MARC DE WILDE

Suites absorbantes et suites bornivores dans les espaces localement convexes

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 137-141

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__137_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 137-141.

SUITES ABSORBANTES ET SUITES BORNIVORES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par

Marc DE WILDE

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On appelle suite absorbante (resp. bornivore) de E une suite d'ensembles e_m , $m \in \mathbb{N}$, absolument convexes, fermés, emboîtés en croissant et tels que tout élément (resp. toute partie bornée) de E soit absorbé par un des e_m .

Un exemple important de suite bornivore est constitué par les suites fondamentales de bornés des espaces $\mathcal{D}F$ (cf. [4]). D'autre part, Amemiya et Komura dans [1] et Valdivia dans [9] ont établi diverses propriétés des suites absorbantes dans les espaces tonnelés. En allégeant les hypothèses de tonnelage de Valdivia, on obtient des résultats qui généralisent également les propriétés des espaces $\mathcal{D}\mathcal{F}$

On désigne par E^* le dual de E . On le note E^*_s s'il est muni de la topologie simple et E^*_b s'il est muni de la topologie forte.

On appelle infratonneau un tonneau qui soit l'intersection d'une suite de voisinages absolument convexes et fermés de 0 .

Un σ-tonneau est le polaire d'une suite bornée de E^*_s . C'est donc un infratonneau dans E muni de la topologie simple définie à partir de E^* .

L'espace E est tonnelé (resp. infratonnelé, σ-tonnelé) si tout tonneau (resp. infratonneau, σ-tonneau) de E est un voisinage de 0 dans E .

L'espace E est évaluable (resp. infraévaluable, σ-évaluable) si tout tonneau (resp. infratonneau, σ-tonneau) bornivore de E est un voisinage de 0 dans E .

L'espace E est aσ-tonnelé (resp. aσ-évaluable) si, pour toute suite $\tau_m \in E^*$ telle que :

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\tau_m(f)| < \infty \quad (\text{resp. } \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{f \in B} |\tau_m(f)| < \infty) \qquad (*)$$

pour tout $f \in E$ (resp. pour toute partie bornée de E), la suite τ_m est équicontinue. Une suite τ_m qui vérifie (*) est dite absolument sommable dans E^*_s (resp. E^*_b) .

Notons que, pour que E soit aσ-tonnelé (resp. aσ-évaluable), il suffit qu'il soit de Mackey et que E^*_s (resp. E^*_b) soit séquentiellement complet.

Traitons par exemple le premier cas. Soit τ_m , $m \in \mathbb{N}$, une suite absolument convergente dans E^*_s , ou même une suite qui tend vers 0 dans E^*_s . Son enveloppe fermée absolument convexe s'écrit :

$$\{ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \tau_m : \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| \leqslant 1 \}$$

et elle est compacte dans E^*_s , donc équicontinue, d'où la thèse.

PROPOSITION 1. - Soit L un sous-espace vectoriel de E et soit e_m , $m \in \mathbb{N}$, une suite absorbante (resp. bornivore) de L .

Si L est σ-tonnelé (resp. σ-évaluable), l'adhérence de $\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m$ est l'adhérence algébrique de $\bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{e_m}$, les adhérences étant prises dans E .

Si L est $a\sigma$-tonnelé (resp. $a\sigma$-évaluable) et si $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m| < \infty$, on a :

$$\overline{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} \overline{e_m} .$$

La première partie de l'énoncé est le théorème 1 de [2]. Démontrons la seconde. Il suffit évidemment de prouver que :

$$\overline{L} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} \overline{e_m} .$$

On peut, sans restriction, supposer L dense dans E . Si f n'appartient pas à l'ensemble du second membre, il existe une suite $\tau_m \in L^*$ telle que $\tau_m(f) = 1$ et $\tau_m \in \lambda_m e_m^{\circ}$. La suite τ_m est alors absolument sommable dans L^*_s (resp. L^*_b) . Elle est donc équicontinue dans L^* et, de là, dans E^* . Il en résulte qu'elle admet un élément adhérent τ . Pour ce τ , on a $\tau(f) = 1$ et $\tau = 0$ dans L , ce qui prouve que $\tau \notin \overline{L}$.

On peut tirer divers corollaires de cette proposition, notamment les propositions 4 et 5 ci-après. On trouve d'autres corollaires dans [2].

