KLAUS FLORET

Über komplementierte Unterräume in lokalkonvexen induktiven Limiten

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 169-179
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__169_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France;
Mémoire 31-32, 1972, p. 169-179.

ÜBER KOMPLEMENTIERTE UNTERRAUME IN LOKALKONVEXEN INDUKTIVEN LIMITEN

von

Klaus FLORET

1. Das Studium von induktiven Limiten ist stets von dem Wunsch geleitet, Eigenschaften im Grenzraum bereits in den erzeugenden Netzen bzw. Sequenzen zu erkennen, da die Stufen und ihre verbindenden Einbettungen meist einfacher zu überblicken sind. In diesem Sinne sollen zur Komplementierbarkeit von Unterräumen einige Bemerkungen gemacht werden.

2. Für einen nach rechts filtrierenden Indexbereich A und lokalkonvexe Räume (E_α, τ_α) mit $(E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta, \tau_\beta)$ für alle $\beta \geqslant \alpha$ (d. h. $E_\alpha \subset E_\beta$ und die Einbettungsabbildung ist stetig) bezeichne (E, τ) den in der Kategorie der lokalkonvexen Räume gebildeten induktiven Limes $\operatorname{ind}_{A \ni \alpha \to} (E_\alpha, \tau_\alpha)$. Alle Räume seien separiert vorausgesetzt. Für Unterräume $G, H \subset E$ bedeutet $G \oplus H$ die in E gebildete algebraische direkte Summe von G und H, insbesondere also $G \cap H = \{0\}$. Die topologische direkte Summe von G und H, ausgestattet etwa mit der von (E, τ) induzierten Topologie, wird mit $(G, \tau) \oplus (H, \tau)$ bezeichnet. Ein Paar (G, H) von Unterräumen von E heißt

(1) stufenweise komplementiert (bzgl. des Netzes $[(E_\alpha, \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$), falls für eine cofinale Teilmenge $B \subset A$

$$(E_\beta, \tau_\beta) = (E_\beta \cap G, \tau_\beta) \oplus (E_\beta \cap H, \tau_\beta)$$

für alle $\beta \in B$ gilt.

(2) lokal komplementiert (bzgl. $[(E_\alpha, \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$), falls zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha \leqslant \beta \in A$ mit

$$(E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta \cap G, \tau_\beta) \oplus (E_\beta \cap H, \tau_\beta)$$

existiert.

(3) komplementiert, falls

$$(E, \tau) = (G, \tau) \oplus (H, \tau) .$$

In allen Fällen folgt, daß alle Spuren $E_\alpha \cap G$ und $E_\alpha \cap H$ in E_α abgeschlossen sind. Gilt der Graphensatz hinreichend gut in den Stufen, erhält man sofort eine Abschwächung, etwa

BEMERKUNG. - Sind alle E_α Fréchetträume und alle (cofinal viele). Spuren $E_\alpha \cap G$ und $E_\alpha \cap H$ in E_α abgeschlossen, so ist (G, H)

(1) stufenweise komplementiert, falls es cofinal viele $\alpha \in A$ mit $E_\alpha = E_\alpha \cap G \oplus E_\alpha \cap H$ gibt, und

(2) lokal komplementiert, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $\beta \geqslant \alpha$ mit $E_\alpha \subset E_\beta \cap G \oplus E_\beta \cap H$ existiert.

Der Begriff der lokalen Komplementiertheit ist offensichtlich unabhängig von äquivalenten induktiven Netzen (zwei induktive Netze $[(E_\alpha, \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$ und $[(F_\beta, \tau_\beta)]_{\beta \in B}$ heißen äquivalent, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $\beta \in B$ mit $(E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (F_\beta, \tau_\beta)$ existiert und umgekehrt), während das Gegenbeispiel zu Satz A (1) zeigen wird, daß dies für stufenweise komplementierte Paare i. a. falsch ist.

