MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GIUSEPPE GEYMONAT

Quelques résultats sur les problèmes aux limites en théorie des distributions

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 181-185

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__181_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 181-185.

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES EN THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

par

Giuseppe GEYMONAT

I - INTRODUCTION.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ , variété de classe C^∞, tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞ .

Il est maintenant classique (voir par ex. [3] et la bibliographie citée) que le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 u = u|_\Gamma = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H^{s+2}(\Omega)$ pour tout $f \in H^s(\Omega)$ et $g \in H^{s+3/2}(\Gamma)$ donnés si s est réel $\geqslant -1$, c'est-à-dire :

(2) <u>pour tout</u> s <u>réel</u> $\geqslant -1$ <u>l'application</u>

$$\begin{cases} u \to (\Delta u \ , \ \gamma_0 u) \\ H^{s+2}(\Omega) \to H^s(\Omega) \times H^{s+3/2}(\Gamma) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

Il est naturel de se poser la question si un tel résultat d'isomorphisme est encore valable dans des espaces de distributions plus générales.

Ce problème a été posé et résolu d'une façon très générale par Lions-Magenes dans une série de travaux (voir [3] et la bibliographie citée). Le but de cette conférence est d'illustrer quelques nouveaux résultats obtenus dans [1] et [2] où l'on peut trouver des démonstrations complètes.

<u>Remarque</u> : Les résultats donnés pour (1) sont valables dans le cas d'un problème elliptique <u>général</u> ayant un indice et pour lequel on puisse écrire une formule de Green (voir [3] chap. 2).

II - RAPPELS SUR LA METHODE DE DUALITE DE LIONS-MAGENES [3].

Soit :

$$Y = \{u \in H^{s+2}(\Omega) \ ; \ \gamma_0 u = 0 \quad \text{et} \quad \Delta u \in H_0^s(\Omega)\}$$

muni de la norme induite par $H^{s+2}(\Omega)$.

De l'isomorphisme (2), il en résulte :

(3) <u>Pour tout</u> s <u>entier</u> $\geqslant 0$ <u>fixé l'application</u>

$$\begin{cases} u \to \Delta u \\ Y \to H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

Remarquons maintenant que Y n'est pas un espace normal de distributions sur Ω et donc son dual fort Y' n'est pas un espace de distributions sur Ω mais est isomorphe à un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support dans $\overline{\Omega}$.

Remarquons aussi que pour tout $v \in Y$ et $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ on a la formule de Green :

$$(4) \qquad \int_\Omega u \, \overline{\Delta v} \, dx = \int_\Omega \Delta u \, \overline{v} \, dx + \int_\Gamma \gamma_0 u \, \overline{\gamma_1 v} d\sigma$$

où $\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial n} |_\Gamma$, n étant la normale extérieure à Γ.

L'isomorphisme (3) donne par transposition le résultat suivant :

(5) <u>Pour tout</u> $L \in Y'$ <u>il existe</u> $u \in H^{-s}(\Omega)$ <u>unique tel que</u>

$$< u \ , \ \Delta v >_{H^{-s}(\Omega) \times H_0^s(\Omega)} = < L \ , \ v >_{Y' \times Y} \qquad \forall v \in Y$$

<u>de plus, l'application</u> $L \to u$ <u>est continue.</u>

Il s'agit maintenant d'interpréter le problème ainsi résolu. En s'inspirant de la formule de Green (4), on écrit pour tout $v \in Y$:

$$(6) \qquad < L \ , \ v >_{Y' \times Y} = < f, \ v > + < g, \ \gamma_1 v >_{H^{-s-1/2}(\Gamma) \times H^{s+1/2}(\Gamma)}$$

avec $g \in H^{-s-1/2}(\Gamma)$ et $f \in F \hookrightarrow H^{-s-2}(\Omega)$ espace à choisir de telle façon que (6) définisse bien une forme linéaire et continue sur Y.

En remplaçant l'expression (6) de $< L \ , \ v >_{Y' \times Y}$ dans (5) et choisissant $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset Y$ on déduit que $u \in H^{-s}(\Omega)$ vérifie alors

$$(7) \qquad \Delta u = f \qquad \text{au sens des distributions.}$$

Il suffit maintenant (c'est le point délicat !..) de donner un sens convenable à l'opération de trace et à la formule de Green (4) pour déduire que :

$$\gamma_0 u = g .$$

On peut conclure alors, en disant

(8) <u>Pour tout</u> $f \in F$ <u>et pour tout</u> $g \in H^{-s-1/2}(\Gamma)$ <u>donnés, il existe</u> $u \in H^{-s}(\Omega)$ <u>unique tel que</u>

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \gamma_0 u = g . \end{cases}$$

Pour avoir (8) il suffit donc de <u>choisir</u> un espace F tel que :

i) $F \hookrightarrow H^{-s-2}(\Omega)$

ii) $v \to \langle f, v \rangle$ soit une forme linéaire et continue sur Y

iii) on puisse donner un sens convenable à l'opération de trace $u \to \gamma_0 u$ pour $u \in X = \{u \in H^{-s}(\Omega) \ ; \ \Delta u \in F\}$.

