

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

IVAN CNOP

Un « Nullstellensatz » pour les fonctions holomorphes à croissance

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 101-104

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__101_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN "NULLSTELLENSATZ" POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE.

par

Ivan CNOP**

1. Le résultat qui suit fait appel à la théorie des espaces bornologiques. Il s'agit d'un théorème du type "Nullstellensatz" pour des systèmes bornés dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance. Dans le cas où le système borné se réduit à une seule fonction, ce théorème a été obtenu par J.J. Kelleher et B.A. Taylor [3] et L. Waelbroeck [6].

Dans ce qui suit, δ sera une fonction non négative, bornée et continue sur \mathbb{C}^n . Si E est un b-espace (espace bornologique convexe séparé complet), $\mathcal{C}(\delta, E)$ sera l'espace des fonctions f définies sur l'ouvert où δ diffère de 0, et qui satisfont à : il existe un entier N tel que $f \cdot \delta^N$ reste borné dans E . $\mathcal{C}(\delta, E)$ est muni de la bornologie naturelle : un ensemble B de fonctions f de $\mathcal{C}(\delta, E)$ est borné si pour un certain entier N , l'ensemble des $f \cdot \delta^N$, $f \in B$, reste borné dans E . $\mathcal{C}(\delta, E)$ est un b-espace. En particulier, le poids $\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$ pour s dans \mathbb{C}^n indique une croissance polynomiale à l'infini.

$\mathcal{O}(\delta)$ est la sous-algèbre commutative de $\mathcal{C}(\delta, \mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur le domaine de définition, muni de la bornologie induite. $\mathcal{O}(\delta)$ est une b-algèbre : c'est un b-espace et le produit de deux bornés est borné.

THEOREME. - Soit δ une fonction non négative, lipschitzienne sur \mathbb{C}^n , inférieure ou égale à δ_0 , avec $-\log \delta$ plurisousharmonique, et Λ un ensemble quelconque d'indices. Soient $f_{1,\lambda}, \dots, f_{k,\lambda}$ et g_λ des familles bornées d'éléments de $\mathcal{O}(\delta)$ pour λ dans Λ . Supposons qu'il existe un nombre positif ϵ et un nombre naturel N tels que pour tout λ dans Λ :

$$(o) \quad |f_{1,\lambda}| + \dots + |f_{k,\lambda}| \geq \epsilon \delta^N |g_\lambda|,$$

partout sur \mathbb{C}^n . Alors il existe un nombre naturel m tel que pour tout λ dans Λ :

$$g_\lambda^m \in \text{idl}(f_{1,\lambda}, \dots, f_{k,\lambda}; \mathcal{O}(\delta)),$$

les coefficients étant bornés dans $\mathcal{O}(\delta)$ indépendamment de λ dans Λ .

2. Soit A une b-algèbre commutative à unité, et α un b-idéal, c'est-à-dire un idéal de A muni de la structure d'un b-espace (pas nécessairement la structure induite), et tel que le produit d'un borné de α et d'un borné de A est

** Aspirant du "N. F. W. O." de Belgique.

borné dans α . Le spectre d'éléments a_1, \dots, a_n dans A modulo α , $\Delta(a_1, \dots, a_n; A|\alpha)$ est l'ensemble des fonctions φ sur \mathbb{T}^n pour lesquelles on a une décomposition de 1 :

$$1 = \varphi(s) u_0(s) + \sum_1^n (a_i - s_i) u_i(s) + v(s)$$

où s_i est la i ème projection coordonnée sur \mathbb{T}^n , s la variable de \mathbb{T}^n , les coefficients u_0, u_1, \dots, u_n dans $\mathcal{C}(\delta_0, A)$ et v dans $\mathcal{C}(\delta_0, \alpha)$. Cette notion de spectre généralise en un certain sens le spectre-joint de quelques éléments d'une algèbre de Banach commutative à unité. La connaissance de fonctions spectrales permet d'appliquer le calcul fonctionnel holomorphe : si δ est lipschitzien, $\leq \delta_0$ et spectral pour a_1, \dots, a_n dans $A \text{ mod } \alpha$, on obtient un homomorphisme $\mathcal{G}(\delta) \rightarrow A$, défini modulo α , qui envoie 1 sur 1 et la i ème projection coordonnée sur a_i .

Sous les hypothèses du théorème (δ lipschitz, $\leq \delta_0$ et $-\log \delta$ plurisousharmonique), δ appartient au spectre des projections coordonnées dans $\mathcal{G}(\delta)$ [1] (avec démonstration dans [2]).

3. L'existence de fonctions spectrales permet encore de démontrer le lemme suivant :

LEMME. - Soit A une b -algèbre commutative avec 1, α un b -idéal et a_1, \dots, a_n , a des éléments de A .