3. Den Zusammenhang zwischen den Begriffen klärt der folgende

SATZ A. - (1) Jedes stufenweise komplementierte Paar ist lokal komplementiert. Die Umkehrung ist falsch.

(2) Jedes lokal komplementierte Paar ist komplementiert. Die Umkehrung ist falsch. (Beachte aber Satz D).

Beweis : Die positive Aussage von (1) ist trivial ; zu derjenigen von (2) sei (H_1 , H_2) lokal komplementiert. Dann sind wegen (β nach Definition)
$(E_\alpha \cap H_1 , \tau_\alpha) \oplus (E_\alpha \cap H_2 , \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\alpha , \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta \cap H_1 , \tau_\beta) \oplus (E_\beta \cap H_2 , \tau_\beta) \hookrightarrow (E_\beta, \tau_\beta)$
die induktiven Netze $[(E_\alpha , \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$ und $[(E_\alpha \cap H_1 , \tau_\alpha) \oplus (E_\alpha \cap H_2 , \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$ äquivalent, erzeugen also beide (E, τ) als induktiven Limes. Der Transitivität finaler Topologien wegen gilt somit

$$\begin{aligned}(E, \tau) &= \operatorname{ind} [(E_\alpha \cap H_1 , \tau_\alpha) \oplus (E_\alpha \cap H_2 , \tau_\alpha)] = \\ &= [\operatorname{ind} (E_\alpha \cap H_1 , \tau_\alpha)] \oplus [\operatorname{ind} (E_\alpha \cap H_2 , \tau_\alpha)] = \\ &= (H_1, \tau) \oplus (H_2, \tau)\end{aligned}$$

und (H_1, H_2) ist komplementiert.

Bleiben die Gegenbeispiele :

Zu (1) seien in Raum $\phi = \operatorname{ind} \mathbb{C}^n$ aller finiten Vektoren

(e_i) die Folge der Einheitsvektoren,

$E_n = \operatorname{span} [e_1 , \ldots , e_{n-1} , e_n + e_{n+1}]$,

$$G = \text{span }[e_{2n-1}]_{n=1}^{\infty} \qquad \text{und}$$

$$H = \text{span }[e_{2n}]_{n=1}^{\infty} \quad .$$

Dann ist $\phi = G \oplus H$ lokal komplementiert, denn es gilt $E_n \subset (E_{n+2} \cap G) \oplus (E_{n+2} \cap H)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, jedoch bzgl. der Sequenz $[E_n]_{n \in \mathbb{N}}$ nicht stufenweise komplementiert :

$$(E_n \cap G) \oplus (E_n \cap H) = \text{span }[e_1 , \ldots, e_{n-1}] \not\ni \; e_n + e_{n+1} \in E_n \; .$$

Zu (2) seien $(E, \tau) = \ell^2(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sowie Unterräume $G = \ell^2(-1, -2,\ldots)$ und $H = \ell^2(1, 2,\ldots)$ gewählt. G und H sind natürlich komplementiert in (E, τ) . Ist T die Mischtransformation $E \to E$, die von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ z & \rightsquigarrow & -z \end{array}$$

herrührt, so ist $T|_G$ eine Isometrie $G \leftrightarrow H$. Bezeichnet wieder ϕ die Menge der finiten Vektoren in E und σ die Menge der symmetrischen Vektoren, $\sigma = \{x \in E \mid Tx = x\}$, so ist $\phi + \sigma$ dicht in E .

