MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HENRI BUCHWALTER

Produit topologique, produit tensoriel et *c*-replétion

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 51-71
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__51_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 51-71.

PRODUIT TOPOLOGIQUE, PRODUIT TENSORIEL ET C-REPLETION

par

Henri BUCHWALTER

INTRODUCTION.

Tous les espaces topologiques rencontrés sont supposés complètement réguliers. Pour un tel espace T on désigne classiquement par βT et νT respectivement le compactifié de Stone-Čech de T et le replété de T (ou "real-compactification", ou saturé de Hewitt). On rappelle que l'on doit à Glicksberg et Frolik ([G_1] et [F_1]) l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante pour que $\beta(S\times T) = \beta S\times \beta T$: si S et T sont pseudocompacts, il faut et il suffit que $S\times T$ soit pseudocompact, ou que $C^{\infty}(S) \hat{\otimes} C^{\infty}(T) = C^{\infty}(S\times T)$ (Tamano ; [T_1]), ou encore que la projection $p_S : S\times T \to S$ soit z-fermée, i.e. transforme les noyaux de $S\times T$ en fermés de S (Noble ; [N_1]). Le problème de commutation $\nu(S\times T) = \nu S\times \nu T$ a été attaqué par l'école américaine, principalement par Comfort [C_1], et auxiliairement par Hager, Isbell, Negrepontis, Noble et Tamano. Il n'est pas résolu : on connaît des conditions nécessaires, d'autres suffisantes, et ces dernières sont sévères sur l'un des espaces (νS est localement compact) en même temps qu'elles sont entachées d'une condition de cardinalité non mesurable.

La théorie de la c-replétion permet d'examiner ce problème sous un jour tout différent, en le remplaçant par le problème de commutation $\theta(S\times T)=\theta S\times \theta T$ où θT est le c-replété de T . On sait que $\theta T = \nu T$ pour tout T , sous l'hypothèse de non-existence de cardinaux mesurables, de sorte que les deux problèmes sont évidemment étroitement liés. L'intérêt de la substitution réside dans le fait, qu'en c-replétion, on peut utiliser une technique nouvelle basée sur une étude approfondie de l'équicontinuité. Toutefois, le second problème n'est pas résolu non plus. Un premier travail, dû à Pupier ([P_1], 3.5.10) donne le résultat suivant : si θT est localement compact, si S est un b_R-espace, alors $\theta(S\times T) = \theta S\times \theta T$ si et seulement si le produit de deux bornés de S et T est borné dans $S\times T$. Il est à remarquer que, tout comme dans l'énoncé de Comfort, les hypothèses sur S et T sont fortement dissymétriques.

Aussi, avons-nous cherché à revenir, comme dans l'énoncé primitif de Glicksberg-Frolik, à des hypothèses symétriques sur S et T . Nous montrons qu'un cadre approprié raisonnable est celui des b_R-espaces hémibornés dont certaines propriétés découlent de celles des k_R-espaces hémicompacts.

Le bon théorème obtenu, parmi d'autres plus techniques et moins intéressants, est finalement le suivant, qui généralise strictement celui de Glicksberg-Frolik et que l'on retrouvera en (5.6) :

THEOREME. - Soient S et T deux b_R-espaces admettant une base dénombrable de bornés qui sont pseudocompacts. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$

b) $\nu(S \times T) = \nu S \times \nu T$

c) $C_b(S \times T) = C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T)$

d) $M(S \times T) = M(S) \hat{\otimes} M(T)$

e) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(S \times T)$ et tout borné B de T la partie $f(.,B)$ est équicontinue sur S (resp. : même énoncé en échangeant S et T) .

f) Pour tout pseudocompact B de T et tout noyau Z de $S \times T$ la projection $p_S(Z \cap (S \times B))$ est un noyau de S (resp. : même énoncé en échangeant S et T) .

g) Le produit de deux bornés de S et T est un borné de $S \times T$.

La démonstration nécessite une étude détaillée des k_R-espaces hémicompacts, des b_R-espaces hémibornés et des espaces $M(T)$. On examine aussi de près les propriétés des parties équicontinues de $S \times T$. La condition g) est conséquence d'une généralisation (améliorée) due à Noble et à Pupier d'un lemme de Frolik. Enfin, l'implication $d \Rightarrow a$ est générale mais sa réciproque est obtenue comme conséquence de l'égalité $M(T) = C_b(T)'_c$ et d'une propriété tensorielle : $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'_c = E'_c \hat{\otimes} F'_c$ lorsque E et F sont des espaces de Fréchet dont l'un est approximant, et cette réciproque ne se laissera pas facilement généraliser par cette méthode.

NOTATIONS. - Pour la replétion, on renvoie à Gillman-Jerison ([GJ]) et pour la c-replétion à ([B_2]). Les bornés (ou relativement pseudo-compacts) d'un espace topologique sont étudiés dans ([B_3]). L'algèbre $\mathcal{C}(T)$ de toutes les fonctions continues sur T est munie de sa compactologie canonique équicontinue $\mathcal{H}$, ce qui revient à dire qu'on a distingué dans $\mathcal{C}(T)$ les parties H qui sont équicontinues, simplement bornées et simplement fermées, en les munissant de la topologie de la convergence simple sur T pour laquelle elles sont compactes. On topologise $\mathcal{C}(T)$ soit avec la topologie de la convergence compacte sur T , obtenant l'espace $C_c(T)$, soit avec la topologie de la convergence bornée, obtenant l'espace $C_b(T)$. Pour que $C_c(T)$ soit complet, il faut et il suffit que T soit un k_R-espace (ou k'-espace)

(Warner [W_2]). Pour que $C_b(T)$ soit complet, il faut et il suffit que T soit un b_R-espace (Jourlin-M[elle] Blanchard ; [JB], où $C_b(T)$ est appelé $C_\beta(T)$). L'espace $M(T)$ est le dual de l'algèbre compactologique $\mathcal{C}(T)$: c'est l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{C}(T)$ dont les restrictions aux parties $H \in \mathcal{H}$ sont continues, muni de la topologie de la $\mathcal{H}$-convergence. Ses propriétés utiles sont décrites dans ([B_2]). En particulier, $M(T)' = \mathcal{C}(T)$.

Mise en garde. - Les espaces θT et νT sont lus en espaces topologiques et le problème de commutation est un problème topologique. Toutefois θT et νT peuvent être munis canoniquement de structures uniformes donnant les espaces uniformes complets $\theta_u T$ et $\nu_u T$. Le problème de commutation $\theta_u(S\times T) = \theta_u S \times \theta_u T$ est résolu par un théorème dû à Isbell ([I_1]) : il faut et il suffit que les deux projections $p_S : S\times T \to S$ et $p_T : S \times T \to T$ soient z-fermées ; il ne nous intéressera donc pas. Mais nous retiendrons que sur chaque borné B de T les espaces uniformes $\theta_u T$ et $\nu_u T$ induisent la même structure uniforme, qui est d'ailleurs précompacte et nous dirons que c'est la structure uniforme naturelle de B . En particulier, l'adhérence $\overline{B}^\theta$ de B dans θT est compacte.

1. - Le morphisme canonique E .

On rappelle que dans $M(S)$ les semi-normes p_H sont associées aux parties équicontinues $H \in \mathcal{H}$; de plus, chaque $H \in \mathcal{H}$ définit une fonction continue sur S et un écart continu sur S :

$$H(s) = \sup_{f \in H} |f(s)| \quad \text{et} \quad d_H(s,s_o) = \sup_{f\in H} |f(s) - f(s_o)| \ .$$

Enfin, ε_s désigne la mesure de Dirac au point s .