Un choix très général pour F est donné dans [3] , chap. 2.

III - <u>UNE AUTRE METHODE DE DUALITE</u>.

Rappelons que pour s entier $\geqslant 0$, grâce aux théorèmes de traces, l'application

$$\begin{cases} u \to (\gamma_0 u \ , \ \gamma_1 u \ , \ \gamma_0 \Delta u \ , \dots , \ \gamma_{s-1} \Delta u) \\ H^{s+2}(\Omega) \to \prod_{j=0}^{s+1} H^{s-j+3/2}(\Gamma) \end{cases}$$

est linéaire continue et surjective, et admet un relèvement $\mathcal{R}_s$ linéaire et continu.

On en déduit :

(9) <u>Pour tout</u> s <u>entier</u> $\geqslant 0$ <u>fixé, l'opérateur linéaire et continu</u>

$$K_s \quad \begin{cases} H^{s+1/2}(\Gamma) \to H^s_0(\Omega) \\ \varphi \to \Delta \mathcal{R}_s(0, \varphi \ , \ 0, \ \dots , \ 0) \end{cases}$$

<u>a la propriété que</u>

$$\begin{cases} (u,\varphi) \to \Delta u + K_s \varphi \\ H_0^{s+2}(\Omega) \times H^{s+1/2}(\Gamma) \to H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

Par transposition, on en déduit immédiatement :

(10) <u>Pour</u> s <u>entier</u> $\geqslant 0$ <u>fixé, l'application</u>

$$\begin{cases} u \to (\Delta u\ ,\ K_s^* u) \\ H^{-s}(\Omega) \to H^{-s-2}(\Omega) \times H^{-s-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique.</u>

Il s'agit maintenant d'interpréter l'opérateur K_s^* ; par définition, on a pour $u \in H^{-s}(\Omega)$ et $\varphi \in H^{s+1/2}(\Gamma)$ $\langle K^* u, \varphi\rangle_{H^{-s-1/2}(\Gamma)\times H^{s+1/2}(\Gamma)} =$

$= \langle u, K\varphi\rangle_{H^{-s}(\Omega)\times H_0^s(\Omega)} = \langle u, \Delta\, \mathcal{R}_s(0, \varphi, 0, \ldots, 0)\rangle_{H^{-s}(\Omega)\times H_0^s(\Omega)}$.

Pour achever l'interprétation, on peut s'inspirer encore de la formule de Green (4) et déduire, <u>au moins formellement</u>, que

(11) $$K_s^* u = R_s^* (\Delta u) + \gamma_0 u$$

où $R_s \varphi = \mathcal{R}_s(0, \varphi, 0, \ldots, 0)$ et R_s^* est son transposé.

Si l'on est capable de rendre rigoureuse la formule (11), on a que le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \gamma_0 u = g \end{cases}$$

est équivalent au problème

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ K^* u = R_s^* (f) + g \end{cases} .$$

On peut donc considérer que le problème (Δ, K_s^*) est une extension naturelle du problème de Dirichlet avec l'avantage que l'opérateur (Δ, K_s^*) est bien défini dans tout l'espace $H^{-s}(\Omega)$.

Pour rendre rigoureuse (11) on doit résoudre un problème de trace analogue à celui considéré à la fin du n° 2 .

Signalons pour conclure que dans [2] est donnée une <u>caractérisation</u> des espaces F pour lesquels ce problème de trace peut être résolu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI (M. S.), GEYMONAT (G.).- Résultats de dualités dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques. C. R. A. S. Paris 270 (1970), p. 270 et article à paraître au Journal of Differential equations.

[2] BAOUENDI (M. S.), GEYMONAT (G.). - Transposition des problèmes aux limites elliptiques. Symposia Mathematica, Vol. VII (1971) p.

[3] LIONS (J. L.), MAGENES (E.). - [1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, tomes I, II, III. Dunod Paris 1968-1969.

ISTITUTO MATEMATICO
POLITECNICO
TORINO (Italie)