Zur Konstruktion einer geeigneten induktiven Sequenz, die E erzeugt und in der (G, H) nicht lokal komplementiert ist, wird nun eine linear unabhängige Folge $g_n \in G \setminus \phi$ gewählt. Ist K ein algebraisches Komplement zu $\phi + \sigma + \text{span }[g_n, Tg_n]_{n=1}^{\infty}$ in E und

$$F_m = K + \sigma + \phi + \text{span}[Tg_n]_{n=1}^{\infty} + \text{span}[g_n]_{n=1}^{m} \quad ,$$

so bildet $[(F_m , \tau)]_{m \in \mathbb{N}}$ eine strikte induktive Sequenz, die, da alle F_m dicht in E sind, die Topologie von E generiert. Für $m>n$ gilt nun wegen $g_{m+1} \notin F_m$

$$F_n \supset \sigma \ni g_{m+1} + Tg_{m+1} \notin F_m \cap G \oplus F_m \cap H \quad ,$$

also für alle $m>n$ $F_n \not\subset F_m \cap G \oplus F_m \cap H$ und (G, H) ist nicht lokal komplementiert.//

Man sagt, ein Unterraum $G \subset E$ ist (<u>stufenweise, lokal</u>) <u>komplementierbar</u>, falls ein Unterraum $H \subset E$ existiert, so daß (G, H) (stufenweise, lokal) komplementiert ist.

KOROLLAR 1. - <u>Ist</u> G <u>stufenweise oder lokal komplementierbar, so ist</u> G <u>abgeschlossen</u>.

Man beachte, daß sogar in strikten (LF)-Raümen nicht abgeschlossene Unterräume mit abgeschlossenen Spuren vorkommen können.

KOROLLAR 2. - <u>Ist</u> G <u>endlich-codimensional und besitzt abgeschlossene Spuren, so ist jedes algebraische Komplement von</u> G <u>ein stufenweises</u> ; G <u>ist also insbesondere abgeschlossen</u>.

<u>Beweis</u> : Sei $G \oplus H = E$; für $\alpha \geqslant \alpha_o$ ist dann $H \subset E_\alpha$ und deshalb $(E_\alpha, \tau_\alpha) = (E_\alpha \cap G, \tau_\alpha) \oplus (H, \tau_\alpha)$ .//

Dieses Korollar ist natürlich nichts anderes als die Interpretation in induktiven Limiten der Tatsache, daß ein endlich dimensionaler Operator genau dann stetig ist, falls sein Kern abgeschlossen ist.

Der Beweis des Satzes hat insbesondere noch ergeben, daß für ein lokal komplementiertes Paar (H_1, H_2) die Darstellung

$$(H_i, \tau) = \mathrm{ind}\,(E_\alpha \cap H_i, \tau_\alpha) \qquad i = 1, 2$$

gilt. Ist etwa $[(E_\alpha, \tau_\alpha)]_{\alpha \in A}$ ein <u>reguläres</u> Netz (= jede beschränkte Menge in (E, τ) liegt bereits in einer Stufe (E_α, τ_α) und ist dort beschränkt) und sind die Unterräume (H_i, τ) bornologisch, so gilt ebenfalls diese Darstellung. Eine nicht abgeschlossene Hyperebene eines bornologischen Raumes (die also bornologisch ist) zeigt somit, daß die angegebene Limesdarstellung für keine Form der topologischen Komplementierbarkeit hinreicht.

4. Eine Charakterisierung der lokalen Komplementierbarkeit mittels Projektoren und Quotientenabbildungen liefert der

SATZ B . - <u>Es sind äquivalent</u> :

(1) (G, H) <u>ist lokal komplementiert</u>.

(2) <u>Es gibt einen lokalen Projektor</u> $P : E \to E$, d. h. <u>eine lineare Abbildung mit</u>

(a) $P^2 = P$

(b) <u>Für jedes</u> $\alpha \in A$ <u>existiert ein</u> $\alpha \leqslant \beta \in A$, <u>so daß</u>

$$\begin{array}{cccc} P_{\alpha\beta} : & (E_\alpha, \tau_\alpha) & \longrightarrow & (E_\beta, \tau_\beta) \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\smile & & \cup\!\!\!\!\!\!\smile \\ & x & \rightsquigarrow & Px \end{array}$$

<u>wohldefiniert und stetig ist</u>,

<u>derart, daß</u> $\mathrm{im}\, P = G$ <u>und</u> $\ker P = H$ <u>sind</u>.