PROPOSITION (1.1). - Fixons deux espaces S et T . Il existe un morphisme canonique :

$$E : M(S\times T) \to M(S) \hat{\otimes} M(T)$$

défini par l'égalité $\langle E(\nu) , \Phi\rangle = \langle \nu , \psi\rangle$, pour toute $\nu \in M(S\times T)$ et toute application bilinéaire continue Φ sur $M(S)\times M(T)$, où l'on a défini $\psi \in \mathcal{C}(S\times T)$ par $\psi(s,t) = \Phi(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$.

Preuve : On définit $\varepsilon : S\times T \to M(S) \hat{\otimes} M(T)$ par $\varepsilon(s,t) = \varepsilon_s \otimes \varepsilon_t$. C'est une application continue, car si p est une semi-norme sur $M(S)\hat{\otimes} M(T)$ on peut la supposer de la forme $p = p_H \otimes p_K$ où $H \in \mathcal{H}(S)$ et $K \in \mathcal{H}(T)$. Ecrivant :

$$\varepsilon(s,t) - \varepsilon(s_o, t_o) = \varepsilon_s \otimes (\varepsilon_t - \varepsilon_{t_o}) + (\varepsilon_s - \varepsilon_{s_o}) \otimes \varepsilon_{t_o}$$

on obtient $p(\varepsilon(s,t)-\varepsilon(s_o,t_o)) \leqslant H(s)\, d_K(t,t_o) + d_H(s,s_o) K(t_o)$, ce qui suffit. Alors

ε se prolonge en $E : M(S\times T) \to M(S) \hat{\otimes} M(T)$ d'après les propriétés universelles du foncteur $M(.)$ ([B_2]). Pour expliciter E, il suffit de remarquer que le dual de $M(S\times T)$ est $\mathcal{C}(S\times T)$ et que ε se transpose en ε^* selon $\varepsilon^*(\Phi)(s,t)=\Phi(\varepsilon_s,\varepsilon_t)$

REMARQUE 1. - Il n'y a malheureusement aucune raison pour que E soit injective, ni surjective, ni a fortiori un isomorphisme. On ne peut même pas garantir que l'image $\mathrm{Im}E$ contienne le sous-espace $M(S)\otimes M(T)$; cela signifierait qu'à partir de deux éléments $\lambda \in M(S)$ et $\mu \in M(T)$ on pourrait obtenir un élément $\nu \in M(S\times T)$ tel que $\nu(f\otimes g) = \lambda(f)\,\mu(g)$. On ne serait pas loin d'affirmer que $M(S)$ et $M(T)$ sont des espaces de mesures de Radon sur S et T !

DEFINITION (1.2). - Lorsque E est un isomorphisme, nous écrirons pour simplifier $M(S\times T) = M(S) \hat{\otimes} M(T)$.

La liaison avec la c-replétion est immédiate, quoique malheureusement unilatérale.

THEOREME (1.3). - Si $M(S\times T) = M(S) \hat{\otimes} M(T)$ alors $\theta(S\times T) = \theta S\times \theta T$.

Preuve : Elle est basée sur l'égalité $M(T) = M(\theta T)$ pour tout espace T. Dans le diagramme ci-contre $E^*= \varepsilon^*$ est un isomorphisme compactologique. En posant $L = \varepsilon^*_\theta \circ (E^*)^{-1}$ on obtient un morphisme compactologique. Il suffit de voir que L est une opération de prolongement, car alors toute partie équicontinue de $\mathcal{C}(S\times T)$ admet un prolongement équicontinu sur $\theta S\times\theta T$, ce qui signifie justement $\theta(S\times T) = \theta S\times\theta T$. Or, soient $f\in \mathcal{C}(S\times T)$ et $\Phi = (E^*)^{-1}(f)$; on a $(Lf)(s,t) = \Phi(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = f(s,t)$, ce qui termine tout.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(S\times T) \arrow[r, "L"] & \mathcal{C}(\theta S\times\theta T) \\
\mathfrak{B}(M(S)\times M(T)) \arrow[u, "E^*=\varepsilon^*"] \arrow[r, phantom, "="] & \mathfrak{B}(M(\theta S)\times M(\theta T)) \arrow[u, "\varepsilon^*_\theta"']
\end{tikzcd}$$

La suite a pour but d'établir la réciproque dans un cas particulier.

2. - Les k_R-espaces hémicompacts.

On rappelle un résultat de Warner ([W_2]) : le complété $\widehat{C_c(T)}$ de $C_c(T)$ s'identifie à l'espace des fonctions continues sur chaque compact de T.

THEOREME (2.1). - Soient S et T deux k_R-espaces. Alors :

a) $C_c(S) \hat{\hat{\otimes}} C_c(T) = C_c(S\times T)^\wedge$

b) Pour que $C_c(S) \hat{\hat{\otimes}} C_c(T) = C_c(S \times T)$, il faut et il suffit que $S \times T$ soit un k_R-espace.

Preuve : L'égalité de b) est vraie si S et T sont compacts, ce qui fournit aisément a) grâce au théorème de Warner cité.

On est donc amené tout naturellement à étudier les couples (S,T) de k_R-espaces dont le produit est encore un k_R-espace. Mis à part le cas où l'un d'eux est localement compact, on est très vite contraint de revenir à des hypothèses de dénombrabilité.

Un espace est dit hémicompact s'il admet une base dénombrable de compacts (et pas seulement s'il est σ-compact, c'est-à-dire réunion d'une suite de compacts). Pour un k_R-espace hémicompact T, $C_c(T)$ est un espace de Fréchet (et réciproquement d'après Warner ([W_2])).

THEOREME (2.2). - Le produit $S \times T$ de deux k_R-espaces hémicompacts est encore un k_R-espace hémicompact.

Preuve : Elle est très indirecte car la caractérisation d'un k_R-espace est extérieure. Rappelons que T est dit k-espace (ou espace de Kelley) lorsque sa topologie est limite inductive de ses restrictions aux compacts. Dans un tel espace une partie F est fermée si et seulement si elle coupe tout compact suivant un compact (caractérisation intérieure). Tout est basé sur deux lemmes de Waelbroeck ([W_1] chap. III, § 2) concernant les compactologies dénombrables et desquels on tire :

LEMME 1 (2.3). - Tout k_R-espace hémicompact est un k-espace normal (et même paracompact).

Preuve : (succincte). - On montre que l'espace kT, kelleyifié de T, est normal. A fortiori est-il complètement régulier, d'où kT = T par ([B_2] (2.3.6)). De plus, T égal à un K_σ de βT, est paracompact. Fixons donc une suite exhaustive croissante (K_n) de compacts de T et donnons-nous deux parties disjointes A et B coupant tout K_n suivant des fermés (disjoints) A_n et B_n. Une construction facile permet alors d'obtenir des parties disjointes U et V contenant respectivement A et B et coupant chaque K_n suivant un ouvert.

LEMME 2 (2.4). - Le produit $S \times T$ de deux k_R-espaces hémicompacts est encore un k_R-espace hémicompact.

Preuve : Tout-à-fait semblable à la précédente.
D'où l'on tire :

PROPOSITION (2.5). - Soient S et T deux k_R-espaces hémicompacts. Alors :

a) $C_c(S) \hat{\hat{\otimes}} C_c(T) = C_c(S\times T)$

b) $M(S) \hat{\otimes} M(T) = M(S\times T)$.

Preuve : Il faut prouver b). Ce qui est conséquence de deux résultats auxiliaires.

