HENRI HOGBE-NLEND

Les racines historiques de la bornologie moderne

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 201-206
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__201_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 201-206.

LES RACINES HISTORIQUES DE LA BORNOLOGIE MODERNE

par

Henri HOGBE-NLEND

Le but du présent exposé est d'essayer d'expliquer, en partant de diverses situations mathématiques concrètes, comment la notion de bornologie s'est progressivement dégagée en analyse fonctionnelle contemporaine pour devenir aujourd'hui une notion fondamentale pouvant se substituer avec intérêt, dans certaines circonstances, aux structures topologiques.

1 . LA BORNOLOGIE, BASE DE LA THEORIE DE LA DUALITE DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

La notion de "bornologie", contrairement à ce que pensent certains auteurs, n'est en réalité pas nouvelle. Sa genèse et son développement sont inséparables de ceux de la théorie générale des espaces vectoriels topologiques. "La notion d'ensemble borné ... joue un rôle très important",disaient en 1949 J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ dans [1]. En fait, c'est dans la thèse doctorale de G. W. MACKEY (Harvard, 1942), principalement consacrée à la théorie des couples d'espaces vectoriels en dualité, que fut mise en lumière pour la première fois de façon décisive l'importance en cette matière de la notion de partie bornée. On sait que, si deux espaces vectoriels F et G sont en dualité, le problème fondamental est de définir de "bonnes" topologies localement convexes séparées sur l'un d'eux, soit F par exemple. L'unique moyen de résoudre ce problème est de définir sur G une bornologie, et d'en prendre les polaires relativement à la dualité entre F et G : Toute topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ est polaire d'une bornologie $\mathcal{B}$, et les propriétés fondamentales de cette topologie découlent des propriétés fondamentales de la bornologie $\mathcal{B}$. La réciproque de cette assertion est fausse : les bornologie polaires des topologies localement convexes séparées sont des cas très particuliers de bornologies. Dans sa thèse, MACKEY introduisit la notion de convergence, connue aujourd'hui sous le nom de convergence bornologique, ou convergence locale au sens de Mackey, et qui joue actuellement un rôle important dans l'étude de certaines classes d'espaces localement convexes (espaces bornologiques, semi-bornologiques, espaces de Schwartz, et plus généralement "quasi-normales" au sens de Grothendieck ...) ; il entama une étude de la classification des principaux types de bornologies, notamment : la bornologie simple, bornologie engendrée par les homothétiques d'un borné A (par exemple, bornologie d'espace normé), la bornologie vérifiant le second axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire à base dénombrable (exemple : bornologie d'espace (DF)), et la bornologie vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire la propriété suivante : Pour toute suite (A_n) de bornés de E , il existe une suite (λ_n) de nombres réels positifs, telle que $\bigcup_n \lambda_n A_n$ soit encore bornée (exemple : bornologie d'espace métrisable). Il apparaît alors que, sous l'impulsion de MACKEY, la bornologie naquit et se développa dans sa première phase sous un double visage. D'une part, celui d'une théorie a priori indépendante de toute topologie, et, d'autre part, celui de moteur principal et d'instrument de la théorie des espaces vectoriels topologiques.

Depuis les années 1950, un certain nombre d'importants phénomènes ont vu le jour, soulignant de façon notoire le caractère inadapté des structures vectorielles topologiques pour l'étude de certains grands problèmes. Parmi ceux-ci, nous relèverons notamment :

2 . PATHOLOGIE DE CERTAINES ALGEBRES TOPOLOGIQUES.

Soient E un espace localement convexe, et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E . Si E est non normable, il n'existe sur $\mathcal{L}(E)$ aucune σ-topologie pour laquelle la multiplication soit continue. Et pourtant, cette multiplication est toujours bornée, si l'on met sur $\mathcal{L}(E)$ la bornologie naturelle formée par les parties H , équibornées sur tout borné de E . Si A est une algèbre commutative, où la multiplication $(x , y) \to x.y$ n'est pas continue, une fonction polynôme aussi simple que $x \to x^2$ n'est pas continue, puisqu'on a la relation élémentaire $2x.y = (x + y)^2 - x^2 - y^2$.

Dans de nombreuses questions, il est utile d'avoir des algèbres topologiques, dont l'ensemble des éléments inversibles est ouvert. Voyons combien on est loin de cette situation dans le cas de l'algèbre fondamentale $\mathcal{L}(E)$, avec E non Banach. Si l'espace localement convexe séparé E vérifie la condition d'approximation, l'identité de E est limite uniforme, sur tout précompact d'opérateurs de rang fini, donc d'opérateurs non inversibles, ce qui implique que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ ne sera pas ouvert pour de bonnes σ-topologies usuelles sur $\mathcal{L}(E)$. D'ailleurs on peut se demander s'il existe au moins un espace localement convexe séparé, non Banach, et une σ-topologie sur $\mathcal{L}(E)$ rendant ouvert l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ (*). Par contre, nous connaissons plusieurs espaces bornologiques E , de bornologies non normables, tels que l'ensemble des éléments inversibles de L(E) , espace des endomorphismes bornés de E , soit Mackey-ouvert lorsqu'on munit L(E) de la bornologie naturelle [3].