(3) $G \oplus H = E$ (<u>algebraisch</u>) <u>und zu jedem</u> α <u>gibt es ein</u> $\alpha \leqslant \beta \in A$, <u>daß</u>

$$Q_{\alpha\beta} : (E_\alpha, \tau_\alpha) \Big/ (E_\alpha \cap H) \longrightarrow (E_\beta, \tau_\beta)$$

<u>wohldefiniert und stetig ist.</u>

(Dabei ist $Q_{\alpha\beta}$ die Abbildung, die aus der natürlichen Quotientenabbildung $Q : E/H \to G$ entsteht).

<u>Beweis</u> :

(1) $\curvearrowright$ (2) : Sei (G, H) lokal komplementiert und P der Projektor auf G längs H. Ist P_β die Projektion $E_\beta \cap G \oplus E_\beta \cap H \to E_\beta \cap G \hookrightarrow E_\beta$, so schreibt sich

$$P_{\alpha\beta} : (E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta \cap G, \tau_\beta) \oplus (E_\beta \cap H, \tau_\beta) \xrightarrow{P_\beta} (E_\beta, \tau_\beta)$$

und ist also stetig : P ist ein lokaler Projektor.

(2) $\curvearrowright$ (3) : Da $P_{\alpha\beta}$ existiert, stetig ist und ker $P_{\alpha\beta} = E_\alpha \cap H$ gilt, ist $Q_{\alpha\beta}$ wohldefiniert (d. h. im $Q_{\alpha\beta} \subset E_\beta$) und das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "P_{\alpha\beta}"] \arrow[d] & E_\beta \\
E_\alpha \Big/ \mathrm{Ker}\ P_{\alpha\beta} = E_\alpha \Big/ E_\alpha \cap H \arrow[ur, "Q_{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

liefert die Stetigkeit von $Q_{\alpha\beta}$.

(3) $\curvearrowright$ (1) : Bezeichnen $I_{\alpha\beta} : E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$ und $I_\alpha : E_\alpha \hookrightarrow E_\alpha \Big/ E_\alpha \cap H$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
E_\alpha & \longrightarrow & E_\beta \cap G \oplus E_\beta \cap H \\
\cup\!\!\!\cdot & & \cup\!\!\!\cdot \\
x & \rightsquigarrow & Q_{\alpha\beta} I_\alpha x \oplus (I_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}\, I_\alpha)\, x
\end{array}$$

wohldefiniert und gerade die Inklusion. Da $I_{\alpha\beta}$, I_α und $Q_{\alpha\beta}$ aber alle stetig sind, ist auch

$$(E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta \cap G, \tau_\beta) \oplus (E_\beta \cap H, \tau_\beta)$$

stetig und (G, H) ist lokalkomplementiert.//

Ein Unterraum G von (E, τ) ist also genau dann lokal komplementierbar, wenn ein lokaler Projektor P mit im $P = G$ existiert.

Eine Satz B entsprechende Aussage gilt für die stufenweise Komplementiertheit (setze nur stets $\alpha = \beta$ für cofinal viele α) .

5. Ist (E, τ) bornologisch, $\mathfrak{L}$ eine Basis der beschränkten Mengen, bestehend aus absolutkonvexen und beschränkten Mengen B , für die $[B]$ den von B aufgespannten Teilraum mit der Minkowski-Norm bezeichnet, so gilt bekanntlich
$(E, \tau) = \operatorname{ind}_{\mathfrak{L} \ni B \to} [\![B]\!]$.