PROPOSITION 2. - Soit E infratonnelé (resp. infraévaluable), soit e_m , $m \in \mathbb{N}$, une suite absorbante (resp. bornivore) de E et soit $\lambda_m \uparrow \infty$.

Un ensemble absolument convexe $U \subset E$ est un voisinage de 0 dans E si et seulement si $U \cap \lambda_m e_m$ est un voisinage de 0 dans $\lambda_m e_m$ (pour la topologie induite par E), pour tout m .

Cette proposition a d'abord été établie par Grothendieck pour les espaces $\mathcal{DF}$ ([4], théorème 3), puis par Valdivia pour les espaces tonnelés ([9], théorème 5). Nous renvoyons à [2], théorème 3 pour sa démonstration et ses corollaires.

PROPOSITION 3. - ([2], th. 4) Si E est σ-tonnelé (resp. σ-évaluable), tout tonneau (resp. tout tonneau bornivore) de E induit un voisinage de 0 dans tout

<u>sous-espace séparable de</u> E .

Le même résultat a été établi par Gröthendieck pour les espaces $\mathcal{DF}$. On voit qu'ici, non seulement l'hypothèse de tonnelage peut être affaiblie, mais même l'existence d'une suite fondamentale de parties bornées est inutile.

Examinons encore dans quelle mesure on peut substituer des suites absorbantes aux tonneaux.

PROPOSITION 4. - <u>Si</u> E <u>est</u> σ-<u>tonnelé</u> (<u>resp</u>. σ-<u>évaluable</u>) <u>et si</u> e_m , $m \in \mathbb{N}$, <u>est une suite absorbante</u> (<u>resp. bornivore</u>), <u>alors</u> $\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m$ <u>contient un tonneau</u> (<u>resp. un tonneau bornivore</u>).

En effet, par la proposition 1,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \supset \frac{1}{2} \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m} .$$

PROPOSITION 5. - <u>Si</u> L <u>est</u> aσ-<u>tonnelé</u> (<u>resp. a</u>σ-<u>évaluable</u>) <u>et dense dans un espace de Baire</u> E , <u>pour toute suite absorbante</u> (<u>resp. bornivore</u>) e_m , $m \in \mathbb{N}$, <u>un des</u> e_m <u>est un voisinage de</u> 0 .

<u>En particulier</u>, E <u>est alors tonnelé</u> (<u>resp. évaluable</u>).

Vu la proposition 1, on a :

$$E = \overline{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} 2^m \overline{e_m} ,$$

donc, par la propriété de Baire, un $\overline{e_m}$ est un voisinage de 0 dans E . On conclut en notant que $e_m = \overline{e_m} \cap L$.

Pour le cas particulier, on remarque que si θ est un tonneau (resp. un tonneau bornivore) $m\theta$, $m \in \mathbb{N}$, est une suite absorbante (resp. bornivore).

Il n'est pas vrai en général que, si e_m , $m \in \mathbb{N}$, est une suite absorbante un des e_m soit un voisinage de 0 , ou même soit absorbant. Le contre-exemple le plus simple est celui des espaces $\mathcal{LF}$. Désignons par φ l'espace des suites finies, considéré comme limite inductive des C^m , $m \in \mathbb{N}$. Suivant [8], nous dirons que E <u>contient</u> φ s'il contient un sous-espace isomorphe à φ . Soit $\succ A \prec$ l'enveloppe linéaire de A .

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> E <u>a</u>σ-<u>tonnelé</u> (<u>resp. a</u>σ-<u>évaluable</u>) <u>et soit</u> e_m , $m \in \mathbb{N}$, <u>une suite absorbante</u> (<u>resp. bornivore</u>) <u>de</u> E .

<u>Si</u> $f_m \in e_{m+1} \setminus \succ e_m \prec$, <u>pour tout</u> m , $\succ \bigcup_{m=1}^{\infty} f_m \prec$ <u>est isomorphe à</u> φ .

<u>En particulier, si</u> E <u>ne contient pas</u> φ , <u>un des</u> e_m <u>est absorbant.</u>

C'est une forme un peu généralisée de [8], théorème 2.1 et corollaire 2.2 .