PROPOSITION (2.6). - Soit T un k_R-espace hémicompact. Alors :

$$M(T) = C_c(T)'_c \quad \text{et} \quad C_c(T) = M(T)'_c .$$

Preuve : $C_c(T)$ est espace de Fréchet donc espace de Kelley. De plus, une forme du théorème d'Ascoli ([B_2] (4.2.3)) garantit que les parties $H \in \mathcal{H}(T)$ sont exactement les compacts de $C_c(T)$. L'égalité topologique $M(T) = C_c(T)'_c$ en résulte aisément. Enfin, si l'on pose $E = C_c(T)$, on a l'égalité $E = (E'_c)'_c = M(T)'_c$ puisque E est un espace de Mackey. (Dans tout cela on désigne par F'_c le dual d'un elc F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de F) .

PROPOSITION (2.7). - Soient E et F deux espaces de Fréchet dont l'un au moins est approximant. On a alors :

a) $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'_c = E'_c \hat{\otimes} F'_c$

b) $(E \hat{\otimes} F)'_c = E'_c \hat{\hat{\otimes}} F'_c$.

Preuve : Seule la première formule nous intéresse pour l'application à la proposition (2.5). Donnons-en une preuve succincte basée sur le lemme suivant, dont nous laissons la démonstration au lecteur :

LEMME (2.8). - Soient E , F deux espaces de Fréchet et Z un espace de Banach. Toute application $f : E'_c \times F'_c \to Z$, bilinéaire et continue sur les compacts est continue.

Revenons à la preuve de (2.7). L'hypothèse d'approximation sur E ou F implique les égalités :
$E\hat{\hat{\otimes}}F = L_e(F'_c , E) = L_c(F'_c , E) = B_{cc}(E'_c , F'_c)$ où le dernier espace est celui des formes bilinéaires continues sur $E'_c \times F'_c$ (ou continues seulement sur les compacts d'après le lemme) muni de la topologie de la convergence bicompacte (ce fait étant conséquence de $E = (E'_c)'_c)$. Posons, pour simplifier, $H = B_{cc}(E'_c , F'_c) = E\hat{\hat{\otimes}}F$.

Il est clair que H est un espace de Fréchet, donc $(H'_c)'_c = H$. Ce qui implique que H'_c contient $E'_c \otimes F'_c$ comme sous-espace vectoriel partout dense. Soit alors Z un espace de Banach quelconque. Il est relativement facile d'établir, avec le lemme, que l'espace $B(E'_c, F'_c ; Z)$ des applications bilinéaires continues de $E'_c \times F'_c$ dans Z coïncide avec l'espace $L(Z'_c, H)$, ou encore avec l'espace $L(H'_c, Z)$. Ce qui signifie, en clair, que toute application bilinéaire continue de $E'_c \times F'_c$ dans Z se remplace (et de façon unique à cause de la propriété de densité vue plus haut) par une application linéaire continue de H'_c dans Z. Il en découle que H'_c est solution du problème universel qui définit le produit tensoriel $\hat{\otimes}$, d'où l'égalité $H'_c = E'_c \hat{\otimes} F'_c$.

Pour démontrer enfin (2.5.b), il suffit d'appliquer (2.4), (2.6), (2.5.a) et (2.7.a), après avoir pris la précaution de montrer que $C_c(T)$ est approximant. Or, cette propriété est valable pour tout k_R-espace. En effet :

LEMME (2.9). - <u>Soit</u> T <u>un</u> k_R<u>-espace. Posons</u> $E = C_c(T)$. <u>Pour tout compact</u> K <u>de</u> T <u>soit</u> V <u>le voisinage de</u> 0 <u>dans</u> E <u>défini par</u> $V = \{ f \; ; \|f\|_K \leq 1\}$. <u>Alors l'espace de Banach</u> $\hat{E}_V$ <u>est isométrique à l'espace</u> $C(K)$. <u>En particulier,</u> $E = \varprojlim_K C(K)$ <u>et</u> E <u>est approximant.</u>

<u>Preuve</u> : La jauge de V est évidemment la semi-norme $\|.\|_K$. Soit $\pi_K : E \to C(K)$ l'application de restriction à K. Alors π_K est une surjection (par régularité complète) qui se factorise donc en une isométrie surjective de $\hat{E}_V$ sur $C(K)$. On obtient déjà $E = \varprojlim_K C(K)$ puisque E est complet, puis le fait que E est approximant puisqu'il possède une base de voisinages V tels que $\hat{E}_V$ soit approximant.

La démonstration de (2.5) est donc enfin terminée.

<u>REMARQUE 2.</u> - L'égalité $M(S \times T) = M(S) \hat{\otimes} M(T)$ implique alors $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$ avec (1.3). Mais ceci n'est d'aucune utilité car tout k_R-espace hémicompact est espace de Lindelöf, donc replet, donc c-replet.

3. - <u>Les b_R-espaces hémibornés.</u>

On rappelle qu'un espace T est dit b_R-espace (b'-espace dans la terminologie de Jourlin-Blanchard [JB] ; ou espace hypobornologique dans celle de Pupier [P_1]) lorsqu'une condition suffisante pour qu'une fonction numérique sur T soit continue, est que ses restrictions aux parties bornées de T soient <u>uniformément continues</u> pour la structure uniforme naturelle de chaque borné (cf. Mise en garde). Il revient au même de dire d'après ([JB] th.(1.1)) que l'espace $C_b(T)$ (noté $C_\beta(T)$ dans l'article cité) est complet. Lorsque T est réunion dénombrable de bornés, on dit qu'il est σ-borné. On dit qu'il est <u>hémiborné</u> lorsqu'il admet une base dénombrable de bornés. Pour que T soit un b_R-espace hémiborné, il faut et il suffit que $C_b(T)$ soit espace de Fréchet.

La liaison entre b_R-espaces hémibornés et k_R-espaces hémicompacts est décrite par :

PROPOSITION (3.1). - Soit T un b_R-espace hémiborné. Alors :

a) θT est un k_R-espace hémicompact et $\theta T = \nu T$,

b) T est distingué dans θT , c'est-à-dire que tout compact de θT est contenu dans l'adhérence $\overline{B}^{\theta}$ d'un borné B de T ,

c) $C_b(T) = C_c(\theta T)$ et $M(T) = C_b(T)'_c$.

Preuve : Soit T'' la réunion dans θT des adhérences $\overline{B}^{\theta}$ lorsque B décrit l'ensemble des bornés de T . Comme chaque $\overline{B}^{\theta}$ est compact, T'' est un K_σ de θT . C'est donc un espace replet, intermédiaire entre T et θT , d'où il suit les égalités $T'' = \theta T = \nu T$, ce qui montre que θT est σ-compact. Mais T étant un b_R-espace, l'espace $C_b(T)$, qui est Fréchet, est tonnelé, de sorte que T est distingué dans T'' d'après ([B_3], cor. 9), ce qui implique déjà que θT est hémicompact. Mais de plus, $C_b(T) = C_c(\theta T)$, donc $C_c(\theta T)$ est complet et par suite θT est bien un k_R-espace. Enfin, puisque $M(T) = M(\theta T)$, on a $M(T) = C_b(T)'_c$ avec (2.6).

COROLLAIRE 1 (3.2). - Soient S et T deux b_R-espaces hémibornés. Alors $C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T) = C_c(\theta S \times \theta T)$.

Preuve : Il suffit d'appliquer (2.5a) aux espaces θS et θT .