Ein lokaler Projektor bzgl. $[\![[B]\!]]_{B \in \mathfrak{L}}$ ist nun genau ein <u>beschränkter</u> (d. h. Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt) Projektor, also genau ein stetiger Projektor :

KOROLLAR 3. - <u>In bornologischen Räumen ist ein Paar (G, H) genau dann komplementiert, wenn es bzgl. eines Netzes $[\![[B]\!]]_{B \in \mathfrak{L}}$ ($\mathfrak{L}$ eine Basis der beschränkten absolutkonvexen Mengen) lokal komplementiert ist ; anders ausgedrückt, genau dann, wenn zu jeder beschränkten Menge B eine beschränkte Menge C existiert, daß aus $g_n + h_n \underset{B}{\to} g + h$ stets $g_n \underset{C}{\to} g$ folgt (mit g_n , $g \in G$ und h_n , $h \in H$) .</u>

Dabei bezeichnet $\underset{C}{\to}$ die Konvergenz in $[C]$. Eine Folge (x_n) in E , die für ein beschränktes, absolutkonvexes C in diesem Sinne konvergiert, heißt <u>Mackey-konvergent</u> ; eine Teilmenge G <u>Mackey-abgeschlossen,</u> falls die Limiten Mackey-konvergenter Folgen aus G in G liegen.

KOROLLAR 4. - <u>(Mackey) : Ist E bornologisch, $G \subset E$ endlich-codimensional und Mackey-abgeschlossen, so ist G komplementierbar, insbesondere abgeschlossen.</u>

(Wegen Korollar 2).

6. In jedem lokalkonvexen Raum gilt :

<u>Ist (H_1, H_2) ein komplementiertes Paar in (E, τ) , so bildet $\{\Gamma(B_1 \cup B_2) \mid B_i \subset (H_i, \tau)$ beschränkt $\}$ eine Basis der beschränkten Mengen von (E, τ) .</u>

(Γ für die absolutkonvexe Hülle) .

Denn ist P der zugehörige Projektor, so gilt für eine beschränkte Menge B : $\frac{1}{2} B \subset \Gamma(PB \cup (id_E - P)B)$.

In bornologischen Räumen gilt die Umkehrung :

KOROLLAR 5. -

(1) Ist (E, τ) bornologisch, H_i Unterräume mit $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ so ist (H_1, H_2) genau dann ein komplementäres Paar, falls das System

$$\{\Gamma(B_1 \cup B_2) \mid B_i \subset (H_i, \tau) \text{ beschränkt }\}$$

eine Basis der beschränkten Mengen von (E, τ) bildet.

(2) Ist (E, τ) bornologisch und Mackey-vollständig (= alle beschränkten, absolutkonvexen und abgeschlossenen Mengen B sind komplettant, d. h. $[\![B]\!]$ ist ein Banachraum ; dafür reicht hin, daß (E, τ) quasivollständig ist), so ist (H_1, H_2) mit $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ genau dann ein komplementäres Paar, wenn für jedes beschränkte $B \subset (E, \tau)$ Mackey-abgeschlossene (in E) beschränkte Mengen $B_i \subset H_i$ mit $B \subset \operatorname{span}[B_1 \cup B_2]$ existieren.

Beweis : Es bleibt jeweils zu zeigen, daß die Bedingung hinreicht.

(1) Für eine beschränkte absolutkonvexe Menge $B \subset (E, \tau)$ existieren $B_i \subset H_i$ beschränkt und absolutkonvex, so daß

$$B \subset \Gamma(B_1 \cup B_2) = \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \mid |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 1 \ , \ g_i \in B_i\} = : C \ .$$

Für $x \in B$, $x = \bar{g}_1 + \bar{g}_2$, $\bar{g}_i \in H_i$ eindeutig, gilt

$$x = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \qquad g_i \in B_i \ , \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 1$$

also $\bar{g}_i = \alpha g_i \in B_i$ und die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [\![B]\!] & \hookrightarrow & [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!] \\ \cup & & \\ x = g_1 + g_2 & \rightsquigarrow & g_1 \oplus g_2 \end{array}$$

ist damit beschränkt = stetig, also auch

$$[\![B]\!] \hookrightarrow [\![C]\!] \cap H_1 \oplus [\![C]\!] \cap H_2$$

und (H_1, H_2) ist lokal komplementiert bzgl. des kanonischen induktiven Netzes, das aus den beschränkten absolutkonvexen Mengen entsteht.

