FRANCINE CNOP-GRANDSARD

Fonctions holomorphes à croissance et à valeurs dans un *b*-espace

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 105-107

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__105_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 105-107.

FONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE ET À VALEURS DANS UN b-ESPACE

par

Francine CNOP-GRANDSARD

1. Soit δ une fonction bornée, non négative, lipschitzienne sur $\mathbb{C}^n$, avec la propriété que $|z|\delta(z)$ soit bornée. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta(z) > 0\}$.

Nous définissons l'espace $\mathcal{O}(\delta)$ des fonctions holomorphes δ-tempérées comme l'espace des fonctions f, définies et holomorphes sur Ω, qui ont la propriété suivante : il existe un entier positif N tel que $\delta^N(z)\, f(z)$ soit bornée sur Ω. $\mathcal{O}(\delta)$ est la réunion, pour N entier positif, des espaces de Banach $\mathcal{O}_N(\delta)$ des fonctions holomorphes f sur Ω telles que $\delta^N(z)\, f(z)$ soit bornée sur Ω. Les injections canoniques $\mathcal{O}_N(\delta) \to \mathcal{O}_{N+1}(\delta)$ étant compactes, l'espace $\mathcal{O}(\delta)$ est un espace de Silva.

Nous notons par $\mathcal{O}^*(\delta)$ le dual topologique de $\mathcal{O}(\delta)$, muni de la topologie forte. $\mathcal{O}^*(\delta)$ est un espace de Fréchet-Schwartz, et sa bornologie topologique est la bornologie équicontinue.

2. Soit E un espace localement convexe séparé (sur $\mathbb{C}$) avec bornologie topologique complétante. Une fonction f définie sur Ω et à valeurs dans E appartient à l'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ si elle est holomorphe sur Ω et si pour toute semi-norme ν de E il existe un entier positif N tel que $\delta^N(z)\, f(z)$ soit bornée pour cette semi-norme.

Nous pouvons démontrer la caractérisation suivante :

THEOREME 1. - *Soit* E *un espace localement convexe séparé (sur* $\mathbb{C}$*) avec bornologie topologique complétante. Soit* f *une fonction sur* Ω *à valeurs dans* E *avec la propriété que* $x' \circ f \in \mathcal{O}(\delta)$ *pour tout* x' *dans le dual de* E. *Alors* $f \in \mathcal{O}(\delta, E)$.

3. Soit E un b-espace (sur $\mathbb{C}$) et f une fonction sur Ω à valeurs dans E. Nous disons que f appartient à l'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ s'il existe un borné complétant B dans E et un entier positif N tels que $f(\Omega) \subseteq E_B$, $f \in \mathcal{O}(\Omega, E_B)$, $\{\delta^N(z)\, f(z) \mid z \in \Omega\} \subseteq B$. L'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ est donc la réunion des espaces $\mathcal{O}(\delta, E_B)$, B borné complétant dans E.

Nous définissons une injection canonique

$$i : \Omega \to \mathfrak{G}^*(\delta)$$

par $\langle i(z), f\rangle = f(z)$, pour tout $f \in \mathfrak{G}(\delta)$.

Il résulte du théorème 1 que i appartient à l'espace $\mathfrak{G}(\delta, \mathfrak{G}^*(\delta))$, où $\mathfrak{G}^*(\delta)$ est considéré comme espace localement convexe.

THEOREME 2. - Soit E un b-espace (sur $\mathbb{C}$) et $f \in \mathfrak{G}(\delta, E)$. Alors il existe une application linéaire unique $\overline{f} : \mathfrak{G}^*(\delta) \to E$, qui applique un certain voisinage de 0 dans $\mathfrak{G}^*(\delta)$ sur un borné de E, et qui est telle que $f = \overline{f} \circ i$.

LEMME. - Soit E un b-espace (sur $\mathbb{C}$) et $f \in \mathfrak{G}(\delta, E)$. Alors il existe un "disque compact" X dans E tel que $f(\Omega) \subseteq E_X$ et $f \in \mathfrak{G}(\delta, E_X)$.

Nous appelons "disque compact" d'un b-espace E tout ensemble absolument convexe X qui est compact dans un certain espace E_B, B borné complétant.

Démonstration du lemme : Il existe un borné complétant B de E et un entier positif N tels que f soit holomorphe sur Ω à valeurs dans E_B et que l'ensemble $\{\delta^N(z)\, f(z) \mid z \in \Omega\}$ soit contenu dans B. La fonction δ étant bornée, nous pouvons choisir B de façon que $\{\delta^{N+1}(z)\, f(z) \mid z \in \Omega\}$ soit contenu dans B. Appelons X l'enveloppe absolument convexe fermée dans E_B de l'ensemble $\{\delta^{N+1}(z)\, f(z) \mid z \in \Omega\}$. Alors X est compact pour la topologie de E_B, et X est donc un "disque compact". Il est clair que $f(\Omega) \subseteq E_X$ et $f \in \mathfrak{G}(\delta, E_X)$.

Démonstration du théorème 2 : Nous construisons l'application $\overline{f} : \mathfrak{G}^*(\delta) \to E$ par dualité.

X est un "disque compact" dans E. L'espace E_X, engendré par X, est donc isomorphe au dual de l'espace de Banach F des formes linéaires sur E_X, dont la restriction à X est continue pour la topologie compacte de X, muni de la topologie de la convergence uniforme sur X ([2]).

Grâce au lemme, nous savons que $f \in \mathfrak{G}(\delta, E_X)$.

Nous définissons une application linéaire $f' : F \to \mathfrak{G}_{N+1}(\delta)$ par $f'(t) = t \circ f$, pour tout $t \in F$. L'application f' est continue. Soit $B_{N+1} = \{g \in \mathfrak{G}_{N+1}(\delta) \mid \|g\|_{N+1} = \|\delta^{N+1} g\|_\infty \leqslant 1\}$, alors f' applique le polaire de X dans B_{N+1}. f' est une application linéaire continue de F dans $\mathfrak{G}(\delta)$.

Par transposition, nous obtenons une application linéaire

$$\overline{f} : \mathcal{O}^{*}(\delta) \to F^{*} = E_X \subseteq E$$

définie par $\langle \overline{f}(u), t \rangle = \langle u, f'(t) \rangle$, pour tout $u \in \mathcal{O}^{*}(\delta)$, $t \in F$.

Le polaire de B_{N+1} est un voisinage de 0 dans $\mathcal{O}^{*}(\delta)$ dont l'image par $\overline{f}$ est bornée dans E_X , et donc à priori dans E .

$f = \overline{f} \circ i$. En effet, pour tout $z \in \Omega$ et $t \in F$,
$\langle \overline{f} \circ i(z), t \rangle = \langle i(z), f'(z) \rangle = f'(t)(z) = \langle f(z), t \rangle$.

$\overline{f}$ est unique. Supposons que $\overline{f} \circ i = 0$. Le noyau de $\overline{f}$ est alors un sous-espace vectoriel faiblement fermé K de $\mathcal{O}^{*}(\delta)$ qui contient $i(\Omega)$. Mais, un tel sous-espace n'existe pas. Donc $K = \mathcal{O}^{*}(\delta)$, et $\overline{f} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes. Acad. Roy. Belgique, Mém. Cl. des Sc., 1960.

[2] WAELBROECK (L.). - Some theorems about bounded structures. J. Funct. Anal. 1, 4, 1967, 392-408.

83, Avenue P. Curie
B 1050 BRUXELLES
(Belgique)