La topologie de $C_c(\theta S \times \theta T)$ est celle de la convergence uniforme sur les parties $\overline{A}^{\theta} \times \overline{B}^{\theta}$, où A et B sont des bornés quelconques de S et T . Et pour une fonction $\tilde{h} \in \mathcal{C}(\theta S \times \theta T)$ on a évidemment $\|\tilde{h}\|_{\overline{A}^{\theta} \times \overline{B}^{\theta}} = \|h\|_{A \times B}$, où h est la restriction de $\tilde{h}$ à $S \times T$. Autrement dit :

COROLLAIRE 2 (3.3). - Soient S et T deux b_R-espaces hémibornés. Pour qu'une fonction $h \in \mathcal{C}(S \times T)$ soit prolongeable continûment à $\theta S \times \theta T$, il faut et il suffit qu'elle soit, sur tout produit $A \times B$ de parties bornées, limite uniforme de fonctions décomposées $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} f_i(s)\, g_i(t)$ avec $f_i \in \mathcal{C}(S)$ et $g_i \in \mathcal{C}(T)$.

En particulier, si S et T sont pseudocompacts, l'espace de Banach $C^{\infty}(S) \hat{\hat{\otimes}} C^{\infty}(T)$ s'identifie exactement à l'espace des fonctions continues sur $S \times T$

<u>qui sont prolongeables continûment à</u> $\beta S \times \beta T$, <u>muni de la topologie de la convergence uniforme sur</u> $S \times T$.

On en arrive maintenant au théorème principal, qui d'ailleurs ne clôt pas la discussion. Donnons d'abord, pour le préparer, la proposition suivante, qui exprime une recherche de conditions nécessaires :

PROPOSITION (3.4). - <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux</u> b_R-<u>espaces hémibornés tels que</u> $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$. <u>Alors</u> :

a) <u>Tout produit</u> $A \times B$ <u>de bornés de</u> S <u>et</u> T <u>est borné dans</u> $S \times T$.

b) $S \times T$ <u>est un</u> b_R-<u>espace hémiborné.</u>

c) $C_b(S \times T) = C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T)$.

<u>Preuve</u> : a) est conséquence du fait, d'ailleurs général, que $A \times B$ est contenu dans le compact $\overline{A}^{\theta} \times \overline{B}^{\theta}$ de $\theta(S \times T)$, donc est borné dans $S \times T$. Il en résulte déjà que les $A \times B$ forment une base de bornés de $S \times T$, donc $S \times T$ est hémiborné. Mais, compte-tenu de (3.2), on a $C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T) = C_c(\theta S \times \theta T) = C_c(\theta(S \times T))$. Or, $C_c(\theta(S \times T))$ s'identifie algébriquement à $\mathcal{C}(S \times T)$ et sa topologie, qui est donc celle de $C_c(\theta S \times \theta T)$, s'identifie à la topologie sur $\mathcal{C}(S \times T)$ de la convergence uniforme sur les produits de bornés, c'est-à-dire justement à celle de la convergence bornée sur $S \times T$ d'après (a). En résumé, on obtient (c), ce qui prouve que $C_b(S \times T)$ est complet, donc que $S \times T$ est un b_R-espace, d'où enfin (b).

THEOREME (3.5). - <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux</u> b_R-<u>espaces hémibornés. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$.

b) $\nu(S \times T) = \nu S \times \nu T$.

c) $C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T) = C_b(S \times T)$.

d) $M(S) \hat{\otimes} M(T) = M(S \times T)$.

<u>Preuve</u> : Compte-tenu de (3.4) on a déjà $a \Rightarrow c$ et $a \Rightarrow d$ puisque, sous l'hypothèse a), $S \times T$ est un b_R-espace hémiborné, donc $M(S \times T) = (C_b(S \times T))'_c$, ce qui donne d) avec (2.7,a). Donc $a \Leftrightarrow d$ puisque $d \Rightarrow a$ est une propriété générale comme on a vu en (1.3).

Montrons $c \Rightarrow b$: on sait déjà que, de toute façon, on a $C_b(S) \hat{\hat{\otimes}} C_b(T) = C_c(\theta S \times \theta T) = C_c(\nu S \times \nu T)$ car $\theta S = \nu S$ et $\theta T = \nu T$. Avec (c) on obtient l'égalité $C_c(\nu S \times \nu T) = C_b(S \times T)$ qui exprime, entre autres, que toute fonction continue sur $S \times T$ admet un prolongement continu à $\nu S \times \nu T$, c'est-à-dire précisément b).

Montrons b $\Rightarrow$ a : avec b) on voit que $\nu(S \times T) = \theta S \times \theta T$ est un k_R-espace hémicompact. Il en résulte que $S \times T$ est hémiborné, donc $(S \times T)''$ est σ-compact, donc replet, d'où $(S \times T)'' = \theta(S \times T) = \nu(S \times T)$ et l'égalité (a).

REMARQUE 3. - Le théorème (3.5), appliqué pour S et T tous deux pseudocompacts, redonne une partie du théorème de Glicksberg-Frolik. Mais il laisse dans l'ombre une condition nécessaire et suffisante portant sur l'espace $S \times T$.

L'objet de la suite est de reprendre les problèmes de prolongement de fonctions pour rechercher cette condition absente.

4. - Questions de prolongement.

NOTATIONS. - Pour $f \in \mathfrak{F}(S \times T)$ on note par $f(x,.)$ la fonction $y \to f(x,y)$ sur T et par $f(.,y)$ la fonction $x \to f(x,y)$ sur S . Pour des parties $H \subset \mathfrak{F}(S \times T)$, $A \subset S$ et $B \subset T$ on pose $H(A,.) = \{ f(x,.)\}_{\substack{x \in A \\ f \in H}}$ et $H(.,B) = \{ f(.,y)\}_{\substack{y \in B \\ f \in H}}$.

Pseudonoyaux de T . - On rappelle que deux parties A et B de T sont dites normalement séparées s'il existe $f \in \mathcal{C}(T)$ telle que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B . Pour cela, il faut et il suffit que A et B soient respectivement contenues dans deux noyaux disjoints, en appelant noyau l'ensemble des zéros d'une fonction continue. En particulier, deux noyaux disjoints sont normalement séparés. On peut alors introduire :

DEFINITION (4.1). - Une partie $N \subset T$ est appelée pseudonoyau lorsqu'elle est normalement séparée de tout noyau disjoint.

Il nous paraît important de faire une étude systématique de cette notion. La liaison avec les questions de prolongement est marquée par le résultat suivant, ([G.J] ; 1-18) : pour qu'une partie $A \subset T$ soit $\mathcal{C}$-plongée dans T , il faut et il suffit que ce soit un pseudonoyau C^{∞}-plongé dans T .

Il est clair que les noyaux et les compacts sont des pseudonoyaux. Si T est normal, tout fermé est pseudonoyau. Réciproquement, un pseudonoyau est toujours fermé si chaque point de T est un G_δ , par exemple si T est métrisable.

Parties hyperbornées de T. - Il va s'introduire de façon toute naturelle une famille de parties de T, intermédiaire entre celle des parties bornées et celle des parties pseudocompactes.

DEFINITION (4.2). - Une partie $B \subset T$ est dite hyperbornée dans T lorsque toute fonction $f \geqslant 0$ continue sur T et telle que $\operatorname{Inf}_B f = 0$ s'annule sur B.

Il est facile de vérifier que pseudocompact implique hyperborné et que hyperborné implique borné. Cette notion a déjà été introduite sous le nom de condition (*) par Isiwata, $[I_2]$, qui remarque que tout noyau borné est hyperborné, mais ne donne pas pour autant une caractérisation des parties hyperbornées. Or, la liaison est manifeste avec la notion de pseudonoyau car :

THEOREME (4.3). - Pour qu'une partie B de T soit hyperbornée, il faut et il suffit que ce soit un pseudonoyau borné.

Preuve : Si B est hyperborné et si $Z = Z(f)$, $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{C}(T)$, est un noyau disjoint, alors $f>0$ sur B. Donc $a = \operatorname{Inf}_B f > 0$ et $f \geqslant a$ sur B. Ainsi, B et Z sont normalement séparés.