(2) Zunächst gilt $[\![B]\!] \subset [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!]$ nach Voraussetzung und o. E. d. A. sind dies alles Banachräume : eine ~~e~~infache Anwendung des Graphensatzes bringt aber die Stetigkeit dieser Einbettung und wie eben ergibt sich, daß (H_1, H_2) lokal komplementiert ist. //

Mit der in 3. angegebenen Darstellung für lokal komplementierte Unterräume mittels des von den Spuren erzeugten Netzes folgt nun : ein komplementierbarer

Unterraum H eines bornologischen Raumes (E, τ) ist bornologisch. Das ist aber auch leicht direkt nachweisbar : ist nämlich P ein zugehöriger Projektor und B ein Bornolog in (H, τ), so auch $P^{-1}(B)$ in (E, τ), also $B = H \cap P^{-1}(B)$ eine Nullumgebung in (H, τ). Ebenso : Jeder komplementierte Unterraum eines tonnelierten (quasitonnelierten, σ-tonnelierten, ...) lokalkonvexen Raumes ist tonneliert (quasitonneliert, σ-tonneliert, ...).

7. Auf allgemeine ultrabornologische Räume $(E, \tau) = \text{ind } (B_\alpha, \tau_\alpha)$ (alle (B_α, τ_α) Banachräume) ist die Aussage (2) von Korollar 5 nicht anwendbar, da diese i. a. nicht Mackey-vollständig sind. Es gilt folgendes Kriterium.

SATZ C. - Ist (E, τ) ultrabornologisch, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, und liegt die Mackey-abgeschlossene absolutkonvexen Hülle jeder Mackey-konvergenten Nullfolge (x_n) in einem span $[B_1 \cup B_2]$, $B_i \subset H_i$ beschränkt, absolutkonvex und komplettant, so ist (H_1, H_2) komplementiert.

Beweis : Ein Satz von Raikov sagt aus, daß jeder ultrabornologische Raum darstellbar ist durch ein kompaktes induktives Netz von Banachräumen (E_α, τ_α) und der Beweis zeigt, daß dies insbesondere möglich ist durch Banachräume der Form

$(E_\alpha^\xi, \tau_\alpha^\xi) = \left[\overline{\Gamma\{x_n\}}^{\tau_\alpha}\right]$; dabei ist $\xi = (x_n)$ eine konvergente Nullfolge in einem (E_α, τ_α) (in [4], 6.7. ist ein Beweis skizziert). Wählt man B_i nach Voraussetzung, so gilt $E_\alpha^\xi \subset [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!]$ und der Graphensatz liefert wieder die Stetigkeit :

$$(E_\alpha^\xi, \tau_\alpha^\xi) \hookrightarrow [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!] \hookrightarrow (E, \tau) .$$

Damit gilt $(E, \tau) = \operatorname*{ind}_{\xi, \alpha} (E_\alpha^\xi, \tau_\alpha^\xi) \hookrightarrow \operatorname*{ind}_{B_1, B_2} [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!] \hookrightarrow (E, \tau)$, also

$$(E, \tau) = \operatorname*{ind}_{B_1, B_2} [\![B_1]\!] \oplus [\![B_2]\!] = \operatorname*{ind}_{B_1} [\![B_1]\!] \oplus \operatorname*{ind}_{B_2} [\![B_2]\!] = (H_1, \tau) \oplus (H_2, \tau),$$

wobei B_i jeweils die beschränkten, absolutkonvexen Mengen von (H_i, τ) durchläuft. //

Hinreichend für die im Satz C angegebene Bedingung ist natürlich, daß jede folgenkompakte, absolutkonvexe Menge in einem span $[B_1 \cup B_2]$ der angegebenen Art liegt.

