8] Problèmes aux limites en théorie des distributions, Annali di Matematica série 4, tome 83, (1969) pp. 113-132.

LATTÈS (R.) et LIONS (J.L.)
[1] Méthode de quasi réversibilité et applications, Dunod, Paris (1967).

LE BARZ (P.)
[1] Travail personnel (non publié dans le cadre de l'enseignement de la Maîtrise ès Sciences Mathématiques) Nice, (Mai 1970).

LIONS (J.L.)
[1] Equations différentielles opérationnelles. Grundlehren der Mathematik, Brand 111, Berlin (1961) Springer Verlag.
[2] Quelques méthodes de résolution des problèmes non linéaires. Dunod, Paris(1969).

LIONS (J.L.) et MAGENES
[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 et 2, Dunod, Paris (1967).

61, Boulevard du Mont Boron
06300 NICE (France)