Réciproquement, si B est pseudonoyau borné, soit $f \in \mathcal{C}(T)$, $f \geqslant 0$ et $f>0$ sur B. Alors B est disjoint de $Z = Z(f)$, donc il existe un noyau Z' contenant B et disjoint de Z. Or, deux noyaux disjoints dans T ont des adhérences disjointes dans θT d'où il suit que $\overline{B}^\theta$ et $\overline{Z}^\theta$ sont disjoints. Par ailleurs, si f^θ désigne la prolongée (continue) canonique de f à θT, on sait (par un lemme facile) que $Z(f^\theta) = \overline{Z}^\theta$. D'où il suit que $f^\theta > 0$ sur $\overline{B}^\theta$. Mais B étant borné, $\overline{B}^\theta$ est compact donc $\operatorname{Inf}_B f \geqslant \operatorname{Inf}_{\overline{B}^\theta} f^\theta > 0$, ce qui termine tout.

La proposition qui suit suffit à légitimer l'introduction des pseudonoyaux et des hyperbornés.

PROPOSITION (4.4). - On fixe des parties $A \subset S$ et $B \subset T$. Soient les assertions :

a) Pour toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ la partie $H(.,B)$ est équicontinue sur A.

b) Pour toute $f \in C^\infty(S \times T)$ la partie $f(.,B)$ est équicontinue sur A.

c) Pour tout noyau Z de $S \times T$, $p_S(Z \cap (A \times B))$ est fermé dans A.

d) Pour tout noyau Z de $S \times T$, $p_S(Z \cap (A \times B))$ est un noyau de A.

On a alors :

1. Dans le cas général : $d \Rightarrow c \Rightarrow b$ et $b \Leftrightarrow a$.

2. Si B est un pseudonoyau de T : $d \Rightarrow c$ et $c \Leftrightarrow b \Leftrightarrow a$.

3. Si B est hyperborné dans T : $d \Leftrightarrow c \Leftrightarrow b \Leftrightarrow a$.

Preuve : $b \Rightarrow a$: soit $x_o \in A$. Quand f décrit H la fonction $g(x,y) = \mathrm{Inf}(1, |f(x,y) - f(x_o, y)|)$ décrit une partie équicontinue G , uniformément bornée sur $S \times T$. La fonction $h = \sup\limits_{g \in G} g$ est donc continue. D'après (b) il existe un voisinage V de x_o dans A tel que $x \in V$ et $y \in B$ impliquent $g(x,y) \leqslant \varepsilon$; donc aussi $|f(x,y) - f(x_o, y)| \leqslant \varepsilon \quad \forall f \in H$.

. $c \Rightarrow b$: soit $x_o \in A$. Pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble $Z = \{(x,y) \; ; \; |f(x,y) - f(x_o, y)| \geqslant \varepsilon\}$ est un noyau de $S \times T$ et $x_o \in p_S(Z)$. Donc il existe dans A un voisinage V de x_o tel que $V \cap p_S(Z \cap (A \times B)) = \emptyset$, ce qui implique $|f(x,y) - f(x_o, y)| < \varepsilon$ pour tout $(x,y) \in V \times B$.

$b \Rightarrow c$ si B est pseudonoyau : soit $Z = Z(f)$ avec $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{C}(S \times T)$, et $x_o \notin p_S(Z \cap (A \times B))$. La fonction $f(x_o, .)$ ne s'annule pas sur B , donc il existe $g \in \mathcal{C}(T)$, $g \geqslant 0$ telle que $B \subset Z(g)$ et telle que la fonction $f(x_o, .) + g$ ne s'annule pas sur T . Alors la fonction $F(x,y) = f(x,y) + f(x_o, y) + g(y)$ ne s'annule pas sur $S \times T$, donc $h = f/F$ est continue sur $S \times T$ et $0 \leqslant h \leqslant 1$. Mais $h(x_o, y) = \frac{1}{2}$ pour tout $y \in B$. D'après (b) il existe un voisinage V de x_o dans A tel que $|h(x,y) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ pour tout $(x,y) \in V \times B$. Alors $V \cap p_S(Z \cap (A \times B))$ est vide.

$b \Rightarrow d$ si B est hyperborné : soit $Z = Z(f)$ avec $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{C}(S \times T)$. La fonction $h = \inf\limits_{y \in B} f(.,y)$ est continue sur A , donc $Z(h) \cap A$ est un noyau de A . Or $x \in p_S(Z \cap (A \times B))$ implique l'existence de $y \in B$ tel que $f(x,y) = 0$; d'où $h(x) = 0$. Réciproquement $x \in Z(h) \cap A$ implique que la fonction $f(x,.)$, qui est continue sur T , a sa borne inférieure nulle sur B ; il existe donc $y \in B$ tel que $f(x,y) = 0$, ce qui donne bien $x \in p_S(Z \cap (A \times B))$.

COROLLAIRE 1 (4.5). - Pour toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ et pour tout compact K de T , la partie $H(.,K)$ est équicontinue sur S .

Preuve : Soit par une démonstration directe, soit par (4.4) en se ramenant à $T = K$ et en remarquant que p_S est même fermée.

COROLLAIRE 2 (4.6). - On suppose que $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$. Alors :

a) Le produit de deux bornés de S et T est borné dans $S \times T$.

b) Le produit de deux hyperbornés de S et T est hyperborné dans $S \times T$.

<u>Preuve</u> : a) est classique et conséquence de la compacité de $\overline{A}^{\theta}\times\overline{B}^{\theta}$ pour A et B bornés. S'ils sont hyperbornés, soit $f\in\mathcal{C}(S\times T)$, $f\geqslant 0$ telle que $\operatorname{Inf}_{A\times B} f = 0$. On commence par prolonger f en $\tilde{f}\in\mathcal{C}(\theta S\times\theta T)$. Puisque $\overline{B}^{\theta}$ est compact la partie $\tilde{f}(.,\overline{B}^{\theta})$ est, d'après (4.6), équicontinue sur θS ; a fortiori la partie $f(.,B)$ est équicontinue sur S, donc la fonction $h = \operatorname{Inf}_{y\in B} f(.,y)$ est continue sur S. Or $\operatorname{Inf}_{A} h = 0$, d'où l'existence de $x\in A$ tel que $h(x) = 0$, ce qui prouve que la fonction $f(x,.)$ a sa borne inférieure sur B nulle et assure l'existence de $y\in B$ tel que $f(x,y) = 0$.

<u>REMARQUE 4</u> (due à Pupier) :

Sous les mêmes conditions, le produit de deux parties pseudocompactes peut ne pas être pseudocompact, (ce qui montre en plus qu'il existe des hyperbornés non pseudocompacts). Pour le voir, soit P un espace pseudocompact tel que $P\times P$ ne soit pas pseudocompact ([GJ] : 9.15) et soit $S = T = \beta P$. Alors le produit $P\times P$ n'est pas pseudocompact dans $S\times T$.

La proposition qui suit va orienter la recherche d'une réciproque à la condition $\theta(S\times T) = \theta S\times\theta T$.

PROPOSITION (4.7). - <u>Si</u> $\beta(S\times T) = \beta(S\times\theta T)$, <u>c'est-à-dire si</u> $S\times T$ <u>est C^{∞}-plongé dans</u> $S\times\theta T$, <u>alors pour tout</u> B <u>hyperborné de</u> T <u>et tout noyau</u> Z <u>de</u> $S\times T$, $p_S(Z\cap(S\times B))$ <u>est un noyau de</u> S.