3 . LE PROBLEME DU CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES NON NORMES

La théorie du calcul différentiel dans les espaces normés donne satisfaction dans de nombreux et importants domaines des mathématiques actuelles. Mais cette théorie s'avère insuffisante pour la solution de certains problèmes importants, si bien que depuis plusieurs années on sent de plus en plus de besoin de développer une théorie du calcul différentiel dans un cadre plus général. De très nombreuses tentatives ont montré que les structures topologiques ne sont pas bien adaptées à ce problème : de sérieuses difficultés apparaissent notamment dans l'étude des dérivées d'ordre supérieur, si l'on exige que toute fonction différentiable en un point soit continue en ce point pour la topologie donnée. Ces difficultés proviennent fondamentalement du fait qu'il n'existe sur $\mathcal{L}(E , F)$, espace des applications linéaires continues de E dans F (où E et F sont des espaces localement convexes non normables), aucune σ-topologie vectorielle pour laquelle l'application bilinéaire canonique

$$E \times \mathcal{L}(E , F) \to F$$

$$(x , f) \to f(x)$$

soit continue. Cette application intervient de façon essentielle dans la théorie classique du calcul différentiel. Pourtant elle est toujours bornée lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E , F)$ de sa bornologie naturelle. Divers auteurs ont alors remarqué que le problème du calcul différentiel est, dans son essence, un problème de structures, et les structures bornologiques semblent bien adaptées à ce problème. Voici ce qu'en disait J. SEBASTIÃO E SILVA [4], en 1960 :

"Je me suis persuadé, en tâchant de généraliser aux espaces localement convexes, réels ou complexes, la notion de fonction différentiable, ainsi que les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et intégral et la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, que c'est la notion d'ensemble borné, plutôt que celle de voisinage, qui doit jouer un rôle essentiel."

Un élève de l'Auteur, J.-F. COLOMBEAU, a dans un certain sens renforcé cette idée de SEBASTIÃO E SILVA en développant, dans le cadre des espaces bornologiques, une théorie complète du calcul différentiel, à laquelle il ne manque ni théorèmes des fonctions implicites, ni théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles ... ni applications variées. C'est, à notre connaissance, l'une des théories du calcul différentiel les plus développées existant actuellement (cf. [3], et l'exposé n° 10 de COLOMBEAU au présent Colloque).

4. LE PROBLEME DES DISTRIBUTIONS VECTORIELLES ET DISTRIBUTIONS OPERATIONNELLES.

Après le développement de la théorie des distributions scalaires, il s'est agi de développer une théorie comparable des "distributions à valeurs dans un espace vectoriel E " muni de propriétés convenables. L. SCHWARTZ, en 1957, avait supposé que E était un espace localement convexe séparé quasi-complet, et avait développé une théorie très générale. Après lui, J. WLOKA supposa que E était le corps des opérateurs de Mikusinski, et développa une théorie des distributions opérationnelles. Vers 1960, J. MIKUSINSKI remarqua que la théorie de WLOKA échappait complètement à la théorie de L. SCHWARTZ, car il n'existe sur le corps des opérateurs de Mikusinski, aucune topologie dont la notion de convergence dérivée soit équivalente à la convergence opérationnelle. Aucune liaison ne fut établie entre cette théorie et celle de L. SCHWARTZ. Le problème se posa alors de savoir si l'on pouvait munir l'espace vectoriel E de conditions appropriées permettant l'introduction d'une notion de distribution vectorielle, sauvegardant à la fois celle de SCHWARTZ et celle de WLOKA-MIKUSINSKI, et ayant le maximum de propriétés. Cette tâche a été accomplie par une élève de l'Auteur, Marie-Thérèse SAUX, sur la base de la remarque suivante : Le corps des opérateurs de Mikusinski est canoniquement muni d'une structure bornologique complète, dont dérive une notion de convergence strictement identique à la convergence opérationnelle. Elle a développé une théorie englobant à la fois les deux théories précédentes et contenant tous les résultats fondamentaux de la théorie classique (cf. [3]).

5 . PROBLEMES DU CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE.