On note d'abord que, pour tout m_o fixé et toute suite $\varepsilon_m > 0$, il existe $\tau_{m_o} \in e^o_{m_o}$ tel que $\tau_{m_o}(f_{m_o}) = 1$ et $|\tau_{m_o}(f_m)| \leqslant \varepsilon_m$ pour tout $m \neq m_o$.

On peut évidemment supposer que $\varepsilon_m \downarrow 0$ et que $\varepsilon_{m_o} \leqslant 1$.

Déterminons $Q_{m_o} \in \varepsilon_{m_o}/2 \cdot e^o_{m_o}$ tel que $Q_{m_o}(f_{m_o}) = 2$, puis, de proche en proche, Q_m tel que $Q_m \in \varepsilon_m\, 2^{-m}\, e^o_m$ et que $\sum_{i=m_o}^{m} Q_i(f_m) = 0$. La suite $2^{m/2}\, Q_m$ est visiblement absolument convergente, donc équicontinue et la série $\sum_{m=m_o}^{\infty} Q_m$ converge. Sa limite Q vérifie les relations :

$$|Q(f_{m_o})| \geqslant |Q_{m_o}(f_{m_o})| - \sum_{i=m_o+1}^{\infty} |Q_i(f_{m_o})| \geqslant 2 - \varepsilon_{m_o} ,$$

$$|Q(f_m)| \leqslant \sum_{i=m_o}^{\infty} |Q_i(f_m)| \leqslant \varepsilon_{m_o} \leqslant \varepsilon_m , \ \forall m < m_o ,$$

$$|Q(f_m)| = |\sum_{i=m+1}^{\infty} Q_i(f_m)| \leqslant \varepsilon_m , \ \forall m > m_o ,$$

et $Q \in \varepsilon_{m_o} e^o_{m_o}$, d'où la conclusion en posant $\tau_{m_o} = Q/Q(f_{m_o})$.

Pour que $\succ \bigcup_{m=1}^{\infty} f_m \prec$ soit isomorphe à φ , il suffit que, quels que soient les $\lambda_i \geqslant 0$,

$$p(\sum_i c_i f_i) = \sup_i \lambda_i |c_i|$$

soit une semi-norme continue dans $\succ \bigcup_{m=1}^{\infty} f_m \prec$ pour la topologie induite par E .

Soient $\tau_m \in 2^{-m} e^o_m$, tels que $\tau_m(f_m) = \lambda_m$ et $|\tau_m(f_i)| \leqslant 2^{-i} \lambda_i$ pour $i \neq m$. La suite τ_m est absolument convergente, donc équicontinue. De plus,

$$|\tau_m(\sum_i c_i f_i)| \geqslant \lambda_m |c_m| - \sum_{i \neq m} |c_i|\, |\tau_m(f_i)| \geqslant \lambda_m |c_m| - \frac{1}{2} \sup_i \lambda_i |c_i| ,$$

et

$$p(\sum_i c_i f_i) = \sup_i \lambda_i |c_i| \leqslant 2 \sup_m |\tau_m(\sum_i c_i f_i)| \quad ,$$

d'où la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (I.) et KOMURA (Y.). - Uber nicht-vollständige Montelräume, Math. Ann. 177, 273-277, 1968.

[2] DE WILDE (M.) et HOUET (C.). - On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces, Math. Ann., 192, 257-261, 1971.

[3] GARNIR (H.G.), DE WILDE (M.) et SCHMETS (J.). - Analyse fonctionnelle, I, Birkhäuser, Bâle-Stuttgart, 1968.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Sur les espaces ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{D}\mathfrak{F}$), Summa Brasil. Math., 3, 57-123, 1954.

[5] HUSAIN (T.). - Two new classes of locally convex spaces, Math. Ann. 166, 289-299, 1966.

[6] KOTHE (G.). - Topological vector spaces, I, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1969.

[7] LEVIN (M.) et SAXON (S.). - Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled, à paraître dans Proc. Am. Math. Soc.

[8] SAXON (A.). - Nuclear and product spaces, Baire-like spaces, and the strongest locally convex topology, à paraître dans Math. Ann.

[9] VALDIVIA (M.). - Absolutely convex sets in barrelled spaces, à paraître dans Ann. Inst. Fourier.

[10] WEBB (J.). - Sequential convergence in locally convex spaces, Proc. Camb. Phil. Soc., 64, 341-364, 1968.

Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B 4000 Liège
(Belgique)