<u>Preuve</u> : Toute $f\in C^{\infty}(S\times T)$ se prolonge continûment en $\tilde{f}\in C^{\infty}(S\times\theta T)$. Comme $\overline{B}^{\theta}$ est compact, la famille $f(.,B)$ est, comme précédemment, équicontinue sur S. D'où la condition (b) de la proposition (4.4) et par suite aussi (d).

On aborde ici les questions de prolongement en cherchant principalement à prolonger à $\theta S\times\theta T$ des parties H non nécessairement formées de fonctions continues sur $S\times T$. Des hypothèses d'équicontinuité partielle suffiront.

Le théorème principal de prolongement va s'obtenir à partir de :

LEMME (4.8). - <u>Soit</u> $\mathfrak{B}$ <u>un recouvrement de</u> T. <u>On fixe une partie</u> $H\subset\mathfrak{F}(S\times T)$ <u>telle que</u> :

1. $H(x,.)$ <u>est équicontinue sur</u> T <u>pour tout</u> $x\in S$.
2. $H(.,B)$ <u>est équicontinue sur</u> S <u>pour tout</u> $B\in\mathfrak{B}$.

<u>On a alors</u> :

a) H <u>admet un prolongement</u> $H^1\subset\mathfrak{F}(\theta S\times T)$ <u>tel que, pour tout</u> $B\in\mathfrak{B}$, $H^1(.,B)$ <u>soit équicontinue sur</u> θS et H^1 <u>équicontinue sur</u> $\theta S\times B$.

b) H <u>admet un prolongement</u> $H^2 \subset \mathcal{F}(S \times \theta T)$ <u>tel que, pour tout</u> $B \in \mathcal{B}$, $H^2(.,\overline{B}^\theta)$ <u>soit équicontinue sur</u> S <u>et</u> H^2 <u>équicontinue sur</u> $S \times \overline{B}^\theta$.

<u>Preuve</u> : <u>Le prolongement</u> H^1 .

Déjà $H(.,y)$ est équicontinue sur S pour chaque $y \in T$. En posant $f^1(u,y) = u(f(.,y))$, on définit H^1 et on assure que $H^1(.,B)$ est équicontinue sur θS . Soit $u_o \in \theta S$ et $y_o \in B$. Déjà, il existe $x_o \in S$ tel que $u_o(f(.y)) = f(x_o,y)$ pour toute $f \in H$ et tout $y \in B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de u_o dans θS tel que $|f^1(u,y) - f^1(u_o, y) \leqslant \varepsilon$ pour tous $u \in U$, $y \in B$ et $f \in H$. Alors, en écrivant :

$$f^1(u,y) - f^1(u_o, y_o) = f^1(u,y) - f^1(u_o, y) + f(x_o, y) - f(x_o , y_o) \quad ,$$

on obtient $|f^1(u,y) - f^1(u_o, y_o)| \leqslant \varepsilon + |f(x_o, y) - f(x_o, y_o)|$, ce qui permet de prouver la continuité de f^1 sur $\theta S \times B$ et aussi l'équicontinuité de H^1 sur $\theta S \times B$ grâce à l'hypothèse 1).

<u>Le prolongement</u> H^2 .

On définit f^2 par $f^2(x,v) = v(f(x,.))$, ce qui construit H^2 . D'après 2) on voit que tout point $x_o \in S$ possède un voisinage V tel que $|f(x,y) - f(x_o, y)| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x \in V$, $y \in B$ et $f \in H$. Puisque chaque fonction $f(x,.)$ est continue sur T , on tire de là $|f^2(x,v)-f^2(x_o, v)| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x \in V$ $v \in \overline{B}^\theta$ et $f \in H$. D'où déjà l'équicontinuité de $H^2(.,\overline{B}^\theta)$ sur S . Si l'on fixe $v_o \in \overline{B}^\theta$ alors $|f^2(x,v)-f^2(x_o,v_o)| \leqslant \varepsilon + |f^2(x_o,v)-f^2(x_o,v_o)|$, ce qui suffit, grâce encore à l'hypothèse 1).

THEOREME (de prolongement) (4.9). - <u>Soit</u> $\mathcal{B}$ <u>un recouvrement de</u> T <u>tel que</u> θT <u>soit la réunion des</u> $\overline{B}^\theta$ <u>lorsque</u> B <u>décrit</u> $\mathcal{B}$. <u>Toute partie</u> $H \subset \mathcal{F}(S \times T)$ <u>telle que</u> :

1) <u>Pour tout</u> $x \in S$ <u>la partie</u> $H(x,.)$ <u>est équicontinue sur</u> T ,

2) <u>Pour tout</u> $B \in \mathcal{B}$ <u>la partie</u> $H(.,B)$ <u>est équicontinue sur</u> S ,

<u>admet un prolongement</u> $\tilde{H} \subset \mathcal{F}(\theta S \times \theta T)$ <u>tel que, pour tout</u> $B \in \mathcal{B}$, $\tilde{H}(.,\overline{B}^\theta)$ <u>soit équicontinue sur</u> θS <u>et</u> $\tilde{H}$ <u>équicontinue sur</u> $\theta S \times \overline{B}^\theta$.

<u>Preuve</u> : On commence par prolonger H en $H^2 \subset \mathcal{F}(S \times \theta T)$ qui, d'après (4.8.b) est telle que $H^2(.,\overline{B}^\theta)$ soit équicontinue sur S pour chaque $B \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, pour tout $x \in S$, $H(x,.)$ est équicontinue sur T , donc $H^2(x,.)$ est aussi équicontinue sur θT . Les conditions du lemme (4.8) sont donc rassemblées et le prolongement $H = (H^2)^1$ répond aux conditions exigées.

Donnons immédiatement quelques applications.

COROLLAIRE 1 (4.10). - Soient S et T quelconques. Si la projection p_S est z-fermée alors $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$.

Preuve : Avec $\mathfrak{B} = \{ T \}$. Toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ vérifie les hypothèses de (4.9) d'après (4.4.1), donc se prolonge en une partie équicontinue sur $\theta S \times \theta T$.

COROLLAIRE 2 (4.11). - Soient S quelconque et T pseudocompact. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$.

b) $S \times T$ est C^{∞}-plongé dans $S \times \theta T$.

c) p_S est z-fermée.

d) Pour tout noyau Z de $S \times T$, $p_S(Z)$ est un noyau de S .

Preuve : $a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow d$ d'après (4.7) et $c \Rightarrow a$ d'après (4.10).

En prenant pour $\mathfrak{B}$ la famille des parties bornées de T , on obtient :

COROLLAIRE 3 (4.12). - On suppose que $T'' = \theta T$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout borné B de T et toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$, la partie $H(.,B)$ est équicontinue sur S .

b) Toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ admet un prolongement $\tilde{H} \subset \mathcal{F}(\theta S \times \theta T)$ équicontinu sur chaque $\theta S \times \overline{B}^{\theta}$, B borné quelconque de T .

Deux cas assez généraux se profilent alors :

COROLLAIRE 4 (4.13). - On suppose θT localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$.

b) $S \times T$ est C^{∞}-plongé dans $S \times \theta T$.

c) Pour tout pseudocompact B de T et toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(S \times T)$, la partie $H(.,B)$ est équicontinue sur S .

d) Pour tout pseudocompact B de T et pour tout noyau Z de $S \times T$, $p_S(Z \cap (S \times B))$ est un fermé (resp. un noyau) de S .

Preuve : Il est tout d'abord facile de vérifier que tout compact de θT est contenu dans l'adhérence (dans θT) d'un pseudocompact de T. Ceci implique déjà que T est localement borné, qu'il admet une base de bornés formés de pseudocompacts et que $T'' = \theta T$. On tire de là $c \Rightarrow a$: en effet, toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(S \times T)$ se prolonge en une partie $\tilde{H}$ équicontinue sur chaque $\theta S \times K$, où K est compact quelconque de θT ; alors $\tilde{H}$ est équicontinue sur $\theta S \times \theta T$. La suite est évidente car $a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow d$ d'après (4.7) et $d \Rightarrow c$ avec (4.4).