Si

$$\delta \in \Delta(a_1, \dots, a_n; A|\alpha)$$

et

$$a \in \text{idl}(a_1 - s_1, \dots, a_n - s_n; \mathcal{C}(\delta, A) + \mathcal{C}(\delta, \alpha)),$$

alors

$$a \in \text{idl}(a_1 - s_1, \dots, a_n - s_n; \mathcal{C}(\delta_0, A) + \mathcal{C}(\delta_0, \alpha)).$$

On obtient donc un contrôle plus précis de la croissance des coefficients. La démonstration est immédiate : si δ est spectral, δ^N l'est aussi pour tout N naturel et :

$$1 = \delta^N(s) u_0(s) + \sum_1^n (a_i - s_i) u_i(s, z) + v(s)$$

avec u_0, u_1, \dots, u_n dans $\mathcal{C}(\delta_0, A)$ et v dans $\mathcal{C}(\delta_0, \alpha)$. On multiplie cette expression avec :

$$a = \sum_1^n (a_i - s_i) U_i(s) + V(s)$$

avec U_1, \dots, U_n dans $\mathcal{C}(\delta, A)$ et V dans $\mathcal{C}(\delta, \alpha)$.

Un regroupement dans le membre de droite fournit alors des coefficients avec les bonnes majorations pour N suffisamment grand.

Un théorème spectral de L. Waelbroeck [4] [5] affirme que la fonction identiquement zéro ne peut jamais être spectrale, sauf dans le cas trivial où α est toute l'algèbre. Grâce à ce théorème, on peut déduire de la conclusion du lemme précédent que a est nilpotent modulo α [6].

4. On va appliquer ces résultats pour obtenir le "Nullstellensatz". L'algèbre qui nous intéresse est l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)_\Lambda$ des systèmes, indexés par Λ et bornés dans $\mathcal{O}(\delta)$. Nous serons amenés ici à introduire deux variables dans \mathbb{C}^n , s et z , et on précisera δ_s ou δ_z suivant qu'on contrôle la croissance en s ou z .

Nous savons que

$$\delta \in \Delta(z_1, \dots, z_n; \mathcal{O}(\delta_z)),$$

et en recopiant cette expression un nombre suffisant de fois :

$$\begin{aligned} &\delta \in \Delta(z_1, \dots, z_n; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda) \\ &\subset \Delta(z_1, \dots, z_n; \mathcal{O}(\delta_s \otimes \delta_z)_\Lambda) \end{aligned}$$

où $\delta_s \otimes \delta_z$ est le poids défini sur \mathbb{C}^{2n} par δ sur les premières et dernières n composantes. Cela nous permet d'appliquer le calcul fonctionnel holomorphe modulo l'idéal α engendré dans $\mathcal{O}(\delta_s \otimes \delta_z)_\Lambda$ par les fonctions $z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n$ (chaque fonction étant prise la puissance de Λ fois). On obtient que pour tout $i, 1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned} &(f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda}(s))_\lambda \in \alpha \\ &\subset \text{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n; \mathcal{C}(\delta_s; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) \end{aligned}$$

et de même pour g :

$$\begin{aligned} &(g_\lambda(z) - g_\lambda(s))_\lambda \\ &\in \text{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n; \mathcal{C}(\delta_s; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)). \end{aligned}$$

De l'hypothèse ($^\circ$) :

$$\begin{aligned} &(g_\lambda(s))_\lambda \in \text{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda; \mathcal{C}(\delta_s)_\Lambda) \\ &\subset \text{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda; \mathcal{C}(\delta_s; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & (g_\lambda(z))_\lambda \in (g_\lambda(s))_\lambda + \text{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) , \\ & \subset \text{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda ; z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) \\ & \subset \text{idl}((f_{1,\lambda}(z))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(z))_\lambda ; z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) \\ & \subset \text{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda) + \mathcal{C}(\delta_s, \beta)) \end{aligned}$$

où β est l'idéal engendré par $(f_{1,\lambda}(z))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(z))_\lambda$ dans $\mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda$. On applique ensuite la conclusion du n° 3 pour trouver un naturel m pour lequel

$$(g_\lambda^m)_\lambda \in \beta$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CNOP (I.). - Un problème de spectre dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance tempérée. C. R. Acad. Sci. Paris A 270, 1970, 1690-1691.
- [2] CNOP (I.). - A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth. Thèse. Université Libre de Bruxelles, 1970. A paraître.
- [3] KELLEHER (J.J.) and TAYLOR (B.A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions. Math. Ann. 193, 1971, 225-237.
- [4] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes. Acad. Roy. Belgique, Mém. Cl. des Sci., 1960.
- [5] WAELBROECK (L.). - About a spectral theorem. Function algebras, Scott, Foresman & Co., 1965, 310-321.
- [6] WAELBROECK (L.). - Un "Nullstellensatz" pour les fonctions holomorphes à croissance, 1970. Multigraphié.

83, Avenue P. Curie
B 1050 BRUXELLES
(Belgique)