8. Um die Situation in (LF)-Räumen (= induktiver Limes einer Sequenz E_n von (F)-Räumen) untersuchen zu können, erweist sich der folgende Satz von Grothendieck als nützlich, der mithilfe des Satzes von Baire und des Graphensatzes

bewiesen wird ([1], p. 81) :

Sind (E, τ) ein (separierter) lokalkonvexer Raum, (E_n, τ_n) $(n \in \mathbb{N})$ und (F, ν) Frécheträume, $E_n \hookrightarrow E$ stetig, $u : F \to E$ stetig und $u(F) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, so gibt es einen Index m, so daß $u(F) \subset E_m$ und $u : F \to E_m$ stetig ist.

Anders ausgedrückt :

Jede abgeschlossene Abbildung $u : F \to \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (mit der finalen lokalkonvexen Topologie) faktorisiert stetig über ein E_m.

SATZ D. - In einem (separierten) (LF)-Raum $(E, \tau) = \text{ind}\,(E_n, \tau_n)$ sind für ein Paar (H_1, H_2) von Unterräumen äquivalent :

(1) $H_1 \oplus H_2 = E$ und beide H_i besitzen abgeschlossene Spuren $H_i \cap E_n$ (in E_n).

(2) $H_1 \oplus H_2 = E$ und beide H_i sind Mackey-abgeschlossen.

(3) $H_1 \oplus H_2 = E$ und beide H_i sind abgeschlossen (in E).

(4) (H_1, H_2) ist komplementiert.

(5) (H_1, H_2) ist lokal komplementiert.

Das Gegenbeispiel von Satz A (1) zeigte, daß es lokal komplementierte Paare in (LF)-Räumen gibt, die nicht stufenweise komplementiert sind.

Beweis : Es bleibt (1) $\curvearrowright$ (5) zu zeigen : Zunächst gilt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap H_1 \oplus E_n \cap H_2$. Da sämtliche Spuren $E_n \cap H_i$ in E_n abgeschlossen sind, ist $(E_n \cap H_1, \tau_n) \oplus (E_n \cap H_2, \tau_n)$ ein Fréchetraum, der stetig in (E, τ) eingebettet ist. Für (E_m, τ_m) gibt es also nach dem Grothendieckschen Satz ein n mit $(E_m, \tau_m) \hookrightarrow (E_n \cap H_1, \tau_n) \oplus (E_n \cap H_2, \tau_n)$ und (H_1, H_2) ist lokal komplementiert.//

Die Äquivalenz (1) $\curvearrowright$ (4) hat De Wilde [2] mit der Methode der Netze vom Typ $\mathcal{C}$ bewiesen.

KOROLLAR 6. - Seien $(E, \nu) = \text{ind}\,(E_n, \nu_n)$ und $(F, \tau) = \text{ind}\,(F_n, \tau_n)$ separierte (LF)-Räume und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung mit abgeschlossenem Graphen.

Gibt es ein algebraisches Komplement H von im T mit abgeschlossenen Spuren, so ist (im T, H) ein lokal komplementiertes Paar, insbesondere also ist im T abgeschlossen, und T ist offen (als Abbildung von E nach im T) und stetig

Beweis : Zeigt man, daß im T abgeschlossene Spuren besitzt, so ist nach Satz D das Paar (im T, H) lokal komplementiert, also komplementiert und im T ist abgeschlossen. Nach 3. gilt dann weiter, daß (im $\dot{T}$, τ) ein (LF)-Raum ist und der übliche Homomorphiesatz zwischen (LF)-Räumen liefert, daß T stetig und offen ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei nun T injektiv, also $E_n \subset E \subset F$. Dann hat die Einbettungsabbildung J

$$(F_m, \tau_m) \xrightarrow{J} \operatorname{ind} [(E_n, \nu_n) \oplus (F_n \cap H, \tau_n)] =$$
$$= (E, \nu) \oplus \operatorname{ind} (F_n \cap H, \tau_n) \hookrightarrow (F, \tau)$$

einen abgeschlossenen Graphen, ist somit stetig und $J^{-1}(E) = \operatorname{im} T \cap F_m$ ist abgeschlossen in F_m .//

Insbesondere sind also Graphen-abgeschlossene Operatoren mit endlich-codimensionalem Bild zwischen separierten (LF)-Räumen Homomorphismen ; das ist ein Spezialfall eines Satzes von Köthe [5].