COROLLAIRE 5 (4.14). - On suppose que S et T sont respectivement distingués dans θS et θT et que $\theta S \times \theta T$ est un k_R-espace. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$.

b) $S \times T$ est C^∞-plongé dans $S \times \theta T$.

c) $S \times T$ est C^∞-plongé dans $\theta S \times T$.

d) Pour toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(S \times T)$ et tout borné B de T la partie $H(.,B)$ est équicontinue sur S.

e) Pour toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(S \times T)$ et tout borné A de S la partie $H(A,.)$ est équicontinue sur T.

Preuve : Dire que T est distingué dans θT, c'est dire que tout compact K de θT est contenu dans l'adhérence $\overline{B}^{\theta}$ d'un borné B de T. On a donc déjà $T''=\theta T$ et $S''= \theta S$. La symétrie sur S et T permet de se contenter de $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow d$. Or, $a \Rightarrow b$, et $b \Rightarrow d$, d'après (4.7). Enfin $d \Rightarrow a$: car, comme précédemment, toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(S \times T)$ se prolonge en une partie $\tilde{H}$ équicontinue sur chaque $\theta S \times K$, K compact quelconque de θT. En particulier $\tilde{H}$ est équicontinue sur chaque compact de $\theta S \times \theta T$, ce qui suffit à montrer que $\tilde{H}$ est équicontinue sur $\theta S \times \theta T$, puisque $\theta S \times \theta T$ est un k_R-espace.

D'où en particulier, une première généralisation intéressante du théorème de Glicksberg-Frolik :

COROLLAIRE 6 (4.15). - Soient S et T deux b_R-espaces hémibornés. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a), (b), (c) et (d) du théorème (3.5).

(b), (c), (d) et (e) du corollaire (4.14).

Enfin, compte-tenu de la proposition (4.4) on obtient une généralisation du théorème de Glicksberg-Frolik plus restrictive mais plus précise sous la forme :

COROLLAIRE 7 (4.16). - *Soient* S *et* T *deux* b_R*-espaces admettant une base dénombrable de bornés qui sont hyperbornés. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a), (b), (c) *et* (d) *du théorème* (3.5)

(b), (c), (d) *et* (e) *du corollaire* (4.14).

f) *Pour tout noyau* Z *de* $S \times T$ *et tout hyperborné* B *de* T, $p_S(Z \cap (S \times B))$ *est un fermé (resp. un noyau) de* S.

g) *Pour tout noyau* Z *de* $S \times T$ *et tout hyperborné* A *de* S, $p_T(Z \cap (A \times T))$ *est un fermé (resp. un noyau) de* T.

5. - *La condition sur les bornés.*

On rappelle ici un théorème de Pupier ([P_1], (3.5.7)) qui généralise un théorème de Frolik sur les espaces pseudocompacts.

THEOREME (5.1), (Frolik-Pupier). - *Soient* A *et* B *deux parties bornées de* S *et* T. *Si* $A \times B$ *est bornée dans* $S \times T$, *alors, pour toute partie équicontinue* $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$, *la partie* $H(.,B)$ *est équicontinue sur* A.

On peut apporter une précision supplémentaire non négligeable :

COROLLAIRE (5.2). - *Soient* $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ *une partie équicontinue,* A *un borné de* S *et* B *un pseudocompact de* T. *Si la partie* $H(A,.)$ *est équicontinue sur* B *(ce qui est le cas, par exemple, si* $A \times B$ *est borné dans* $S \times T$*), alors la partie* $H(.,B)$ *est uniformément équicontinue sur* A *pour la structure uniforme naturelle de* A.

Preuve : Comme en (4.8.b) on prolonge H en $H^1 \subset \mathfrak{F}(\theta S \times T)$ et on vérifie que la partie $H^1(\overline{A}^\theta,.)$ est équicontinue sur B, d'où l'on déduit que H^1 est équicontinue sur $\overline{A}^\theta \times B$. On obtient donc une partie équicontinue sur le produit d'un compact $\overline{A}^\theta$ et d'un pseudocompact B. Mais alors $\overline{A}^\theta \times B$ est pseudocompact, et le théorème de Frolik garantit que la partie $H^1(.,B)$ est équicontinue sur $\overline{A}^\theta$. Par raison de compacité, elle est uniformément équicontinue sur $\overline{A}^\theta$, donc $H(.,B)$ est bien uniformément équicontinue sur A pour la structure uniforme naturelle de A, induite par celle de $\overline{A}^\theta$.

L'intérêt de ce corollaire (et de toute amélioration que l'on pourrait y apporter, par exemple en l'étendant au cas où B est seulement supposé borné) est qu'il permet de relier le théorème de Frolik-Pupier au corollaire (4.12).

THEOREME (5.3). - *On suppose que* S *est un* b_R*-espace et que* T *est distingué dans* θT *et possède une base de bornés formée de parties pseudocompactes. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) *Toute partie équicontinue* $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ *admet un prolongement* $\tilde{H} \subset \mathfrak{F}(\theta S \times \theta T)$ *équicontinu sur chaque* $\theta S \times K$, K *compact quelconque de* θT .

b) *Pour toute partie équicontinue* $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$, *tous bornés* A *de* S *et* B *de* T , *la partie* $H(A,.)$ *est équicontinue sur* B .

c) *Pour toute partie équicontinue* $H \subset \mathcal{C}(S \times T)$ *et tout borné* B *de* T , *la partie* $H(.,B)$ *est équicontinue sur* S .

d) *Pour toute* $f \in C^{\infty}(S \times T)$, *l'application* $x \to f(x,.)$ *est continue de* S *dans* $C_b(T)$.

e) *Pour tout pseudocompact* B *de* T *et tout noyau* Z *de* $S \times T$, $p_S(Z \cap (S \times B))$ *est un fermé (resp. un noyau) de* S .

f) *Le produit de deux bornés quelconques de* S *et* T *est un borné de* $S \times T$.

Preuve : $a \Rightarrow f$: car toute $f \in \mathcal{C}(S \times T)$ admet un prolongement continu sur chaque $\theta S \times \overline{B}^{\theta}$, donc a fortiori borné sur $\overline{A}^{\theta} \times \overline{B}^{\theta}$; ainsi f est bornée sur $A \times B$.

$f \Rightarrow b$: c'est conséquence du théorème de Frolik-Pupier.

$b \Rightarrow c$: d'après (5.2) $H(.,B)$ est uniformément équicontinue sur chaque A borné de S , donc S étant un b_R-espace, $H(.,B)$ est en fait équicontinue sur S .

$c \Leftrightarrow a \Leftrightarrow e \Leftrightarrow d$: ce sont des équivalences déjà vues avec la proposition (4.4).

Comme conséquence, on retrouve le théorème principal de Pupier ([P_1] ; (3.5.10)).

COROLLAIRE 1 (5.4). (Pupier). - *On suppose que* S *est un* b_R*-espace et que* θT *est localement compact. Alors* $\theta(S \times T) = \theta S \times \theta T$ *si et seulement si le produit de deux bornés de* S *et* T *est borné dans* $S \times T$.

Preuve : Il suffit de remarquer que T est distingué dans θT et qu'il admet une base de bornés formée de parties pseudocompactes. On rassemble ensuite (5.3) et le corollaire (4.13).