Le calcul fonctionnel holomorphe, basé sur la théorie de GEL'FAND, n'a concerné, pendant longtemps, que les éléments d'une algèbre de Banach ou plus généralement localement convexe à spectre compact. Ces dernières années, la théorie des distributions et des opérateurs différentiels a multiplié les exemples d'opérateurs fondamentaux ayant un spectre non compact. Aussi s'est posé le problème de développer un calcul fonctionnel pour de tels opérateurs, et d'en étudier les applications. Deux auteurs, L. WAELBROECK et J. SEBASTIÃO E SILVA, sont parmi ceux qui se sont particulièrement intéressés à ce problème. Les deux auteurs sont unanimes à souligner que, dans cette question, le cadre commode n'est pas celui des structures topologiques, mais celui des structures bornologiques. Voici ce qu'en disait SEBASTIÃO E SILVA [5] en 1963 :

"Il y a avantage à remplacer, dans les recherches sur le calcul symbolique, la notion d'espace localement convexe par celle, beaucoup plus simple et plus maniable, d'espaces à bornés ... En vérité, l'emploi des espaces localement convexes pose des problèmes de plus en plus difficiles, qui n'ont rien à faire avec les buts essentiels du calcul symbolique."

6 . INTERVENTION DE LA BORNOLOGIE DANS D'AUTRES SITUATIONS.

Signalons, pour terminer, que de nombreux autres auteurs ont redécouvert, sous des formes variées, les espaces bornologiques comme cadre correct pour diverses théories : Parmi ceux-ci, citons notamment : Sze-Tsen HU (1949) dans le cadre de la topologie albébrique ("univers"), KREIN et PETUNIN (1964) dans le cadre de la théorie de l'interpolation ("chaînes d'espaces de Banach"), F. TREVES (1970) dans le cadre du théorème d'Ovcyannikov ("Banach filtrations"). Notons aussi que les espaces polynormés de G. MARINESCU sont équivalents aux espaces bornologiques séparés.

7. CONCLUSION : DEUX "JAMBES" NATURELLES POUR L'ANALYSE FONCTIONNELLE MODERNE.

L'analyse fonctionnelle contemporaine a pour base la théorie des espaces normés. Dans un espace normé, ce qui est fondamental, c'est évidemment la boule unité. Celle-ci a pour caractéristique essentielle d'être à la fois un voisinage de (0) et un ensemble borné, d'où il résulte que, dans le cadre des espaces normés, topologie et bornologie, tout en restant deux notions distinctes, s'avèrent équivalentes et conduisent aux mêmes résultats. Les problèmes résolus dans le cadre des espaces normés ont en général, malgré les apparences, une essence bornologique ou une essence topologique qui n'apparaît clairement que lorsqu'on les considère dans le contexte d'espaces plus généraux. De ceci résultent inéluctablement les deux voies naturelles d'étude des problèmes de l'analyse fonctionnelle : La voie ayant pour base la notion de voisinage de (0) et qui conduit aux espaces localement convexes, c'est-à-dire aux limites projectives (localement convexes) d'espaces semi-normés, et la voie ayantpour base la notion de "partie bornée" et qui conduit aux espaces bornologiques convexes, c'est-à-dire aux limites inductives (bornologiques) d'espaces semi-normés. Ainsi, à chaque type de problème correspond nécessairement un type approprié de structure.Bornologie et topologie vectorielle sont deux aspects nécessaires, distincts et complémentaires, d'une seule et même réalité. Utiliser de façon appropriée l'une ou l'autre de ces deux notions fondamentales c'est, à notre avis, savoir marcher avec ses deux jambes. Pour plus amples informations sur la théorie des bornologies, voir par exemple [2] ou [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (J.) et SCHWARTZ (L.) - La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 1, 1949, p. 61-101.

[2] HOGBE-NLEND (Henri) - Les fondements de la bornologie moderne. - Bordeaux, Université de Bordeaux 1, Département de Mathématiques, 1970.

[3] HOGBE-NLEND (Henri) - Théorie des bornologies et applications. - Berlin, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, N° 213.

[4] SEBASTIÃO E SILVA (José) - Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable, Colloque sur l'analyse fonctionnelle [1960. Louvain], p. 57-61. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] SEBASTIÃO E SILVA (José) - Les espaces à bornés et les réunions d'espaces normés, Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Série 8, t. 34, 1963, p. 134-137.

(*) Note ajoutée pendant la correction des épreuves : M. KASAHARA, de l'Université de Kyoto nous a communiqué la démonstration du résultat suivant :

Soient E un espace localement convexe séparé et A une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant l'identité et les opérateurs de rang fini.

Si l'ensemble des éléments inversibles de A est ouvert pour une σ-topologie, où σ est un ensemble de disques bornés fermés de E, E est nécessairement normé.

Henri HOGBE-NLEND
Université de Bordeaux-I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE

France