9. Die Aussagen von 2. -4. und 8. gelten ohne Abänderung auch in der Kategorie der topologischen Vektorräume. Alles bleibt richtig, wenn man in der Kategorie der lokal-p-konvexen Vektorräume ($0<p<1$) arbeitet, man ersetzt nur absolutkonvex durch absolut-p-konvex. Das bedeutet etwa, wenn ein Paar (H_1, H_2) lokal komplementiert ist bzgl. eines Netzes $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ von lokalkonvexen Räumen, so ist (H_1, H_2) komplementiert in ind (E_α, τ_α), gleichgültig, ob der induktive Limes gebildet ist in der Kategorie der lokal-p-konvexen ($0<p\leqslant 1$ fest) oder der topologischen Vektorräume, obwohl die entsprechenden Topologien des Grenzraumes auseinanderfallen können.

Eine natürliche Verbindung zum Begriff der Komplementiertheit in der Kategorie der Vektorräume mit Bornologie liegt vor (zur Terminologie siehe [3]). Korollar 3 sagt etwa aus, daß in einem bornologischen lokalkonvexen Raum ein Paar (H_1, H_2) von Unterräumen genau dann komplementiert ist, wenn es in der assoziierten Bornologie von Von Neumann komplementiert ist. Korollar 5 (2) liefert ein Komplementierbarkeitskriterium in einem Vektorraum mit einer lokal-p-konvexen, topologischen, vollständigen Bornologie.

Von etwas anderer Art ist die folgende Aussage : Seien alle (E_α, τ_α) bornologisch, $\mathcal{b}\tau_\alpha$ die zu τ_α gehörige Bornologie von Von Neumann von E_α (deren assoziierte Topologie gerade τ_α ist, da (E_α, τ_α) bornologisch ist). Sei $(E, \mathcal{L})$ der in der Kategorie der Vektorräume mit Bornologie gebildete induktive Limes der

$(E_\alpha, \ell\tau_\alpha)$ und (E, τ) der in der Kategorie der topologischen (resp. lokal-p-konvexen, $0<p\leqslant 1$) Vektorräume gebildete induktive Limes der (E_α, τ_α). (Man beachte, daß im allgemeinen $\ell\tau$ von $\mathcal{L}$ verschieden ist). Dann gilt :

> Ist ein Paar (H_1, H_2) von Unterräumen von E in der Bornologie $\mathcal{L}$ komplementiert, so auch in (E, τ).

Die Voraussetzung bedeutet, daß (H_1, H_2) in dem Netz $[[B]]_{B\in\mathcal{L}}$ lokal komplementiert ist. Da nun aber ind $[B] = (E, \tau)$ gilt, folgt die Behauptung.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1 et 2, Paris 1966.

[2] DE WILDE (M.). - Opérateurs ouverts et sous-espaces complémentaires dans un espace ultrabornologique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 38 (1969) 454-458.

[3] HOGBE-NLEND (H.). - Les fondements de la bornologie moderne I. Départ. Math. Bordeaux, 1970.

[4] FLORET (K.). - Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen. J. reine angew. Math. 247 (1971) 155-195

[5] KOTHE (G.). - Die Bildräume abgeschlossener Operatoren. J. reine angew. Math. 232 (1968), 110-111.

Klaus FLORET
Mathematisches Seminar der
Christian-Albrechts-Universität
D-23 KIEL 1 (Allemagne fédérale)