Dans une autre voie, on obtient :

COROLLAIRE 2 (5.5). - *Soit* S *un* b_R*-espace hémiborné et soit* T *un* b_R*-espace admettant une base dénombrable de bornés qui sont pseudocompacts. Alors*

$\theta(S\times T) = \theta S\times\theta T$ si et seulement si le produit de deux bornés de S et T est borné dans $S\times T$.

La réponse à la question posée dans la remarque 3 consécutive à (3.5), déjà esquissée en (4.15), améliorée en (4.16), va trouver maintenant sa formulation la meilleure (mais est-elle définitive ?), qui donne la généralisation du théorème de Glicksberg-Frolik annoncée dans l'introduction.

THEOREME (5.6). - Soient S et T deux b_R-espaces admettant une base dénombrable de bornés qui sont pseudocompacts. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S\times T) = \theta S\times\theta T$.

b) $\nu(S\times T) = \nu S\times\nu T$.

c) $C_b(S\times T) = C_b(S)\ \hat{\hat{\otimes}}\ C_b(T)$.

d) $M(S\times T) = M(S)\ \hat{\otimes}\ M(T)$.

e_S) Pour toute partie équicontinue $H\subset\mathcal{C}(S\times T)$ et tout borné B de T , la partie $H(.,B)$ est équicontinue sur S (resp. est équicontinue sur chaque borné A de S) .

e_T) Pour toute partie équicontinue $H\subset\mathcal{C}(S\times T)$ et tout borné A de S , la partie $H(A,.)$ est équicontinue sur T (resp. est équicontinue sur chaque borné B de T) .

f_S) Pour tout pseudocompact B de T et tout noyau Z de $S\times T$, $p_S(Z\cap(S\times B))$ est fermé (resp. un noyau) dans S .

f_T) Pour tout pseudocompact A de S et tout noyau Z de $S\times T$, $p_T(Z\cap(A\times T))$ est fermé (resp. un noyau) dans T .

g) Le produit de deux bornés de S et T est borné dans $S\times T$.

Enfin pour terminer, on peut examiner le cas où S et T sont tous deux pseudocompacts et rassembler dans un énoncé global, toutes les équivalences connues de la condition $\beta(S\times T) = \beta S\times\beta T$. On retrouve ainsi le théorème de Glicksberg-Frolik en même temps que la forme qui lui a été donnée par Tamano et Noble.

THEOREME (Glicksberg-Frolik-Tamano-Noble) (5.7). - Soient S et T deux espaces pseudocompacts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(S\times T) = \theta S\times\theta T$.

b) $\nu(S\times T) = \nu S\times\nu T$.

c) $\beta(S\times T) = \beta S\times\beta T$.

d) $C_b(S\times T) = C_b(S)\hat{\hat{\otimes}} C_b(T)$.

e) $C^\infty(S\times T) = C^\infty(S)\hat{\hat{\otimes}} C^\infty(T)$.

f) $M(S\times T) = M(S)\hat{\otimes} M(T)$.

g_S) La projection p_S est z-fermée.

g_T) La projection p_T est z-fermée.

h_S) La projection p_S transforme noyaux de $S\times T$ en noyaux de S .

h_T) La projection p_T transforme noyaux de $S\times T$ en noyaux de T .

i_S) Pour toute partie équicontinue $H\subset \mathcal{C}(S\times T)$ la partie $H(.,T)$ est équicontinue sur S .

i_T) Pour toute partie équicontinue $H\subset\mathcal{C}(S\times T)$, la partie $H(S,.)$ est équicontinue sur T .

j) L'espace produit $S\times T$ est pseudocompact.

Preuve : Il suffit de relier c) et e) au reste.

$a\Rightarrow e$: car alors $\theta(S\times T)$ est compact, donc égal à $\beta(S\times T)$.

$c\Rightarrow e$: car $C(\beta S\times\beta T) = C(\beta S)\hat{\hat{\otimes}} C(\beta T) = C^\infty(S)\hat{\hat{\otimes}} C^\infty(T)$.

$e\Rightarrow c$: car, de toute manière, $C^\infty(S)\hat{\hat{\otimes}} C^\infty(T) = C_b(S)\hat{\hat{\otimes}} C_b(T) \doteq C_c(\theta S\times\theta T) =$
$= C(\beta S\times\beta T)$.

Alors e) implique que toute fonction continue et bornée sur $S\times T$ se prolonge continûment à $\beta S\times\beta T$, d'où c) .

$c\Rightarrow g_S$: car, avec c), toute $f\in C^\infty(S\times T)$ se prolonge continûment à $\beta S\times\beta T$, donc l'ensemble $f(.,T)$ est équicontinu sur S , ce qui ramène à la condition b) de (4.4) et donne par conséquent g_S) avec (4.4.3).

BIBLIOGRAPHIE

[B_1] BUCHWALTER (H.). - Topologies, bornologies et compactologies. Thèse Fac. Sc. Lyon 1968, p. 1-144.

[B_2] BUCHWALTER (H.). - Topologies et compactologies. Publ. Dép. Math. Lyon 6-2, 1969, p. 1-74.

[B_3] BUCHWALTER (H.). - Les bornés d'un espace topologique complètement régulier. Séminaire Choquet, Paris, 1970, exp. 14, p. 1-15.

[C_1] COMFORT (W. W.). - On the Hewitt realcompactification of a product space. Trans. Amer. Math. Soc. 131, 1968, n° 1, p. 107-118.

[F_1] FROLIK (Z.). - The topological product of two pseudocompact spaces. Czech Math. J. 10-85, 1960, p. 339-349.

[G_1] GLICKSBERG (I.). - Stone-Čech compactifications of products. Trans. Amer. Math. Soc. 90, 1959, p. 369-382.

[GJ] GILLMAN (L.), JERISON (M.). - Ring of continuous functions. Van Nostrand N. Y. 1960.

[H_1] HAGER (A. W.). - Projections of zero-sets. Trans. Amer. Math. Soc. 140, 1969, p. 87-94.

[I_1] ISBELL (J. R.). - Uniform spaces. Math. Surveys n° 12, AMS, 1964.

[I_2] ISIWATA (T.). - Mappings and spaces. Pacific J., 20, 1967, n° 3, p. 455-480.

[JB] JOURLIN (M.), BLANCHARD (N.). - La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues. Publ. Dép. Math. Lyon, 6.2, 1969, p. 85-96.

[N_1] NOBLE (N.). - A note on z-closed projections. Proc. Amer. Math. Soc. 23, 1969, n° 1, p. 73-76.

[N_2] NOBLE (N.). - Product with closed projections. Trans. Amer. Math. Soc. 140, 1969, p. 381-391.

[P_1] PUPIER (R.). - Méthodes fonctorielles en topologie générale. Thèse Fac. Sc. Lyon, 1971, p. 1-121.

[T_1] TAMANO (H.). - A note on the pseudocompactness of the product of two spaces. Mem. Col. Sc. Univ. Kyoto, 33, 1960, p. 225-230.

[W_1] WAELBROECK (L.). - Topological vector spaces and algebras. Lectures at the Instituto de Matematica Pura y Applicada. Rio de Janeiro, 1970.

[W_2] WARNER (S.). - The topology of compact convergence on continuous functions spaces. Duke Math. J. 25, 1958, p. 265-282.

Rajouté à la correction des épreuves (Mars 1972) :

[CH] COMFORT (W.W.), HAGER (A.W.).-The projection mapping and other continuous functions on a product space. Math. Scand. 28, 1971, p. 77-90.

[M] MORITA (K.).-Topological completions and M-spaces. Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 10, n° 271, 1970, p. 271-288.

Et pour résumer l'article ici présenté :

[B_4] BUCHWALTER (H.).- Sur le théorème de Glicksberg-Frolik. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, série A, 1971, p. 11-14.

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard (Lyon-I)
69 - Villeurbanne (France)